فصل 8

منطق فازی و استدلال تقریبی

هدف این فصل معرفی استدلال تقریبی[1] و محتمل می‌باشد. بدین منظور در ابتدا به معرفی متغیرهای زبانی می‌پردازیم تا خواننده با مفهوم تقریب و نیز فازی‌بودن استدلالات نمایان در گفتار انسان آشنا شود. پس از تعریف ریاضی منطق و مروری بر منطقهای قطعی و فازی، استدلال تقریبی را با توجه به آموخته‌های قبلی تبیین می‌کنیم.

8-1: متغیرهای زبانی[2]

واضح است که راه‌رفتن روی یک دیوار با پهنای زیاد، راحت‌تر از راه‌رفتن روی طناب بندبازی است. آیا ممکن است انسان در اعمال و گفتار روزمره روی طناب بندبازی طی‌طریق نماید؟ یعنی به جای آنکه بگوید "من بعدازظهر به آن کوچه می‌آیم." بگوید "من رأس ساعت چهار به آن کوچه می‌آیم." و دقیقاً رأس ساعت چهار در محل قرار حاضر شود؟

با توجه به بینشی که از تئوری مجموعه‌های فازی در مورد اعداد و ارقام دقیق مثل "ساعت چهار" به دست آورده‌ایم، قطعاً پاسخ ما منفی خواهد بود. این مطلب کاملاً صحیح است. انسان به منظور گریز از راه‌رفتن بر لبه تیز و دقیق طناب بندبازی، به دیوار با پهنای زیاد و حتی جاده‌های عریض پناه می‌برد و بجای استفاده از اعداد دقیق و قطعی، از متغیرهای زبانی استفاده می‌کند.

تعریف 8-1: *متغیر زبانی* X با ساختار پنج‌تایی به صورت $\left(x, T(x), U, G, \tilde{M}\right)$ بیان می‌شود. x اسم متغیر است و $T(x)$ یا به صورت ساده T مجموعه ترمهایی می‌باشد که برای x به کار می‌روند. به عبارت دیگر $T(x)$ مجموعه نامهای مقادیر زبانی x می‌باشد و هر عضو این مجموعه یک متغیر فازی X است که روی مجموعه مرجع U تعریف شده است. G گرامر و قانونی است که از هر مقدار x یک ترم زبانی ایجاد می‌نماید و $\tilde{M}$ به صورت یک مجموعه فازی، معنی و مفهوم متغیر زبانی X را بیان می‌کند.

---
[1] Approximate reasoning
[2] Linguistic variable

مثال: اگر یک متغیر زبانی با نشان Age داشته باشیم یعنی مقادیر این نشان را Age بنامیم و مجموعه مرجع $\mathrm{U}=[0,100]$ باشد، ترمهای زبانی که خود، مجموعه‌های فازی هستند می‌توانند به صورت "پیر"، "جوان"، "خیلی پیر" و ... بیان شوند و u سن اشخاص به صورت عددی و تعداد سالهای زندگی‌شان باشد، در این صورت $\tilde{M}(x)$ بیانگر قانون و قاعده‌ای است که مفهوم ترمهای زبانی را به صورت یک مجموعه فازی بیان می‌کند:

$$\tilde{M}(old)=\{(u,\mu_{old}(u))\,|\,u\in[0,100]\}$$

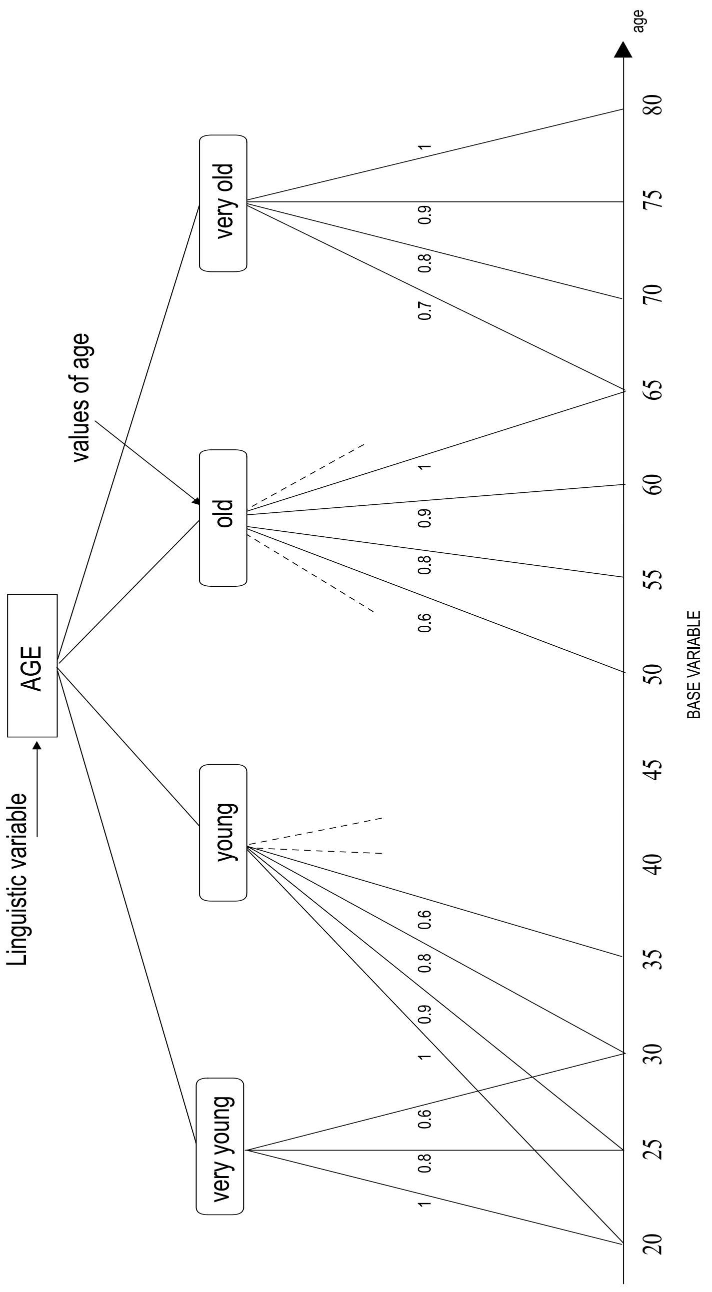
به صورتی‌که:

$$\mu_{old}(u)=\begin{cases} 0 & u\in[0,50] \\ \left(1+\left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1} & u\in[50,100] \end{cases}$$

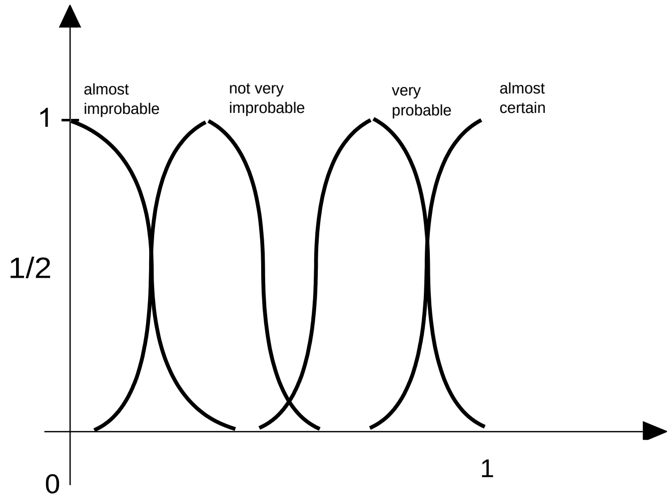
$\mathrm{T}(\mathrm{x})$ مجموعه ترمهای زبانی است که برای متغیر x استفاده می‌شود و $\mathrm{G}(\mathrm{x})$ گرامری می‌باشد که به وسیله آن، به هر x یکی از اعضاء $T(Age)$ را نسبت می‌دهیم. مثلاً:

$$\mathrm{T}(\mathrm{Age})=\{\text{old, very old, not so old, more or less young, quite young, very young}\}$$

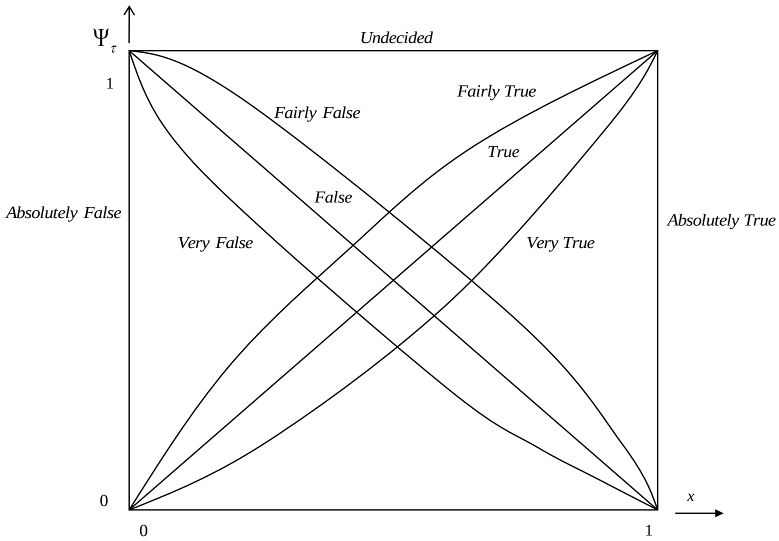
شکل 8-1 بیانگر یک نوع از نمایش متغیر زبانی Age است.



شکل8-1: نمایش متغیر زبانی "AGE"



شکل8-2: متغیر زبانی "احتمال"



شکل8-3: متغیر زبانی "درستی"

دو متغیر زبانی جالب‌توجه در علم احتمالات و تئوری مجموعه‌های فازی، متغیرهای زبانی "احتمال" و "درستی" می‌باشند که در شکلهای 8-2 و 8-3 نشان داده شده‌اند.

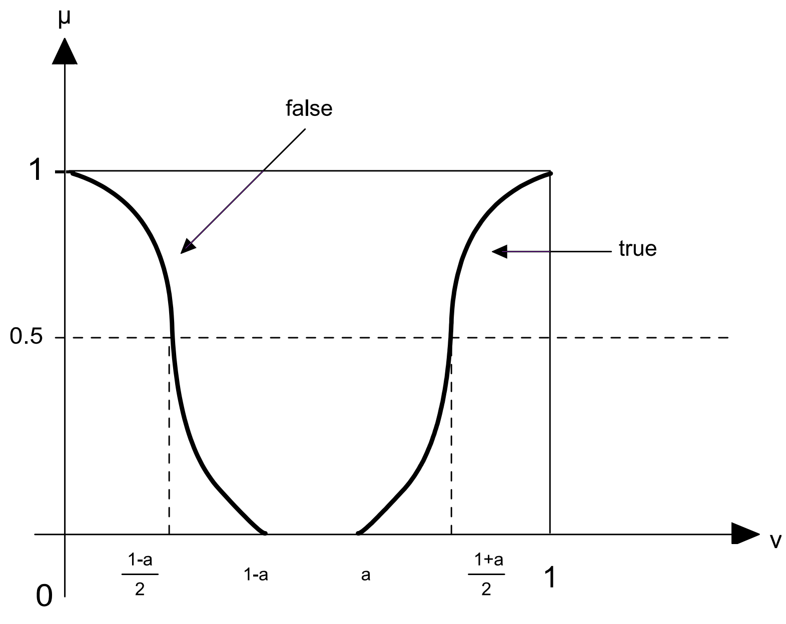
مجموعه ترمها برای متغیر زبانی "درستی" توسط اشخاص مختلفی پیشنهاد شده است. ترمهای زبانی نشان‌داده شده در شکل 8-3 را بالدوین[1] (1979) مطابق زیر پیشنهاد کرد:

$$\mu_{very\ true}(v) = \left(\mu_{true}(v)\right)^2 \qquad v \in [0,1]$$

$$\mu_{\text{fairly}\ true}(v) = \left(\mu_{true}(v)\right)^{1/2} \qquad v \in [0,1]$$

به طریق مشابه می‌توان روابط فوق را برای متغیر زبانی"نادرستی" در نظر گرفت. زاده (1973) تابع عضویت زیر را برای ترم زبانی "درست" پیشنهاد کرد:

$$\mu_{true}(v) = \begin{cases} 0 & for \quad 0 \le v \le a \\ 2.\left(\dfrac{v-a}{1-a}\right)^2 & for \quad a \le v \le \dfrac{a+1}{2} \\ 1-2.\left(\dfrac{v-1}{1-a}\right)^2 & for \quad \dfrac{a+1}{2} \le v \le 1 \end{cases}$$



شکل 8-4: ترمهای "درست" و "نادرست"

[1] Baldwin

که در این رابطه $v=(1+a)/2$ نقطه تقاطع نامیده می‌شود و $a\in[0,1]$ یک پارامتر است که v را تعریف می‌کند و می‌توان آن را صفر قرار داد تا ترم "درست"، تمام محدوده صفر تا یک را (البته با درجات متفاوت) در بر بگیرد.

تابع عضویت "نادرست" به عنوان تصویر آینه‌ای "درست" می‌باشد که به صورت فرمول زیر بیان می‌شود. ترمهای "درست" و "نادرست" در شکل 8-4 نشان داده شده‌اند.

$$\mu_{false}(v)=\mu_{true}(1-v) \qquad 0\le v\le 1$$

می‌توان مجموعه‌های بسیار متنوع و متفاوتی از ترمهای زبانی را برای مسائل فازی در نظر گرفت. به عنوان مثال:

$$T(truth)=\left\{\begin{matrix} true, not\ true, very\ true, not\ very\ true, ..., \\ false, not\ false, very\ false, ..., \\ not\ very\ true\ and\ not\ very\ false, ... \end{matrix}\right\}$$

مجموعه‌های فازی تعریف‌کننده این ترمهای زبانی، با اعمال اصلاح‌گر بر ترمهای پایه‌ای "درست" و "نادرست" قابل تعریف است و لزومی ندارد برای هرکدام از متغیرهای فوق به صورت جداگانه مجموعه فازی جدیدی را تعریف نماییم.

تعریف 8-2: متغیر زبانی x را *ساختاریافته* می‌نامیم اگر مجموعه $T(x)$ و مفهوم $\tilde{M}(x)$ به صورت الگوریتمی قابل مشخص‌شدن باشند. برای متغیرهای زبانی ساختاریافته، $\tilde{M}(x)$ و $T(x)$ می‌توانند به عنوان الگوریتمهایی که ترمهای زبانی را ایجاد می‌کنند و مفهوم هریک را تبیین می‌نمایند، فرض شوند. قبل از آنکه این تعریف را با یک مثال شرح دهیم، باید اصلاح‌گر را تعریف نماییم.

تعریف 8-3: *اصلاح‌گر*[1]، یک اپراتور است که مفهوم یک ترم زبانی و یا در حالت کلی مفهوم یک مجموعه فازی را تغییر می‌دهد و به‌گونه‌ای خاص اصلاح می‌نماید. اگر $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی باشد، اصلاح‌گر m ترم زبانی $\tilde{B}=m(\tilde{A})$ را ایجاد می‌نماید.

مدلهای ریاضی معمول که برای اصلاح‌گرها به کار می‌رود شامل این موارد است:

[1] Modifier (hedge)

1- تمرکز[۱]

$$\mu_{con(\tilde{A})}(u)=\left(\mu_{\tilde{A}}(u)\right)^2$$

2- انبساط[۲]

$$\mu_{dil(\tilde{A})}(u)=\left(\mu_{\tilde{A}}(u)\right)^{\frac{1}{2}}$$

3- تشدید تقابلی[۳]

$$\mu_{int(\tilde{A})}(u)=\begin{cases}2\left(\mu_{\tilde{A}}(u)\right)^2 & for \quad \mu_{\tilde{A}}(u)\in[0,0.5]\\ 1-2\left(1-\mu_{\tilde{A}}(u)\right)^2 & for \quad otherwise\end{cases}$$

معمولاً از اصلاح‌گرهای ریاضی فوق استفاده می‌کنیم تا اصلاح‌گرهای زبانی مورد نظر را به صورت زیر به دست آوریم:

اگر $\tilde{A}$ یک ترم زبانی و یا به عبارت دیگر یک مجموعه فازی باشد آنگاه:

$$very\ \tilde{A}=con\left(\tilde{A}\right)$$

$$more\ or\ less\ \tilde{A}=dil\left(\tilde{A}\right)$$

$$plus\ \tilde{A}=\tilde{A}^{1.25}$$

$$slightly\ \tilde{A}=int\left[plus\ \tilde{A}\ and\ not\left(very\ \tilde{A}\right)\right]$$

که در جمله چهارم and به معنای بدبینانه می‌باشد.

مثال: متغیر زبانی Age که در مثال قبل مطرح شده است را در نظر بگیرید. مجموعه T به صورت زیر فرض می‌شود:

$$T\left(Age\right)=\{old, very\ old, very\ very\ old,...\}$$

مجموعه ترمهای زبانی T می‌تواند به صورت برگشتی با الگوریتم زیر به وجود بیاید:

---

[1] Concentration
[2] Dilation
[3] Contrast intensification

$$T^{i+1} = \{old\} \cup \{very\ T^i\}$$

که مراحل کار مطابق زیر است:

$$T^0 = \varnothing$$
$$T^1 = \{old\}$$
$$T^2 = \{old, very\ old\}$$
$$T^3 = \{old, very\ old, very\ very\ old\}$$

برای به دست آوردن مجموعه ترمهای زبانی کافی است مفهوم old و اصلاح‌گر $very$ را بدانیم تا بتوانیم به وسیله الگوریتم فوق، مجموعه T را به دست آوریم.

اگر $very$ را به معنای تمرکز تعریف کنیم، مفهوم ترمهای مجموعه T با تعریف تابع عضویت ترم old قابل دست‌یابی می‌باشند.

تعریف 8-4: متغیر زبانی که ترمهای آن عبارات بولی به صورت متغیرهای به شکل X_p و $m(X_p)$ باشند را *متغیر زبانی بولی*[1] می‌گوییم که X_p ترم اولیه و m یک اصلاح‌گر می‌باشد که مجموعه فازی حاصل از اعمال m بر X_p است.

مثال: اگر "Age" یک متغیر زبانی بولی با مجموعه ترمهایی به صورت زیر باشد:

$$T(Age) = \begin{Bmatrix} young, not\ young, old, not\ old, very\ young, \\ not\ young\ and\ not\ old, young\ or\ old, ... \end{Bmatrix}$$

اگر "و" (and) با اشتراک، "یا" (or) با اجتماع، "نفی" (Not) با مکمل و "خیلی" $(Very)$ با تمرکز مدل شده باشد، مفهوم ترمهای زبانی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{M}(not\ young) = \neg young$$
$$\tilde{M}(not\ \text{very}\ young) = \neg(young)^2$$
$$\tilde{M}(young\ or\ old) = young \cup old$$

دو مجموعه فازی اولیه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

---
[1] Boolean linguistic variable

$$\tilde{M}\left(young\right)=\left\{\left(u,\mu_{young}\left(u\right)\mid u\in\left[0,100\right]\right)\right\}$$

در صورتی‌که:

$$\mu_{young}\left(u\right)=\begin{cases}1 & u\in\left[0,25\right]\\ \left(1+\left(\frac{u-25}{5}\right)^{2}\right)^{-1} & u\in\left[25,100\right]\end{cases}$$

و

$$\tilde{M}\left(old\right)=\left\{\left(u,\mu_{old}\left(u\right)\mid u\in\left[0,100\right]\right)\right\}$$

$$\mu_{old}\left(u\right)=\begin{cases}0 & u\in\left[0,50\right]\\ \left(1+\left(\frac{u-50}{5}\right)^{2}\right)^{-1} & u\in\left[50,100\right]\end{cases}$$

آنگاه تابع عضویت ترم زبانی "جوان یا پیر" ("*young or old*") به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mu_{young\ or\ old}\left(u\right)=\begin{cases}1 & if\quad u\in\left[0,25\right]\\ \left(1+\left(\frac{u-25}{5}\right)^{2}\right)^{-1} & if\quad u\in\left[25,50\right]\\ max\left\{\left(1+\left(\frac{u-25}{5}\right)^{2}\right)^{-1},\left(1+\left(\frac{u-50}{5}\right)^{2}\right)^{-1}\right\} & if\ u\in\left[50,100\right]\end{cases}$$

2-8: منطقهای مورداستفاده

منطق به عنوان پایه و پشتوانه استدلال از سه قسمت اصلی که به محتوای جملات آن بستگی ندارد، تشکیل می‌شود:

الف: مقادیر درستی

ب: عملگرها

پ: مراحل استدلال

قسمت الف در منطق با توجه به ارزشی که گزاره‌ها می‌توانند داشته باشند تغییرپذیر است. اگر مقادیر درستی جملات دو وضعیتی باشد (ارزش صفر و یک) منطق بولی یا کلاسیک را خواهیم داشت. اگر بتواند سه یا چهار مقدار اختیار کند (درست، نادرست و نمی‌دانم) منطق چندمقداری خواهیم داشت. در صورت گسترش این منطق و تبدیل هریک از ترمهای زبانی گزاره به یک متغیر زبانی، این منطق به منطق فازی تبدیل خواهد شد. در این قسمت به توضیح منطق کلاسیک (بولی) و منطق فازی خواهیم پرداخت.

1-2-8: منطق کلاسیک

در منطق بولی، مقادیر درستی گزاره‌ها فقط شامل یکی از دو مقدار صفر (نادرست) یا یک (درست) می‌باشد. برای گزاره‌هایی که می‌توانند یکی از این دو مقدار را اختیار کنند، عملگرها به وسیله جدولهای درستی تعریف می‌شوند. اگر دو گزاره A, B را در نظر بگیریم، هرکدام از این گزاره‌ها می‌توانند یکی از مقادیر "درست" یا "نادرست" را اختیار کنند. برای این دو گزاره، عملگرها در قالب یک جدول درستی نشان داده می‌شوند.

جدول8-1: جدول درستی برای چند عملگر

A	B	$\wedge$	$\vee$	$x\vee$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$	?
1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0

برای دو گزاره B,A می‌توان $16= 2^{2^2}$ عملگر معرفی کرد که تعدادی از آنها در جدول 8-1 آمده است. عملگرهای اولیه را می‌توان نام‌گذاری کرد. به عنوان مثال عملگرها را با نامهای عطف (و)، فصل (یا)، فصل انحصاری، نتیجه‌گیری و برابری نام نهاد. ولی عملگرهای بعدی را به‌راحتی نمی‌توان نام‌گذاری نمود.

علاوه بر مقادیر درستی و عملگرها، قسمت سوم تشکیل‌دهنده منطق کلاسیک یعنی مراحل استدلال که پایه اصلی آن بر قیاس نهاده شده است را می‌توان در چهار قسمت اصلی زیر بررسی کرد:

1. وضع مقدم:

$$\left(A \wedge \left(A \Rightarrow B\right)\right) \Rightarrow B$$

2. رفع تالی:

$$\left(\left(A \Rightarrow B\right) \wedge \neg B\right) \Rightarrow \neg A$$

3. قیاس منطقی:

$$\left(\left(A \Rightarrow B\right) \wedge \left(B \Rightarrow C\right)\right) \Rightarrow \left(A \Rightarrow C\right)$$

4. عکس نقیض:

$$\left(A \Rightarrow B\right) \Rightarrow \left(\neg B \Rightarrow \neg A\right)$$

تکیه اصلی ما بر قسمت اول می‌باشد که می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد:

اگر گزاره‌های" A درست است" و "اگر A درست باشد آنگاه B درست است" برقرار باشند، می‌توان نتیجه گرفت که" B درست است" یک گزاره درست می‌باشد.

حال به تعریف ریاضی عملگرها و استدلال منطق کلاسیک می‌پردازیم:

اگر $v(A)$ بیانگر درستی عبارت" u، A است" و یا به عبارت دیگر، بیانگر درستی A باشد و فرض کنیم مجموعه‌های کلاسیک به صورت نمایش مجموعه‌های فازی معرفی شوند عملگرهای منطق کلاسیک به صورت زیر قابل تعریف می‌باشند:

نفی $\neg$:

$$v\left(not\ A\right) = 1 - v\left(A\right)$$

فصل $\vee$:

$$v(A\vee B)=v(A)\vee v(B)=max\{v(A),v(B)\}$$

عطف $\wedge$:

$$v(A\wedge B)=v(A)\wedge v(B)=min\{v(A),v(B)\}$$

نتیجه‌گیری $\Rightarrow$:

$$v(A\Rightarrow B)=\neg v(A)\vee v(B)=max\{1-v(A),v(B)\}$$

برابری $\Leftrightarrow$:

$$v(A\Leftrightarrow B)=\begin{cases}1 & if \quad v(A)=v(B)\\ 0 & if \quad v(A)\neq v(B)\end{cases}$$

اگر فرض کنیم عبارتهای Q,P به ترتیب توسط مجموعه‌های B,A بر مجموعه‌های مرجع Y,X تعریف شده باشند، $P\rightarrow Q$ را می‌توان به صورت یک رابطه تعریف کرد:

$$R=(A\times B)\cup(\bar{A}\times Y)\equiv IF \;\; A \;\; then \;\; B$$

می‌توان این رابطه را گسترش داد و به صورت زیر نوشت:

$$R=(A\times B)\cup(\bar{A}\times C)\equiv IF \;\; A \;\; then \;\; B,else \;\; C$$

در معرفی استدلال منطق کلاسیک، به وضع مقدم اکتفا می‌کنیم. وضع مقدم یک ابزار برای استدلال و نتیجه‌گیری در سیستمهای قاعده – پایه می‌باشد. فرض کنید یک قاعده به صورت $if \;\; A \;\; then \;\; B$ تعریف شده باشد که A یک مجموعه فازی بر مجموعه مرجع X و B یک مجموعه بر مجموعه مرجع Y باشد. همان‌طورکه گفته شد این قاعده توسط رابطه $R=(A\times B)\cup(\bar{A}\times Y)$ قابل نمایش است. حال اگر پیش‌فرض ما مجموعه A' باشد واضح است که B' به صورت زیر قابل استنتاج است:

$$B'=A'OR=A'O(A\times B)\cup(\bar{A}\times Y)$$

که O بیانگر عمل ترکیب می‌باشد.

همچنین وضع مقدم می‌تواند برای قانون $if \;\; A \;\; then \;\; B \;\; else \;\; C$ نیز به کار رود. همان‌طورکه گفته شد این قانون را می‌توان به صورت رابطه $R=(A\times B)\cup(\bar{A}\times C)$ بیان کرد. حال اگر مجموعه A' به عنوان پیش‌فرض باشد، یکی از سه وضعیت زیر اتفاق می‌افتد:

$$if \quad A' \subset A \quad then \quad y = B$$
$$if \quad A' \subset \bar{A} \quad then \quad y = C$$
$$if \quad A' \cap A \neq \varnothing, A' \cap \bar{A} \neq \varnothing \; then \quad y = B \cup C$$

مثال: دو مجموعه مرجع $X = \{1,2,3,4\}$, $Y = \{1,2,3,4,5,6\}$را برای یک مبدل حرارتی در نظر می‌گیریم که X مجموعه مرجع دماهای نرمال‌شده و Y مجموعه مرجع فشارهای نرمال‌شده می‌باشد. مجموعه‌های B,A به ترتیب بر مجموعه‌های مرجع Y,X به صورت $A = \{2,3\}$, $B = \{3,4\}$ تعریف می‌شوند که می‌توان آنها را به شکل زیر نمایش داد:

$$A = \left\{\tfrac{0}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{0}{4}\right\}$$
$$B = \left\{\tfrac{0}{1} + \tfrac{0}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{0}{5} + \tfrac{0}{6}\right\}$$

قانون $if \;\; A \;\; then \;\; B$ یعنی اگر دما یکی از دماهای مجموعه A باشد، آنگاه فشار یکی از اعضاء مجموعه B خواهد بود، به صورت رابطه R قابل نمایش است.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \left\{\tfrac{1}{1} + \tfrac{0}{2} + \tfrac{0}{3} + \tfrac{1}{4}\right\}$$
$$Y = \left\{\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6}\right\}$$

$$\bar{A} \times Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \left(A \times B\right) \cup \left(\bar{A} \times Y\right) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

اگر مجموعه $C=\{5,6\}$ بر مجموعه Y مرجع تعریف شده باشد:

$$C=\left\{\tfrac{0}{1}+\tfrac{0}{2}+\tfrac{0}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}\right\}$$

و قانون $if\ \ A\ \ then\ \ B\ \ else\ \ C$ به وسیله R' قابل نمایش است:

$$\bar{A}\times C=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$R'=\left(A\times B\right)\cup\left(\bar{A}\times C\right)=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix}1&2&3&4&5&6\end{matrix}\\\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&1\\0&0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}\end{array}$$

8-2-2: منطق فازی

همان‌گونه که اشاره شد در منطق فازی (برخلاف منطق کلاسیک یا بولی) گزاره‌ها می‌توانند علاوه بر مقادیر صفر و یک، مقادیر حقیقی بین صفر و یک را نیز اختیار کنند تا همان روابطی را که در بخش 8-2-1 برای عملکرد منطق کلاسیک بیان کردیم، برای منطق فازی نیز قابل استفاده باشد.

مثال: اگر داشته باشیم:

$$\tilde{v}\left(A\right)=true=\left\{\frac{0.6}{0.5}+\frac{0.7}{0.6}+\frac{0.8}{0.7}+\frac{0.9}{0.8}+\frac{1}{0.9}+\frac{1}{1}\right\}$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$\neg\tilde{v}\left(A\right)=\left\{\frac{1}{0}+\frac{1}{0.1}+\frac{1}{0.2}+\frac{1}{0.3}+\frac{1}{0.4}+\frac{0.4}{0.5}+\frac{0.3}{0.6}+\frac{0.2}{0.7}+\frac{0.1}{0.8}\right\}$$

در منطق بولی به علت محدود بودن مقادیری که گزاره‌ها می‌توانستند اختیار کنند، این امکان موجود بود تا عملگرها را به صورت جدولهای درستی به نمایش بگذاریم ولی مقادیر درستی گزاره‌ها در منطق فازی دارای بی‌نهایت مقدار است و امکان تشکیل جدول درستی را از ما می‌گیرد. برای اینکه بتوان در هنگام استفاده از منطق فازی از جدول درستی نیز

استفاده کرد، می‌توانیم از منطق چندمقداره که حالت خاصی از منطق فازی است استفاده کنیم. یعنی هر گزاره بتواند سه، چهار یا بیشتر (تعدادی محدود) مقدار ارزشی برای خود اختیار نماید. به عنوان مثال به یک منطق سه‌مقداره که در سال 1973 توسط زاده ارائه شده است، اشاره می‌کنیم:

هر گزاره می‌تواند یکی از مقادیر زبانی "درست"، "نادرست" یا "نمی‌دانم" را اختیار کند که با نمادهای $T+F,F,T$ نمایش داده می‌شوند. ترکیبهای عطفی و فصلی دو عبارت B,A و همچنین نقیض یک عبارت، با جداول درستی نشان داده می‌شوند.

$\wedge$	T	F	$T+F$
T	T	F	$T+F$
F	F	F	F
$T+F$	$T+F$	F	$T+F$

$\vee$	T	F	$T+F$
T	T	T	T
F	F	F	$T+F$
$T+F$	T	$T+F$	$T+F$

	$\neg$
T	F
F	T
$T+F$	$T+F$

در اینجا این سؤال مطرح می‌شود که اگر تعداد ترمهای زبانی استفاده‌شده برای یک متغیر زبانی افزایش یابد، حاصل اعمال عملگرهای مختلف چگونه به دست می‌آید؟

یکی از راه‌های پیشنهادی این است که هر ترم زبانی را به عنوان یک مجموعه فازی در نظر بگیریم. عملگر مورد نظر مثلاً "و" یا "یا" به مجموعه‌های فازی اعمال شود و حاصل را

با توجه به نزدیک‌بودن به هر یک از ترمهای زبانی، به آن ترم نسبت داده، جایگزین حاصل اعمال آن عملگر نماییم.

مثال: اگر مجموعه مرجع $v=\{0,0.1,0.2,...,1\}$ باشد و داشته باشیم:

$$\text{"درست"}=\left\{\frac{0.9}{0.8}+\frac{1}{0.9}+\frac{1}{1}\right\}$$

$$\text{"کم‌وبیش درست"}=\left\{\frac{0.2}{0.6}+\frac{0.4}{0.7}+\frac{0.7}{0.8}+\frac{1}{0.9}+\frac{1}{1}\right\}$$

$$\text{"تقریباً درست"}\left\{\frac{0.9}{0.8}+\frac{1}{0.9}+\frac{0.8}{1}\right\}$$

آنگاه حاصل عبارت "کم‌وبیش درست" یا "تقریباً درست" را به دست می‌آوریم:

"کم‌وبیش درست $\vee$ تقریباً درست"

$$=\left\{\frac{0.9}{0.8}+\frac{1}{0.9}+\frac{1}{1}\right\}\vee\left\{\frac{0.2}{0.6}+\frac{0.4}{0.7}+\frac{0.7}{0.8}+\frac{1}{0.9}+\frac{1}{1}\right\}$$

$$=\left\{\frac{0.2}{0.6}+\frac{0.4}{0.7}+\frac{0.9}{0.8}+\frac{1}{0.9}+\frac{1}{1}\right\}$$

این مجموعه فازی را می‌توان با مجموعه فازی "درست" تقریب زد و در جدول درستی برای حاصل ترکیب فعلی دو عبارت "تقریباً درست" و "کم‌وبیش درست" قرار داد.

مثال: دو مجموعه مرجع $Y=\{1,2,3,4,5,6\}$, $X=\{1,2,3,4\}$ را برای مشخصات بدنی شخص و رشته‌های ورزشی در نظر می‌گیریم. یعنی هر یک از اعضاء X بیانگر یک مشخصه بدنی مثل قد، وزن و ... است و هر یک از اعضاء Y نمایانگر یک رشته ورزشی می‌باشد.

دو عبارت $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ بر مجموعه‌های Y,X به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\tilde{A}=\left\{\frac{0.6}{2}+\frac{1}{3}+\frac{0.2}{4}\right\}$$

$$\tilde{B}=\left\{\frac{0.4}{2}+\frac{1}{3}+\frac{0.8}{4}+\frac{0.3}{5}\right\}$$

عبارت $\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B}$ طبق تعریف، توسط رابطه $R = (A \times B) \cup (\bar{A} \times Y)$ قابل نمایش است. سپس داریم:

$$\tilde{A} \times \tilde{B} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \atop \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 & 0.6 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 & 1 & 0.8 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} \times Y = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \end{array}$$

$$\tilde{R} = max\left(\tilde{A} \times \tilde{B}, \bar{\tilde{A}} \times Y\right) = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0.4 & 0.4 & 0.6 & 0.6 & 0.4 & 0.4 \\ 3 & 0 & 0.4 & 1 & 0.8 & 0.3 & 0 \\ 4 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \end{array}$$

یعنی عبارت $\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B}$ توسط رابطه $\tilde{R}$ قابل نمایش است. این رابطه بیانگر آن است که شخصی که دارای مشخصات بدنی $\tilde{A}$ است، به میزان درجات مشخص‌شده در $\tilde{B}$ برای هر یک از شش رشته ورزشی شماره‌های ۱ تا ۶ مناسب می‌باشد.

3-8: استدلال تقریبی و محتمل

همان‌گونه که قبلاً اشاره شد، جزء سوم منطق مراحل استدلال می‌باشد که در آن از فرضیات مورد قبول استفاده می‌کنیم و نتایج جدیدی به دست می‌آوریم. پایه اصلی مراحل

استدلال بر قیاس نهاده شده است که چهار شکل از قیاس در قسمتهای قبلی این فصل معرفی شد. همچنین بیان شد که مهمترین شکل آن، وضع مقدم می‌باشد.

پیش‌فرض: A"درست" است.

دلالت: اگر A"درست" باشد آنگاه B"درست" است.

نتیجه: B"درست" است.

در این حالت مفاهیم A، B، "درست" و مفهوم دلالت، همگی به صورت دقیق و بدون ابهام در نظر گرفته شده‌اند. می‌توان هر یک از این مفاهیم را با استفاده از سه حالت زیر به صورت عمومی‌تر در نظر گرفت:

۱. می‌توان مفهوم دلالت را اصلاح کرد.

۲. می‌توان جملات و گزاره‌ها را از حالت قطعی خارج کرد. به عنوان مثال از متغیرهای زبانی استفاده کنیم، یعنی "درست" مفهومی فراتر از عدد قطعی یک داشته باشد و به صورت یک ترم زبانی (مجموعه فازی) تعریف شود.

۳. مجموعه‌های B, A را که به صورت کلاسیک هستند، به صورت مجموعه‌های فازی در نظر بگیریم.

اعمال حالت دوم ما را به سمت استدلال تقریبی و اعمال حالتهای دوم و سوم ما را به سمت استدلال محتمل هدایت می‌کند. در اینجا ابتدا به مفاهیم و تعابیر مختلف دلالت می‌پردازیم. سپس با معرفی فازی مجموعه‌های A و B و همچنین استفاده از متغیرهای زبانی، استدلال تقریبی را با روابط ریاضی معرفی می‌نماییم. در منطق کلاسیک یا بولی $A \to B$ به صورت $\neg A \vee (A \wedge B)$ قابل نمایش است. بر این اساس، با استفاده از منطق فازی عبارت $\neg A \vee (A \wedge B)$ را می‌توان به‌گونه‌های مختلف تعبیرکرد. هفت گونه از این تعابیر را می‌توان در زیر مشاهده کرد که در آنها، x بیانگر درجه درستی، y بیانگر مقدار قابل انتظار و I بیانگر درجه حاصله از درستی برای دلالت است:

Early Zadeh: $I_m(x,y) = max\left(1-x\ ,\ min(x,y)\right)$

Lukasiewicz: $I_a(x,y) = min\ (1\ ,\ 1-x+y)$

Minimum (mamdani): $I_c(x,y) = min\ (x,y)$

Standard Star (Godel): $I_g(x,y) = \begin{cases} 1 & x \le y \\ y & elsewhere \end{cases}$

Kleene – Dienes: $I_b(x,y) = max\ (1-x\ ,y)$

Gaines: $I_\Delta(x,y) = \begin{cases} 1 & x \le y \\ y/z & elsewhere \end{cases}$

Yager: $I_E(x,y) = y^x$

از جمله خواص ممکن برای این تعابیر، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

1- تقارن عکس نقیض[1]:

$$v(A \to B) = v(\neg B \to \neg A)$$

2- اصل معاوضه[2]:

$$v\left(A \to (B \to C)\right) = v\left(B \to (A \to C)\right)$$

3- یکنوایی:

$$v(A \to B) \le v(C \to D)\ \ if$$
$$v(A) \le v(C)\ \ and\ /\ or\ \ v(B) \le v(D)$$

4- شرط مرزی:

اگر $v(A) \le v(B)$ آنگاه $v(A \to B) = 1$

5- اصل بی‌طرفی:

اگر T جمله همیشه درست باشد، آنگاه $v(T \to A) = v(A)$

6- پیوستگی:

$v(A \to B)$ همیشه نسبت به آرگومانهایش پیوسته می‌باشد.

---

[1] Contrapositive symmetry

[2] Exchange principle

مسلم است که هر تعریفی از دلالت، هر شش شرط فوق را دارا نمی‌باشد. جدول 8-2 تبعیت (Y) یا عدم تبعیت (N) تعاریف مختلف دلالت را از شرطهای فوق نشان می‌دهد.

اگر تبعیت از شروط فوق را ملاک خوب بودن هر یک از تعاریف یا تعابیر دلالت بدانیم می‌توانیم مجموعه" عملگرهای دلالت خوب" را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\left\{\frac{1/3}{I_M}+\frac{1}{I_a}+\frac{1/2}{I_C}+\frac{2/3}{I_g}+\frac{5/6}{I_b}+\frac{1/2}{I_\Delta}+\frac{1/2}{I_E}\right\}$$

جدول8-2: خواص اپراتورهای دلالت

	I_m	I_a	I_c	I_g	I_b	I_Δ	I_E
عکس نقیض	N	Y	N	N	Y	N	N
اصل معاوضه	N	Y	Y	Y	Y	N	Y
یکنوایی	N	Y	N	Y	Y	Y	Y
شرط مرزی	N	Y	N	Y	N	Y	N
اصل بی‌طرفی	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
پیوستگی	Y	Y	Y	N	Y	N	N

حال سعی می‌کنیم با وارد کردن متغیرهای زبانی و ابهام، وضع مقدم تعمیم‌یافته را ارائه نماییم.

تعریف8-5: اگر $\tilde{B}', \tilde{B}, \tilde{A}', \tilde{A}$ عبارات فازی باشند، وضعیت مقدم تعمیم‌یافته به این صورت تعریف خواهد شد:

پیش‌فرض: $\tilde{A}', X$ است

دلالت: اگر $\tilde{A}, X$ باشد آنگاه $\tilde{B}, y$ است

نتیجه: $\tilde{B}', y$ است

مثال:

پیش‌فرض: گوجه کاملاً قرمز است.

دلالت: اگر گوجه قرمز باشد، آنگاه گوجه رسیده است.

نتیجه: گوجه کاملاً رسیده است.

یعنی "قرمز بودن" بر"رسیده بودن" گوجه دلالت می‌کند. حال اگر "کاملاً قرمز" باشد در نتیجه "کاملاً رسیده" است.

زاده در سال 1973 یک قاعده برای استنتاج مشروط پیشنهاد کرد که به قیاس از نوع وضع مقدم می‌پردازد. البته پس از آن، برای سه حالت دیگر قیاس نیز پیشنهادهایی توسط دیگران مطرح شده است.

تعریف 8-6: اگر A, A' مجموعه‌های فازی تعریف شده بر X و $\tilde{B}', \tilde{B}$ مجموعه‌های فازی تعریف شده بر Y باشند و رابطه فازی $\tilde{R} = (x, y)$ تعریف شده بر $X \times Y$ معرف قانون $if \ \tilde{A} \ then$ باشد، با فرض درست بودن A' نتیجه استنتاج $\tilde{B}' = \tilde{A}' O \tilde{R}$ خواهد بود که در آن، O عملگر ترکیب می‌باشد.

مثال: مجموعه مرجع $X = \{1,2,3,4\}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید:

$$\tilde{A} = little\ numbers = \{(1,1),(2,0.6),(3,0.2),(4,0)\}$$

$\tilde{R}(x, y)$ رابطه فازی "تقریباً مساوی" است که به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

	1	2	3	4
1	1	0.5	0	0
2	0.5	1	0.5	0
3	0	0.5	1	0.5
4	0	0	0.5	1

قیاس زیر را در نظر بگیرید:

پیش‌فرض: x از اعداد کوچک است.

دلالت: x تقریباً برابر با y است.

نتیجه: y کم وبیش از اعداد کوچک است.

که در این قیاس $\tilde{A}' = \tilde{A}$ می‌باشد.

نتیجه این قیاس می‌تواند از رابطه ریاضی زیر به دست آید:

$$\tilde{B}'=\tilde{A}'O\tilde{R}=\max_{x} \quad \min\left\{\mu_{\tilde{A}'}(x),\mu_{\tilde{R}}(x,y)\right\}$$
$$=\left\{(1,1),(2,0.6),(3,0.5),(4,0.2)\right\}$$

مثال: مثال انتخاب رشته ورزشی برای ورزشکاران با مشخصات فردی متفاوت را به خاطر بیاورید. در آنجا رابطه $\tilde{R}$ به شرح زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{R}=\max\left(\tilde{A}\times\tilde{B},\bar{\tilde{A}}\times Y\right)=\begin{array}{c} 1\\2\\3\\4 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0.4 & 0.4 & 0.6 & 0.6 & 0.4 & 0.4\\ 0 & 0.4 & 1 & 0.8 & 0.3 & 0\\ 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 \end{bmatrix}$$

که این رابطه بیانگر قاعده $if \;\; \tilde{A} \;\; then \;\; \tilde{B}$ بوده، به این مفهوم است که شخص با داشتن مشخصات $\tilde{A}$ برای رشته ورزشی $\tilde{B}$ مناسب می‌باشد.

حال اگر شخصی را با مشخصات فردی مطابق $\tilde{A}'=\left\{\frac{0.5}{1}+\frac{1}{2}+\frac{0.3}{3}+\frac{0}{4}\right\}$ داشته باشیم مجموعه نتیجه $\tilde{B}'$ آن را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\tilde{B}'=\tilde{A}'O\tilde{R}=\left\{\frac{0.5}{1}+\frac{0.5}{2}+\frac{0.6}{3}+\frac{0.6}{4}+\frac{0.5}{5}+\frac{0.5}{6}\right\}$$

برای قاعده $if \;\; \tilde{A} \;\; then \;\; \tilde{B}, else \;\; \tilde{C}$ نیز می‌توان به طرز مشابه از رابطه فازی $\tilde{R}_1=\left(\tilde{A}\times\tilde{B}\right)\cup\left(\bar{\tilde{A}}\times\tilde{C}\right)$ استفاده کرد و نتیجه را به صورت $\tilde{B}'=\tilde{A}'O\tilde{R}_1$ به دست آورد.