فصل 3

اندازه‌گیری فازی و

اندازه‌گیری میزان فازی‌بودن

در این فصل دو مفهوم مهم شامل اندازه‌گیری فازی و اندازه‌گیری میزان فازی‌بودن را مورد بحث قرار خواهیم داد. به دلیل وجود ابهام در برخورد اولیه با این دو عبارت ظاهرا شبیه به هم، ابتدا به معرفی اندازه‌گیری فازی می‌پردازیم و پس از آن، اندازه‌گیری میزان فازی‌بودن را بررسی می‌کنیم.

3-1: اندازه‌گیری فازی

در سال 1977 ساگنو[1] اندازه‌گیری فازی را چنین معرفی کرد:

تعریف 3-1: اگر مجموعه β یک مجموعه از زیرمجموعه‌های مجموعه مرجع در نظر گرفته شود، تابع تعریف شده g بر روی β را با شرایط زیر اندازه‌گیری فازی می‌گوییم:

الف:

$$g(0) = 0 \quad \text{and} \quad g(x) = 1$$

ب:

$$if \quad A,B \in \beta \; and \; A \subseteq B \; then \; g(A) \le g(B)$$

پ:

$$if \quad A_n \in \beta \;,\; A_1 \subseteq A_2 \subseteq ..., \; then \; \lim_{n\to\infty} g(A_n) = g(\lim_{n\to\infty} A_n)$$

تعریفی که ساگنو برای اندازه‌گیری ارائه کرد، با تعریف اندازه‌گیری کلاسیک متفاوت است که این تفاوت به دلیل اعمال شرایط جدید به وجود آمده است.

بنون[2] (1981) نشان داد که اکثر اندازه‌گیری‌هایی که دارای مجموعه مرجع محدود هستند مثل اندازه‌گیری احتمالاتی، توابع اعتقادی و گمانی، اندازه‌گیری‌های منوط به باور و پذیرش شخص و ... طبق تعریف ساگنو اندازه‌گیری فازی می‌باشند.

از منظر دیدگاه تئوری، مجموعه‌های فازی مطرح‌شده توسط زاده در سال 1978، یک گسترش بر تئوری امکان به وجود آورد و تعریفی برای اندازه‌گیری امکان پیشنهاد داد که حالتی خاص از تعریف اندازه‌گیری فازی توسط ساگنو می‌باشد.

---

[1] Sugeno
[2] Banon

تعریف 3-2: اگر P(X) مجموعه توانی مجموعه مرجع X باشد، اندازه‌گیری امکان تابعی به شکل $\Pi : p(x) \rightarrow [0,1]$ است که خواص زیر را دارا می‌باشد:

الف:

$$\Pi(0)=0\ ,\Pi(X)=1$$

ب:

$$A \subseteq B \ \Rightarrow\ \Pi(A) \le \Pi(B)$$

پ: اگر I مجموعه اندیسها باشد:

$$\prod\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \underset{i\in I}{Sup} \prod(A_i)$$

تعریف فوق می‌تواند توسط تابع $f : X \rightarrow [0,1]$ بیان شود که در آن:

$$\prod_{(A)} = \underset{x\in A}{Sup}\, f_{(x)} \quad , \quad A \subset X$$

به عبارت دیگر می‌توان تابع f را به صورت زیر تعریف کرد:

$$f(x) = \prod(\{x\}), \forall x \in X$$

نکته جالب توجه این است که اندازه‌گیری امکان همیشه یک اندازه‌گیری فازی نیست! این اندازه‌گیری فقط وقتی یک اندازه‌گیری فازی است که مجموعه مرجع X محدود باشد و توزیع میزان امکان نرمال بوده، یعنی در محدوده $[0,1]$ باشد.

مثال: اگر $X = \{0,1,2,...,10\}$ و در مورد اندازه‌گیری امکان داشته باشیم:

$\prod(\{x\}) =$ امکان نزدیک‌بودن x به عدد هشت

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\prod(\{x\})$	0	0	0	0	0	.1	.5	.8	1	.8	.5

$\prod_{(A)}$ =: امکان اینکه A شامل یک عدد نزدیک به هشت باشد

حال اگر $A = \{2,5,9\}$ فرض شود خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\prod_{(A)} &= \underset{x\in A}{Sup}\prod_{(\{x\})}\\ &= Sup\left\{\prod_{(\{2\})},\prod_{(\{5\})},\prod_{(\{9\})}\right\}\\ &= Sup\left\{0,0.1,0.8\right\}\\ &= 0.8\end{aligned}$$

همانگونه که مشاهده کردید، در بخش اول این فصل نوعی از اندازه‌گیری که به عنوان اندازه‌گیری فازی معرفی گردید برای اندازه‌گیری میزان امکان تعلق یک مجموعه قطعی به یک مجموعه فازی مورد استفاده قرار گرفت و حاصل این تابع به عنوان یک مقدار که نمایانگر میزان تعلق به یک مجموعه است محاسبه شد.

3-2 : اندازه گیری میزان فازی‌بودن

پس از آشنایی با مفهوم اندازه‌گیری فازی، حال به معرفی اندازه‌گیری میزان فازی‌بودن می‌پردازیم که مشخص‌کننده درجه فازی‌بودن یا ابهام یک مجموعه فازی می‌باشد. گروهی از محققین با تکیه بر آنتروپی شانون[1]، یک تابع $d(\tilde{A})$ از مجموعه توانی P(X) در فاصله $[0,+\infty]$ معرفی کردند که دارای شرایط و محدودیتهای مربوط به خود می‌باشد.

گروهی دیگر با توجه به اختلاف یک مجموعه فازی و متمم آن، تعریف دیگری ارائه نمودند که در اینجا هردوی این تعریفها را مورد بحث قرار می‌دهیم. باید در نظر داشته باشیم که در تعریفهای زیر، مجموعه $\tilde{A}$ یک مجموعه متناهی است.

در تعریف گروه اول فرض شده است $\mu_{\tilde{A}}(x)$ تابع عضویت مجموعه فازی $\tilde{A}$ برای هر $x \in X$ باشد که در آن X یک مجموعه متناهی است. مطابق تعریف پیشنهادی توسط گروه اول خواهیم داشت:

الف: اگر $\tilde{A}$ یک مجموعه کلاسیک (قطعی) در مجموعه مرجع X باشد :

$$d(\tilde{A}) = 0$$

[1] Shannon entropy

ب: اگر برای $x \in \tilde{A}$ داشته باشیم $\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{1}{2}$ باید برای $d(\tilde{A})$ یک مقدار ماگزیمم و یکتا در نظر بگیریم.

پ: اگر $\tilde{A}'$ قطعی‌تر از مجموعه $\tilde{A}$ باشد، خواهیم داشت: $d(\tilde{A}) \geq d(\tilde{A}')$

قطعی‌تر بودن بدین معناست که اگر $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq 1/2$ باشد، $\mu_{\tilde{A}'}(x) \leq \mu_{\tilde{A}}(x)$ و اگر $\mu_{\tilde{A}}(x) \geq 1/2$ باشد، $\mu_{\tilde{A}'}(x) \geq \mu_{\tilde{A}}(x)$.

ت: اگر $n\tilde{A}$ متمم مجموعه فازی $\tilde{A}$ باشد، آنگاه $d(n\tilde{A}) = d(\tilde{A})$ خواهد بود.

تعریف 3-3: به منظور اندازه‌گیری میزان فازی‌بودن مجموعه $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x))\}$ آنتروپی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(\tilde{A}) = H(\tilde{A}) + H(n\tilde{A}) \quad x \in X$$

$$H(\tilde{A}) = -K \sum_{i=1}^{n} \mu_{\tilde{A}}(x_i) \ \ln(\mu_{\tilde{A}}(x_i))$$

که در این تعریف، n تعداد اعضا مجموعه $\tilde{A}$ و K یک عدد ثابت مثبت می‌باشد.

با استفاده از تابع شانون که به صورت $S(x) = -x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)$ می‌باشد، دلوکا[1] و ترمینی[2] تعریف فوق را به شکلی ساده‌تر بیان کردند.

تعریف 3-4: میزان آنتروپی d که نشان‌دهنده میزان فازی‌بودن مجموعه فازی $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x))\}$ است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(\tilde{A}) = K \sum_{i=1}^{n} S(\mu_{\tilde{A}}(x_i))$$

مثال: فرض کنید مجموعه فازی زیر بیانگر اعداد صحیح نزدیک به ده باشد:

$$\tilde{A} = \{(7,0.1), (8,0.5), (9,0.8), (10,1), (11,0.8), (12,0.5), (13,0.1)\}$$

اگر $k = 1$ باشد، داریم:

$$d(\tilde{A}) = 0.325 + 0.693 + 0.501 + 0 + 0.501 + 0.693 + 0.325 = 3.038$$

---

[1] De luca
[2] Termini

همچنین اگر

$$\tilde{B}=\{(6,0.1),(7,0.3),(8,0.4),(9,0.7),(10,1),(11,0.7),(12,0.4),(13,0.3),(14,0.1)\}$$

آن گاه خواهیم داشت:

$$d(\tilde{B})=0.325+0.611+0.673+0.611+0+0.501+0.693+0.611+0.325=4.35$$

همان‌طورکه مشخص است، مجموعه $\tilde{B}$ فازی‌تر از مجموعه $\tilde{A}$ می‌باشد. یعنی میزان آنتروپی آن بالاتر است.

در تعریف دوم برای میزان فازی‌بودن مجموعه‌ها، به تفاوت میان یک مجموعه و متمم آن توجه شده است تا این تفاوت، میزان فازی‌بودن مجموعه را معین کند. زیرا اگر $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی در X و $n\tilde{A}$ متمم آن باشد، برخلاف مجموعه‌های کلاسیک (قطعی) لزومی ندارد که خواص زیر برقرار باشند:

$$\tilde{A}\cup n\tilde{A}=X$$
$$\tilde{A}\cap n\tilde{A}=\varnothing$$

یاگر (1979) و هیگاشی[1] و کلیر[2] (1982) اساس میزان فازی‌بودن را بر رابطه بین $\tilde{A}$ و $n\tilde{A}$ بنا نهادند. یاگر به منظور به دست آوردن میزان فازی‌بودن مجموعه $\tilde{A}$ تعریف زیر را ارائه کرد:

تعریف 3-5: با فرض $S=Supp(\tilde{A})$, $D_p(S,nS)=\|S\|^{1/p}$ داریم:

$$D_p(\tilde{A},n\tilde{A})=\left[\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_{\tilde{A}}(x_i)-\mu_{n\tilde{A}}(x_i)\right|^p\right]^{1/p} \quad , \quad p=1,2,3,...$$

تعریف 3-6: اندازه‌گیری میزان فازی‌بودن مجموعه $\tilde{A}$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$f_p(\tilde{A})=1-\frac{D_p(\tilde{A},n\tilde{A})}{\|Supp(\tilde{A})\|}$$

---

[1] Higashi
[2] Klir

در نتیجه $f_p(\tilde{A}) \in [0,1]$ خواهد شد و از چهار شرط ارائه شده توسط دلوکا و ترمینی نیز تبعیت خواهد کرد.

در صورت انتخاب $p=1$، $D_p(\tilde{A}, n\tilde{A})$ فاصله همینگ را محاسبه خواهد کرد.

$$D_1(\tilde{A}, n\tilde{A}) = \sum_{i=1}^{n} \left| \mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{n\tilde{A}}(x_i) \right|$$

چون $\mu_{n\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$ بنابراین می‌توان نوشت:

$$D_1(\tilde{A}, n\tilde{A}) = \sum_{i=1}^{n} \left| 2\mu_{\tilde{A}}(x_i) - 1 \right|$$

اگر حالت خاص $p=2$ فرض شود، فاصله اقلیدسی محاسبه خواهد شد:

$$D_2(\tilde{A}, n\tilde{A}) = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{n\tilde{A}}(x_i) \right)^2 \right]^{1/2}$$

و با فرض $\mu_{n\tilde{A}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$ داریم:

$$D_2(\tilde{A}, n\tilde{A}) = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(2\mu_{\tilde{A}}(x_i) - 1 \right)^2 \right]^{1/2}$$

مثال: اگر مجموعه‌های $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ عنوان‌شده در مثال قبل مفروض باشند:

با انتخاب $p=1$ داریم:

$$D_1(\tilde{A}, n\tilde{A}) = 0.8 + 0 + 0.6 + 1 + 0.6 + 0 + 0.8 = 3.8$$

$$\left\| Supp(\tilde{A}) \right\| = 7$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$f_1(\tilde{A}) = 1 - \frac{3.8}{7} = 0.457$$

همچنین با اعمال فرمول برای $\tilde{B}$:

$$D_1(\tilde{B}, n\tilde{B}) = 4.6$$

$$\left\| Supp(\tilde{B}) \right\| = 9$$

و

$$f_1(\tilde{B}) = 1 - \frac{4.6}{9} = 0.489$$

با انتخاب $p=2$ داریم:

$$D_2\left(\tilde{A}, n\tilde{A}\right)=1.73$$

$$\left\| Supp\left(\tilde{A}\right) \right\|^{1/2}=2.65$$

بنابراین

$$f_2\left(\tilde{A}\right)=1-\frac{1.73}{2.65}=0.347$$

و همچنین برای مجموعه $\tilde{B}$ داریم :

$$D_2\left(\tilde{B}, n\tilde{B}\right)=1.78$$

$$\left\| Supp\left(\tilde{B}\right) \right\|^{1/2}=1$$

و

$$f_2\left(\tilde{B}\right)=1-\frac{1.78}{3}=0.407$$

باید توجه داشت که متمم مجموعه فازی فقط یک تعریف یکتا (که در بالا از آن استفاده شده است) ندارد و می‌توان از تعاریف دیگر نیز استفاده کرد و نتایجی متفاوت با نتایج فوق به دست آورد.