درس ریاضی 1

مدرّس : دکترمغاری

نشان دهید هرگاه α یک ریشه معادله $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + z_0 = 0$

باشد آن گاه $\bar{\alpha}$ نیز یک ریشه معادله است. $(a_i \in \mathbb{R})$

حل: چون α ریشه است پس داریم؛

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0 = 0$$

از طرفین مزدوج می‌گیریم؛

$$\overline{a_n \alpha^n} + \overline{a_{n-1} \alpha^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 \alpha} + \overline{a_0} = \overline{0}$$

از طرفی می‌دانیم اگر $a \in \mathbb{R} \leftarrow \bar{a} = a$.

$$a_n \bar{\alpha}^n + a_{n-1} \bar{\alpha}^{n-1} + \cdots + a_1 \bar{\alpha} + a_0 = 0$$

پس $\bar{\alpha}$ نیز ریشه معادله است.

مثال : هرگاه $z=i$ یک ریشه معادله $z^4+2z^3+3z^2+2z+2=0$

باشد سایر ریشه ها را بیابید .

حل : چون $z_1=i$ ریشه معادله است و تمامی ضرایب معادله ، اعداد حقیقی اند

پس $z_2=\bar{i}=-i$ نیز ریشه معادله است یعنی این معادله دارای عامل زیر است .

$$(z+i)(z-i)=z^2+1$$

حال برای یافتن عامل دیگر تقسیم زیر را انجام می‌دهیم؛

$$
\begin{array}{l|l}
z^{4}+2z^{3}+3z^{2}+2z+2 & z^{2}+1 \\ \cline{2-2}
-z^{4}\mp z^{2} & z^{2}+2z+2 \\ \cline{1-1}
2z^{3}-z^{2} & \\
-2z^{3}\mp 2z & \\ \cline{1-1}
-z^{2}-\cancel{2z}+\cancel{2z}+2+3z^{2} & \\
2z^{2}+2 & \\
-2z^{2}\mp 2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

پس

$$z^4+2z^3+3z^2+2z+2=(z^2+1)(z^2+2z+2)$$

پس کافی است

$$z^2+2z+2=0$$

$$z=\frac{-2\pm\sqrt{4-4(1)(2)}}{2}=-1\pm i$$

$$\text{مجموعه جواب}=\{i,-i,-1+i,-1-i\}$$

مقادیر a و b را چنان بیابید که $1+i$ ریشه معادله زیر باشد.

$$z^{5} + az^{3} + b = 0$$

$$1+i \equiv \begin{cases} z = re^{i\theta} \\ r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \end{cases} \quad \theta = tg^{-1}\frac{y}{x} = tg^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\left(\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{5} + a\left(\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{3} + b = 0$$

$$4\sqrt{2}\, e^{\frac{5\pi}{4}i} + 2\sqrt{2}\, a\, e^{\frac{3\pi}{4}i} + b = 0$$

$$۴\sqrt{۲}\left(\cos\frac{۵\pi}{۴}+i\sin\frac{۵\pi}{۴}\right)+۲\sqrt{۲}a\left(\cos\frac{۳\pi}{۴}+i\sin\frac{۳\pi}{۴}\right)+b=۰$$

$$۴\sqrt{۲}\left(\frac{-\sqrt{۲}}{۲}-i\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)+۲\sqrt{۲}a\left(\frac{-\sqrt{۲}}{۲}+i\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)+b=۰$$

$$(-۴-۴i)+(-۲a+۲ai)+b=۰$$

$$(-۴-۲a+b)+(-۴+۲a)i=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-۴-۲a+b=۰\\-۴+۲a=۰\end{cases}\longrightarrow\begin{matrix}a=۲\\b=۸\end{matrix}$$

مثال : فرض کنید $1 \neq \omega$ ساریشه n ام یک باشد یعنی $\omega^n = 1$ نشان دهید :

$$\left(1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1}\right) = 0$$

حل :

$$\omega^n = 1 \rightarrow \omega^n - 1 = 0$$

$$(\omega - 1)\left(\omega^{n-1} + \omega^{n-2} + \cdots + \omega + 1\right) = 0$$

طرفین رابر $\omega - 1$ تقسیم کنید

$$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0$$

مثال: معادله $z^{۴} = -۸ + ۸\sqrt{۳}\,i$ حل کنید.

$$z = \sqrt[۴]{-۸ + ۸\sqrt{۳}\,i}$$

$$-۸ + ۸\sqrt{۳}\,i \equiv \begin{cases} z = re^{i\theta} \\ z = \sqrt{۶۴ + ۶۴\cdot ۳} = \sqrt{۶۴(۴)} \\ \quad = ۸(۲) \end{cases}$$

$$r = ۱۶ \quad ; \quad \theta = tg^{-1}\frac{۸\sqrt{۳}}{-۸} \xrightarrow[\text{دوم}]{\text{ناحیه}} \pi - \frac{\pi}{۳}$$

$$z_k = \sqrt[۴]{۱۶}\ \ cis\left(\frac{۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳}}{۴}\right) \qquad k = ۰, ۱, ۲, ۳$$

مثال : اگر z یک عدد مختلط باشد مکان هندسی را مشخص کنید.

الف) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\bar{z}}+1\right)>2$

$$z=x+iy \longrightarrow \bar{z}=x-iy$$

$$\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{x-iy}\cdot\frac{x+iy}{x+iy}=\frac{x+iy}{x^2+y^2}$$

$$\frac{1}{\bar{z}}+1=\frac{x+iy}{x^2+y^2}+1=\frac{x+iy+x^2+y^2}{x^2+y^2}$$

$$\frac{1}{\bar{z}}+1=\frac{(x^2+x+y^2)+iy}{x^2+y^2}$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}+1\right)=\frac{x^2+x+y^2}{x^2+y^2}$$

$$x^2+x+y^2>2x^2+2y^2$$

$$2x^2+2y^2-x^2-x-y^2<0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2<\frac{1}{4}$$

درون دایره $(\frac{1}{2},0)$ ، $r=\frac{1}{2}$

دقت :

$$x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

مثال: ریشه های چهارم

$\left(\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{20}$ بدست آورید.

$1-i \equiv \sqrt{2}e^{-\pi/4\, i} \qquad 1+\sqrt{3}i \equiv 2e^{\frac{\pi}{3}i}$

$$\left(\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{20} = \left(\frac{\sqrt{2}\;e^{-\pi/4\, i}}{2\;e^{\frac{\pi}{3}i}}\right)^{20} = \frac{1}{2^{10}}\left(e^{(-\pi/4-\frac{\pi}{3})i}\right)^{20}$$

$$= \frac{1}{2^{10}}\left(e^{\frac{-7\pi}{12}i}\right)^{20} = \frac{1}{2^{10}}e^{\frac{-35\pi}{3}i}$$

$$W = \sqrt[۴]{\left(\frac{1-i}{1+\sqrt{۳}i}\right)^{۲۰}} = \sqrt[۴]{\frac{1}{۲^{۱۰}} e^{-\frac{۳۵\pi}{۳} i}}$$

$$w_k = \sqrt[۴]{\frac{1}{۲^{۱۰}}}\ \operatorname{cis}\left(\frac{۲k\pi + \left(-\frac{۳۵\pi}{۳}\right)}{۴}\right)$$

$$k = ۰, ۱, ۲, ۳$$

دقت:

$$\sqrt[۴]{\frac{1}{۲^{۱۰}}} = \frac{1}{۴\sqrt{۲}}$$

مثال: ریشه های چهارم $Z = \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{15}$ بدست آورید.

$$1-\sqrt{3}i \equiv 2e^{-\frac{\pi}{3}i} \quad ; \quad 1+\sqrt{3}i \equiv 2e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{10} = \left(\frac{2e^{-\pi/3\, i}}{2e^{\pi/3\, i}}\right)^{10} = \left(e^{-\frac{2\pi}{3}i}\right)^{15}$$

$$= e^{-\frac{20\pi}{3}i}$$

$$w = \sqrt[4]{e^{-\frac{20\pi}{3}i}}$$

$$w_k = \operatorname{cis}\left(\frac{2k\pi + \left(-\frac{20\pi}{3}\right)}{4}\right) \quad k = 0,1,2,3$$

مثال: ثابت کنید:

$$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n = 2^n\cos^n\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}\right)$$

می دانیم:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\hookrightarrow \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$ (فرمول طلایی)

یا

$$1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$$

یا

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=$$

$$\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n=$$

$$\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)^n=$$

دموآور

$$=\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}\right)$$

$$=2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}\right)$$

= طرف راست

✓

معادله زیر را حل کنید

$$(Z^2+i)^2=1$$

دقت : $a^2=b^2 \Rightarrow a=\pm b$

پس:

$$z^2+i=\pm 1 \Rightarrow z^2=\pm 1-i$$

$$z^2=1-i \rightarrow z=\sqrt[2]{1-i}=\sqrt[2]{\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}i}}$$

$$z_k=\sqrt[4]{2}\;cis\left(\frac{2k\pi-\pi/4}{2}\right)\quad k=0,1$$

$$z^2=-1-i \rightarrow z=\sqrt[2]{-1-i}=\sqrt[2]{\sqrt{2}\,e^{\frac{5\pi}{4}i}}$$

$$z_k=\sqrt[4]{2}\;cis\left(\frac{2k\pi+\frac{5\pi}{4}}{2}\right)\quad k=0,1$$

۱

مکان هندسی $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z-2i}\right)=\frac{1}{4}$ بدست آورید.

$$\frac{1}{z-2i}=\frac{1}{x+iy-2i}=\frac{1}{x+(y-2)i}\cdot\frac{x-(y-2)i}{x-(y-2)i}=$$

$$=\frac{x-(y-2)i}{x^2+(y-2)^2}$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z-2i}\right)=\frac{-(y-2)}{x^2+(y-2)^2}$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z-2i}\right)=\frac{1}{4}$$

$$\frac{-(y-2)}{x^2+(y-2)^2}=\frac{1}{4}$$

$$x^2+(y-2)^2=-4(y-2)$$

$$x^2+y^2-4y+4+4y-8=0$$

$$x^2+y^2=4 \longrightarrow r=2$$ و مرکز $\binom{0}{0}$ دایره با

نشان دهید اگر $z_1, z_2, \dots, z_n$ ریشه‌های معادله

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad , \quad a_0 \neq 0$$

آن‌گاه:

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = \frac{-a_1}{a_0}$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

حل :

اگر $z_1, \dots, z_n$ ریشه‌های معادله باشند پس معادله بر عبارت

$$(z-z_n)(z-z_{n-1})\cdots(z-z_2)(z-z_1)$$

بخش پذیر است یعنی :

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n =$$

$$a_0 (z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$$

حال طرف دوم را بسط می‌دهیم :

x_1 و x_2 ریشه

S جمع ریشه

P ضرب ریشه

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$= a_0 \Big(z^n - (z_1+z_2+\cdots+z_n) z^{n-1}$$

$$+ (z_1z_2+\cdots+z_1z_n+\cdots+z_{n-1}z_n) z^{n-2} + \cdots +$$

$$(-1)^n z_1 z_2 \cdots z_n \Big) \longrightarrow$$

دوطرف را متحد می‌گیریم؛

ضرایب z^{n-1} $\quad -a_0(z_1+z_2+\cdots z_n) = a_1$

$$\Rightarrow z_1+z_2+\cdots+z_n = \boxed{\frac{-a_1}{a_0}} \checkmark$$

ضرایب z^0 $\quad a_n = (-1)^n a_0 z_1 z_2 \cdots z_n \Rightarrow z_1 z_2 \cdots z_n = \boxed{\frac{(-1)^n a_n}{a_0}} \checkmark$

معادله زیر را حل کنید و سپس آن را به صورت ضرب دو عامل با ضرایب حقیقی بنویسید.

$$z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100 = 0$$

$$z^4 + 6z^3 + 9z^2 = -100$$

$$(z^2 + 3z)^2 = -100 \Rightarrow z^2 + 3z = \pm 10i$$

$$z^2 + 3z - 10i = 0 \rightarrow z = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(1)(-10i)}}{2}$$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40i}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{(5 + 4i)^2}}{2}$$

$$z = \frac{-3 \pm (5 + 4i)}{2} \quad \begin{cases} z_1 = 1 + 2i \\ z_2 = -4 - 2i \end{cases}$$

از طرفی مزدوج آن‌ها نیز ریشه است $\Leftarrow$

$$\begin{cases} z_3 = 1-2i \\ z_4 = -4+2i \end{cases}$$

$$\underbrace{\big(z-(-4+2i)\big)\big(z-(-4-2i)\big)}_{z^2-2z+5}\underbrace{\big(z-(1-2i)\big)\big(z-(1+2i)\big)}_{z^2+8z+20}=0$$

تمرین :

۱- مکان هندسی نقاط z که در رابطه زیر صدق می‌کند بدست آورید.

$$\mathrm{Re}\left(1+i+\frac{1}{z+1}\right)+\mathrm{Im}\left(2i+\frac{1}{z+1}\right)=4$$

۲- معادله $z^4+2z^2+2=0$ حل کنید.

۳- مکان هندسی را بیابید.

$$|z|<|2z+1|$$

۴- با بررسی ریشه هفتم عدد ۱ نشان دهید؛

$$\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$$

دقت: راهنمایی: نکته: می‌دانیم مجموع ریشه‌های nام عدد ۱ = ۰ .

یعنی $\sum_{k=0}^{6} z_k = 0$

۵- اگر z_1 ، z_2 ریشه‌های مختلط معادله $z^2-2z+4=0$ باشد

محاسبه کنید.

الف) $z_1^n+\frac{1}{z_1^n}$

ب) $z_2^n+\frac{1}{z_2^n}$