دانشگاه صنعتی شاهرود

درس ریاضی 1

مدرّس : دکترمغاری

$$\lim_{x \to \pi/۳} \frac{\sin x - \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{x - \pi/۳}$$

$$t \to ٠ \quad ; \quad x = t + \pi/۳ \quad \Leftarrow \quad x - \pi/۳ = t$$

$$\lim_{t \to ٠} \frac{\sin\left(t + \pi/۳\right) - \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{t}$$

$$= \lim_{t \to ٠} \frac{\sin t \cos \pi/۳ + \cos t \sin \pi/۳ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{t}$$

$$= \lim_{t \to ۰} \frac{\frac{۱}{۲}\sin t + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos t - \sqrt{۳}/۲}{t}$$

$$= \lim_{t \to ۰} \frac{۱/۲ \sin t - \frac{\sqrt{۳}}{۲}(۱-\cos t)}{t}$$

$$= \lim_{t \to ۰} \overbrace{\frac{۱/۲ \sin t}{2 \cdot \frac{1}{2} t}}^{1} - \frac{\sqrt{۳}}{۲} \frac{۲ \sin^{۲} \frac{t}{۲}}{t}$$

$$= ۱/۲ - \frac{\sqrt{۳}}{۲} \overbrace{\frac{\sin t/۲}{2 \cdot \frac{1}{2} t}}^{1} \cdot \overbrace{\sin t/۲}^{0} = ۱/۲ - ۰ = ۱/۲$$

$$\lim_{x\to\infty} \sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}$$

$$\sin a - \sin b = ۲\sin\left(\frac{a-b}{۲}\right)\cos\left(\frac{a+b}{۲}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} ۲\sin\left(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{۲}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{۲}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} ۲\sin\left(\frac{۱}{۲(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right) \lim_{x\to\infty}\cos\left(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{۲}\right)$$

$= ۰ \times$ کراندار $= ۰$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{\sin x} = \frac{2i\sin x}{\sin x} = 2i$$

نکته:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^{x} = e^{a}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty} \left[\left(\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{x}$$

$$= \left(\left(e^{1}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right)^{x} = e^{\frac{x}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{\infty}} = e^{0} = 1$$

$$\lim_{x\to ۸} \frac{\sqrt{x+۱}-۳}{\sqrt{۷+\sqrt[۳]{x}}-۳}$$

$$\cdot \frac{\sqrt{x+۱}+۳}{\sqrt{x+۱}+۳} \cdot \frac{\sqrt{۷+\sqrt[۳]{x}}+۳}{\sqrt{۷+\sqrt[۳]{x}}+۳} =$$

$$= \lim_{x \to ۸} \frac{\left((x+۱)-۹\right)\left(\sqrt{۷+\sqrt[۳]{x}}+۳\right)}{\left(۷+\sqrt[۳]{x}-۹\right)\left(\sqrt{x+۱}+۳\right)} =$$

$$= \lim_{x \to ۸} \frac{(x-۸)\left(\sqrt{۷+\sqrt[۳]{x}}+۳\right)}{\left(\sqrt[۳]{x}-۲\right)\left(\sqrt{x+۱}+۳\right)}$$

$$= \frac{\cancel{\left(\sqrt[۳]{x}-۲\right)}\left(\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴\right)\left(\sqrt{۷+\sqrt[۳]{x}}+۳\right)}{\cancel{\left(\sqrt[۳]{x}-۲\right)}\left(\sqrt{x+۱}+۳\right)}$$

$$= \frac{۱۲ \cdot ۶}{۶} = ۱۲$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[x]+[2x]+\cdots+[nx]}{n^2 x}$$

می‌دانیم که

$$x-1<[x]\le x$$
$$2x-1<[2x]\le 2x$$
$$\vdots$$
$$nx-1<[nx]\le nx$$

$$\frac{x-1+2x-1+\cdots nx-1}{n^2x} < \frac{[x]+\cdots+[nx]}{n^2x} \leq \frac{x+2x+\cdots+nx}{n^2x}$$

$$,\ \lim_{n\to\infty} \frac{(1+2+\cdots n)x}{n^2 x} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = 1/2$$

$$,\ \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\cdots n)x - n}{n^2x} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2x}$$

$$\frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{فشردگی}} \lim \frac{[x]+[2x]+\cdots+[nx]}{n^2x} = 1/2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{\cos(\sin x)-1} = \frac{x\sin x}{-(1-\cos(\sin x))}$$

$$= \frac{\frac{x\sin x}{2}\cdot 2}{-2\sin^2\frac{(\sin x)}{2}} = \frac{x}{-\cancel{2}} \cdot \frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin(\sin\frac{x}{2})} \cdot \frac{\frac{2}{\sin x}\cdot \frac{\sin x}{2}}{\cancel{2}\,\sin(\frac{\sin x}{2})}$$

$$= -2$$

$$\lim_{x\to ۲} (x-۲)^۲ \sin \frac{1}{\sqrt[۳]{x-۲}}$$

$$-1 \leq \sin \frac{1}{\sqrt[۳]{x-۲}} \leq 1$$

$$-(x-۲)^۲ \leq (x-۲)^۲ \frac{1}{\sqrt[۳]{x-۲}} \leq (x-۲)^۲$$

$$\lim_{x\to ۲} (x-۲)^۲ = \lim_{x\to ۲} -(x-۲)^۲ = ۰$$

$$\hookrightarrow \lim_{x\to ۲} (x-۲)^۲ \sin \frac{1}{\sqrt[۳]{x-۲}} = ۰$$

$x \to 1$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x+\sqrt{x})-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to \pi/۲} \sec x - \operatorname{tag} x = \lim_{x \to \pi/۲} \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \lim_{x \to \pi/۲} \frac{1 - \sin x}{\cos x} \cdot \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x}$$

$$= \frac{1 - \sin^۲ x}{(\cos x)(1 + \sin x)} = \frac{\cos^۲ x}{\cos x (1 + \sin x)}$$

$$= \lim_{x \to \pi/۲} \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{0}{۲} = 0$$

$$\lim_{x \to \pi/۲} \left(۲x \tan x - \pi \sec x \right) \quad \infty - \infty$$

$$x - \pi/۲ = t$$
$$x = t + \pi/۲$$

$$\lim_{t \to ۰} ۲\left(t + \pi/۲\right)\tan\left(t + \pi/۲\right) - \pi \sec\left(t + \pi/۲\right))$$

داریم $\tan(t + \pi/۲) = -\cot t$ و

$$\cos(t + \pi/۲) = -\sin t$$

$$= \lim_{t \to 0} (2t + \pi)(-\cot t) - \pi \frac{1}{-\sin t}$$

$$\lim_{t \to 0^-} \left(2t \overset{\frac{\cos t}{\sin t}}{\cot t} + \pi \overset{\frac{\cos t}{\sin t}}{\cot t}\right) + \frac{\pi}{\sin t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{-2t \cos t - \pi \cos t + \pi}{\sin t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{-2t \cos t + \pi(1 - \cos t)}{\sin t}$$

$$= \lim_{t \to 0} -2 \overset{1}{\frac{t}{\sin t}} \cdot \frac{\cos t}{1} + \pi \, \frac{2 \overset{3}{\sin} \frac{t}{2}}{\sin t}$$

$$1$$

$$= -2 \cdot 1 \cdot 1 + 0$$

$$= -2$$

دقت

$$\frac{\overset{1}{\dfrac{\sin \frac{t}{2}}{\cancel{\frac{2}{t}}} \cdot \frac{t}{2}}}{\sin t} \quad \sin\frac{t}{2} = \frac{\frac{t}{2}}{\sin t} = \frac{1}{2} \frac{t}{\sin t} \cdot \sin\frac{t}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \times 0 = 0$$

مجانب قائم :

به خط $x=a$ مجانب قائم می‌گوییم هرگاه

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

مجانب افقی : به خط $y=b$ مجانب افقی می‌گوییم هرگاه :

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$$

مجانب مایل : اگر درجه صورت دقیقاً یک واحد از مخرج کسر بیشتر باشد

و صورت کسر بر مخرج کسر تقسیم کنیم و خارج قسمت را به عنوان

مجانب مایل می‌پذیریم .

* $y = \dfrac{1}{x-1}$

$x - 1 = 0 \rightarrow \boxed{x = 1}$

$\lim_{x \to 1} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to \infty} \dfrac{1}{x-1} = 0 \rightarrow \boxed{y = 0}$

$$\rightarrow \quad y = \frac{x^2}{-x^2+4}$$

$$4 - x^2 = 0 \rightarrow \boxed{x = \pm 2}$$ مجانب قائم

چون

$x > 2$

$x^2 > 4$

$-x^2 < -4$

$4 - x^2 < 0$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$x < 2$

$x^2 < 4$

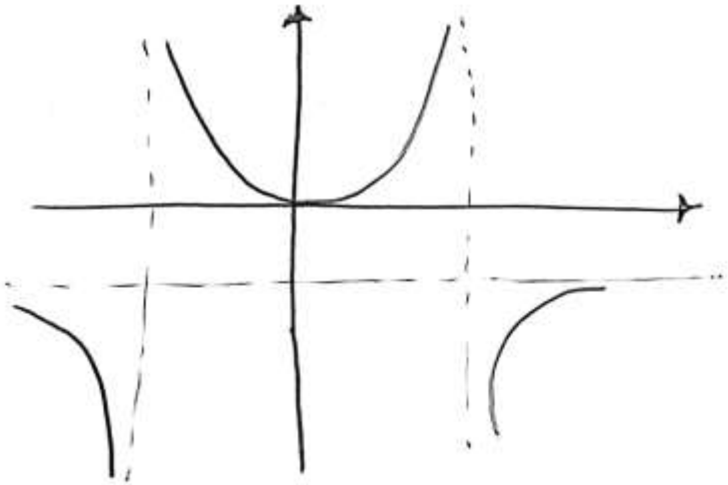
$-x^2 > -4$

$4 - x^2 > 0$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty \,, \quad \lim_{x \to -2^-} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{4-x^2} \simeq \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

$$\boxed{y=-1}$$



$$* \quad y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x}$$

مجانب قائم $x = 0$

مجانب افقی ندارد $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \pm\infty$

مجانب مایل $y = x + 2$