دانشگاه صنعتی شاهرود، مرکز آموزش‌های الکترونیکی

روشها و سیستمهای فازی

جلسه نهم: احتمال، امکان و تئوری شواهد

ارائه دهنده: مرتضی زاهدی

zahedi@ganjineh.co.ir

فهرست مطالب

- تئوری امکان
- احتمال پیشامدهای فازی
  - احتمال یک پیشامد فازی به عنوان عدد اسکالر
  - احتمال یک پیشامد فازی به عنوان مجموعه فازی

تئوری امکان

ابهام:

۱- عدم وضوح

- وضعیت آسمان از لحاظ ابری بودن
- مشاهدات یک متخصص که به صورت حسی و دریافتی حاصل می‌شود

۲- عدم دقت

- مراجعه به دستگاه اندازه‌گیری مربوط به میزان رطوبت هوا
- در مواردی که اصطلاحاً اندازه‌گیری وجود دارد

دریافت پاسخ از اشخاص مختلف $\longleftarrow$ اعطای درجه اعتبار به هر پاسخ در فاصله $[0,1]$

حد پایین: μ_l $\longleftrightarrow$ قابلیت اعتماد

حد بالا: μ_h $\longleftrightarrow$ قابلیت پذیرش

تئوری امکان

X یک $\tilde{F}$ است.

- X نام یک شیء، متغیر یا یک عبارت است.
- $\tilde{F}$ یک مجموعه فازی است با تابع عضویت $\mu_{\tilde{F}}$

مثال:

- X یک عدد صحیح کوچک است
- سعید جوان است

تئوری امکان

تعریف: اگر $\tilde{F}$ مجموعه فازی بر مجموعه مرجع U بوده، دارای تابع عضویت $\mu_{\tilde{F}}$ باشد، آنگاه $\tilde{F}$ یک تحدید فازی بر متغیر X است اگر $\tilde{F}$ روی مقادیری که ممکن است X اختیار کند، به عنوان یک نیروی الاستیک عمل نماید. با فرض نسبت‌دادن مقدار u به متغیر X به صورت:

$$\mathrm{X} = u : \mu_{\tilde{F}}(u)$$

$\mu_{\tilde{F}}(u)$ بیانگر درجه فشار یا نیرویی است که وقتی مقدار u به X نسبت داده شد، توسط $\tilde{F}$ اعمال شده است.

اگر $\tilde{R}(X)$ یک تحدید فازی اعمال‌شده بر X باشد، به صورت $\tilde{R}(X) = \tilde{F}$ بیان خواهد شد که مجموعه فازی $\tilde{F}$ را به تحدید فازی $\tilde{R}(X)$ نسبت می‌دهد.

مثلاً اگر داشته باشیم $A(X) =$ "سن سعید"

عبارت "سعید جوان است" یا به تعبیر بهتر "سن سعید جوان (کم) است« می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\tilde{R}(A(X)) = \tilde{F}$$

تئوری امکان

مثال:

- اگر P عبارت "سعید جوان است" باشد

- "جوان" یک مجموعه فازی بر مجموعه مرجع $U=[0,100]$ باشد

$$\mu_{young}(u)=S_{(u,20,30,40)}$$

$$S(u,\alpha,\beta,\gamma)=\begin{cases}1 & if \quad u\le\alpha \\ 1-2\left(\dfrac{u-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^2 & if \quad \alpha\le u\le\beta \\ 2\left(\dfrac{u-\gamma}{\gamma-\alpha}\right)^2 & if \quad \beta\le u\le\gamma \\ 0 & if \quad u\ge\gamma\end{cases}$$

$\tilde{R}$(Age (سعید)) = جوان

اگر سن سعید ۱۹ سال باشد یعنی درجه امکان عبارت "سعید جوان است" برابر با ۰.۷ است

تئوری امکان

تعریف: اگر $\tilde{F}$ یک مجموعه فازی بر مرجع U بوده که با تابع عضویت $\mu_{\tilde{F}}(u)$ مشخص شده است و X یک متغیر باشد که می‌تواند مقادیر متعلق به مجموعه مرجع U را دریافت کند، همچنین $\tilde{F}$ یک تحدید فازی $\tilde{R}(X)$ باشد که بر متغیر X اعمال شده است آنگاه «متغیر X یک $\tilde{F}$ است" که به صورت $\tilde{R}(X)=\tilde{F}$ بیان می‌شود، یک توزیع امکان را بر تعریف می‌کند که برابر با $\tilde{R}(X)$ فرض می‌شود.

تابع توزیع امکان $\prod_X(u)$ که توزیع امکان $\prod_X$ را مشخص می‌نماید به صورت عددی برابر با تابع عضویت $\mu_{\tilde{F}}(u)$ تعریف می‌شود:

$$\prod_X = \mu_{\tilde{F}}$$

تئوری امکان

مثال: اگر مجموعه مرجع U بیانگر اعداد صحیح مثبت و مجموعه فازی $\tilde{F}$ اعداد صحیح کوچک با تعریف زیر باشد:

$$\tilde{F} = \{(1,1),(2,1),(3,0.8),(4,0.6),(5,0.4),(6,0.2)\}$$

آنگاه عبارت " یک عدد صحیح کوچک است» به صورت توزیع امکان بر X با تعریف زیر بیان می‌شود:

$$\prod_X = \mu_{\tilde{F}}$$

تئوری امکان

- **مثال:** عبارت "زهرا X تخم‌مرغ برای صبحانه می‌خورد" را با $X=\{1,2,...\}$ در نظر می گیریم.

u	1	2	3	4	5	6	7	8
$\prod_X(u)$	1	1	1	1	0.8	0.6	0.4	0.2
$P_x(u)$	0.1	0.8	0.1	0	0	0	0	0

تئوری امکان

تعریف: اگر $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی بر مجموعه مرجع U باشد و یک توزیع امکان Π_X تعریف‌شده بر متغیر X موجود باشد که بتواند مقادیر متعلق به مجموعه مرجع U را دریافت نماید، اندازه گیری امکان یا $\prod_X\left(\tilde{A}\right)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$poss = \left\{\mathrm{X} \quad is \quad \tilde{A}\right\} = \prod_X\left(\tilde{A}\right)$$

$$= \sup_{u\in U} \ \min\left\{\mu_{\tilde{A}}(u), \prod_X(u)\right\}$$

تئوری امکان

مثال: اگر توزیع امکان حاصل از عبارت " Xیک عدد صحیح کوچک مثبت است" در مثال قبل را در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\Pi_X = \{(1,1),(2,1),(3,0.8),(4,0.6),(5,0.4),(6,0.2)\}$$

و اگر مجموعه کلاسیک $A = \{3,4,5\}$ مفروض باشد، اندازه‌گیری امکان $\prod(A)$ برابر خواهد بود با:

$$\prod(A) = max(0.8,0.6,0.4) = 0.8$$

تئوری امکان

اگر Ω یک زیرمجموعه کاملاً امکان‌پذیر از مجموعه مرجع در نظر گرفته شود، خواهیم داشت:

$$g(0) = 0 \quad , \quad g(\Omega) = 1$$

$$A \subseteq B \Rightarrow g(A) \leq g(B)$$

$$g(A \cup B) \geq max\big(g(A), g(B)\big)$$
$$g(A \cap B) \leq min\big(g(A), g(B)\big) \quad for \quad A, B \subseteq \Omega$$

$$\prod(A \cup B) = max\Big(\prod(A), \prod(B)\Big)$$
$$\prod(A \cap B) = min\Big(\prod(A), \prod(B)\Big)$$

$$\prod(A \cup \not\subset A) = \max\Big(\prod(A), \prod(\not\subset A)\Big) = 1$$

تئوری امکان

اندازه گیری ضرورت

N اندازه گیری ضرورت نامیده می‌شود و $N(A)=1$ نشان‌دهنده آن است که درستی A ضروری است و A کاملاً قابل اعتماد می‌باشد. رابطه دوگانی میان اندازه‌گیری امکان و ضرورت به صورت زیر می‌باشد:

$$\prod(A)=1-N(\not\subset A) \qquad \forall A\subseteq\Omega$$

$$min\left(N(A),N(\not\subset A)\right)=0$$

رابطه اندازه ضرورت و امکان:

$$\prod(A)\ge N(A) \qquad \forall A\subseteq\Omega$$

$$N(A)\ge 0\Rightarrow\prod(A)=1$$

$$\prod(A)<1\Rightarrow N(A)=0$$

تئوری امکان

مثال: فرض کنید در یک کلاس ۶ دانش آموز داریم که با توجه به امتحانات گذشته جدول زیر را به عنوان امکان نمرات A تا E برای آنان در نظر گرفته‌ایم:

	نمرات				
دانش آموز	A	B	C	D	E
1	0.8	1	0.7	0	0
2	1	0.8	0.6	0.1	0
3	0.6	0.7	0.9	1	0
4	0	0.8	0.9	0.5	0
5	0	0	0.3	1	0.2
6	0.3	1	0.3	0	0

دانش آموز شماره یک:

$$pls(\{B\}) = \prod(\{B\}) = 1$$

$$pls(\{B\}) = N(\{B\}) = min\{1 - \prod{}_i\} = min\{0.2, 0.3, 1, 1\} = 0.2$$

تئوری امکان

با توجه به معرفی اندازه‌گیری امکان و ضرورت، در مورد آنها خواهیم داشت:

$$N(A)+N(\not\subset A)\leq 1$$

$$\prod(A)+\prod(\not\subset A)\geq 1$$

درحالی‌که در اندازه گیری احتمال کلاسیک داریم:

$$p(A)+p(\not\subset A)=1$$

و با شرط $A\cap B=\varnothing$ خواهیم داشت:

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)$$

در بخش تئوری شواهد در این مورد بیشتر توضیح داده، نشان خواهیم داد:

$$N(A)\leq p(A)\leq \prod(A) \qquad \forall A\subseteq\Omega$$

یعنی اندازه‌های امکان و ضرورت محدودکننده‌های اندازه احتمال می‌باشند.

احتمال پیشامدهای فازی

- امکان، جانشین و جایگزین احتمال نیست بلکه نوع دیگری از ابهام است.

احتمال پیشامدهای فازی:

۱- احتمال وقوع یک پیشامد فازی، یک عدد قطعی است

۲-احتمال وقوع یک رویداد نیز یک مجموعه فازی است.

احتمال یک پیشامد فازی به عنوان عدد اسکالر

در تئوری کلاسیک احتمالات، پیشامد A یک عضو از مجموعه a است که شامل زیرمجموعه‌های فضای نمونه α با میدان a خواهد بود.

یک اندازه احتمال P یک اندازه نرمال‌شده بر فضای قابل اندازه‌گیری (Ω, a) می‌باشد که در آن P، یک تابع با مقدار حقیقی است که به هر پیشامد A یک اندازه احتمال $P(A)$ با شرایط زیر را نسبت می دهد:

۱. $A \in a \qquad p(A) \geq 0$

۲. $p(\Omega) = 1$

۳. اگر $A_i \in a \ , \ i \in I \subset \mathbb{N}$ باشد، به گونه‌ای که A_i ها دوبه دو جدا از هم باشند داریم:

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i)$$

احتمال یک پیشامد فازی به عنوان عدد اسکالر

اگر Ω یک فضای n بعدی اقلیدسی و a یک زیرمجموعه از مجموعه ها با میدان δ در $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه احتمال پیشامد A می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$P(A)=\int_{A} dp$$

اگر $\mu_A(x)$ تابع مشخصه مجموعه صریح A بوده، همچنین $E_p(\mu_A)$ امید ریاضی $\mu_A(x)$ باشد، آنگاه

$$P(A)=\int_{R^n} \mu_A(x)\,dp=E_p(\mu_A)$$

احتمال یک پیشامد فازی به عنوان عدد اسکالر

دانشگاه صنعتی شاهرود
مرکز آموزش های الکترونیکی

تعریف: اگر $\left(\mathbb{R}^n, a, p\right)$ بیانگر یک فضای احتمالی باشد که در آن a شامل زیرمجموعه‌ای از زیرمجموعه‌ها با میدان δ در $\mathbb{R}^n$ بوده، P یک اندازه احتمال بر $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه یک پیشامد فازی در $\mathbb{R}^n$ یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ در $\mathbb{R}^n$ خواهد بود که تابع عضویت آن را با $\mu_{\tilde{A}}(x)$ نمایش می‌دهیم. می توان احتمال پیشامد فازی $\tilde{A}$ را به وسیله انتگرال لبسک- استیلتجز به صورت زیر بیان کرد:

$$P\left(\tilde{A}\right) = \int_{R^n} \mu_A(x)\,dp = E_p\left(\mu_{\tilde{A}}\right)$$

احتمال یک پیشامد فازی به عنوان مجموعه فازی

تعریف: اگر $\tilde{A}$ یک پیشامد فازی و A_α یک برش a از آن باشد ، آنگاه احتمال پیشامد فازی $\tilde{A}$ می‌تواند به صورت زیر تعریف شود:

$$P_Y\left(\tilde{A}\right)=\left\{\left(P\left(A_\alpha\right),\alpha\right)\mid\alpha\in\left[0,1\right]\right\}$$

که می‌توان از آن به "حداقل احتمال پذیرش شرط $\tilde{A}$ با درجه a " تعبیر کرد. حرف Y در عبارت P_Y نشان‌دهنده آن است که P_Y اندازه احتمال ناشی از تعریف یاگر است تا با اندازه احتمال تعریف‌شده توسط زاده (با نماد P) اشتباه نشود.

احتمال یک پیشامد فازی به عنوان مجموعه فازی

تعریف: درستی عبارت "احتمال پیشامد $\tilde{A}$ حداقل برابر w است" به صورت مجموعه فازی $P_Y^*\left(\tilde{A}\right)$ با تابع عضویت زیر بیان می شود:

$$P_Y^*\left(\tilde{A}\right)(w)=\sup_{\alpha}\left\{\alpha \mid P\left(A_\alpha\right)\geq w\right\}, w\in[0,1]$$

باید توجه داشت که در این حالت، مشخص‌کننده ارزش اندازه احتمال برخلاف تعریف قبل که a بود، مقدار w می باشد.

احتمال یک پیشامد فازی به عنوان مجموعه فازی

مکمل مجموعه $\tilde{A}$ را با $\not\subset A$ نمایش می‌دهیم: $\not\subset \tilde{A}=\left\{\left(x,1-\mu_{\tilde{A}}(x)\right) \mid x\in X\right\}$ و مجموعه‌های در سطح a برای $\not\subset \tilde{A}$ با $\left(\not\subset \tilde{A}\right)_\alpha$ بیان می‌شوند. آنگاه

$$P_Y^*\left(\not\subset \tilde{A}\right)(w)=\sup_{\alpha}\left\{\alpha \mid P\left(\not\subset \tilde{A}_\alpha\right)\geq w\right\}, w\in[0,1]$$

می‌تواند به درستی عبارت " احتمال عدم اتفاق پیشامد $\tilde{A}$ حداقل برابر w است" تعبیر شود. درستی "احتمال پیشامد $\tilde{A}$ حداکثر برابر w باشد" را می توان با $\overline{P}_Y^*\left(\tilde{A}\right)(w)$ نمایش داد که رابطه زیر در مورد آن برقرار است:

$$\overline{P}_Y^*\left(\tilde{A}\right)=1-P_Y^*\left(\not\subset \tilde{A}\right)$$

احتمال یک پیشامد فازی به عنوان مجموعه فازی

تعریف ۷-۷: اگر $\overline{P}_Y^*\left(\tilde{A}\right), P_Y^*\left(\tilde{A}\right)$ را با تعریف فوق در نظر گرفته باشیم ، توزیع امکان بیان‌شده با عبارت "احتمال پیشامد $\tilde{A}$ دقیقاً برابر w است" می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\overline{P}_Y\left(\tilde{A}\right)(w) = min\left\{P_Y^*\left(\tilde{A}\right)(w), \overline{P}_Y^*\left(\tilde{A}\right)(w)\right\}$$

احتمال یک پیشامد فازی به عنوان مجموعه فازی

دانشگاه صنعتی شاهرود
مرکز آموزش های الکترونیکی

مثال: پیشامد فازی $\tilde{A}=\{(x_1,1),(x_2,0.7),(x_3,0.6),(x_4,0.2)\}$ با احتمال $p_4=0.2, p_3=0.3, p_2=0.4, p_1=0.1$ برای هر عضو آن تعریف شده است و نیز $p\{x_2\}=0.4$ است، درحالی‌که x_2 با درجه 0.7 به پیشامد $\tilde{A}$ تعلق دارد.

α	A_α	$P(A)$	w	$P_Y^*=\sup\alpha$
$[0,.2]$	$\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$	1	$[.8,1]$	.2
$[.2,.6]$	$\{x_1,x_2,x_3\}$	.8	$[.5,.8]$	.6
$[.6,.7]$	$\{x_1,x_2\}$	.5	$[.1,.5]$	.7
$[.7,1]$	$\{x_1\}$	.1	$[0,.1]$	1

احتمال یک پیشامد فازی به عنوان مجموعه فازی

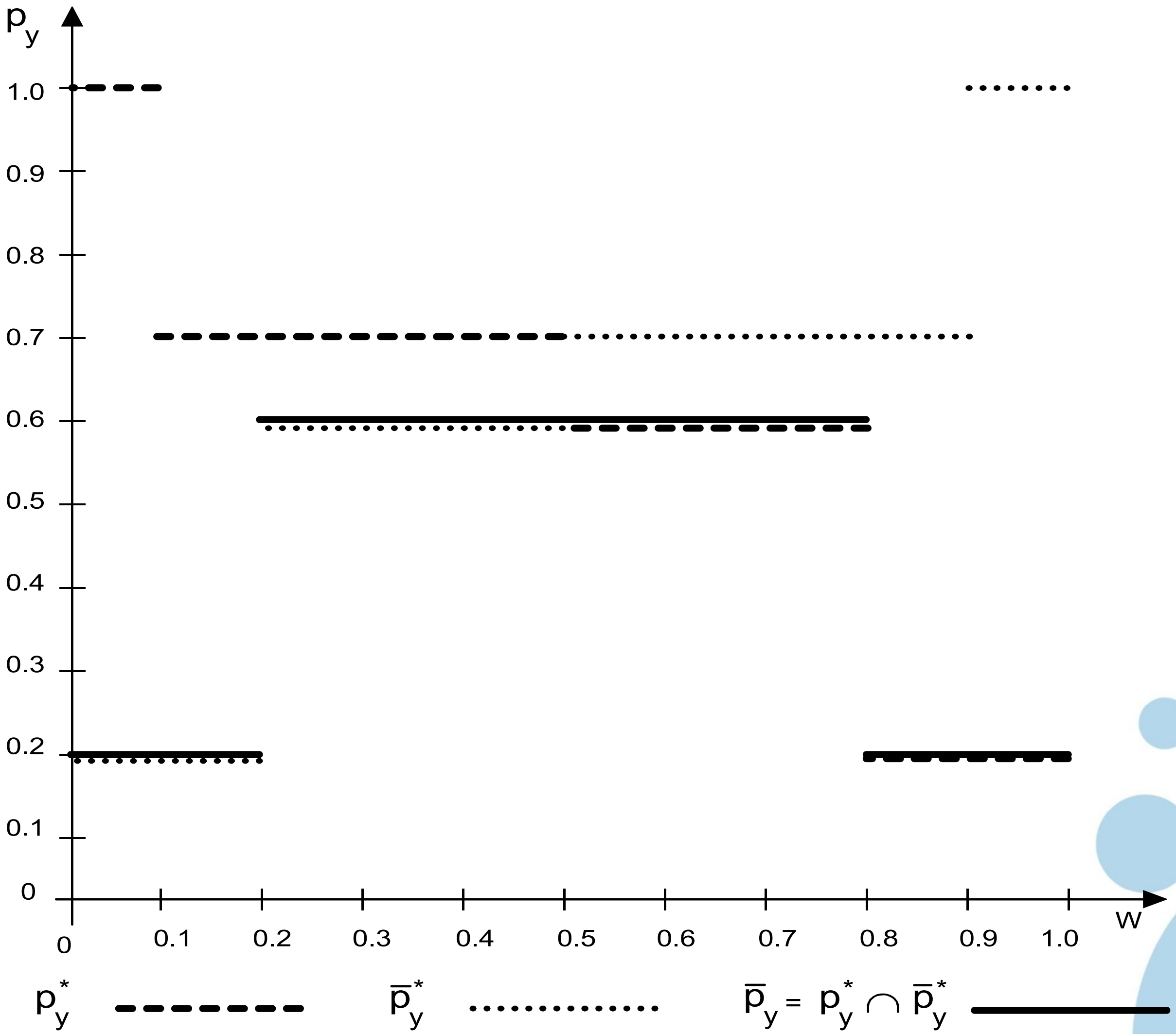
	$(\not\subset \tilde{A})_\alpha$	$P(\not\subset \tilde{A})_\alpha$	w	$\overline{P}_Y^*(\not\subset \tilde{A})$	$\overline{P}_Y^*(\tilde{A}) = 1 - P_Y^*(\not\subset \tilde{A})$
0	$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$	1	$[0.9, 1]$	0	$.1$
$[0, .3]$	$\{x_2, x_3, x_4\}$	$.9$	$[.5, .9]$	$.3$	$.7$
$[.3, .4]$	$\{x_3, x_4\}$	$.5$	$[.2, .5]$	$.4$	$.6$
$[.4, .8]$	$\{x_4\}$	$.2$	$[0, .2]$	$.8$	$.2$
$[.8, 1]$	0	0	0	1	0

احتمال یک پیشامد فازی به عنوان مجموعه فازی

احتمال $\overline{P}_Y\left(\tilde{A}\right)$ را با اشتراک مجموعه‌های فازی $\overline{P}_Y^*\left(\tilde{A}\right),\overline{P}_Y^*\left(\tilde{A}\right)$ (که با عملگر min مدل شده‌اند) می‌توان به دست آورد:

$$\overline{P}_Y\left(\tilde{A}\right)(w)=\begin{cases}0 & if \quad w=0\\ 0.2 & if \quad w=[0,0.2]\\ 0.6 & if \quad w=[0.2,0.8]\\ 0.2 & if \quad w=[0.8,1]\end{cases}$$

احتمال یک پیشامد فازی به عنوان مجموعه فازی



خلاصه مطالب

- تئوری امکان
- احتمال پیشامدهای فازی
  - احتمال یک پیشامد فازی به عنوان عدد اسکالر
  - احتمال یک پیشامد فازی به عنوان مجموعه فازی

با تشکر از توجه شما

ارائه دهنده: مرتضی زاهدی

zahedi@ganjineh.co.ir