دانشگاه صنعتی شاهرود

درس ریاضی 1

مدرّس : دکترمغاری

حد و پیوستگی:

تعریف: فرض کنید $a, x \in R$ و $\delta > 0$ مجموعه زیر را یک همسایگی باز a می نامیم.

$$N_\delta (a) = \{ x \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \}$$

و اگر نقطه a را از مجموعه حذف کنیم به آن همسایگی باز محذوف a می گوییم.

تعریف ریاضی حد:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

مثال : با کمک تعریف حد نشان دهید

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x+1}{x+2} = \frac{4}{3}$$

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \qquad |x-1|<\delta \to \left|\frac{3x+1}{x+2} - \frac{4}{3}\right| < \varepsilon$$

$$\to \left|\frac{5x-5}{3(x+2)}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{5\,|x-1|}{3\,|x+2|} < \varepsilon \quad \to |x-1| < \frac{3}{5}|x+2|\varepsilon$$

$$|x-۱| < \frac{۳}{۵}|x+۲| = \frac{۳}{۵} \cdot ۲\varepsilon = \frac{۶}{۵}\varepsilon$$

$$\delta = ۱ \longrightarrow |x-۱| < ۱$$

$$-۱ < x-۱ < ۱$$

$$۰ < x < ۲ \longrightarrow ۲ < x+۲ < ۴$$

$$\left.\begin{array}{l} |x-۱| < ۱ \\ |x-۱| < \frac{۶}{۵}\varepsilon \end{array}\right. \Rightarrow \delta = \min\left\{۱, \frac{۶}{۵}\varepsilon\right\}$$

مثال:

$$\lim_{x \to ۲} x^۲ = ۴$$

$$\forall \varepsilon > ۰ \quad \exists \delta > ۰ \quad |x-۲| < \delta \to |x^۲-۴| < \varepsilon$$

$$|x-۲||x+۲| \leq \varepsilon \to |x-۲| \leq \frac{\varepsilon}{|x+۲|} = \frac{\varepsilon}{۵}$$

$$\delta = ۱ \qquad |x-۲| < ۱$$

$$-۱ < x-۲ < ۱$$

$$۱ < x < ۳ \to ۳ < x+۲ < ۵$$

$$\delta = \min\{۱, \varepsilon/۵\} \quad \checkmark$$

۷

مثال : نشان دهید که تابع $f(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ -1 & x<0\end{cases}$ در $x=0$ وجود ندارد.

فرض خلف : فرض کنیم حد در $x=0$ وجود دارد

$$\lim_{x\to 0} f(x) = l$$

$$|f(x)-l| = |-1-l| = |1-l| < \frac{1}{2}$$

$$|f(x)-L| = |1-L| < 1/2$$

$$2 = |1-L+1+L| \leq |1-L| + |L+1| < 1/2 + 1/2 = 1$$

پس $2<1$ ✗ پس فرض خلف باطل است.

قضیه: حد یک تابع در صورت وجود منحصر بفرد است.

قضیه: فرض کنید m و b اعداد ثابتی باشند در این صورت

$$\lim_{x \to a} (mx+b) = ma+b$$

قضیه: فرض کنید $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

قضیه: اگر $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l_1$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l_2$

- $$\lim_{x \to a} (f \pm g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = l_1 \pm l_2$$

- $$\lim_{x \to a} (fg)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = l_1 \cdot l_2$$

- $$\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$$ و $l_2 \neq 0$

قضیه فشردگی (ساندویچ)

هرگاه دو تابع g و h در همسایگی نقطه a تعریف شده باشند و

$$g(x) \le f(x) \le h(x)$$

و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$ $\Leftarrow$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

رفع ابهام در حد:

صور مبهم $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty-\infty$ ، $0\cdot\infty$ ، 0^0 ، ∞^0 ، 1^∞

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}=\frac{0}{0}$$

$$\lim\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}\cdot\frac{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\tan x)-(1+\sin x)}{x^3\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}\right)}$$

$$= \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3\left(\sqrt{1+\operatorname{tg} x} + \sqrt{1+\sin x}\right)} = \frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x \cdot x^3\left(\sqrt{1+\operatorname{tg} x} + \sqrt{1+\sin x}\right)}$$

$$= \lim \frac{\sin x}{x} \cdot \lim \frac{1}{\cos x} \cdot \lim \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \cdot \lim \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} + \sqrt{1+\sin x}}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot 2\left(\overbrace{\frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \cdot \frac{x}{2}}}^{1}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

قضیه :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tag} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$$

$$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$$

چون :

$$\frac{1-\cos x}{2} = \sin^2 \frac{x}{2}$$

مثال:

$$\lim_{x \to 1} (1-x) \tan \frac{\pi}{2} x = 0 \times \infty$$

طرف الست ؛

$$x-1=t \quad \text{یا} \quad 1-x=t$$

$$x \to 1 \qquad t \to 0 \qquad t \to 0$$

$$1-t=x \Longleftarrow \underset{t \to 0}{1-x=t}$$

$$\lim_{t \to 0} t \tan \frac{\pi}{2}(1-t) = \lim_{t \to 0} t \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} t\right)$$

$$\text{tag}\left(\frac{\pi}{۲}-\theta\right)=\text{Cot}\,\theta$$

$$=\lim_{t\to ۰} t \cdot \text{Cot}\,\frac{\pi}{۲}t$$

$$=\lim_{t\to ۰} t \cdot \frac{1}{\tan\frac{\pi}{۲}t}=\lim_{t\to ۰}\frac{\boxed{t\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{\pi}\right)}}{\boxed{\text{tag}\left(\frac{\pi}{۲}t\right)}}$$

$$=$$

$$=\frac{۲}{\pi}\cdot 1=\frac{۲}{\pi}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}$$

کمم $(۲،۳،۴) = ۱۲$

عبارت زیر رادیکال $= u^{\text{کمم}}$ فرض

$$= \lim_{u\to 1} \frac{u^{3}-u^{4}}{u^{6}-1} = \lim_{u\to 1} \frac{u^{3}(1-u)}{(u^{3}-1)(u^{3}+1)}$$

$$= \lim_{u\to 1} \frac{u^{3}(1-u)}{(u-1)(u^{2}+u+1)(u^{3}+1)} =$$

$$= \lim_{u \to 1} \frac{-u^3}{(u^2+u+1)(u^3+1)} = \frac{-1}{6}$$

دقت :

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1+tg x} - \sqrt{1-tg x}} = \frac{0}{0}$$ مبهم

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1+tag x} - \sqrt{1-tag x}} \cdot \frac{\sqrt{1+tag x} + \sqrt{1-tg x}}{\sqrt{1+tog x} + \sqrt{1-tag x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x \left(\sqrt{1+tag x} + \sqrt{1-tg x} \right)}{(1+tg x) - (1-tg x)}$$

$$= \lim_{x \to ۰} \frac{\cancel{\sin x}\left(\sqrt{۱+\operatorname{tg} x}+\sqrt{۱-\operatorname{tg} x}\right)}{۲\,\dfrac{\cancel{\sin x}}{\cos x}}$$

$$= \frac{۲}{\frac{۲}{۱}=۲} = \frac{۲}{۲} = ۱$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x \tan 2x - \tan^2 3x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\tan x \, \tan 2x}{x^2} - \lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 3x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\frac{1}{2} \cdot 2x} - \lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan 3x}{\frac{1}{3} \cdot 3x} \right)^2$$

$$= 1 \times 2 - 9 = 2 - 9 = -7$$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin^2 x}{x-\pi} = \frac{0}{0}$$

$$x-\pi = u$$

$$x = u+\pi$$

$$u \to 0$$

$$\lim_{u\to 0} \frac{\sin^2(u+\pi)}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{(-\sin u)^2}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} \cdot \lim_{u\to 0} \sin u$$

$$= 1 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$$

می‌دانیم که :

$$x-1<[x]\le x$$

$$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x}$$

$$x\left(\frac{1}{x}-1\right)<x\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x}\cdot x$$

$$1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\le 1$$

$$\lim_{x\to 0} 1-x=1-0=1 \qquad \lim_{x\to 0} 1=1 \xRightarrow{\text{فشردگی}}$$

$$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$$

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt[۳]{x+۶۴}-۴}{\sqrt{x+۶۴}-۸}\cdot\frac{\sqrt{x+۶۴}+۸}{\sqrt{x+۶۴}+۸}$$

$$\cdot\frac{\left(\sqrt[۳]{x+۶۴}\right)^۲+۴\sqrt[۳]{x+۶۴}+۱۶}{\left(\sqrt[۳]{x+۶۴}\right)^۲+۴\sqrt[۳]{x+۶۴}+۱۶}=$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\left((x+۶۴)-(۴)^۳\right)\left(\sqrt{x+۶۴}+۸\right)}{\left(\left(\sqrt[۳]{x+۶۴}\right)^۲+۴\sqrt[۳]{x+۶۴}+۱۶\right)\left(x+۶۴-۶۴\right)}$$

$$= \lim_{x \to ۰} \frac{\cancel{x}\left(\sqrt[۳]{x+۶۴} + ۸\right)}{\cancel{x}\left(\left(\sqrt[۳]{x+۶۴}\right)^{۲} + ۴\sqrt[۳]{x+۶۴} + ۱۶\right)}$$

$$= \frac{۱۶}{۱۶+۱۶+۱۶} = \frac{۱۶}{۳ \cdot ۱۶} = \frac{1}{۳}$$

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$$

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$$

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$$

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to 0} -x^2 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{فشردگی}} \quad \lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$$

موفق باشید