دانشگاه صنعتی شاهرود

درس ریاضی 1

مدرّس : دکترمغاری

تعریف پیوستگی :

تابع $y=f(x)$ در $x=a$ پیوسته است هرگاه :

۱- $x \in D_f$

مقدار تابع = حدچپ = حدراست

۲- $\lim_{x \to a} f(x)$ موجود باشد .

۳- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

دقت :

مقدار تابع = حد راست <= پیوستگی راست

مقدار تابع = حد چپ <= پیوستگی چپ

انواع ناپیوستگی :
- رفع شدنی
- رفع نشدنی

مقدار تابع ≠ حد چپ = حد راست

حد چپ ≠ حد راست

مثال: مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع در R پیوسته باشد.

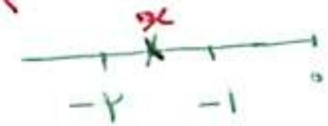
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ab\sqrt{x^2-4x+4}}{x^3-8} & x>2\\[2mm] 3 & x=2\\[2mm] 2[-x]+a & x<2\end{cases}$$

حد چپ: $\lim\limits_{x\to 2^-} 2[-x]+a = 2(-2)+a$

$= -4+a$

$x<2$

$[-x]=-2 \leftarrow -x>-2$



$-۲ \quad -۱$

$|x-۲|$

$$\text{حد راست} \lim_{x\to ۲^+} \frac{۴b\sqrt{(x-۲)^۲}}{(x-۲)(x^۲+۲x+۴)} = \frac{۴b(x-۲)}{(x-۲)(x^۲+۲x+۴)}$$

$$= \frac{۴b}{۱۲} = \frac{b}{۲}$$

پیوستگی : مقدار تابع = حد چپ = حد راست

$$b/۲ = -۴ + a = ۳$$

$$\boxed{b = ۶} \quad \boxed{a = ۷}$$

قضیه: اگر f پیوسته و یک به یک باشد آنگاه f^{-1} نیز پیوسته است.

قضیه: اگر تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه f بر این بازه کراندار است.

قضیه: اگر $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ و g کراندار در همسایگی a ؛

$$\lim_{x \to a} fg = 0$$

$x \to a$

قضیه : فرض کنید f بر بازه $[a,b]$ پیوسته و $f(a) < K < f(b)$ باشد

دراین صورت حداقل یک $c \in (a,b)$ وجود دارد که $f(c) = K$

قضیه : (نتیجه قضیه مقدار میانی)

فرض کنید f بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)f(b) < 0$ دراین صورت

یک $c \in (a,b)$ وجود دارد به طوریکه $f(c)=0$ یعنی f حداقل یک

ریشه در (a,b) دارد .

مثال: تابع $f(x) = x^2 - 5x + 7$ در بازه $[2,5]$ پیوسته است

$f(2) = 1$ و $f(5) = 7$ پس $1 < k < 7$ عددی $c \in [2,5]$ وجود دارد که $f(c) = k$

$f(c_2) = 3$ ✓ $\quad c^2 - 5c + 7 = k = 3 < \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 3 \end{cases}$

مثال: نشان دهید که هر سه جواب معادله $f(x)=x^3-3x+1=0$

در بازه $[-2,2]$ قرار دارند. یعنی f دارای دقیقاً ۳ ریشه در $[-2,2]$ است.

f بر R پیوسته است $\leftarrow$ f بر $[-2,2]$ پیوسته است.

$$\begin{cases} f(-2)=-1<0 \\ f(-1)=3>0 \end{cases} \longrightarrow \exists c_1 \in (-2,-1) \quad f(c_1)=0$$

$$\begin{cases} f(0)=1>0 \\ f(1)=-1<0 \end{cases} \rightarrow \exists\, c_2 \in (0,1) \quad f(c_2)=0$$

$$\begin{cases} f(1)=-1<0 \\ f(2)=3>0 \end{cases} \rightarrow \exists\, c_3 \in (1,2) \quad f(c_3)=0$$

چون بازه های فوق اشتراک ندارند ← ریشه ها متمایزند.

دقت: هر چندجمله‌ای از درجه فرد دارای حداقل یک ریشه در $\mathbb{R}$ است!

چون

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

پس $(a,b) \subseteq (-\infty,+\infty)$ را می‌توان یافت که $f(a)f(b)<0$ پس دارای حداقل یک ریشه هست.

- مقدار A و B را طوری بیابید که g پیوسته باشد.

$$g(x) = \begin{cases} (1+\arctan x)+A & x<0 \\ B & x=0 \\ \dfrac{2\tan x\,(1-\cos x)}{\sqrt{x^2+x+1}-1} & x>0 \end{cases}$$

$$\lim \frac{2\,\frac{\sin x}{\cos x} \cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+x+1}+1}{\sqrt{x^2+x+1}+1} =$$

$$= \frac{2\,\frac{\sin x}{\cos x} \cdot 2\sin^2\frac{x}{2}\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}{x^2+x+1-1} =$$

$$\simeq \frac{2x\left(2 \cdot \frac{x^2}{4}\right)\left(\sqrt{0+1}+1\right)}{x(x+1)} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} 1 + \tan^{-1}(0) + A = 1 + A$$

مقدار تابع = حد چپ = حد راست

$$0 = 1 + A = B \longrightarrow \begin{array}{l} B = 0 \\ A = -1 \end{array}$$

نشان دهید که برای تابع $f(x)=x^7+3x-4$ ، عدد c وجود دارد

به طوری که

$$f(c)+c^7=0$$

$$g(x)=f(x)+x^7 \longrightarrow g(x)=x^7+3x-4+x^7$$

$$g=2x^7+3x-4$$

$$\left.\begin{array}{l} g(0)=-4 \\ g(1)=1 \end{array}\right\} \longrightarrow g(0)\,g(1)<0 \xrightarrow[g(c)=0]{\exists c\in(0,1)}$$

$$g(c)=f(c)+c^7=0$$

نشان دهید معادله $f(x) = x^8 + 8x^6 - 5x^4 - 3 = 0$ حداقل دو ریشه حقیقی قرینه دارد.

تابع در R پیوسته است و $\begin{cases} f(0) = -3 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(0)f(1) < 0 \Rightarrow$ حداقل یک ریشه $c \in (0,1)$ که $f(c) = 0$ از طرفی f تابع زوج است پس

$f(c) = f(-c) = 0 \Rightarrow$ دارای حداقل دو ریشه قرینه دارد.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(\ln x)^{۱۳۹۲}}{x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{H} \lim_{x \to \infty} \frac{۱۳۹۲\,(\ln x)^{۱۳۹۱} \cdot \frac{1}{x}}{1}$$

$$= \cdots = ۱۳۹۲!\, \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = ۱۳۹۲! \cdot ۰ = ۰$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{2x-1} = 1^{\infty}$$ مبهم

کافی است

$$y = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{2x-1}$$

$$\ln y = \lim_{x \to \infty} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{2x-1}$$

$$= \lim_{x \to \infty} (2x-1) \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = \infty \cdot 0$$ مبهم

$$2x-1 = \frac{1}{\frac{1}{2x-1}}$$

$$= \frac{0}{0} = \lim \frac{\ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)}{\frac{1}{2x-1}} = -$$

$$\stackrel{H}{=} \lim \frac{\dfrac{\dfrac{-2}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}}}{\dfrac{-2}{(2x-1)^2}} = \lim \frac{(2x-1)^2}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim \frac{4x^2}{x^2} = 4$$

$$\lim_{x\to\infty} y = e^{4} \longleftarrow \ln y = 4$$ پس

راه دوم :

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e^{1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x-1}=\lim\left(\frac{(x-1)+1+1}{x-1}\right)^{2x-1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{2x-1}$$

$$=\lim\left(\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2}{x-1}}\right)^{2x-1}$$

$$=\lim e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x-2}{x-1}}=e^{4}$$

$$\lim_{x\to 0} x \ln \csc x = \lim_{x\to 0} x \ln\left(\frac{1}{\sin x}\right) = 0 \cdot \infty$$

$$x = \frac{1}{\frac{1}{x}}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\csc x)}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \quad H \Longrightarrow$$

$$(\csc x)' = \csc x \cot x$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\csc x \cot x}{\csc x}}{-1/x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \cot x \cdot x^2 = \lim \frac{x}{\tan x} \cdot x$$

$$= 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x \ln \csc x = x \ln\left(\frac{1}{\sin x}\right) = 0 \cdot \infty$$

$$x = \frac{1}{\frac{1}{x}}$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\csc x)}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \quad H \Longrightarrow$$

$$(\csc x)' = \csc x \cot x$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\csc x \cot x}{\csc x}}{-1/x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \cot x \cdot x^2 = \lim \frac{x}{\tan x} \cdot x$$

$$= 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} (x^2+a^2)^{\frac{1}{x^2}} = \infty^0$$ مبهم

$$\lim y = \lim (x^2+a^2)^{1/x^2} \to \ln y = \lim_{x\to\infty} \ln (x^2+a^2)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}\ln(x^2+a^2) = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{H} \frac{\frac{2x}{x^2+a^2}}{2x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \ln y = 0 \to \lim y = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \to 0} (1+x^2)^{\cot x} = 1^{\infty}$$

$$y = (1+x^2)^{\cot x}$$

$$\lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \ln (1+x^2)^{\cot x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \cot x \ln(1+x^2)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\tan x} \xrightarrow{H}$$

$$= \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{(1+tg^2 x)} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\ln y = 0 \longrightarrow y = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \to 0} x^x = 0^0 \qquad y = x^x$$

$$\lim \ln y = \lim \ln(x^x)$$

$$\lim x \ln x \overset{H}{=} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\ln y = 0 \longrightarrow \boxed{y = e^0 = 1}$$

.۸

تمرین :

۱- حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim_{x \to 0^+} (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$

۲) $\lim_{x \to 0^+} (\sinh x)^{\tan x}$

۳) $\lim_{x \to \infty} \left(\cos \frac{1}{x}\right)^{x^2}$

۴) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}$ (بدون هوپیتال)

ه) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\cos x}{\pi - 2x}$ (بدون هوپیتال)

و) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cos \pi x/2}{1 - x}$ (بدون هوپیتال)

موفق باشید