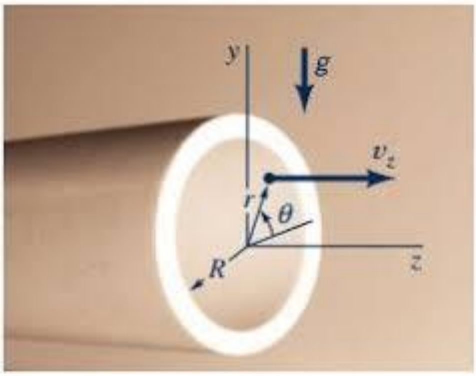
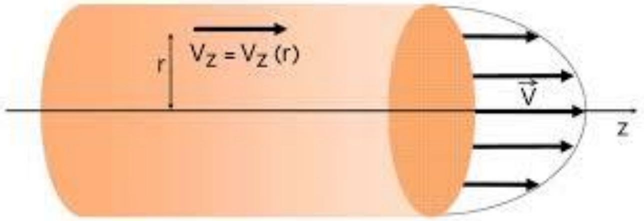
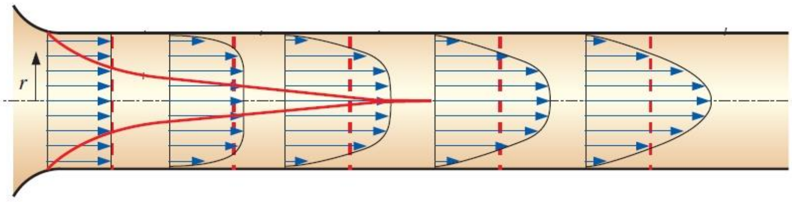
۱) محاسبه توزیع سرعت برای جریان محوری آرام،تراکم ناپذیر،دائمی ،توسعه یافته درون لوله با شعاع r_o تحت گرادیان فشار بدون در نظر گرفتن اثرات گرانش:







$$
\begin{cases}
Continuity: \\
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta)+\frac{\partial}{\partial z}(v_z)=0 \\
The\ Z-momentum\ equation: \\
\frac{\partial v_z}{\partial t}+(V.\nabla)v_z=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+g_z+\nu\nabla^2 v_z
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow
\begin{cases}
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta)+\frac{\partial}{\partial z}(v_z)=0 \\
\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{1}{r}v_\theta\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+g_z+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial v_z}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]
\end{cases}
$$

فرضیات:

- دائمی بودن: $(\frac{\partial}{\partial t}=0)$
- جریان توسعه یافته: $(\frac{\partial v_r}{\partial z}=\frac{\partial v_z}{\partial_z}=\frac{\partial v_\theta}{\partial_z}=0)$

- جریان محوری در جهت Z: $(v_\theta = 0)$ و **تقارن** محوری در جهت θ: $(\frac{\partial}{\partial\theta} = 0)$
- صرف نظر از اثرات گرانش

معادلات به صورت زیر ساده‌سازی می‌شوند:

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\cancel{\frac{\partial}{\partial\theta}}(v_\theta) + \cancel{\frac{\partial}{\partial z}}(v_z) = 0 \\ \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial t}} + \cancel{v_r}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r}v_\theta\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial\theta}} + v_z\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \cancel{g_z} + \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial v_z}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial\theta^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}}\right] \end{cases}$$

ترم‌های باقی‌مانده معادله پیوستگی:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) = 0$$

و همچنین:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_r}{\partial\theta} = 0 \rightarrow v_r \neq v_r(\theta) \\ \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0 \rightarrow v_r \neq v_r(z) \\ \frac{\partial v_r}{\partial t} = 0 \rightarrow v_r \neq v_r(t) \end{cases}$$

v_r تابع متغیرهای z، θ و t نیست ($v_r \neq v_r(z,\theta,t)$) پس $v_r = v_r(r)$

از آنجا که v_r تابعی تک متغیره است:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{dv_r}{dr}$$

$$\frac{d}{dr}(rv_r) = 0 \rightarrow rv_r = c_1 \rightarrow v_r = \frac{c_1}{r}$$

با اعمال شرط عدم لغزش در دیواره لوله برای v_r داریم:

$$at \quad r = r_o \;\Rightarrow\; v_r = \frac{c_1}{r} = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

و در کل جریان:

$$v_r = \frac{c_1}{r} = 0$$

ترم‌های باقی‌مانده معادله مومنتوم:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=\upsilon(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial v_z}{\partial r}))$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial p}{\partial r}=0\\ \dfrac{\partial p}{\partial \theta}=0\end{cases}\rightarrow p\neq p(r,\theta)\rightarrow p=p(z)\rightarrow\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{dp}{dz}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v_z}{\partial z}=0\\ \dfrac{\partial v_z}{\partial \theta}=0\end{cases}\rightarrow v_z\neq v_z(z,\theta)\rightarrow v_z=v_z(r)\rightarrow\frac{\partial v_z}{\partial r}=\frac{dv_z}{dr}$$

v_z تنها تابع r و P تنها تابع z، که هر دو تک متغیره هستند.

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}=\upsilon(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dv_z}{dr}))$$

تساوی فوق زمانی برقرار است که هردو مساوی با عددی ثابت باشند. $(\nu=\frac{\mu}{\rho})$ لذا خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}=Cons.$$

از آنجا که گرادیان فشار عددی ثابت شده است، برای اینکه جریان برگشتی نداشته باشیم و جریان در جهت مثبت محور Z باشد، باید گرادیان فشار عددی منفی باشد.

$$Cons<0$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}=(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dv_z}{dr}))$$

انتگرال‌گیری:

$$\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}\frac{r^2}{2}+c_2=r\frac{dv_z}{dr}\quad\rightarrow\quad\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}\frac{r}{2}+\frac{c_2}{r}=\frac{dv_z}{dr}$$

$$v_z=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}\frac{r^2}{4}+c_2\ln r+c_3$$

شرایط مرزی:

$$at\quad\begin{cases}r=r_o\\ r=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_z=0\\ \dfrac{\partial v_z}{\partial r}=0\end{cases}$$

اعمال شرایط مرزی:

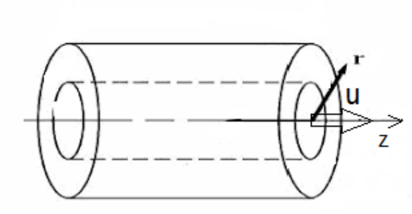
$$\begin{cases} r=0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{dv_z}{dr}=0+c_2=0 \quad \rightarrow \quad c_2=0 \\ r=r_0 \quad \rightarrow \quad v_z=0=\dfrac{r_o^{\,2}}{4\mu}\dfrac{dp}{dz}+c_3 \quad \rightarrow \quad c_3=-\dfrac{r_o^{\,2}}{4\mu}\dfrac{dp}{dz} \end{cases}$$

$$v_z=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}\frac{r^2}{4}-\frac{r_0^{\,2}}{4\mu}\frac{dp}{dz}$$

با مرتب سازی داریم: (می‌بینید که با توجه به گرادیان فشار منفی، توزیع سرعت همواره مثبت می شود)

$$v_z=-\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}\frac{r_0^{\,2}}{4}\left(1-\frac{r^2}{r_0^{\,2}}\right)$$

۲) **محاسبه توزیع سرعت در جریان آرام،تراکم ناپذیر و دائمی بین دو استوانه طویل هم مرکز که استوانه داخلی با شعاع r_i با سرعت u حرکت محوری دارد؛ و شعاع استوانه خارجی r_o است همچنین جریان بدون گرادیان فشار است و از اثرات گرانش نیز صرف نظر شده است.**



$$\begin{cases} Continuity: \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta)+\frac{\partial}{\partial z}(v_z)=0 \\ The\ Z-momentum\ equation: \\ \frac{\partial v_z}{\partial t}+(V.\nabla)v_z=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+g_z+\nu\nabla^2 v_z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta)+\frac{\partial}{\partial z}(v_z)=0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{1}{r}v_\theta\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+g_z+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial v_z}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right] \end{cases}$$

فرضیات:

- دائمی بودن: $(\frac{\partial}{\partial t}=0)$
- طویل بودن استوانه‌ها: $(\frac{\partial}{\partial z}=0)$
- جریان محوری در جهت Z: $(v_\theta=0)$ و **تقارن** محوری در جهت θ: $(\frac{\partial}{\partial \theta}=0)$
- نبود گرادیان فشار
- صرف نظر از اثرات گرانش

معادلات به صورت زیر ساده‌سازی می‌شوند:

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{1}{r}\cancel{\frac{\partial}{\partial \theta}}(v_\theta)+\cancel{\frac{\partial}{\partial z}}(v_z)=0 \\ \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial t}}+\cancel{v_r}\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{1}{r}v_\theta\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial \theta}}+v_z\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}}=-\frac{1}{\rho}\cancel{\frac{\partial p}{\partial z}}+\cancel{g_z}+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial v_z}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}}+\cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}}\right] \end{cases}$$

ترم‌های باقی‌مانده معادله پیوستگی:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)=0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial r}(rv_r)=0$$

و همچنین:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_r}{\partial \theta}=0 \rightarrow v_r \neq v_r(\theta) \\ \dfrac{\partial v_r}{\partial z}=0 \rightarrow v_r \neq v_r(z) \\ \dfrac{\partial v_r}{\partial t}=0 \rightarrow v_r \neq v_r(t) \end{cases}$$

$$v_r \neq v_r(z,\theta,t) \rightarrow v_r = v_r(r)$$

از آنجا که v_r تابعی تک متغیره است:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}=\frac{dv_r}{dr}$$

$$\frac{d}{dr}(rv_r)=0 \rightarrow rv_r = c_1 \rightarrow v_r=\frac{c_1}{r}$$

با توجه به شرط عدم لغزش برای v_r در دیواره لوله بیرونی و یا دیواره لوله داخلی داریم:

$$at \quad r=r_{o,i} \quad \Rightarrow \quad v_r=\frac{c_1}{r}=0 \Rightarrow c_1=0$$

و در کل جریان:

$$v_r=\frac{c_1}{r}=0$$

ترم‌های باقی‌مانده معادله مومنتوم: $v_z=v_z(r)$

$$\upsilon\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right)\right]=0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right)=0$$

با مشتق گیری خواهیم داشت:

$$\frac{d^2v_z}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dv_z}{dr}=0 \quad \rightarrow \quad v_z''+\frac{1}{r}v_z'=0$$

$$r^2\times(v_z''+\frac{1}{r}v_z'=0)$$

$$r^2v_z''+rv_z'=0$$

حل معادله مرتبه دوم همگن با ضریب متغیر (معادله کوشی اویلر) به روش کاهش مرتبه (با استفاده از تغییر متغیر f) و سپس حل معادله مرتبه اول f با استفاده از روش فاکتور انتگرال:

$$\frac{dv_z}{dr}=f$$
$$f'+\frac{1}{r}f=0$$
$$e^{\int\frac{1}{r}dr}=e^{\ln r}=r$$
$$r\times(f'+\frac{1}{r}f)=r\times 0$$
$$rf'+f=0$$
$$\frac{d}{dr}(rf)=0$$
$$rf=c_2$$
$$f=\frac{c_2}{r}$$
$$\frac{dv_z}{dr}=\frac{c_2}{r}$$
$$v_z=c_2\ln r+c_3$$

شرایط مرزی:

$$at\ \begin{cases} r=r_o \\ r=r_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_z=0 \\ v_z=u \end{cases}$$

اعمال شرایط مرزی:

$$\begin{cases} r=r_o \to v_z=0=c_2\ln r_o+c_3 \to c_3=-c_2\ln r_o \\ r=r_i \to v_z=u=c_2\ln r_i+c_3 \to u=c_2(\ln r_i-\ln r_o) \end{cases}$$

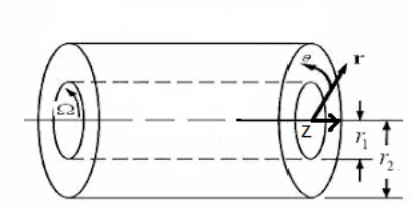
$$\begin{cases} c_2=\dfrac{u}{\ln r_i-\ln r_o}=\dfrac{u}{\ln\dfrac{r_i}{r_o}} \\ c_3=-\dfrac{u}{\ln r_i-\ln r_o}\ln r_o=-\dfrac{u\ln r_o}{\ln\dfrac{r_i}{r_o}} \end{cases}$$

با جایگذاری c_2 و c_3 در v_z، توزیع سرعت به دست خواهد آمد.

$$v_z=\frac{u}{\ln\frac{r_i}{r_o}}\ln r-\frac{u}{\ln\frac{r_i}{r_o}}\ln r_o=\frac{u}{\ln\frac{r_i}{r_o}}(\ln r-\ln r_o)=u\frac{\ln\frac{r}{r_o}}{\ln\frac{r_i}{r_o}}$$

$$v_z = u\frac{\ln\frac{r}{r_o}}{\ln\frac{r_i}{r_o}}$$

۳) محاسبه توزیع سرعت جریان آرام، تراکم‌ناپذیر، دائمی چرخشی بین دو استوانه هم محور و افقی که استوانه داخلی با سرعت زاویه ای ω_1 می چرخد و استوانه بیرونی ثابت است:



$$\begin{cases} Continuity: \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta)+\frac{\partial}{\partial z}(v_z)=0 \\ The\ \ \theta-momentum\ \ equation: \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t}+(V.\nabla)v_\theta+\frac{1}{r}v_r v_\theta=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+g_\theta+\nu(\nabla^2 v_\theta-\frac{v_\theta}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta)+\frac{\partial}{\partial z}(v_z)=0 \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}v_\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}v_r v_\theta=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+g_\theta+ \\ \qquad \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}-\frac{v_\theta}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right] \end{cases}$$

فرضیات:

- دائمی بودن $(\frac{\partial}{\partial t}=0)$
- طویل بودن استوانه‌ها: $(\frac{\partial}{\partial z}=0)$
- جریان **متقارن** محوری که در جهت θ: $(\frac{\partial}{\partial \theta}=0)$
- چرخش خالص $(v_z=v_r=0)$
- نبود گرادیان فشار

معادلات به صورت زیر ساده‌سازی می‌شوند:

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\cancel{v_r})+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta)+\dfrac{\partial}{\partial z}(\cancel{v_z})=0 \\[2ex]
\cancel{\dfrac{\partial v_\theta}{\partial t}}+\cancel{v_r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial r}+\dfrac{1}{r}v_\theta\cancel{\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta}}+\cancel{v_z}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial z}+\dfrac{1}{r}\cancel{v_r}v_\theta=-\dfrac{1}{\rho r}\cancel{\dfrac{\partial p}{\partial \theta}}+\cancel{g_\theta}+ \\[2ex]
\qquad \nu\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial v_\theta}{\partial r})+\dfrac{1}{r^2}\cancel{\dfrac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}}+\cancel{\dfrac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}}-\dfrac{v_\theta}{r^2}+\dfrac{2}{r^2}\cancel{\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta}}\right]
\end{cases}
$$

ترم‌های باقی‌مانده معادله پیوستگی:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}=0 \rightarrow v_\theta \neq v_\theta(\theta)$$

ترم‌های باقی‌مانده معادله مومنتوم: $v_\theta = v_\theta(r)$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dv_\theta}{dr})-\frac{v_\theta}{r^2}=0$$

$$\frac{d^2v_\theta}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dv_\theta}{dr}-\frac{v_\theta}{r^2}=0$$

حل معادله:

$$\frac{d^2v_\theta}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dv_\theta}{dr}-\frac{v_\theta}{r^2}=0$$

$$v_\theta''+\frac{1}{r}v_\theta'-\frac{v_\theta}{r^2}=0$$

$$r^2\times(v_\theta''+\frac{1}{r}v_\theta'-\frac{v_\theta}{r^2}=0)$$

$$r^2v_\theta''+rv_\theta'-v_\theta=0$$

معادله کوشی اویلر است. برای حل این معادله باید به روش نوشتن معادله مشخصه عمل کرد، که معادل مشخصه به صورت زیر است:

$$m(m-1)+m-1=0$$

$$m^2=1$$

$$m=\pm 1$$

$$V_\theta=c_1r^{m_1}+c_2r^{m_2}$$

$$V_\theta=c_1r+\frac{c_2}{r}$$

شرایط مرزی:

$$at\ \begin{cases} r=r_1 \\ r=r_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_\theta=r_1\omega_1 \\ v_\theta=0 \end{cases}$$

اعمال شرایط مرزی:

$$\begin{cases} r = r_1 \rightarrow v_\theta = r_1\omega_1 = c_1 r_1 + \dfrac{c_2}{r_1} \rightarrow \omega_1 = c_1(1-(\dfrac{r_2}{r_1})^2) \\ r = r_2 \rightarrow v_\theta = 0 = c_1 r_2 + \dfrac{c_2}{r_2} \rightarrow c_2 = -c_1 r_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{\omega_1}{(1-(\dfrac{r_2}{r_1})^2)} \\ c_2 = -\dfrac{\omega_1}{(1-(\dfrac{r_2}{r_1})^2)} r_2^2 \end{cases}$$

با جایگذاری c_1 و c_2 در v_θ، توزیع سرعت به دست خواهد آمد.

$$v_\theta = \frac{\omega_1}{(1-(\frac{r_2}{r_1})^2)} r - \frac{\dfrac{\omega_1}{(1-(\frac{r_2}{r_1})^2)} r_2^2}{r}$$