دانشگاه صنعتی شاهرود

درس ریاضی 1

مدرّس : دکترمغاری

مثال: اگر داشته باشیم $f(x) = x^2 + 2x + 2$ آنگاه

g را طوری بیابید که: $f \circ g(x) = x^2 - 4x + 5$

حل:

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

$$g^2 + 2g + 2 = x^2 - 4x + 5$$

$$(g+1)^2 + 1 = (x-2)^2 + 1$$

$$g + 1 = \pm (x - 2)$$

$$g = x - 2 - 1 \quad ; \quad g = -x + 2 - 1 = -x + 1$$

$$g = 1 - x \quad ; \quad g = x - 3$$

معادله زیر را حل کنید.

$$z^5 - z^4 + z^3 - z^2 + z - 1 = 0$$

$$\frac{1-(-z)^6}{1-(-z)} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 = 0$$

$$\Leftarrow \quad 1 - (-z)^6 = 0$$

$$z \neq -1 \,,\; z^6 = 1 \quad \Leftarrow 1 - z^6 = 0$$

$$z_k = \operatorname{Cis}\left(\frac{2k\pi + 0}{6}\right) \quad k = 0, 1, 2, \dots, 5$$

- اگر داشته باشیم

$$g(x)=\begin{cases} x^2 & x>0 \\ 1-x & x\le 0 \end{cases}, \quad f(x)=|2-x|$$

$fog(x)$ را بدست آورید.

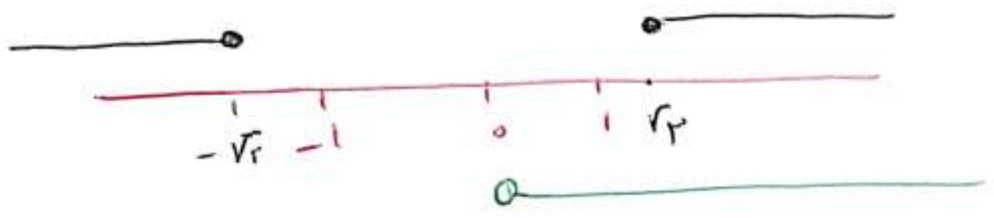
$$f(x)=\begin{cases} -2+x & x\geq 2 \\ 2-x & x<2 \end{cases}$$

		2	
	+	0	−

$$fog(x) = f\left(g(x)\right)=\begin{cases} g-2 & g\geq 2 \\ 2-g & g<2 \end{cases}$$

$> g \geq ۲$ $\quad\quad$ $g = x^{۲} \geq ۲$

$\{ x > ۰$ و $x \geq \sqrt{۲} \;,\; x \leq -\sqrt{۲} \} \Rightarrow x \geq \sqrt{۲}$

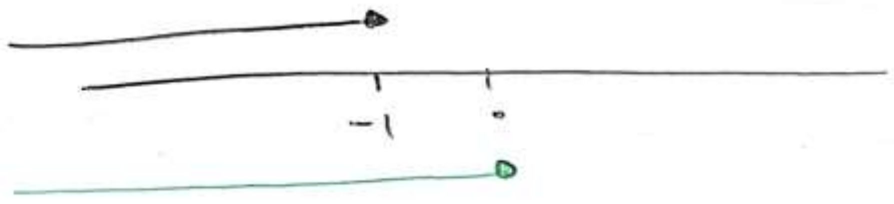


$* \; fog(x) \overset{g \geq ۲}{=\!=} g - ۲ = (x^{۲}) - ۲ \;\; (x \geq \sqrt{۲})$

$g \geq 2 \qquad , \; g = 1-x$

$1 - x \geq 2$

$-x \geq 1 \rightarrow \{x \leq -1 \text{ و } x \leq 0\} = x \leq -1$

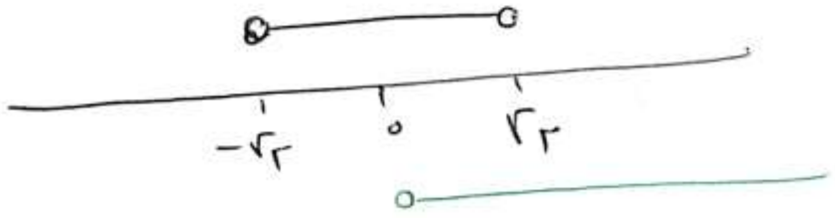


$* \; f \circ g(x) = f(g(x)) \overset{g \geq 2}{=\!=\!=} g - 2$

$= (1-x) - 2 \qquad (x \leq -1)$

$g<۲$ $\quad x^{۲}<۲ \rightarrow |x|<\sqrt{۲}$ و $x>۰$

$\{-\sqrt{۲}<x<\sqrt{۲}$, و $x>۰\} = ۰<x<\sqrt{۲}$

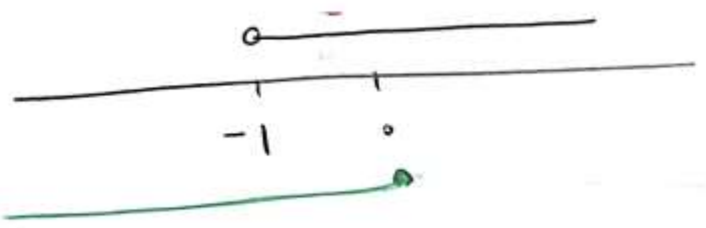


$* \; f\circ g_{(x)} = f(g_{(x)}) \xrightarrow{g<۲} ۲-g$

$۲-(x^{۲}) \quad ۰<x<\sqrt{۲}$

$g<۲ \quad : \quad (1-x) < ۲$

$-x<1 \Rightarrow \{x \geq -1 \ , \ x \leq ۰\} = -1<x<۰$



$* \; f\circ g \overset{g<۲}{=\!=\!=} ۲-g = ۲-(1-x) \quad (-1<x<۰)$

$$fog(x) = \begin{cases} x^{۲} - ۲ & x \geq \sqrt{۲} \\ ۲ - x^{۲} & ۰ < x < \sqrt{۲} \\ (۱ - x) - ۲ & x \leq -۱ \\ ۲ - (۱ - x) & -۱ < x < ۰ \end{cases}$$

- فرض کنید $f(x)=x^3-3$. تابع g را طوری بیابید که

$$f\circ g = g\circ f$$

حل : دقت داریم $g=f^{-1}$ پس کافی وارون f را بیابیم برهمین است که f یک به یک هست.

$$y=x^3-3$$

$$y+3=x^3 \longrightarrow x=\sqrt[3]{y+3} \Rightarrow \boxed{f^{-1}=\sqrt[3]{x+3}}$$

وارون تابع $g(x) = \begin{cases} x & x<1 \\ x^2 & 1 \le x \le 9 \\ 27\sqrt{x} & x>9 \end{cases}$ را بیابید.

باید تک تک ضابطه‌ها را یک به یک بودن چک کنیم ← وارون محاسبه

$$f_1 = x \longrightarrow f_1^{-1} = x$$

از طرفی

$$D_{f^{-1}} = R_f$$

پس

$$\boxed{f_1^{-1} = x \qquad D_{f_1^{-1}} = x<1}$$

$f_2 = x^2 \longrightarrow x = \pm\sqrt{f_2}$

$x_1^2 = x_2^2$ غ ق ق

$f_2^{-1} = +\sqrt{x}$

$x_1 = \pm x_2 \Rightarrow$ ۱-۱ ✓

غ ق ق

برای محاسبه دامنه f_2^{-1} باید برد f_2 را محاسبه کنیم.

$1 \leq x \leq 9$

$1 \leq x^2 \leq 81 \longrightarrow 1 \leq y = f_2 \leq 81$

$\longrightarrow \boxed{f_2^{-1} = \sqrt{x} \quad 1 \leq x \leq 81}$

$$f_{۳} = ۲۷\sqrt{x}$$

$$۲۷\sqrt{x_{۱}} = ۲۷\sqrt{x_{۲}}$$

$$\cancel{(۲۷)^{۲}}\, x_{۱} = \cancel{(۲۷)^{۲}}\, x_{۲} \longrightarrow x_{۱} = x_{۲} \quad ۱-۱$$

$$\left(\frac{f_{۳}}{۲۷}\right)^{۲} = x \longrightarrow f_{۳}^{-۱} = \left(\frac{x}{۲۷}\right)^{۲}$$

برای محاسبه $D_{f_۳^{-1}}$ برد $f_۳$ را می‌یابیم.

$$x > ۹$$

$$\sqrt{x} > ۳$$

$$۲۷\sqrt{x} > ۲۷ \cdot ۳ = ۸۱ \longrightarrow y > ۸۱$$

$$\Rightarrow$$

$$f_۳^{-1} = \left(\frac{x}{۲۷}\right)^۲ \qquad x > ۸۱$$

$$g = \begin{cases} x & x < ۱ \\ \sqrt{x} & ۱ \leq x \leq ۸۱ \\ \left(\frac{x}{۲۷}\right)^۲ & x > ۸۱ \end{cases}$$

تمرین: $f\circ f(x)$ و $f\circ g(x)$ را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} 1+x & x<-2 \\ x^2 & -2\leq x<0 \\ \dfrac{1}{1+x} & x\geq 0 \end{cases}$$

$$g(x)=-\left|\tfrac{1}{2}x-2\right|$$

۲- اگر

$$g(x)=\begin{cases} 5 & x<-1 \\ x^2-3 & x\geq -1 \end{cases} \quad , \quad f(x)=\begin{cases} x & x<1 \\ x^2+1 & x\geq 1 \end{cases}$$

مطلوب است $\dfrac{f}{g}$

۳- ثابت کنید $f(x) = (2x^{\frac{1}{3}}+1)^3 - 4$ معکوس پذیر است و ضابطه معکوس f را بیابید.

۴- فرض کنید f یک تابع معکوس پذیر باشد و $g(x) = 3f(x+1) - 2$ مطلوب است محاسبه g^{-1}.

۵- نشان دهید که هر تابع $f(x)$ با دامنه متقارن را می‌توان به صورت مجموع و تفاضل یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت.

موفق باشید