دانشگاه صنعتی شاهرود

درس ریاضی 1

مدرّس : دکترمغاری

مثال: مکان هندسی نقاطی را بیابید که در رابطه زیر صدق کند؛

$$|z-1| = |z+i|$$

$$z-1 = x+iy-1 = (x-1)+iy$$

$$|z-1| = \sqrt{(x-1)^2+y^2} \quad (1)$$

$$z+i = x+iy+i = x+(y+1)i$$

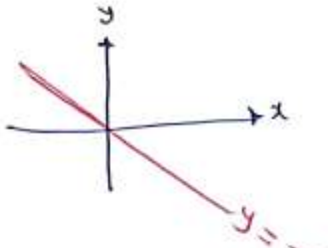
$$|z+i| = \sqrt{x^2+(y+1)^2} \quad (2)$$

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

$$x^2-2x+1+y^2 = x^2+y^2+2y+1$$

$$-2x = 2y$$

$$y = -x$$



مثال: مکان هندسی $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| \leq 2$ را بیابید.

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = \frac{|z-i|}{|z+i|} \leq 2$$

$$|z-i| \leq 2|z+i|$$

$$|x+iy-i| \leq 2|x+iy+i|$$

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2} \leq 2\sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 \leq 4\left(x^2 + y^2 + 2y + 1 \right)$$

$$-3x^2 - 3y^2 - 10y - 3 \leq 0$$

$$x^2 + \underbrace{y^2 + \frac{10}{3}y} + 1 \geq 0$$

$$x^2 + \underbrace{\left(y + \frac{10}{6}\right)^2 - \frac{100}{36}} + 1 \geq 0$$

$$x^2 + \left(y + \frac{10}{6}\right)^2 \geq \frac{64}{36} \rightsquigarrow O \left| \begin{matrix} 0 \\ -\frac{10}{6} \end{matrix} \right. \quad r = \frac{8}{6}$$

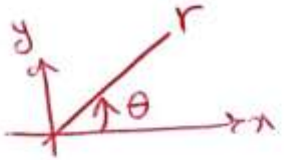
و نقاط خارج دایره

فرم اعداد قطبی :

$$Z = x + iy \equiv \begin{cases} z = r\, e^{i\theta} \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = tg^{-1} \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$



که

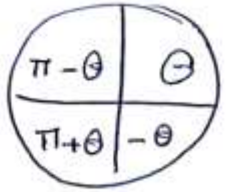
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$= \mathrm{CiS}\,\theta$$

که θ را آرگومان اصلی می‌نویسیم و

$$-\pi < \mathrm{Arg}(z) < \pi$$

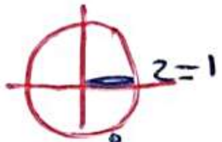
دقت :



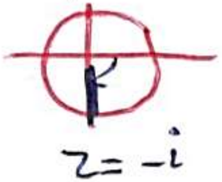
حالت خاص:

$Z=0 \longrightarrow \theta = 0 \ , r = 0$

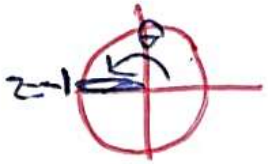
$Z=1 \longrightarrow \theta = 0 \ , r = 1$



$Z=i \longrightarrow \theta = \pi/2 \quad r=1$

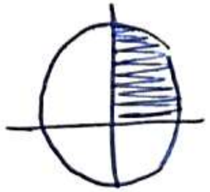


$Z=-i \longrightarrow \theta = -\pi/2 \quad r=1$



$Z=-1 \longrightarrow \theta = \pi \ , r=1$

مثال: فرم قطبی بنویسید.



الف) $z = 1 + i$

$$\begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \end{matrix} \longrightarrow r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = tg^{-1} \frac{y}{x} = tg^{-1} \frac{1}{1} = \pi/4$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4} i}$$

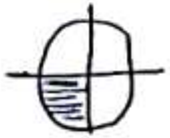
ب) $z = 1 - i$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

$$\theta = tg^{-1}\frac{y}{x} = tg^{-1}\frac{-1}{1} \xrightarrow{\text{ناحیه چهارم}} \theta = -\frac{\pi}{۴}$$

$$r = \sqrt{(1)^{۲} + (-1)^{۲}} = \sqrt{۲}$$

$$z = \sqrt{۲}\, e^{-\frac{\pi}{۴} i}$$

ج) $z = -۱ - i$ $\begin{cases} x = -۱ \\ y = -۱ \end{cases}$



$$r = \sqrt{(-۱)^۲ + (-۱)^۲} = \sqrt{۲}$$

ناحیه سوم پس $\pi + \theta$ یعنی $\theta = \pi + \frac{\pi}{۴}$ می‌شود؛

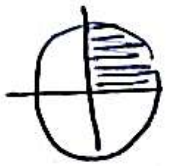
$$z = \sqrt{۲}\; e^{\frac{۵\pi}{۴} i}$$

۲)

$$Z = 1 + i\sqrt{۳}$$

$$r = \sqrt{(\sqrt{۳})^{۲} + 1^{۲}} = ۲$$

$$\theta = tg^{-1}\frac{\sqrt{۳}}{1} = \frac{\pi}{۳}$$



$$Z = ۲\, e^{\frac{\pi}{۳} i}$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} , \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

نکته : فرمول دموآور :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

$$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

مثال: با استفاده از فرمول دموآور بسط $\sin 3\theta$ و $\cos 3\theta$ را بدست آورید.

* با دموآور

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

از طرف سمت چپ عبارت بالا از اتحاد

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

باز می‌کنیم و دقت می‌کنیم که

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \times i = -i$$

سمت چپ عبارت:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3$$

$$= \cos^3\theta + 3\cos^2\theta\,\sin\theta\, i + 3(i\sin\theta)^2\cos\theta$$

$$+ (i\sin\theta)^3$$

$$= \cos^3\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta\, i - 3\sin^2\theta\,\cos\theta$$

$$- \sin^3\theta\; i$$

$$= (\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta) + (3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)i$$

از طرفی سمت راست عبارت * داریم؛

$$\text{طرف چپ} = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = \cos 3\theta \\ 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = \sin 3\theta \end{cases}$$

نشان دهید :

$$(-۱+i)^{۷} = -۸\,(۱+i)$$

$$z = -۱ + i \equiv \begin{cases} x=-۱ \;,\; y=۱ \longrightarrow \\ r = \sqrt{۲} \\ \theta = tg^{-1}(-۱) = \pi - \frac{\pi}{۴} = \frac{۳\pi}{۴} \end{cases}$$

$$(-۱+i)^{۷} = \left(\sqrt{۲}\; e^{\frac{۳\pi}{۴}i}\right)^{۷} = (\sqrt{۲})^{۷}\, e^{\frac{۲۱}{۴}\pi i}$$

$$= (\sqrt{۲})^{۶}(\sqrt{۲})\; e^{\left(۶\pi - ۳\frac{\pi}{۴}\right)i}$$

$$= ۸\sqrt{۲}\; e^{-\frac{۳\pi}{۴}i}$$

$$= ۸\sqrt{۲}\left(\cos\left(-\frac{۳\pi}{۴}i\right)+i\sin\left(-\frac{۳\pi}{۴}\right)\right)$$

$$\cos(-\theta)=\cos\theta \quad , \quad \sin(-\theta)=-\sin\theta$$

$$= ۸\sqrt{۲}\left(\cos\frac{۳\pi}{۴}-i\sin\frac{۳\pi}{۴}\right)$$

$$= ۸\sqrt{۲}\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}-i\,\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=-۸(۱+i) \checkmark$$

ریشه‌های nام یک عدد مختلط :

فرض کنید $Z^n = w$ را می‌خواهیم حل کنیم پس :

$$z = w^{\frac{1}{n}} \quad , \quad w = r_0 e^{i\theta_0}$$

پس :

$$Z_k = r_0^{\frac{1}{n}} \operatorname{cis}\left(\frac{2k\pi + \theta_0}{n} \right)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

دقت : توجه دارید که فاصله نقاط Z_k ریشه‌های معادله $Z^n = w$ تا مبدا برابر $r_0^{\frac{1}{n}}$ است و از طرفی اختلاف آرگومان اصلی دو ریشه متوالی برابر $\frac{2\pi}{n}$ است .

$$\left(\underbrace{\frac{\theta + 2(j+1)\pi}{n}}_{Z_{j+1}} - \underbrace{\frac{\theta + 2j\pi}{n}}_{Z_j} \right)$$

بنابراین Z_kها رئوس یک n ضلعی منتظم در صفحه می باشد.

مثال: معادله $Z^{۴}=۱$ را حل کنید

$$Z=1,\quad \theta=0,\quad r=1 \Rightarrow Z=1e^{i0}$$

$$Z=\sqrt[۴]{1}=\sqrt[۴]{1e^{i0}}$$

$$Z_K=\sqrt[۴]{1}\ \operatorname{Cis}\left(\frac{۲K\pi+0}{۴}\right)$$

$K=0,۱,۲,۳$

$$Z_0=\operatorname{cis}(0)=\cos 0+i\sin 0=1$$

$$Z_1=\operatorname{cis}(\pi/۲)=\cos\pi/۲+i\sin\pi/۲=i$$

$$Z_۲=\operatorname{cis}(\pi)=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

$$Z_۳=\operatorname{cis}(۳\pi/۲)=\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}\right)+i\sin(۳\pi/۲)=-i$$

مثال : معادله $z^4 = -1$ حل کنید.

$$-1 \equiv (1)e^{i\pi}$$

$$z_k = \sqrt[4]{(-1)}$$

$$= \sqrt[4]{e^{i\pi}}$$

$$z_k = \sqrt[4]{1} \quad cis\left(\frac{2k\pi + \pi}{4}\right) \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

⋮ z_k ها را جای‌گذاری و ساده کنید.

مثال: معادله $z^3 = i$ حل کنید.

$$z = \sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{e^{\frac{\pi}{2} i}}$$

$$z_k = cis\left(\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3}\right) \quad k = 0, 1, 2$$

مثال: معادله $z^4 = \frac{1}{1+i}$ حل کنید.

$$z^4 = \frac{1}{1+i} \quad ؛ \quad z = \sqrt[4]{\frac{1}{1+i}}$$

$$\frac{1}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \theta = \tan^{-1} \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -\frac{\pi}{4}$$

$$w = \frac{1}{1+i} \equiv \begin{matrix} r = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \theta = -\pi/4 \end{matrix} \Rightarrow w = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4} i}$$

$$z_k = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{2}} \; \operatorname{cis}\left(\frac{2k\pi + \left(-\frac{\pi}{4}\right)}{4} \right)_{k=0,1,2,3,4,5}$$

نکته :

$$1+q+q^2+\dots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad q\neq 1$$

مثال : معادله $z^3+z^2+z+1=0$ حل کنید.

$$0=1+z+z^2+z^3=\frac{1-(z)^4}{1-(z)}=0 \quad \text{و} \quad z\neq 1$$

پس :

$$\frac{1-z^4}{1-z}=0 \quad \text{و} \quad z\neq 1$$

$$z^4=1 \quad \text{و} \quad z\neq 1$$

$$z_k = \text{cis}\left(\frac{2k\pi + 0}{4}\right) \quad k = 0, 1, 2, 3 \quad \text{و} \ z \neq 1$$

$$z_0 = 1 \ ، \ -1, \ i, \ -i$$

غ ق ق

معادله $z^۲+۱=۰$ را حل کنید.

$$ax^۲+bx+c=۰$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}\ ;\ \Delta=b^۲-۴ac$$

$a=۱$

$b=۰$

$c=۱$

$$z=\frac{۰\pm\sqrt{۰-۴(۱)(۱)}}{۲}=\frac{\pm\sqrt{-۴}}{۲}=\frac{\pm ۲i}{۲}$$

$$=\pm i$$

ب) $Z^4 + Z^2 + 1 = 0$

$Z^2 = t \qquad t^2 + t + 1 = 0$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$$

$Z^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

$\theta = tg^{-1}(-\sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{3}$

$$Z_k = \sqrt[2]{1}\ cis\left(\frac{2k\pi + \frac{2\pi}{3}}{2}\right) \quad k = 0, 1$$

$Z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$r = 1$

$\theta = tg^{-1}(+\sqrt{3}) = \pi + \pi/3$

$$Z_k = \sqrt[2]{1}\ cis\left(\frac{2k\pi + \frac{4\pi}{3}}{2}\right) \quad k = 0, 1$$

مثال: حل کنید

$$1+z^2+z^4+z^6 = z+z^3+z^5 \qquad \bigstar$$

$$1-z+z^2-z^3+z^4-z^5+z^6=0 \qquad \underbrace{q=-z}_{\Uparrow}$$

$$\boxed{1+q+q^2+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad q\neq 1}$$

$$\bigstar = \frac{1-(-z)^7}{1-(-z)} = \frac{1+z^7}{1+z} = 0$$

$$\begin{cases} z^7=-1 \\ z\neq -1 \end{cases} \text{و}$$

$$z = \sqrt[7]{-1} = \sqrt[7]{e^{i\pi}}$$

$$z_k = \sqrt[7]{1}\ \operatorname{cis}\left(\frac{2k\pi + \pi}{7}\right) \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 6$$

و $z \neq -1$ باشد.

حل کنید

$$z^{۴} - ۲z^{۲} + ۴ = ۰$$

$$z^{۲} = t \qquad t^{۲} - ۲t + ۴ = ۰ \qquad \sqrt{-۱} = i$$

$$z^{۲} = t = \frac{+۲ \pm \sqrt{(-۲)^{۲} - ۴(۱)(۴)}}{۲} = ۱ \pm \sqrt{۳}\, i$$

$$z^{۲} = ۱ + \sqrt{۳}\, i \longrightarrow z = \sqrt[۲]{۱ + \sqrt{۳}\, i} = \sqrt[۲]{۲ e^{\frac{\pi}{۳} i}}$$

$$z_k = \sqrt{۲}\, \operatorname{cis}\left(\frac{۲k\pi + \pi/۳}{۲}\right) \qquad k = ۰,۱$$

$$Z^{۲} = ۱ - \sqrt{۳}\, i$$

$$Z = \sqrt[۲]{۱ - \sqrt{۳}\, i} = \sqrt{۲\, e^{-\frac{\pi}{۳} i}}$$

$$Z_k = \sqrt{۲}\, \operatorname{cis}\left(\frac{۲k\pi - \frac{\pi}{۳}}{۲} \right) \quad k = ۰, ۱$$

مثال : حل کنید.

$$z^{۲} + (۲i - ۳)z + ۵ - i = ۰$$

$$z = \frac{-(۲i-۳) \pm \sqrt{(۲i-۳)^{۲} - ۴(۱)(۵-i}}{۲}$$

$$= \frac{-۲i + ۳ \pm \sqrt{-۱۵ - ۸i}}{۲}$$

$$= \frac{-۲i + ۳ \pm \sqrt{۱ - ۱۶ - ۸i}}{۲}$$

$$= \frac{-۲i + ۳ \pm \sqrt{(۱ - ۴i)^۲}}{۲}$$

$$= \frac{-۲i + ۳ \pm (۱ - ۴i)}{۲}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-۲i + ۳ + ۱ - ۴i}{۲} = \dfrac{-۶i + ۴}{۲} = ۲ - ۳i \\ \dfrac{-۲i + ۳ - ۱ + ۴i}{۲} = \dfrac{۲i + ۲}{۲} = ۱ + i \end{cases}$$

مثال:

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}\right)^{10}$$

$$\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} \times \frac{1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{1+2\sqrt{3}\,i+3\overset{-1}{i^2}}{1-3\underset{-1}{i^2}}$$

$$= \frac{-2+2\sqrt{3}\,i}{4} = -1/2 + \frac{\sqrt{3}}{2}i \equiv \begin{cases} r=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1 \\ \theta = tg^{-1}-\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$Z = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$Z^{10} = \cos\left(\frac{20\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{20\pi}{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

راه کوتاهتر :

$$1 + \sqrt{3} i \equiv 2 e^{\frac{\pi}{3} i}$$

$$1 - \sqrt{3} i \equiv 2 e^{-\frac{\pi}{3} i}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{3} i}{1-\sqrt{3} i} = \frac{2e^{\frac{\pi}{3} i}}{2e^{-\frac{\pi}{3} i}} = e^{\frac{2\pi}{3} i}$$

و

مشابه با

فرض کنید a و b ریشه‌های معادله $z^2 - 2z + 4 = 0$ باشند آنگاه :

$$a^n + b^n = 2^{n+1} \cos\frac{n\pi}{3}$$

$$z = \frac{+2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(4)}}{2} = \frac{+2 \pm 2\sqrt{3}\, i}{2} = 1 \pm \sqrt{3} i$$

$$a = 1 + \sqrt{3} i \equiv a = 2e^{\frac{\pi}{3} i}$$

$$b = 1 - \sqrt{3} i \equiv b = 2e^{-\pi/3\, i}$$

$$a^n = ۲^n e^{\frac{n\pi}{۳} i}$$

$$b^n = ۲^n e^{-\frac{n\pi}{۳} i}$$

$$a^n + b^n = ۲^n e^{\frac{n\pi}{۳} i} + ۲^n e^{-\frac{n\pi}{۳} i}$$

$$= ۲^n \left(\cos \frac{n\pi}{۳} + i \sin \frac{n\pi}{۳} \right) + ۲^n \left(\cos \frac{n\pi}{۳} - i \sin \frac{n\pi}{۳} \right)$$

$$= ۲^n \left(۲ \cos \frac{n\pi}{۳} \right)$$

$$= ۲^{n+1} \cos \frac{n\pi}{۳}$$

نکته : اگر z ریشه یک معادله چند جمله‌ای با درجه $n \geq 2$ با ضرایب حقیقی باشد آن‌گاه $\bar{z}$ نیز ریشه آن معادله است.

تمرین :

اعداد a و b را طوری بیابید که $z = 1 - i$ ریشه معادله زیر باشد؛

$$z^7 + az^5 + b = 0$$

تمرین : ریشه های ششم $w = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$ را بیابید.