فصل 10

شبیه‌سازی سیستمهای غیرخطی

فرآیندهای فیزیکی پیرامون ما در دنیای واقعی، فرآیندهایی غیرخطی هستند و ساده‌سازی و چشم‌پوشی ما برای سهولت در مدل‌کردن است که این فرآیندهای پیچیده غیرخطی را با فرآیندهای خطی تقریب می‌زند.

سیستمهای خطی ساده و قابل‌فهم هستند و در بسیاری از موارد، شبیه‌سازیهای مفیدی را از فرآیندهای واقعی اطراف، در اختیارمان قرار می‌دهند. ولی متأسفانه فقط سیستمهای بسیارساده و غیرپیچیده این قابلیت را دارند که توسط سیستمهای خطی مدل شوند.

اکثر فرآیندهایی که می‌توانیم به آنها اشاره کنیم پیچیده‌تر از آن هستند که بتوان آنها را به شکل الگوریتمیک خطی یا غیرخطی ساده مدل کرد. اکثر فرآیندهای قابل‌رویت در اطراف ما به‌گونه‌ای هستند که اطلاعات ما در مورد آنها، کمتر از آن است که بتوانیم برایشان روشی الگوریتمیک بیان کنیم. ضمناً اکثر اطلاعات ما در مورد فرآیندهای اطرافمان به صورت فازی است که به وسیله متغیرهای زبانی بیان می‌شود. در این فصل روشهای رسیدن از مشاهدات و دانش فازی موجود برای یک فرآیند، به مدل شبیه‌سازی‌شده خطی یا غیرخطی برای آن، بررسی می‌شود.

سه مجموعه فازی ورودی، قواعد و خروجی مجموعاً مشاهدات و دانش ما را نسبت به سیستمی تشکیل می‌دهند که قرار است یک مدل خطی یا غیرخطی برای آن به دست آوریم. این مدل با استفاده از روشهای زیر به دست می‌آید:

الف: دانش بیان‌شده توسط قواعد ***if -then*** که با استفاده از متغیرهای زبانی موجود شکل می‌گیرد و از جمع‌آوری تجربه و دانش انسانهای مرتبط با سیستم یا بررسی و کنترل یک فرآیند فیزیکی به دست می‌آید.

ب: حس مشترک یا دانش درونی مهندسین طراح در مورد یک فرآیند فیزیکی

پ: استفاده از اصول عمومی فیزیک و قواعد مربوط به دینامیک فرآیند تحت مطالعه

ت: استفاده از دسته‌بندی الگوها و آنالیز آماری بعضی داده‌های عددی تا با استفاده از این روشها بتوان در ورودی، خروجی سیستم آنها را اندازه‌گیری کرد.

ث: استفاده از معادلات تحلیلی مربوط به فرآیند که بر اساس اصل گسترش (مطرح‌شده توسط زاده) بیان شده باشند.

در این فصل پس از مقدمه به معرفی انواع سیستمهای قاعده-پایه[1] فازی می‌پردازیم تا با استفاده از مشاهدات و دانش فازی نسبت به این سیستمها، مدل شبیه‌سازی خطی یا غیرخطی آنها را به دست آوریم. سپس با ارائه روشهای به دست آوردن این مدلها، موارد جالب توجه مربوط به آنها را بررسی خواهیم کرد.

10-1: سیستمهای قاعده-پایه فازی

یک سیستم غیرخطی عمومی که دارای n ورودی و n خروجی باشد می‌تواند توسط معادلات و روابط فازی لیست‌شده در زیر بیان شود:

$$\tilde{R}_1 \ : if \ \ x \ \ is \ \ \tilde{A}_1 \ \ then \ \ y \ \ is \ \ \tilde{B}_1$$
$$\tilde{R}_2 \ : if \ \ x \ \ is \ \ \tilde{A}_2 \ \ then \ \ y \ \ is \ \ \tilde{B}_2$$

قواعد فوق می‌توانند به صورت منطقی توسط عملگرهای and ، or و $else$ با یکدیگر تلفیق شوند. متغیرهای $\tilde{x}$ و $\tilde{y}$ بیانگر بردارهای ورودی و خروجی سیستم غیرخطی می‌باشند.

می‌توانیم پنج نوع از سیستمهای قاعده-پایه فازی را در شبیه‌سازی سیستمهای غیرخطی در نظر بگیریم. البته فرض می‌شود که سیستم بیان‌شده با r قاعده فوق، فقط یک ورودی و یک خروجی دارد. ولی روش کار، به آسانی قابلیت تعمیم به سیستمهای n ورودی و m خروجی را دارا می‌باشد.

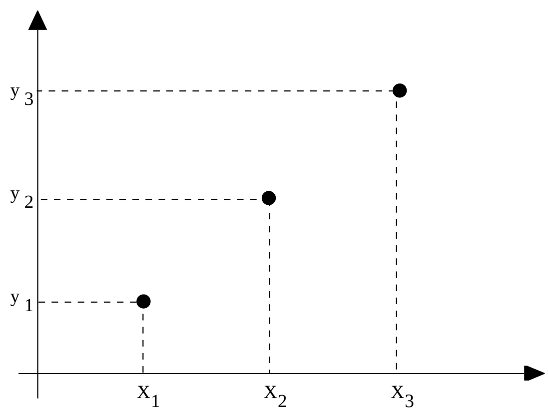
نوع اول: در این نوع، ورودی و خروجی سیستم مقادیر یگانه و غیرفازی هستند که می‌توان آنها را به صورت زیر نشان داد:

[1] Rule-based

$$A_1 : x = x_1$$
$$A_2 : x = x_2$$
$$\vdots$$
$$B_1 : y = y_1$$
$$B_2 : y = y_2$$

این نوع سیستمهای قاعده-پایه معادل یک جدول برابری[1] برای بیان سیستم هستند که در شکل 10-1 به نمایش درآمده‌اند:

$$R^i : if \quad \tilde{A}_i : x = x_i \quad then \quad B_i : y = y_i \quad for \quad i = 1,2,\ldots,r$$

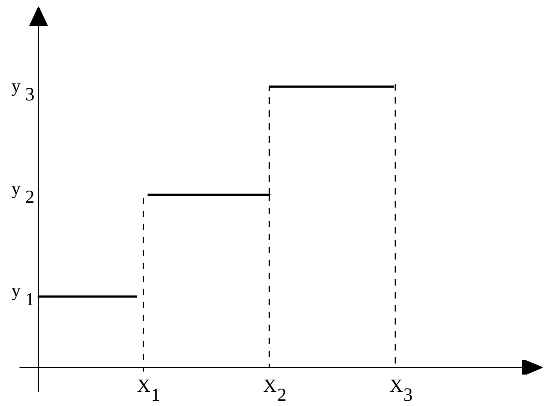


شکل10-1: سیستمهای قاعده-پایه نوع اول

نوع دوم: در نوع دوم این سیستمها، ورودی به صورت یک مجموعه قطعی و خروجی به صورت یک مقدار یگانه تعریف می‌شود. این نوع نیز به صورت یک جدول برابری برای تعیین سیستم می‌باشد که خروجی y_i با توجه به مقدار ورودی تطبیق‌شونده R^i به دست می‌آید. قواعد این نوع مدل به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$if \quad \tilde{A}_i : x_{i-1} < x < x_i \quad then \quad B_i : y = y_i \quad for \quad i = 1,2,\ldots,r$$

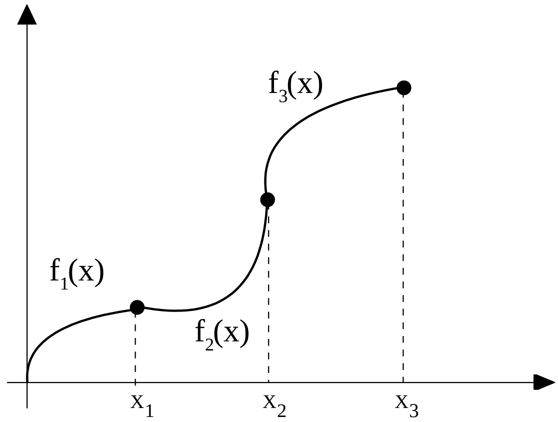
[1] Look-up table



شکل10-2: سیستمهای قاعده-پایه نوع دوم

مدل نوع دوم را می‌توان به‌گونه‌ای اصلاح کرد که به ازای هر بازه از ورودی، یک تابع $f_i(x)$ قطعی به عنوان خروجی (به جای مقدار ثابت) داشته باشیم:

$$if \quad \tilde{A}_i : x_{i-1} < x < x_i \quad then \quad B_i : y = f_i(x) \quad for \quad i = 1,2,...,r$$

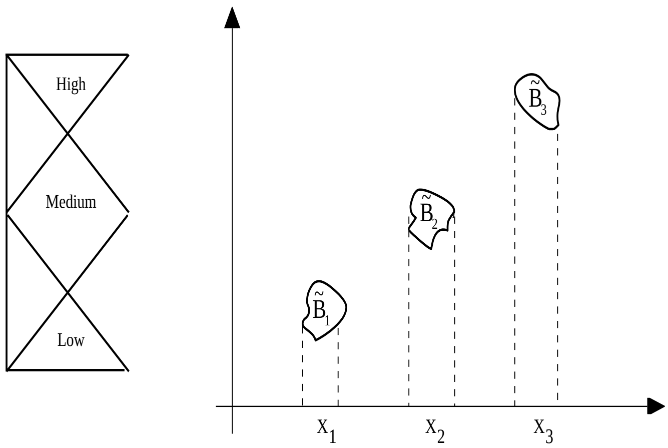


شکل10-3: سیستمهای قاعده-پایه نوع دوم اصلاح‌شده

نوع سوم: در مدل نوع سوم، شرطهای ورودی سیستم به صورت مجموعه‌های قطعی هستند و خروجیهای مرتبط با هر یک از شروط، به صورت یک مجموعه فازی یا رابطه فازی بیان می‌شود. خروجی فازی این قواعد را می‌توان با هر یک از روشهای غیرفازی‌کننده که در

بخش 4-9 بیان شده است، غیرفازی نمود تا خروجی قطعی از آن به دست آید. فرم کلی قواعد نوع سوم به صورت زیر می‌باشد:

$$if \quad \tilde{A}_i : x_{i-1} < x < x_i \quad then \quad B_i : y = \tilde{B}_i \quad for \quad i = 1,2,...,r$$



شکل4-10: سیستمهای قاعده-پایه نوع سوم

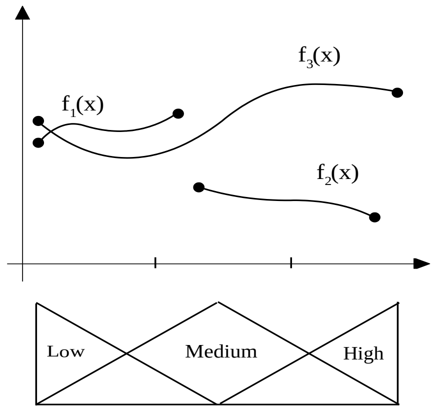
همان‌گونه که در شکل 4-10 مشاهده می‌شود، به ازای این که ورودی در کدام‌یک از بازه‌های محور xها باشد، ممکن است محور yها توسط یک یا تعداد بیشتری مجموعه‌های فازی قطع شود که با توجه به روش استنتاج مورداستفاده و روش غیرفازی‌نمودن خروجی فازی حاصل از اعمال قواعد، می‌توان به ازای ورودی قطعی x به خروجی قطعی y رسید.

نوع چهارم: در این نوع، شرطهای ورودی به صورت مجموعه‌های فازی هستند که بر مجموعه مرجع ورودی تعریف شده‌اند، ولی خروجیهای مربوط به هر مجموعه فازی ورودی به صورت یک مقدار یگانه یا یک تابع غیرخطی تعریف می‌شوند. شکل کلی قواعد این نوع به صورت زیر می‌باشد:

$$if \quad x = \tilde{A}_i \quad then \quad B_i : y = f_i(x) \quad for \quad i = 1,2,...,r$$

که $\tilde{A}_i$ها مجموعه‌های تعریف‌شده بر فضای X هستند و y_iها مقادیر ثابت خروجی به ازای $\tilde{A}_i$های مختلف می‌باشند که می‌توان آنها را به صورت توابع مختلف (شکل5-10) در نظر گرفت و قواعد این نوع را به صورت زیر نمایش داد:

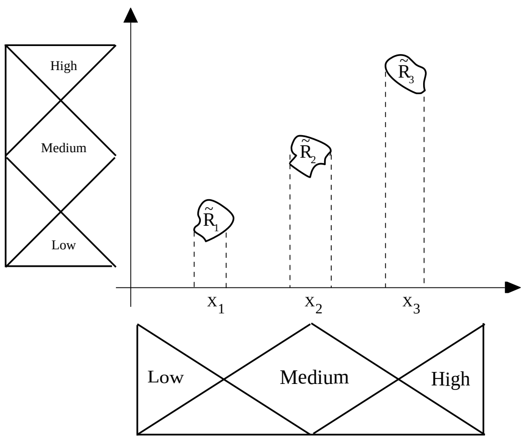
$$\begin{aligned} &if \quad x=\tilde{A}_i \quad then \quad B_i : y = y_i \quad for \quad i = 1,2,...,r \\ &y = f_i\left(x\right) \end{aligned}$$



شکل10-5 : سیستمهای قاعده-پایه نوع چهارم

نوع پنجم: عمومی‌ترین نوع مدلهای فازی، نوع پنجم است که در آن ورودی و خروجی به صورت مجموعه‌های فازی به فرم عمومی زیر (شکل10-6) تعریف می‌شوند:

$$if \quad \tilde{A}_i \quad then \quad \tilde{B}_i$$



شکل10-6: سیستمهای قاعده-پایه نوع پنجم

بر روی محور x یا محور y می‌توان یک عدد یا مجموعه فازی محدب (کوژ) را به صورت $\{x,\mu(x)\,|\,x\in X\}$ یا $\{y,\mu(y)\,|\,y\in Y\}$ تعریف نمود. اگر اطلاعات به دست آمده از سیستم به صورت فازی باشد یعنی اینکه ورودی فازی $\tilde{x}_i$ خروجی فازی $\tilde{y}_i$ را ایجاد کند می‌توان آن را به صورت زوج مرتب $(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i)$ با تعریف زیر ارائه داد:

تعریف 10-1: اگر $\tilde{x}=\{(x,\mu(x))\,|\,x\in X\}$ و $\tilde{y}=\{(y,\mu(y))\,|\,y\in Y\}$ عدد یا مجموعه‌های فازی محدب باشند، زوج مرتب $(\tilde{x},\tilde{y})$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A}=(\tilde{x},\tilde{y})=\left\{\left([x_i,y_i],\mu_i\right)\,|\,x_i\in X,y_i\in Y,\mu_i=Min\left\{\mu_{x_i},\mu_{y_i}\right\}\right\}$$

مثال: اگر داشته باشیم:

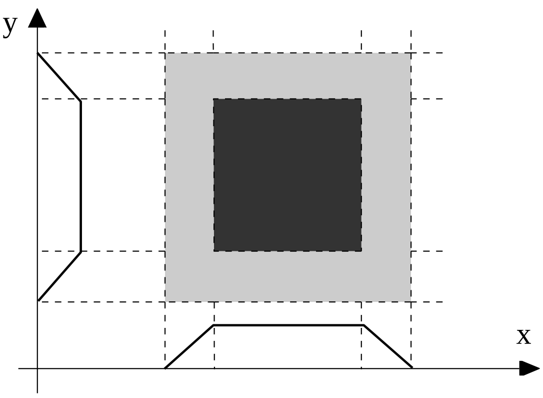
$$\tilde{x}=\{(5,0.5),(6,1),(7,1),(8,0.5)\}$$

$$\tilde{y}=\{(12,0.3),(13,1),(14,1),(15,0.5)\}$$

آنگاه نقطه فازی $\tilde{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

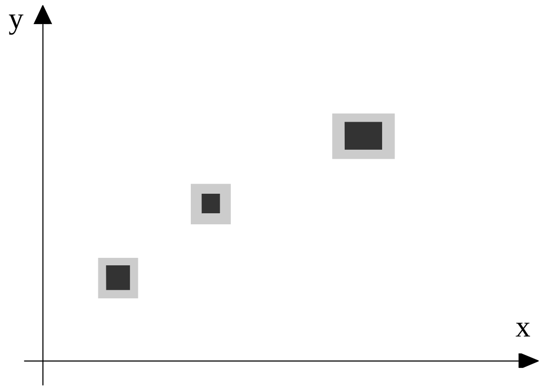
$$\left\{\begin{array}{l}([5,12],0.3),([5,13],0.5),([5,14],0.5),([5,15],0.5),([6,12],0.3),([6,13],1),\\ ([6,14],1),([6,15],0.5),([7,12],0.3),([7,13],1),([7,14],1),([7,15],0.5),\\ ([8,12],0.3),([8,13],0.5),([8,14],0.5),([8,15],0.5)\end{array}\right\}$$

با توجه به تعریف ارائه شده فوق، اطلاعات فازی به دست آمده برای این مثال خاص را می‌توانیم به صورت شکل 10-7 نمایش دهیم.



شکل 10-7: مثالی از مدل فازی نوع پنجم

همان‌گونه که در شکل10-7 نیز به وضوح مشاهده می‌شود، ممکن است متغیرهای زبانی (مجموعه‌های فازی) تعریف‌شده در فضای ورودی و خروجی، در بعضی از قسمتهای فضای تعریف با یکدیگر همپوشانی داشته باشند. به عبارت دیگر به ازای یک نقطه x بر روی محور ورودی، این نقطه ممکن است به بیش از یک مجموعه فازی تعلق داشته باشد و در هر یک از این مجموعه‌ها نیز دارای درجه عضویت خاصی باشد.



شکل10-8: اطلاعات به دست آمده از یک سیستم فازی

همچنین ممکن است مانند آنچه در شکل10-8 دیده می‌شود، در بعضی قسمتهای فضای تعریف، هیچ مجموعه فازی تعریف نشده باشد و نقطه x در ورودی با قسمت شرط هیچ‌یک از قواعد بیان‌کننده رفتار سیستم تلاقی نداشته باشد.

همان‌گونه که قبلا ذکر شد شبیه‌سازی یک سیستم غیرخطی فازی به معنی استفاده از دانشهای فازی بیان‌شده توسط متغیرهای زبانی و مجموعه‌های غیرقطعی برای رسیدن به یک تابع غیرخطی قطعی است که بتواند به ازای مقادیر مختلف و قطعی x، مقادیر قطعی y را در اختیار ما قرار بدهد.

با توجه به نکات مطرح‌شده، در وضعیتی که به ازای یک نقطه ورودی بتوانیم از دو یا چند قاعده استفاده نماییم یعنی یک نقطه x با چند مجموعه فازی در ورودی تلاقی داشته

باشد، بحث رقابت پیش می‌آید که موتور استنتاج می‌تواند با توجه به اصل گسترش رقابت بین قواعد، خروجی y مربوط به x نظیر را به دست آورد.
همچنین در حالت دوم، یعنی موردی که یک x در ورودی با قسمت شرط هیچ‌یک از قواعد تلاقی نداشته باشد می‌توان به وسیله درون‌یابی[1]، تابع غیرخطی مربوط به سیستم را به دست آورد. استفاده از درون‌یابی حتی اگر قواعد بیان‌کننده رفتار سیستم کامل نباشند و شامل تمام فضای ورودی هم نشوند، میسر می‌باشد.

در ادامه این فصل ابتدا با فرض این که قواعد بیان‌کننده سیستم کامل است و تمامی فضای ورودی را می‌پوشاند، به شبیه‌سازی تابع با سیستمهای غیرخطی فازی می‌پردازیم. سپس با استفاده از تعریف نقاط فازی در صفحه ورودی-خروجی دو روش را برای درون‌یابی تابع در حالاتی که قواعد بیان‌کننده سیستم کامل نیستند، معرفی می‌کنیم.

10-2: شبیه‌سازی یک تابع غیرخطی

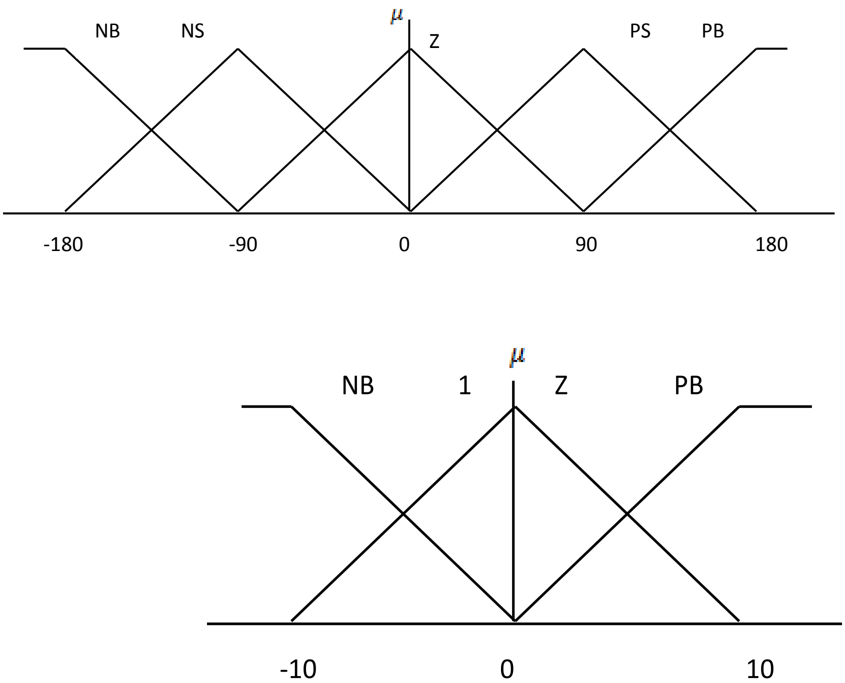
در این قسمت با استفاده از دانش فازی بیان‌شده توسط قواعد $if-then$ در مورد دو سیستم غیرخطی، به شبیه‌سازی آنها می‌پردازیم که این عملیات در قالب دو مثال مطرح خواهند شد. در این مثالها قواعد به‌گونه‌ای هستند که تمام سطح مجموعه مرجع ورودی و خروجی پوشانده می‌شود و نیازی به درون‌یابی نیست.

مثال 1: دانش مربوط به یک سیستم غیرخطی به صورت قواعد گنجانده‌شده در جملات زیر در اختیار ما قرار گرفته است:

$$\begin{aligned}&if\ \ x\ \ is\ \ Z\ \ or\ \ PB\ \ then\ \ y\ \ is\ \ Z\\&if\ \ x\ \ is\ \ PS\ \ then\ \ y\ \ is\ \ PB\\&if\ \ x\ \ is\ \ Z\ \ or\ \ NB\ \ then\ \ y\ \ is\ \ Z\\&if\ \ x\ \ is\ \ NS\ \ then\ \ y\ \ is\ \ NB\end{aligned}$$

متغیرهای زبانی استفاده‌شده در این قواعد در شکل 10-9 نشان داده شده‌اند.

[1] Interpolation



شکل10-9: یک سیستم غیرخطی

قواعد فوق را به صورت زیر نیز می‌توان خلاصه کرد:

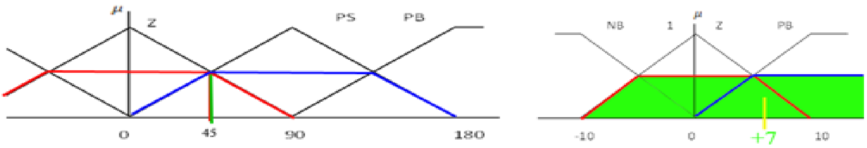
X	NB	NS	Z	PS	PB
Y	Z	NB	Z	PB	Z

سیستم غیرخطی ما تابع $y = 10\sin(x)$ می‌باشد که در بازه $\left[-180^\circ, 180^\circ\right]$ تعریف شده است. روشن است که خروجی تابع سینوسی در بازه $[-10,10]$ قرار می‌گیرد. دانش مربوط به این سیستم نیز با استفاده از متغیرهای زبانی (مجموعه‌های فازی در بازه‌های فوق) تعریف شده است.

اکنون به منظور شبیه‌سازی سیستم غیرخطی تابع فوق، نقاط زیر را روی محور x ها در نظر می‌گیریم:

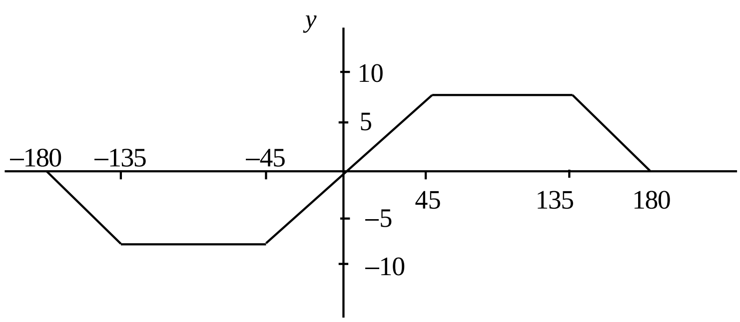
$$x = \left\{-135^\circ, -45^\circ, 45^\circ, 135^\circ\right\}$$

خروجی y متناظر این مقادیر به صورت $y=\{-7,\ -7,\ 7,\ 7\}$ به دست می‌آید که با استفاده از روشهای ارائه‌شده در استنتاج از قواعد مدل ممدانی حاصل می‌شود. روش کار برای نقطه ورودی 45° در شکل 10-10 نشان داده شده است.



شکل 10-10: خروجی سیستم غیرخطی در 45°

با انجام مراحل کار برای تمامی نقاط، تابع شبیه‌سازی‌شده نهایی در شکل 10-11 نشان داده می‌شود.

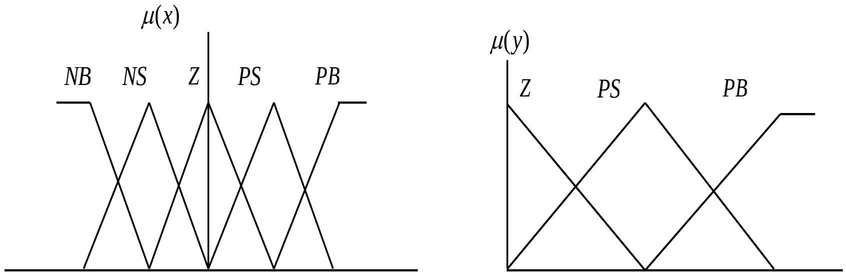


شکل 10-11: تابع شبیه‌سازی سیستم غیرخطی شکل 10-10

مثال 2: دانش مربوط به یک سیستم غیرخطی در زیر آورده شده است:

$$if \quad x=Zero, \quad then \quad y=Zero$$
$$if \quad x=NS, \quad then \quad y=PS$$
$$if \quad x=NB \ or \ PB, \quad then \quad y=PB$$

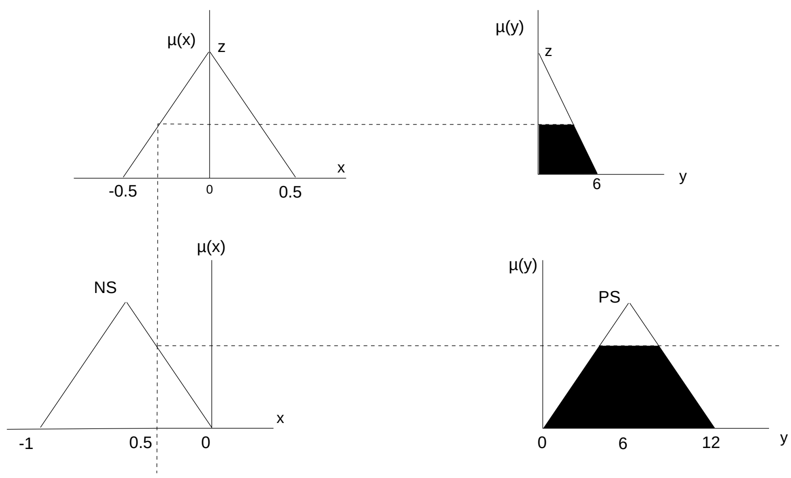
متغیرهای زبانی PB, NB, PS, NS, Z در ورودی و PB, PS, Z در خروجی مانند شکل 10-12 تعریف شده‌اند:

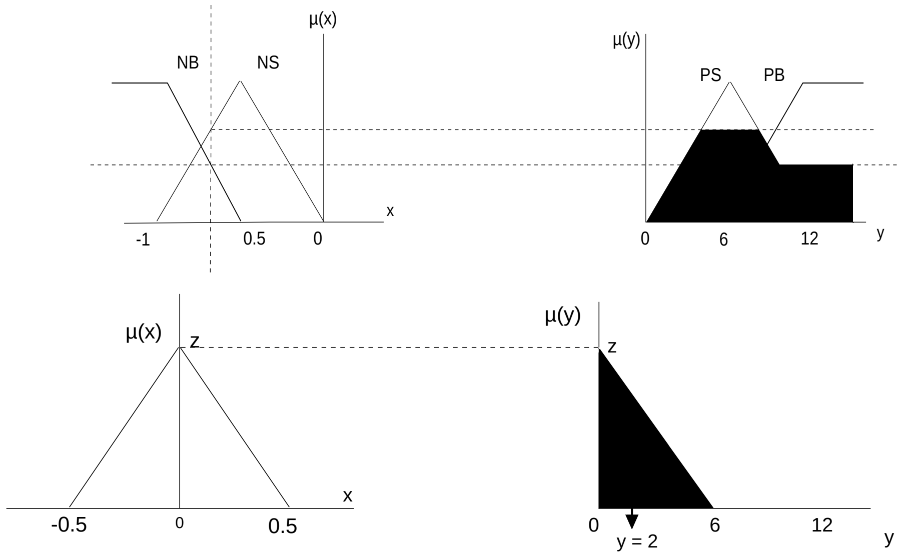


شکل10-12: یک سیستم غیرخطی

قواعد فوق بیان‌کننده سیستمی هستند که روی تابع غیرخطی $y=12|x|$ عمل می‌کند. اگر نقاط $x=\{-0.6,-0.3,0,0.3,0.6\}$ را روی محور ورودی در نظر بگیریم با توجه به روش استنتاج ارائه‌شده برای قواعد مدل ممدانی، به خروجی $y=\{8,5,2,5,8\}$ خواهیم رسید.

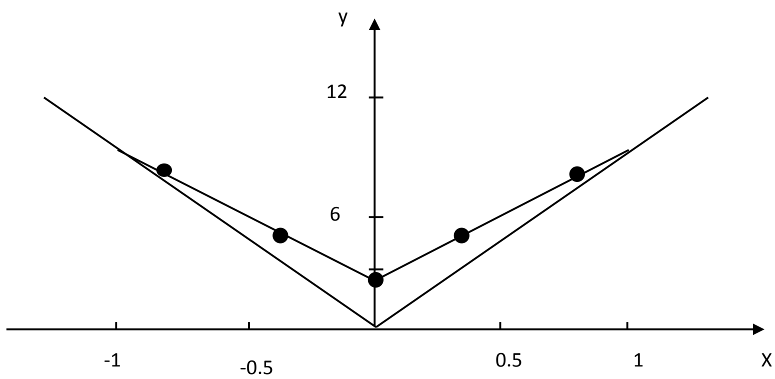
همان‌گونه که در شکل10-13 نیز دیده می‌شود، ورودی $x=-0.3$ با دو مقدار از تابع عضویت ورودی تقاطع دارد که برای هر یک از آنها با توجه به قواعد پایگاه دانش و میزان تطابق با قسمت شرط قاعده مربوطه، تابع عضویت خروجی و غیرفازی‌نمودن این تابع عضویت، حاصل خروجی $y=5$ به دست می‌آید. با در نظر گرفتن $x=-0.6$ و طی مراحل مشابه به خروجی $y=8$ خواهیم رسید.





شکل10-13: شبیه‌سازی سیستم غیرخطی

با در نظر گرفتن $x=0$ و با توجه به پایگاه معرفت سیستم، فقط از یک قاعده می‌توانیم استفاده کنیم که خروجی $y=2$ را نتیجه می‌دهد. تابع شبیه‌سازی‌شده و تابع غیرخطی اولیه در شکل10-14 نشان داده شده‌اند.



شکل10-14: تقریب تابع y با شبیه‌ساز سیستم غیرخطی آن

3-10: درون‌یابی نقاط فازی در صفحه ورودی-خروجی

در تمام آزمایشها و سیستمهای غیرفازی که به ازای ورودیهای $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ خروجیهای $Y=\{y_1,y_2,...,y_n\}$ را حاصل می‌کنند، می‌توانیم اطلاعات به دست آمده از سیستم را به صورت زیر نمایش دهیم:

$$S=\{(x_i,y_i)\,|\,(x_i,y_i)\in X\times Y, i=1,2,...,n\} \qquad S'\subset s$$

حال اگر ورودی $x\in X$ به سیستم اعمال شود و با هیچ یک از مقادیر x_i تعریف‌شده در بالا برابر نباشد، سیستم s می‌تواند هر خروجی y را ایجاد نماید. برای آنکه بتوانیم مقدار y را پیش‌بینی نماییم، یک قید ساختاری که بیانگر پیش‌فرضها و ذهنیات ما از رفتار آن است، به سیستم اعمال می‌کنیم تا با این محدودیت بتوانیم تابع f_s را تعریف نماییم:

$$S=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in X\times Y, y=f_s(x)\}$$

به این عمل درون‌یابی گفته می‌شود. حال اگر x_iها و y_iها به صورت غیرقطعی و فازی تعریف شده باشند زوجهای مرتب $(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i)$ را خواهیم داشت که از لحاظ ساختاری و تعریف با زوجهای مرتب غیرفازی (x_i,y_i) متفاوت می‌باشند.

در اینجا تعریفی برای فاصله تابع قطعی $y=f(x)$ تا یک نقطه فازی ارائه می‌شود که با توجه به این تعریف، روش درون‌یابی کمترین مربعات خطا با یک مثال بررسی خواهد شد. روش ارائه‌شده، از تمامی اطلاعات نقاط فازی تعریف‌شده در صفحه دوبعدی xy برای درون‌یابی نقاط فازی استفاده می‌نماید تا یک درون‌یابی دقیق و جامع ارائه دهد. ولی حجم زیاد محاسبات ما را بر آن می‌دارد تا تعریف دیگری را نیز که با صرف‌نظرکردن از برخی اطلاعات سریعتر عمل می‌کند، مورد بررسی قرار دهیم.

پس از به دست آوردن تعدادی نقطه فازی از یک سیستم، می‌توانیم عمل درون‌یابی را برای نقاط به دست آمده انجام دهیم و یک تابع قطعی $y=f(x)$ که با توجه به پیش‌فرضها و ذهنیات ما از رفتار سیستم، می‌تواند به صورت خطی، توانی، نمایی و یا صورتهای دیگر باشد به دست آوریم.

بنابراین در دو بخش آینده، دو روش برای درون‌یابی نقاط فازی ارائه می‌شود که اولی از دقت و جامعیت برخوردار است و روش دوم با وجود دقت کمتر و استفاده غیرجامع از اطلاعات، دارای سرعت بیشتری می‌باشد.

10-3-1: درون‌یابی فازی با روش[1] کمترین مربعات خطا

در این روش، خطا به صورت فاصله خط مورد نظر تا هر یک از نقاط فازی اطلاعات تعریف می‌شود. به همین منظور باید فاصله بین دو نقطه فازی و همچنین فاصله خط $y=f\left(x\right)$ تا یک نقطه فازی را تعریف نماییم.

تعریف 10-2: اگر $\tilde{A}=\left\{\left(\left[x_A,y_A\right],\mu_{\tilde{A}}\right)\right\}$ و $\tilde{B}=\left\{\left(\left[x_B,y_B\right],\mu_{\tilde{B}}\right)\right\}$ به عنوان دو نقطه فازی مفروض باشند، فاصله این دو نقطه فازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$dist_{\tilde{A},\tilde{B}}=\left\{\begin{array}{l}\left(d,\mu_d\right)\mid d=\sqrt{\left(x_A-x_B\right)^2+\left(y_A-y_B\right)^2},\\ \mu_d=\sup\limits_{z=d} Min\left[\mu_{\tilde{A}}\left(x_A,y_A\right),\mu_{\tilde{B}}\left(x_B,y_B\right)\right]\end{array}\right\}$$

تعریف 10-3: اگر نقطه فازی $\tilde{A}=\left\{\left(\left[x_B,y_A\right],\mu_{\tilde{A}}\right)\right\}$ و تابع $y=f\left(x\right)$ مفروض باشند، فاصله تابع $f\left(x\right)$ و نقطه فازی $\tilde{A}$ که بیانگر کمترین مربعات این فاصله مورد نظر برای درون‌یابی می‌باشد، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$dist_{\tilde{A}_i,y=f(x)}=\left\{\left(d,\mu_{d_y}\right)\mid d=f\left(x_A\right)-y_A,\mu_{d_y}=\sup\limits_{z=d_y}\mu_{\tilde{A}}\left(x_A,y_A\right)\right\}$$

به منظور درون‌یابی با کمترین مربعات خطا، باید تابع $\tilde{E}$ با تعریف زیر مینیمم شود:

$$\tilde{E}=\left[\frac{1}{N}\sum_i dist^2_{\tilde{A}_i,y=f(x)}\right]^{1/2}$$

اگر تابع $f(x)$ به صورت خطی $\left(y=ax+b\right)$ مفروض باشد برای مینیمم شدن تابع $\tilde{E}$ باید $\frac{\partial_{\tilde{E}}}{\partial_a},\frac{\partial_{\tilde{E}}}{\partial_b}$ را مساوی صفر قرار دهیم که حاصل به صورت برابری دو مجموعه فازی

---

[1] Mean Square Error (MSE)

با صفر خواهد بود. اگر تابع $f\left(x\right)$ به صورت قطعی مورد نظر باشد دو مجموعه فازی حاصل از $\frac{\partial_{\tilde{E}}}{\partial_a},\frac{\partial_{\tilde{E}}}{\partial_b}$ را فازی‌زدایی می‌نماییم.

به عبارت دیگر به وسیله یکی از روشهای غیرفازی‌کردن مثل روش مرکز ثقل، روش مرکز مجموعها، روش ارتفاع و... مقدار غیرفازی دو مجموعه را به دست آورده، معادل صفر قرار می‌دهیم. نتیجه نهایی این عملیات، دو معادله و دو مجهول است که می‌توانیم از آنها مقادیر a و b را به دست آوریم.

اما اگر تابع $f\left(x\right)$ با حفظ تمام اطلاعات و به صورت فازی مورد نظر باشد، دو مجموعه فازی حاصل از مشتق را فازی‌زدایی نمی‌کنیم، بلکه با معادل قرار دادن آن مجموعه‌ها با صفر، زوجهای a و b را با توابع عضویت متفاوت به دست می‌آوریم که معرف تابع خطی $y=ax+b$ به صورت فازی می‌باشند.

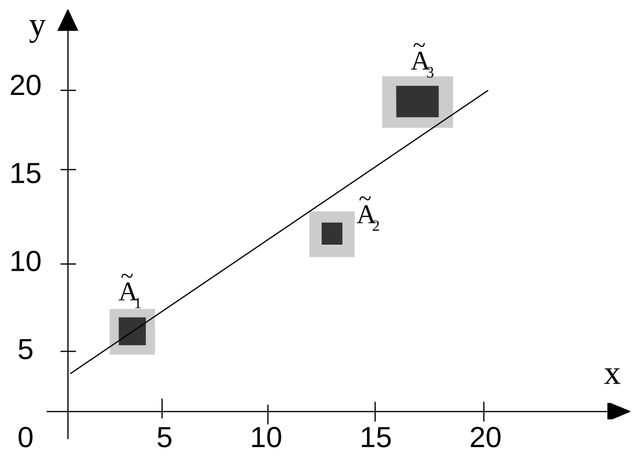
این عمل را برای توابع توانی و نمایی نیز می‌توان انجام داد و با معادل صفر قرار دادن مشتق $\tilde{E}$ نسبت به پارامترهای توابع مفروض، آن پارامترها را به دست آورده تا از تابع درون‌یابی‌شده استفاده نماییم.

مثال: نقاط فازی $\tilde{A}_1$، $\tilde{A}_2$ و $\tilde{A}_3$ با تعریف زیر (شکل 10-15) مفروض می‌باشند:

$$\tilde{A}_1=\begin{Bmatrix}([2,3],0.5),([2,6],0.5),([5,3],0.6),([5,6],0.7),([3,4],1),\\([3,5],0.7),([4,4],0.8),([4,5],1),\end{Bmatrix}$$

$$\tilde{A}_2=\begin{Bmatrix}([12,9],0.5),([12,12],0.6),([15,9],0.5),([15,12],0.5),([13,10],1),\\([13,11],0.8),([14,10],0.9),([14,11],0.7),\end{Bmatrix}$$

$$\tilde{A}_3=\begin{Bmatrix}([16,15],0.5),([16,18],0.5),([19,15],0.5),([19,18],0.5),([17,16],1),\\([17,17],0.9),([18,16],1),([18,17],0.9),\end{Bmatrix}$$



شکل10-15: درون‌یابی فازی به روش اول

برای به دست آوردن تابع $y = ax + b$ به صورتی که نسبت به نقاط فازی فوق دارای کمترین مربعات خطا باشد، تابع $\tilde{E}(a,b)$ را با استفاده از رابطه محاسبه تابع $\tilde{E}$ به دست آورده، سپس $\frac{\partial_{\tilde{E}}(a,b)}{\partial_a}, \frac{\partial_{\tilde{E}}(a,b)}{\partial_b}$ را برابر با صفر قرار می‌دهیم. دو رابطه به دست می‌آید که دو مجموعه فازی را معادل با صفر در نظر گرفته است. غیرفازی کردن این دو مجموعه دو رابطه زیر را به دست می‌دهد:

$$\begin{cases} 488a + 34b = 418 \\ 34a + 3b = 30.5 \end{cases}$$

با حل دستگاه معادلات فوق، مقادیر $a = 0.7045, b = 2.18$ نتیجه می‌شوند. یعنی خط $y = 0.7045x + 2.18$ خط حاصل از درون‌یابی (شکل10-15) می‌باشد.

10-3-2: درون‌یابی فازی به کمک آنتروپی

همان‌گونه که ملاحظه شد حجم زیاد محاسبات در روش اول، ما را بر آن می‌دارد تا روشی با دقت کمتر و عدم استفاده جامع از اطلاعات ارائه دهیم. در روش دوم، با توجه به این نکته که نقاط قطعی‌تر اهمیت بیشتری نسبت به نقاط فازی‌تر از خود دارند، تصمیم

می‌گیریم عمل غیرفازی‌کردن را برای تک‌تک نقاط مجموعه اطلاعات انجام داده تا با اندازه‌گیری میزان آنتروپی (فازی‌بودن) هر نقطه از مجموعه، به آن نقطه وزن w_i را نسبت دهیم. هر نقطه $\tilde{A}_i$ فازی که به نقطه A_i غیرفازی تبدیل شده است با توجه به وزن w_i خط y را به سمت خود می‌کشد تا میزان خطا را نسبت به خود کمتر نماید.

اگر نقطه $\tilde{A}_i = \left\{\left(\left[x, y\right], \mu_{\tilde{A}_i}\right)\right\}$ مفروض باشد، میزان فازی بودن نقطه $\tilde{A}_i$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$d(\tilde{A}_i) = k \sum_j S\left(\mu(\tilde{A}_i)\left[x, y\right]_j\right)$$

S تابع شانون با تعریف $S = -x\,ln\left(x\right) - \left(1-x\right)ln\left(1-x\right)$ است و k بیانگر یک مقدار ثابت مثبت می‌باشد. پس از به دست آوردن $d\left(\tilde{A}_i\right)$ به ازای $i = 1,2,...,n$ داریم:

$$D = \sum_i d\left(\tilde{A}_i\right)$$

و مقدار w_i ها نیز از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$w_i = 1 - \frac{d\left(\tilde{A}_i\right)}{D}$$

با توجه به دیدگاه مطرح‌شده برای این روش، به بررسی روشهای به دست آوردن تابع درون‌یابی شده خطی، توانی و نمایی می‌پردازیم.

10-3-2-1: تابع خطی

اگر نقاط فازی $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, ..., \tilde{A}_n$ مفروض باشند و نقاط فازی‌زدایی‌شده آنها با مختصات $\left(x_1, y_1\right), \left(x_2, y_2\right), ..., \left(x_n, y_n\right)$ و وزنهای $w_1, w_2, ..., w_n$ در نظر گرفته شوند، برای به دست آوردن تابع خطی $y = ax + b$ با کمترین مربعات خطا باید تابع $E\left(a,b\right)$ با تعریف زیر را مینیمم کنیم:

$$E_{(a,b)} = \sum_i w_i \left|ax_i + b - y_i\right|^2$$

برای آنکه این تابع مینیمم شود، مشتق آن نسبت به a و b را برابر صفر قرار می‌دهیم تا دستگاه معادلات زیر حاصل شود:

$$\begin{cases} \left(\sum_i w_i x_i^2\right)a + \left(\sum_i w_i x_i^2\right)b = \sum_i w_i x_i y_i \\ \left(\sum_i w_i x_i\right)a + \left(\sum_i w_i\right)b = \sum_i w_i x_i \end{cases}$$

با حل دستگاه معادله فوق و به دست آوردن a و b خط $y = ax + b$ بیانگر تابع برازش‌شده خطی با کمترین مربعات خطا می‌باشد.

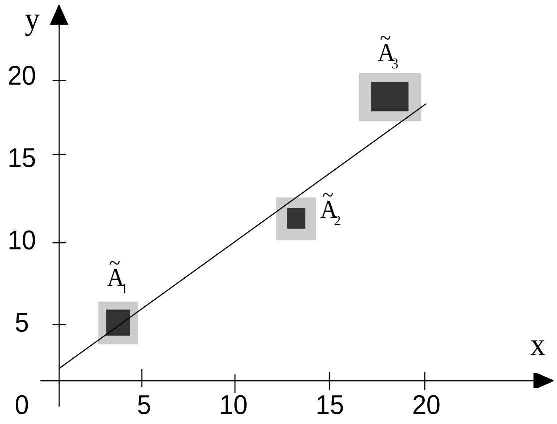
مثال: نقاط فازی تعریف‌شده در مثال قبل را در نظر بگیرید . این سه نقطه را غیرفازی کرده، وزنهای زیر را برای آنها به دست می‌آوریم:

$$\tilde{A}_1 = A_1(3.8,4.4) \qquad w_1 = 0.6488$$
$$\tilde{A}_2 = A_2(13.1,15) \qquad w_2 = 0.6298$$
$$\tilde{A}_3 = A_3(17.4,16.2) \qquad w_3 = 0.722$$

تابع $E(a,b)$ را به دست می‌آوریم و مشتق E نسبت به a و b را برابر با صفر قرار می‌دهیم تا دستگاه معادلات زیر حاصل شود:

$$336a + 23.2b = 296.87$$
$$23.2a + 2b = 20.85$$

که با حل دستگاه فوق $a = 0.8$، $b = 1.04$ به دست می‌آید. حط حاصل از درون‌یابی $y = 0.8x + 1.04$ (رسم‌شده در شکل10-16) می‌باشد.



شکل10 - 16: درون‌یابی فازی به روش دوم (تابع خطی)

10-3-2-2: تابع توانی

با مفروضات قسمت قبل، اگر تابع $y = ax^M$ را که در آن M یک عدد ثابت است با کمترین مربعات خطا برازش نماییم، باید تابع $E(a)$ با تعریف زیر را مینیمم کنیم:

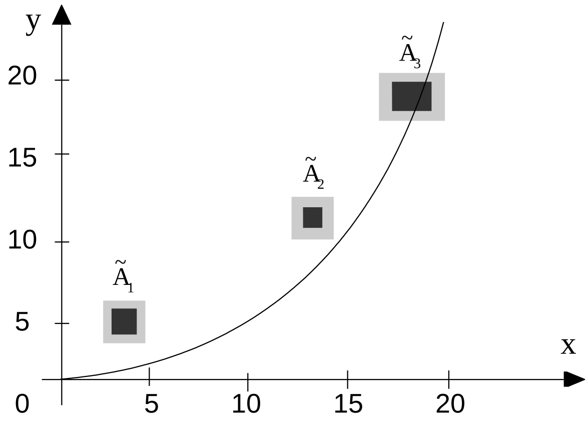
$$E_{(a)} = \sum_i w_i \left(a x_i^M - y_i \right)^2$$

با استفاده از $\frac{\partial_{E(a)}}{\partial_a} = 0$ خواهیم داشت:

$$a = \frac{\sum_i w_i x_i^M y_i}{\sum_i w_i x_i^{2M}}$$

مثال: سه نقاط فازی تعریف‌شده در مثالهای قبل مفروضند. این نقاط را فازی‌زدایی کرده، وزنهای w_i را برای هر یک به دست می‌آوریم. با فرض $M = 3$ با به دست آوردن مقدار خطا از رابطه مربوط به $E(a)$ و معادل قرار دادن مشتق آن برابر با صفر، مقدار $a = 0.00327$ را به دست خواهیم آورد.

تابع برازش‌شده $y = 0.00327x^3$ با کمترین مربعات خطا نسبت به سه نقطه فازی داده‌شده، یک منحنی با درجه سه است که در شکل 10-17 نشان داده شده است.



شکل10-17: درون‌یابی فازی به روش دوم (تابع توانی)

10-3-2-3: تابع نمایی $y = c\,exp(ax)$

به منظور برازش منحن $y = c\,exp(ax)$ برای تمام نقاط فازی $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_n$ که به نقطه‌های $A_1, A_2, \ldots, A_n$ فازی‌زدایی شده‌اند و دارای وزنهای $w_1, w_2, \ldots, w_n$ هستند، تابع $E(a,c)$ با تعریف زیر باید مینیمم شود:

$$E(a,c) = \sum w_i \left(c\,exp(Ax_i) - y_i\right)^2$$

با فرض $\frac{\partial_E (a,c)}{\partial_a} = 0, \frac{\partial_E (a,c)}{\partial_c} = 0$ به دستگاه معادلات زیر خواهیم رسید:

$$\begin{cases} c\sum w_i x_i\, exp(2ax_i) - \sum w_i x_i y_i\, exp(ax_i) = 0 \\ c\sum w_i\, exp(2ax_i) - \sum w_i y_i\, exp(ax_i) = 0 \end{cases}$$

برای حل این سیستم معادلات غیرخطی می‌توان از روشهای محاسبات عددی مانند نیوتن- رافسون سود برد. در روش خطی‌سازی داده‌ها خواهیم داشت:

$$y = c\,exp\left(ax\right) \Rightarrow ln\left(y\right) = Ax + ln\left(c\right)$$
$$Y = ln\left(y\right)$$
$$A = a$$
$$X = x$$
$$b = ln\left(c\right)$$

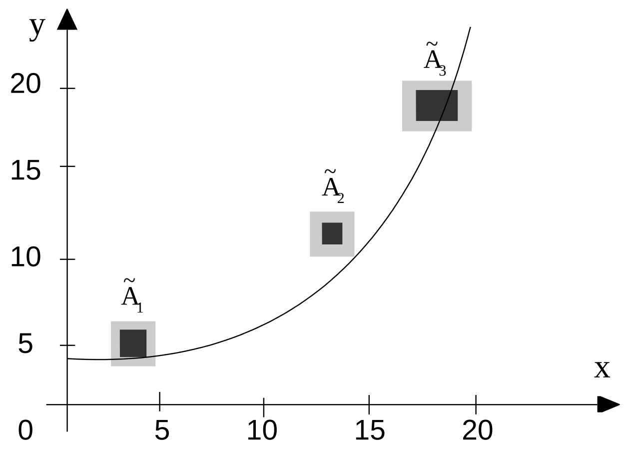
حال با توجه به این نقاط، مجموعه اطلاعات ما به صورت $\left(X_k, Y_k\right) = \left(x_k, ln\left(y_k\right)\right)$ است و می‌توان برازش خط $Y = AX + b$ را به دست آورد که خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \left(\sum_i w_i x_i^2\right) A + \left(\sum_i w_i x_i\right) b = \sum_i w_i x_i\, ln\left(y_i\right) \\ \left(\sum_i w_i x_i\right) A + \left(\sum_i w_i\right) b = \sum_i w_i\, ln\left(y_i\right) \end{cases}$$

پس از به دست آوردن a و b می‌توان ضریب c را به صورت $c = \exp(b)$ به دست آورد. خط $y = c\,exp\left(x\right)$ به عنوان برازش نمایی نقاط مجموعه اطلاعات می‌باشد.

مثال: با فرض سیستم مثال قبل، با حل دستگاه معادلات فوق خواهیم داشت:

$$a = 0.09483, b = 1.1109$$



شکل10-18: درون‌یابی فازی به روش سوم (تابع نمایی)

و c برابر خواهد بود با:

$$c = exp(1.1109)$$

و تابع $y = exp(1.1109 + 0.09483x)$ برازش نمایی با کمترین مربعات خطا نسبت به نقاط فازی خواهد بودکه در شکل 10-18 نشان داده شده است.

در این فصل ضمن تعریف نقاط فازی در صفحه XY، دو روش برای درون‌یابی این نقاط ارائه شد که روش اول از لحاظ دقت و جامعیت استفاده از اطلاعات فازی نقاط و روش دوم از لحاظ سرعت بالا و حجم کمتر محاسبات جالب توجه بودند. ضمناً در صورتی که به تمامی اطلاعات نیاز داشته باشیم و تابع درون‌یابی‌شده فازی مد نظر ما باشد، می‌توانیم با استفاده از روش اول، تابع فازی $y = f(x)$ را به دست آوریم.

از روشهای درون‌یابی ارائه‌شده در این فصل می‌توان در سیستمهای کنترل‌کننده فازی و سیستمهای خبره قاعده-پایه فازی برای حالتهایی که در پایگاه معرفت سیستم قاعده خاصی پیش‌بینی‌نشده باشد، استفاده کرد و قواعد فازی یا غیرفازی لازم را به دست آورد.