فصل 2

مجموعه‌های فازی و تعاریف اولیه

یک مجموعه فازی را می‌توان به صورت اعضای آن به همراه درجه عضویت هر عضو در نظر گرفت. در این فصل به تعریف این مفهوم و همچنین روشهای نشان‌دادن آن می‌پردازیم و تعاریف اولیه‌ای را که در تئوری مجموعه‌های صریح و جبر بولی وجود دارد، در مورد مجموعه‌های فازی نیز شرح می‌دهیم تا بتوانیم با استفاده از این ابزار، مدلی ریاضی برای مجموعه‌های فازی داشته، به صورت دقیق‌تر درباره موارد دیگر از جمله اعداد و توابع فازی، اندازه‌گیری میزان فازی‌بودن مجموعه، روابط، گرافها و آنالیز فازی بحث نماییم.

1-2: نمایش و تعاریف اولیه مجموعه‌های فازی

مجموعه صریح یا کلاسیک معمولاً با تعدادی عضو به صورت $x \in X$ تعریف می‌شود که این اعضا ممکن است قابل‌شمارش یا غیرقابل‌شمارش باشند. هر عضو x می‌تواند متعلق به مجموعه صریح A باشد یا نباشد که در صورت تعلق عضو x به مجموعه A، درجه عضویت آن یک بوده، در غیر این صورت درجه عضویت آن برابر با صفر می‌باشد. واضح است که $A \subset X$ خواهد بود.

یک مجموعه صریح را می‌توان به یکی از صورتهای زیر نمایش داد:

الف: با فهرست نمودن تک‌تک اعضایش مثل:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

ب: به صورت تحلیلی و اعمال یک شرط روی مجموعه مرجع X مثل:

$$A = \{x \mid 1 \le x \le 3\}$$

پ: به صورت زوجهای مرتبی که عضو اول این زوجها تک‌تک اعضا مجموعه مرجع X و عضو دوم، تابع مشخصه مجموعه‌ها باشد. در صورت تعلق x به مجموعه A تابع مشخصه آن یک بوده، در غیر این صورت صفر می‌باشد.

$$A = \{(0,0), (1,1), (2,1), (3,1), (4,0), (5,0), (6,0)\}$$

آنچه اعضای یک مجموعه را از دیگر اعضای متعلق به مجموعه X جدا می‌کند، یک صفت مشخص‌کننده است که می‌تواند به صورت یک گزاره بیان شود. مثلاً در مجموعه بالا گزاره "عدد بین یک و سه" به عنوان صفت مشخص‌کننده مجموعه A در نظر گرفته می‌شود.

با استفاده از منطق صریح، اپراتورهای تئوری مجموعه‌ها مطابق زیر تعریف می‌شوند:

اپراتور NOT :

$$Not \quad P = \begin{cases} 1 & if \quad P = 0 \\ 0 & if \quad P = 1 \end{cases}$$

اپراتور AND :

$$P \quad And \quad Q = \begin{cases} 1 & if \quad P,Q = 1 \\ 0 & Otherwise \end{cases}$$

اپراتور OR :

$$P \quad Or \quad Q = \begin{cases} 0 & if \quad P,Q = 0 \\ 1 & Otherwise \end{cases}$$

اپراتور IF … THEN :

$$if \quad P \quad Then \quad Q = \begin{cases} 0 & if \quad P=1 , Q=0 \\ 1 & Otherwise \end{cases}$$

با توجه به موارد فوق، برای اپراتورهای متمم، اجتماع و اشتراک تعریفهای زیر را خواهیم داشت. اپراتور متمم مجموعه صریح A به صورت زیر خواهد بود:

$$\bar{A} = \{x \in X \mid x \notin A\}$$

اجتماع دو مجموعه صریح A و B:

$$A \cup B = \{x \in A \;\; OR \;\; x \in B\}$$

اشتراک دو مجموعه صریح A و B:

$$A \cap B = \{x \in A \;\; AND \;\; x \in B\}$$

اکنون با تکیه بر اصول اولیه مربوط به منطق و مجموعه‌های صریح، به تعریف منطق و مجموعه‌های فازی می‌پردازیم. باید توجه داشت که روابط و تعاریف حاکم بر مجموعه‌های صریح، حالت خاصی از روابط و تعاریف مجموعه‌های فازی می‌باشد.

تعریف 2-1: اگر X بیانگر مجموعه مرجعی باشد که هر عضو آن با x نمایش داده شود مجموعه فازی $\tilde{A}$ در X به صورت زوجهای مرتبی به فرم زیر بیان می‌شود:

$$\tilde{A}=\left\{\left(x\ ,\ \mu_{\tilde{A}}(x)\right)\mid x\in X\right\}$$

$\mu_{\tilde{A}}(x)$ نشان‌دهنده *تابع عضویت*[1] (درجه عضویت) است که میزان تعلق x به مجموعه فازی $\tilde{A}$ را نشان می‌دهد. برد[2] این تابع شامل اعداد حقیقی غیرمنفی است که یک مقدار ماکزیمم برای آن در نظر گرفته می‌شود. مجموعه برد در حالت نرمال به فاصله بسته $[0,1]$ نگاشت می‌یابد. مشخص است که برد تابع عضویت مجموعه صریح (به عنوان حالت خاصی از مجموعه فازی) فقط $\{0,1\}$ می‌باشد.

مجموعه‌های فازی را به یکی از گونه‌های زیر می‌توانیم نمایش دهیم:

الف: با فهرست‌کردن تک‌تک اعضا متعلق به مجموعه مرجع X که تابع عضویت آنان مخالف صفر باشد. این اعضا به صورت زوجهای مرتب $\left(x\ ,\ \mu_{\tilde{A}}(x)\right)$ نمایش داده می‌شوند.

مثال: یک بنگاه مسکن میزان راحتی و مناسب‌بودن منازل ارائه‌شده برای فروش را با تعداد اتاق خوابهای آن می‌سنجد که این عدد یکی از اعضا مجموعه $X=\{1,2,3,...,10\}$ است. مجموعه فازی "منازل راحت برای یک خانواده چهار نفری" می‌تواند به صورت زیر نشان داده شود:

$$\tilde{A}=\{(1,0.2),(2,0.5),(3,0.8),(4,1),(5,0.7),(6,0.3)\}$$

ب: به صورت تحلیلی و تعریف مشروط به شکل تابع

مثال: مجموعه اعداد طبیعی نزدیک به 10، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\tilde{A}=\left\{\left(x\ ,\ \mu_{\tilde{A}}(x)\right)\mid x\in X\right\}$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\frac{1}{1+(x-10)^2}$$

پ: به صورت مجموع:

[1] Membership function
[2] Range

$$\tilde{A}=\frac{\mu_{\tilde{A}}(x_1)}{x_1}+\frac{\mu_{\tilde{A}}(x_2)}{x_2}+\frac{\mu_{\tilde{A}}(x_3)}{x_3}+\ldots=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i}$$

و یا :

$$\int_x \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x}$$

که تعاریف فوق، مجموعه فازی را روی یک دامنه گسسته یا پیوسته تعریف می‌کند.

مثال: مجموعه اعداد طبیعی نزدیک به 10 را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\tilde{A}=0.1/7+0.5/8+0.8/9+1/10+0.8/11+0.5/12+0.1/13$$

مثال: مجموعه اعداد حقیقی نزدیک به 10 را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\tilde{A}=\int_R \frac{1}{1+(x-10)^2}\Big/x$$

همان‌گونه که اشاره شد $\mu_{\tilde{A}}(x)$ می‌تواند حد بالایی غیر از یک نیز داشته باشد ولی در صورتی‌که حد بالای مجموعه را برابر با یک در نظر بگیریم، مجموعه فازی نرمال خواهیم داشت. هر مجموعه فازی غیرنرمال را می‌توان با تقسیم $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ها بر حد بالای آن به یک مجموعه فازی نرمال تبدیل کرد. در این کتاب هرجا تعبیر مجموعه فازی ذکر می‌شود، منظور از آن مجموعه فازی نرمال است که معمولاً آن را به صورتهای الف یا ب نمایش می‌دهیم. حال به ذکر تعاریف اولیه در مورد مجموعه‌های فازی می‌پردازیم:

تعریف 2-2: *پشتیبان*[1] برای *مجموعه فازی* $\tilde{A}$ که آن را با $S(\tilde{A})$ نشان می‌دهیم یک مجموعه صریح از x های متعلق به مجموعه مرجع X و با تابع عضویت مخالف صفر است.

مثال: پشتیبان مجموعه "منازل راحت برای یک خانواده چهار نفره" در مثال قبل برابر است با:

$$S(\tilde{A})=\{1,2,3,4,5,6\}$$

[1] Support

یعنی اعضا مجموعه $\{7,8,9,10\}$ که دارای تابع عضویت صفر می‌باشند در مجموعه $S(\tilde{A})$ قرار نمی‌گیرند. یک تعریف عمومی‌تر از مجموعه پشتیبان، به صورت مجموعه پشتیبان در سطح α بیان می‌شود.

تعریف 2-3: *مجموعه پشتیبان در سطح* α [1] به مجموعه‌ای گفته می‌شود که اعضایش xهای متعلق به مجموعه مرجع X بوده، تابع عضویت آنها در مجموعه فازی $\tilde{A}$ بزرگتر یا مساوی عدد α باشد.

$$A_\alpha = \left\{ x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}\left(x\right) \geq \alpha \right\}$$

مشابه تعریف فوق، مجموعه $A'_\alpha = \left\{ x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}\left(x\right) > \alpha \right\}$ مجموعه *پشتیبان قوی در سطح* α [2] نامیده می‌شود.

مثال: برای مجموعه "منازل راحت برای یک خانواده چهار نفره " خواهیم داشت:

$$A_{0.2} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A_{0.5} = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$A_{0.8} = \{3, 4\}$$

$$A_1 = \{4\}$$

مجموعه پشتیبان قوی در سطوح مشابه، مانند زیر خواهد بود:

$$A'_{0.2} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A'_{0.5} = \{3, 4, 5\}$$

$$A'_{0.8} = \{4\}$$

$$A'_1 = \{\ \}$$

تعریف 2-4: مجموعه فازی $\tilde{A}$ *کوژ* [3] (محدب) است اگر دارای خاصیت زیر باشد:

$$\mu_{\tilde{A}}\left(\lambda x_1 + \left(1-\lambda\right) x_2\right) \geq min\left\{\mu_{\tilde{A}}\left(x_1\right), \mu_{\tilde{A}}\left(x_2\right)\right\}$$

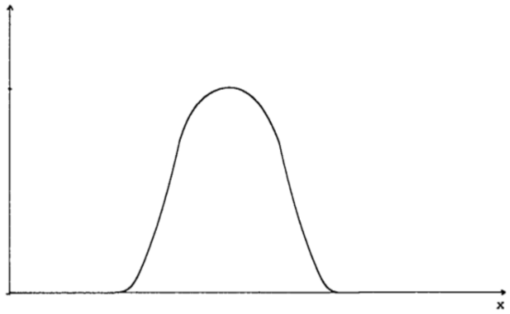
درصورتی‌که:

---

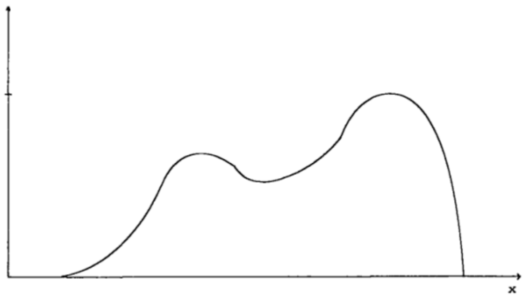
[1] α-level set (α-cut set)
[2] Strong α-level set (strong α-cut set)
[3] Convex

$$x_1, x_2 \in X, \qquad \lambda \in [0,1]$$

شکل2-1 یک مجموعه فازی کوژ را نشان می‌دهد. اگر تمام مجموعه‌های پشتیبان در سطح α برای یک مجموعه فازی، کوژ باشند، خود آن مجموعه فازی کوژ خواهد بود. یک حالت برای مجموعه فازی غیرکوژ در شکل 2-2 دیده می‌شود.



شکل2-1: مجموعه فازی کوژ



شکل2-2: مجموعه فازی غیرکوژ

تعریف 2-5: *عدد اصلی*[1] مجموعه فازی متناهی $\tilde{A}$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\left|\tilde{A}\right| = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

و همچنین $\left\|\tilde{A}\right\| = \frac{|\tilde{A}|}{|X|}$ عدد اصلی نسبی مجموعه فازی $\tilde{A}$ نامیده می‌شود.

[2] Cardinality

واضح است که عدد اصلی نسبی به عدد اصلی مجموعه مرجع وابسته است. در نتیجه اگر قصد مقایسه دو مجموعه را با میزان عدد اصلی آنها داریم، باید مجموعه مرجع X را برای هر دوی آنها یکسان فرض کنیم.

همان‌طورکه مشخص است در یک مجموعه صریح، عدد اصلی برابر با تعداد اعضای مجموعه خواهد بود. زیرا μ برای تمامی اعضا در این مجموعه برابر با یک است و این دقیقاً مطابق با انتظاری است که از تعریف نماد | | در نظریه مجموعه‌های کلاسیک داریم.

مثال: در مورد مجموعه "منازل راحت برای خانواده چهار نفره" عدد اصلی به صورت زیر حاصل خواهد شد:

$$\left|\tilde{A}\right| = 0.2 + 0.5 + 0.8 + 1 + 0.7 + 0.3 = 3.5$$

و عدد اصلی نسبی آن بدین‌صورت می‌باشد:

$$\left\|\tilde{A}\right\| = \frac{3.5}{10} = 0.35$$

عدد اصلی به صورت $\left|\tilde{A}\right| = \int_x \mu_{\tilde{A}}\left(x\right)dx$ برای مجموعه‌هایی که دارای مجموعه مرجع پیوسته هستند، تعریف می‌شود. البته ممکن است مجموعه فازی دارای عدد اصلی نباشد.

مثال: عدد اصلی مجموعه فازی اعداد حقیقی نزدیک به ده، برابر است با:

$$\left|\tilde{A}\right| = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\left(x-10\right)^2}dx$$

تعریف 2-6: دو مجموعه فازی را *برابر* گوییم اگر و فقط اگر

$$\forall x \in X : \mu_{\tilde{A}}\left(x\right) = \mu_{\tilde{B}}\left(x\right)$$

این تعریف بدین معناست که تمامی اعضای مجموعه A باید در مجموعه B وجود داشته باشند (مانند تعریف برابری در مجموعه‌های صریح) ضمن اینکه میزان عضویتهای عناصر نظیر در مجموعه‌ها نیز باید با یکدیگر مساوی باشد.

تعریف 2-7: مجموعه فازی $\tilde{A}$ *زیرمجموعه* برای مجموعه فازی $\tilde{B}$ است اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$\forall x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \le \mu_{\tilde{B}}(x)$$

مثال: برای $\tilde{A} = \{(1,0.2),(2,0.8)\}$ و $\tilde{B} = \{(1,0.3),(2,1),(3,0.3)\}$ می‌توان گفت: $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$

تعریف 2-8: در مجموعه فازی $\tilde{A}$ منظور از Sup، حد *بالایی*[1] $\mu_{\tilde{A}}(x)$ در آن مجموعه است که به آن *وزن*[2] مجموعه نیز می‌گوییم.

$$hgt_{(\tilde{A})} = \underset{x \in X}{Sup}\, \mu_{\tilde{A}}(x)$$

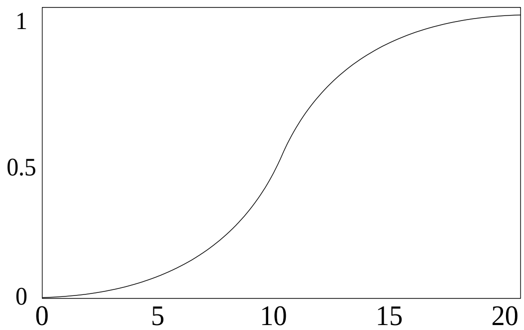
مثال: در مجموعه $\tilde{A} = \{(1,0.2),(2,0.8)\}$ وزن مجموعه برابر با 0.8 می‌باشد.

2-2 : انواع مجموعه‌های فازی

در این قسمت مجموعه‌های فازی را از نظر شکل تابع عضویت و درجه فازی‌بودن آنها مورد بررسی قرار می‌دهیم تا در آنالیز و اعمال اپراتورهای مربوط به آنها، این مجموعه‌ها را بهتر بشناسیم.

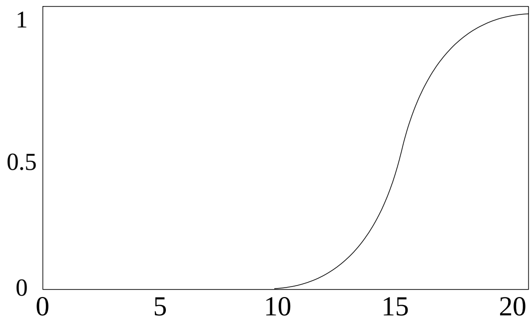
2-2-1: شکل تابع عضویت

مجموعه فازی را می‌توان به فرم یک نمودار دوبعدی که محور طولهای آن، مجموعه مرجع x و محور عرضهای آن، تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}(x)$ را مشخص می‌نماید، نمایش داد. برای توضیح بیشتر به معرفی چند مجموعه می‌پردازیم و پس از شرح و بسط ریاضی، آنها را تقسیم‌بندی می‌نماییم. در شکلهای 2-3 تا 2-8 یک منحنی معادل برای مجموعه نمرات خوب، خیلی خوب، بد، خیلی بد، متوسط و غیرمتوسط نشان داده شده است:

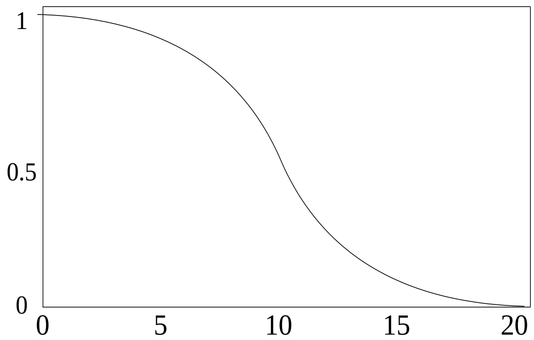


[1] Supermom
[2] Height

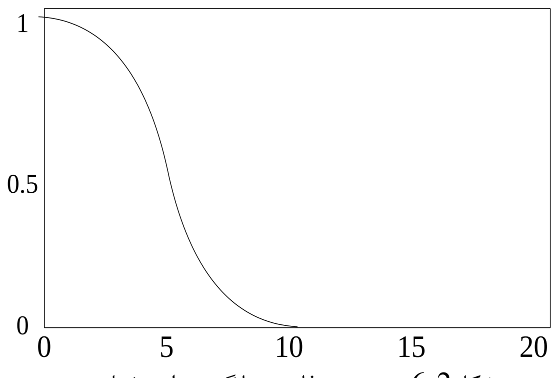
شکل2-3: مجموعه فازی بیانگر نمرات خوب



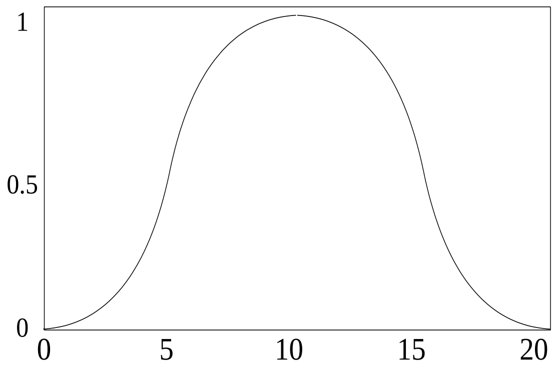
شکل2-4: مجموعه فازی بیانگر نمرات خیلی خوب



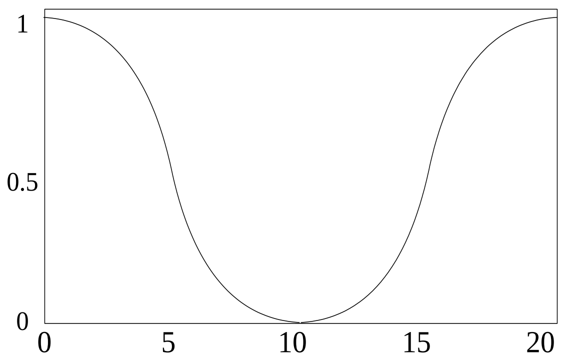
شکل2-5: مجموعه فازی بیانگر نمرات بد



شکل2-6: مجموعه فازی بیانگر نمرات خیلی بد



شکل2-7: مجموعه فازی بیانگر نمرات متوسط



شکل2-8: مجموعه فازی بیانگر نمرات غیرمتوسط

همان‌گونه که مشاهده می‌شود، شکلهای فوق شباهت بسیاری به حروفS ، Z ، π وV انگلیسی و حرف π دارند. با استفاده از این شباهت، توابع را در چهار بخش بررسی می‌کنیم:

تابع S گونه: اگر به توابع شکلهای2-3 و 2-4 توجه شود آستانه‌هایی را می‌بینیم که بیانگر حد پایین، وسط و بالای تابع (به ترتیب با a وb وc نشان می‌دهیم) می‌باشند. با توجه به این مقادیر آستانه‌ای می‌توانیم هر تابع S گونه را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$s(x,a,b,c)=\begin{cases}0 & if \quad x\le a\\ 2\left(\dfrac{x-a}{c-a}\right)^2 & if \quad a\le x\le b\\ 1-2\left(\dfrac{x-a}{c-a}\right)^2 & if \quad b\le x\le c\\ 1 & if \quad x\ge c\end{cases}$$

مثال: اگر برای مقادیر آستانه‌ای داشته باشیم: a=5 b=10 c=15

- نمرات صفر تا پنج در مجموعه نمرات خوب درجه عضویت صفر دارند.
- درجه عضویت نمره‌های بین پنج و ده، عددی بین 0 و 0.5 است. برای مثال درجه عضویت نمره هفت برابر است با :

$$2\left(\frac{7-5}{15-5}\right)^2=0.08$$

- برای نمرات بین ده تا 15، درجه عضویت بین 0.5 و 1 است. برای مثال درجه عضویت نمره 14 برابر است با:

$$1-2\left(\frac{14-15}{15-10}\right)^2=0.98$$

- درجه عضویت برای نمرات معادل یا بیشتر از 15 برابر با یک می‌باشد.

تابع Z گونه: نمودار تابع عضویت به شکل Z در شکلهای2-5 و2-6 با توجه به مقادیر آستانه‌ای a وb وc به صورت ریاضی مطابق زیر قابل بیان است:

$$z(x,a,b,c)=\begin{cases}1 & if \quad x\le a\\ 1-2\left(\dfrac{x-a}{c-a}\right)^2 & if \quad a\le x\le b\\ 2\left(\dfrac{x-a}{c-a}\right)^2 & if \quad b\le x\le c\\ 0 & if \quad x\ge c\end{cases}$$

تابع π گونه: با دقت در شکل 2-7 مشاهده می‌شود که یک تابع π گونه را می‌توان با ترکیب تابع S گونه و Z گونه یا هر یک از آنها ایجاد کرد. یک تعریف ریاضی برای این گونه توابع به صورت زیر می‌باشد:

$$\Pi\left(x,a,b,c\right)=\begin{cases}S\left(x,a,(a+b)/2,b\right) & if \quad x\le b\\ 1-S\left(x,b,\left(b+c\right)/2,c\right) & if \quad x\ge b\end{cases}$$

به تابع π گونه، تابع کوژ یا محدب و همچنین زنگی‌شکل[1] نیز می‌گویند.

تابع V گونه: این تابع که تقریباً معکوس تابع π گونه است به کمک تابع S گونه یا Z گونه و نیز ترکیب آنها قابل نمایش است. مدل ریاضی معادل آن به این شکل است:

$$V\left(x,a,b,c\right)=\begin{cases}Z\left(x,a,(a+b)/2,b\right) & if \quad x\le b\\ S\left(x,b,(b+c)/2,c\right) & if \quad x\ge b\end{cases}$$

به تابع V گونه، تابع کاو یا مقعر نیز می‌گویند.

2-2-2: درجه فازی‌بودن مجموعه

در تعریف اولیه مجموعه فازی فرض شده بود که تابع عضویت مجموعه، یک تابع ثابت بوده، برد آن یک عدد حقیقی مخالف صفر با یک مقدار ماکزیمم (در حالت نرمال برابر با عدد یک) باشد. به این‌نوع مجموعه، مجموعه فازی نوع اول گفته می‌شود. حال به تعریف مجموعه فازی نوع دوم می‌پردازیم:

تعریف 2-9: *مجموعه فازی نوع دوم* به مجموعه‌ای گفته می‌شود که تابع عضویت آن خود یک مجموعه فازی نوع اول باشد.

مثال: با فرض مجموعه مرجع برابر با $X=\{1,2,...,10\}$، مجموعه فازی نوع دوم $\tilde{A}$ به صورت $\tilde{A}=\{(x,\mu_{\tilde{A}}(x))\}$ را به ازای x=3 با تابع عضویت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{A}}(3)&=\left\{\left(\mu_i,\mu_{ui}(3)\right)\mid i=1,...,3\right\}\\ &=\left\{\left(0.8,1\right),\left(0.7,0.5\right),\left(0.6,0.4\right)\right\}\end{aligned}$$

این بدان معناست که در $x=3$ مقدار عضویت 0.8 برابر با یک است یا به میزان 0.5 مقدار عضویتی برابر با 0.7 دارد.

به همین صورت می‌توان مجموعه‌های فازی نوع سوم و بالاتر را تعریف نمود، ولی تصور آنها و تعریف اپراتورهای جبری و تئوری مجموعه‌ها روی آنها مشکل خواهد بود.

---
[1] Bell-shape

تعریف 2-10: *مجموعه فازی نوع m*ام به مجموعه‌ای گفته می‌شود که تابع عضویت آن خود یک مجموعه فازی نوع $(m-1)$ام باشد.

2-3: اپراتورهای مجموعه فازی

تابع عضویت عامل مشخص‌کننده یک مجموعه فازی می‌باشد. پس واضح است که باید برای اپراتورهای مجموعه‌های فازی تعریفی ارائه شود که از تابع عضویت مجموعه‌ها استفاده نماید. در این‌قسمت به بررسی تعریف پیشنهادشده توسط زاده (1965) می‌پردازیم. سپس با توجه به تعاریف دیگری که ایشان و دیگر محققین ارائه نموده‌اند، خواهیم دید که تعریف دیگری برای اپراتورهای مجموعه فازی وجود ندارد.

تعریف 2-11: اگر داشته باشیم $\tilde{C}=\tilde{A}\cap\tilde{B}$ آنگاه تابع عضویت $\mu_{\tilde{c}}(x)$ که *تابع عضویت اشتراک دو مجموعه* $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ می‌باشد برابر است با:

$$\mu_{\tilde{c}}(x)=Min\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\},x\in X$$

تعریف 2-12: اگر داشته باشیم $\tilde{D}=\tilde{A}\cup\tilde{B}$ تابع عضویت $\mu_{\tilde{D}}(x)$ که *تابع عضویت اجتماع دو مجموعه* $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ می‌باشد برابراست با :

$$\mu_{\tilde{D}}(x)=Max\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\},x\in X$$

تعریف 2-13 : اگر *متمم مجموعه* $\tilde{A}$ را با $\neg\tilde{A}$ نمایش دهیم، تابع عضویت مجموعه $\neg\tilde{A}$ برابر است با:

$$\mu_{\neg\tilde{A}}(x)=1-\mu_{\tilde{A}}(x),x\in X$$

مثال: اگر فرض کنیم:

$$X=\{1,2,...,10\}$$

$$\tilde{A}=\{(1,0.2),(2,0.5),(3,0.8),(4,1),(5,0.7),(6,0.3)\}$$

و

$$\tilde{B}=\{(3,0.2),(4,0.4),(5,0.6),(6,0.8),(7,1),(8,1)\}$$

اشتراک $\tilde{C}=\tilde{A}\cap\tilde{B}$ برابر است با :

$$\tilde{C}=\{(3,0.2),(4,0.4),(5,0.6),(6,0.3)\}$$

اجتماع $\tilde{D}=\tilde{A}\cup\tilde{B}$ برابر است با :

$$\tilde{D}=\{(1,0.2),(2,0.5),(3,0.8),(4,1),(5,0.7),(6,0.8),(7,1),(8,1)\}$$

و متمم مجموعه $\tilde{B}$ $(\neg\tilde{B})$ برابر است با :

$$\neg\tilde{B}=\{(1,1),(2,1),(3,0.8),(4,0.6),(5,0.4),(6,0.2),(9,1),(10.1)\}$$

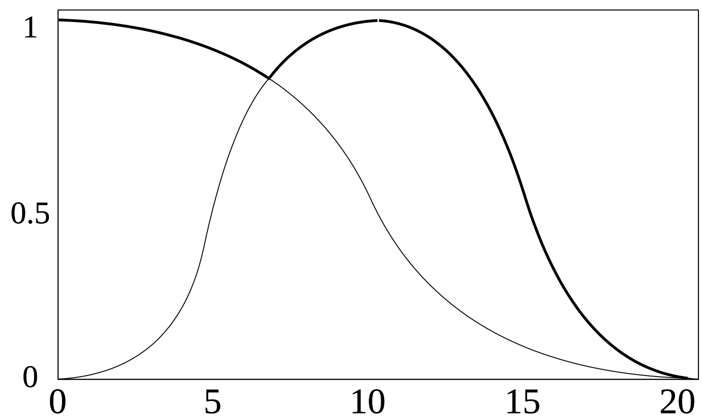
مثال: اگر فرض کنیم $X=\{1,2,3,\ \ldots,\ 18\}$

$$\tilde{A}=0.07/2+0.2/3+0.4/4+0.63/5+0.87/6+1.0/7+0.89/8+0.5/9+0.2/10+0.7/11$$

$$\tilde{B}=0.05/6+0.11/7+0.21/8+0.32/9+0.46/10+0.69/11+0.87/12+1.0/13+$$
$$0.9/14+0.5/15+0.25/16+0.09/18$$

آنگاه خواهیم داشت :

$$\tilde{A}\cup\tilde{B}=0.07/2+0.2/3+0.4/4+0.63/5+0.87/6+1/7+0.89/8+0.5/9+$$
$$0.46/10+0.7/11+0.87/12+1/13+0.9/14+0.5/15+0.25/16+0.09/18$$



شکل2-9: اجتماع دو مجموعه فازی

شکل2-9 اجتماع دو مجموعه دلخواه فازی (خطوط پررنگ‌تر) را نشان می‌دهد.

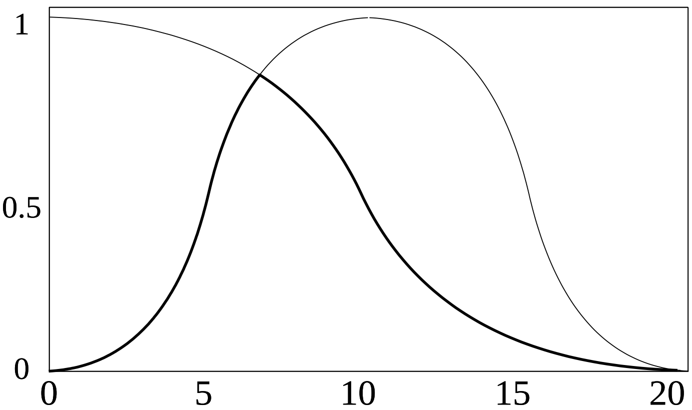
مثال: اگر فرض کنیم $X=\{1,2,3,\ \ldots,\ 20\}$

$$\tilde{A} = 0.15/2 + 0.41/3 + 0.66/4 + 0.85/5 + 0.97/6 + 1.0/7 + 0.9/8 + 0.6/9 + 0.42/10 + 0.3/11 + 0.18/12 + 0.1/13 + 0.03/14$$

$$\tilde{B} = 0.05/5 + 0.1/6 + 0.16/7 + 0.25/8 + 0.35/9 + 0.47/10 + 0.62/11 + 0.8/12 + 0.94/13 + 1.0/14 + 0.97/15 + 0.83/16 + 0.5/17 + 0.2/18 + 0.07/19$$

آنگاه خواهیم داشت :

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = 0.05/5 + 0.1/6 + 0.16/7 + 0.25/8 + 0.35/9 + 0.42/10 + 0.3/11 + 0.18/12 + 0.1/13 + 0.03/14$$



شکل2-10: اشتراک دو مجموعه فازی

شکل2-10 اشتراک دو مجموعه دلخواه فازی (خطوط پررنگ‌تر) را نشان می‌دهد.

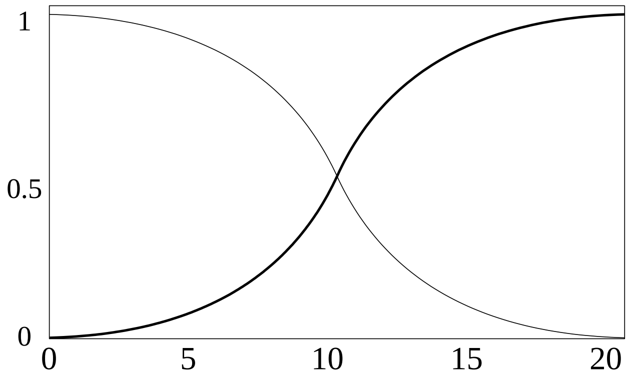
مثال: اگر فرض کنیم $X = \{1,2,3,...,17\}$

$$\tilde{A} = 0/1 + 0.05/2 + 0.14/3 + 0.27/4 + 0.5/5 + 0.76/6 + 0.93/7 + 1.0/8 + 0.96/9 + 0.84/10 + 0.62/11 + 0.37/12 + 0.25/13 + 0.16/14 + 0.09/15 + 0.03/16 + 0/17$$

خواهیم داشت :

$$A = 1.0/1 + 0.95/2 + 0.86/3 + 0.73/4 + 0.5/5 + 0.24/6 + 0.07/7 + 0/8 + 0.04/9 + 0.16/10 + 0.38/11 + 0.63/12 + 0.75/13 + 0.84/14 + 0.91/15 + 0.97/16 + 1.0/17$$

شکل2-11 نشان‌دهنده یک مجموعه دلخواه فازی و متمم آن (خطوط پررنگ‌تر) است.



شکل 2-11: متمم یک مجموعه فازی

مثال: اگر $X = \mathbb{R}$ و $\tilde{A}$ مجموعه اعداد بزرگتر از 10 و $\tilde{B}$ مجموعه اعداد نزدیک به 10 باشد، آنگاه $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\tilde{A} = \left\{ \left(x \ , \ \mu_{\tilde{A}}(x) \right) \mid x \in X \right\}$$

با در نظر گرفتن

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & x \le 10 \\ \left(1 + (x-10)^{-2} \right)^{-1} & x > 10 \end{cases}$$

و

$$\tilde{B} = \left\{ \left(x \ , \ \mu_{\tilde{B}}(x) \right) \mid x \in X \right\}$$

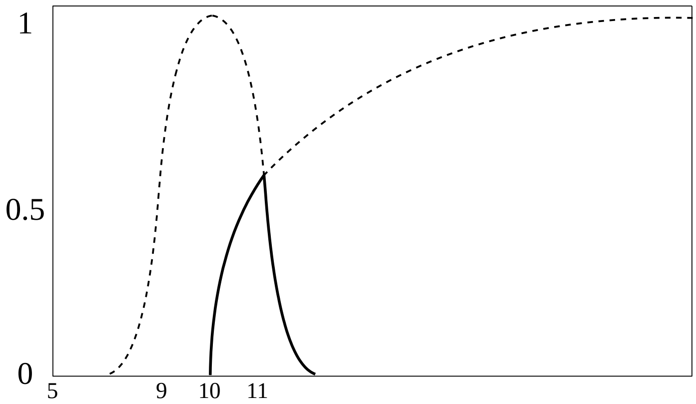
با در نظر گرفتن

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \left(1 + \left(x - 10 \right)^{4} \right)^{-1}$$

با فرضیات فوق تابع عضویت اشتراک و اجتماع دو مجموعه $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به صورت زیر خواهد بود. شکل 2-12 اجتماع و اشتراک این دو مجموعه فازی را نشان می‌دهد.

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}} = \begin{cases} Min\left[\left(1 + (x-10)^{-2} \right)^{-1}, \left(1 + (x-10)^{4} \right)^{-1} \right] & x > 10 \\ 0 & x \le 10 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}} = Max\left[\left(1 + (x-10)^{-2} \right)^{-1}, \left(1 + (x-10)^{4} \right)^{-1} \right] \qquad , x \in X$$



شکل2-12: اجتماع (خط‌چین) و اشتراک (خط پررنگ) دو مجموعه فازی

اپراتورهای مینیمم و ماکزیمم تنها اپراتورهایی هستند که می‌توان از آنها برای تعریف اجتماع و اشتراک مجموعه‌های فازی استفاده کرد. حال سوالی که مطرح می‌شود این است که چه خصوصیاتی در اپراتورهای مینیمم و ماکزیمم وجود دارد که آنها را برای تعریف اجتماع و اشتراک مجموعه‌های فازی مناسب جلوه می‌دهد؟

بلمن[1] و گیتز[2] (1973) با توجه به منطق گزاره‌ها، محدودیتها و شرایطی را برای اپراتورهای فازی پیشنهاد نمودند. برای داشتن تعریفی مطلوب در منطق گزاره‌ها می‌توان یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ را با گزاره" عنصر X به مجموعه $\tilde{A}$ تعلق دارد" جایگزین کرد. یعنی میزان درستی گزاره، درجه عضویت عنصر X در $\tilde{A}$ را نشان بدهد و عملکرد اپراتورهای"و" و "یا" در منطق گزاره‌ها، دقیقاً مانند عملکرد اپراتورهای "اشتراک" و "اجتماع" در تئوری مجموعه‌ها باشد.

اگر فرض کنیم S و T دو گزاره باشند، شرایط و محدودیتهای بلمن و گیتز به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\mu_{(S\ and\ T)} = f_{(\mu_S\ ,\ \mu_T)}$$

$$\mu_{(S\ or\ T)} = g_{(\mu_S\ ,\ \mu_T)}$$

الف: f و g در حوزه μ_S و μ_T باید غیرنزولی و پیوسته باشند.

[1] Bellman
[2] Giertz

ب: f و g باید دارای خاصیت تقارنی باشند یعنی:

$$f\left(\mu_S,\mu_T\right)=f\left(\mu_T,\mu_S\right)$$
$$g\left(\mu_S,\mu_T\right)=g\left(\mu_T,\mu_S\right)$$

پ: $g\,(\mu_S,\mu_S),f\,(\mu_S,\mu_S)$ باید در حوزه μ_S اکیداً صعودی باشند.

ت: باید $f\,(\mu_S,\mu_T)\le \min(\mu_S,\mu_T), g\,(\mu_S,\mu_T)\ge \max(\mu_S,\mu_T)$ برقرار باشند بدین معنا که درستی عبارت" S یا T " بیشتر و درستی عبارت" S و T " کمتر از میزان درستی هر یک از عبارات S و T باشد.

ث: $g\left(0,0\right)=0,\ f\left(1,1\right)=1$

ج: جملاتی که از لحاظ منطقی با هم برابرند باید تابع عضویت برابر داشته باشند مثلاً عبارت $S_1\ and\ \left(S_2\ or\ S_3\right)$ و عبارت $\left(S_1\ and\ S_2\right)\ or\ \left(S_1\ and\ S_3\right)$ که از لحاظ منطقی ارزش یکسان دارند، باید تابع عضویت مساوی داشته باشند.

با در نظر گرفتن علامت ^ برای "و" و نیز علامت ∨ برای "یا" می‌توان شرایط فوق را به صورت زیر با عبارات ریاضی بیان نمود:

1- جابجایی

$$\mu_S\wedge\mu_T=\mu_T\wedge\mu_S$$
$$\mu_S\vee\mu_T=\mu_T\vee\mu_S$$

2- شرکت‌پذیری

$$(\mu_S\wedge\mu_T)\wedge\mu_U=\mu_S\wedge(\mu_T\wedge\mu_U)$$
$$(\mu_S\vee\mu_T)\vee\mu_U=\mu_S\vee(\mu_T\vee\mu_U)$$

3- پخش‌پذیری

$$(\mu_S\wedge\mu_T)\vee\mu_U=\left(\mu_S\vee\mu_U\right)\wedge(\mu_T\vee\mu_U)$$
$$\left(\mu_S\wedge\mu_T\right)\vee\mu_U=\left(\mu_S\vee\mu_U\right)\wedge\left(\mu_T\vee\mu_U\right)$$

4- $\mu_S\wedge\mu_T$, $\mu_S\vee\mu_T$ باید در حوزه خود پیوسته و غیرنزولی باشند.

5- در حوزه μ_S باید $\mu_S\wedge\mu_S$, $\mu_S\vee\mu_S$ اکیداً صعودی باشند.

6-

$$\mu_S \wedge \mu_T \le \min\left(\mu_S, \mu_T\right)$$
$$\mu_S \vee \mu_T \ge \max\left(\mu_S, \mu_T\right)$$

-7

$$1 \wedge 1 = 1$$
$$0 \vee 0 = 0$$

بلمن و گیتز ثابت کردند که شرایط فوق توسط اپراتورهای مینیمم و ماکزیمم به‌طور کامل برآورده می‌شود. در ادامه فصل، اپراتورهای جبری و تئوری مجموعه‌ها را به صورت روشن‌تر معرفی می‌نماییم.

2-3-1: اپراتورهای جبری

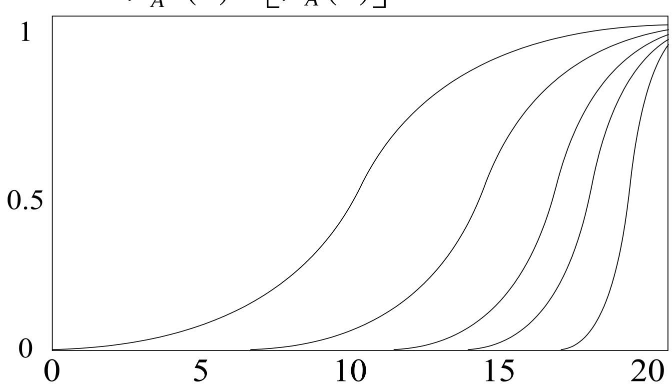
تعریف 2-14: ضرب *کارتزین* مجموعه‌های فازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

اگر $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_n$ مجموعه‌های فازی روی دامنه‌های $X_1, X_2, \ldots, X_n$ باشند، تابع عضویت ضرب کارتزین مجموعه‌های فوق در فضای $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ برابر است با:

$$\mu_{(\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \ldots \times \tilde{A}_n)}(x) \le \min\left\{\mu_{\tilde{A}_i}\left(x_i\right) \mid x = \left(x_1, \ldots, x_n\right), x_i \in X_i\right\}$$

تعریف 2-15: برای توان mام مجموعه فازی $\tilde{A}$ (شکل 2-13)، تابع عضویت مطابق زیر خواهد بود:

$$\mu_{\tilde{A}^m}\left(x\right) = \left[\mu_{\tilde{A}}\left(x\right)\right]^m, x \in X$$

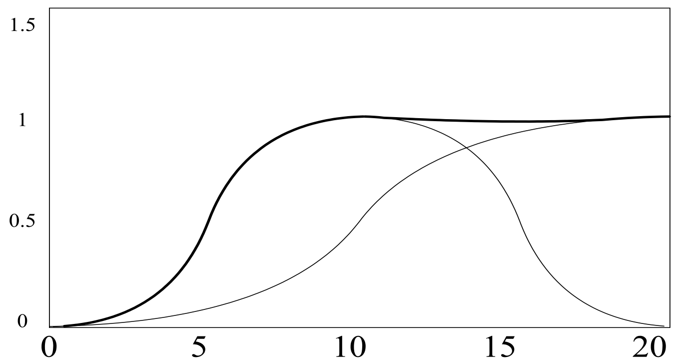


شکل 2-13: توانهای مختلف برای یک مجموعه فازی

تعریف 2-16: جمع *جبری*[1] برای دو مجموعه $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را با $\tilde{C}=\tilde{A}+\tilde{B}$ (در شکل 2-14) نشان می‌دهیم:

$$\tilde{C}=\left\{\left\langle\left(x,\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}\left(X\right)\right)|\, x\in X\right\rangle\right\}$$

$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}\left(x\right)=\mu_{\tilde{A}}\left(x\right)+\mu_{\tilde{B}}\left(x\right)-\mu_{\tilde{A}}\left(x\right).\mu_{\tilde{B}}\left(x\right)$$

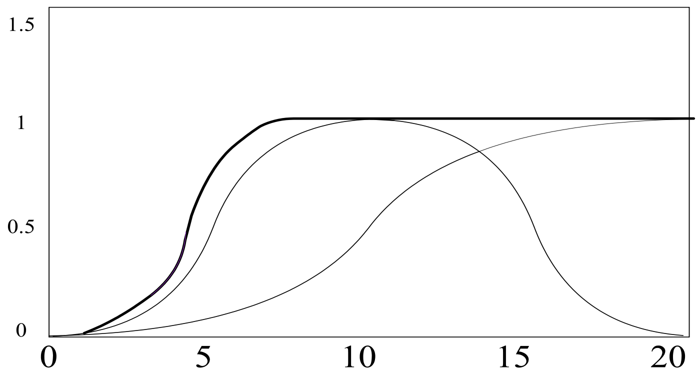


شکل 2-14: جمع جبری دو مجموعه فازی

تعریف 2-17: جمع *کران‌دار*[2] برای دو مجموعه $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را با $\tilde{C}=\tilde{A}\oplus\tilde{B}$ نمایش داده، خواهیم داشت (در شکل 2-15):

$$\tilde{C}=\left\{\left(x,\mu_{\tilde{A}\oplus\tilde{B}}\left(x\right)\right)|\, x\in X\right\}$$

$$\mu_{\tilde{A}\oplus\tilde{B}}\left(x\right)=Min\left(1,\mu_{\tilde{A}}\left(x\right)+\mu_{\tilde{B}}\left(x\right)\right)$$



شکل 2-15: جمع کران‌دار دو مجموعه فازی

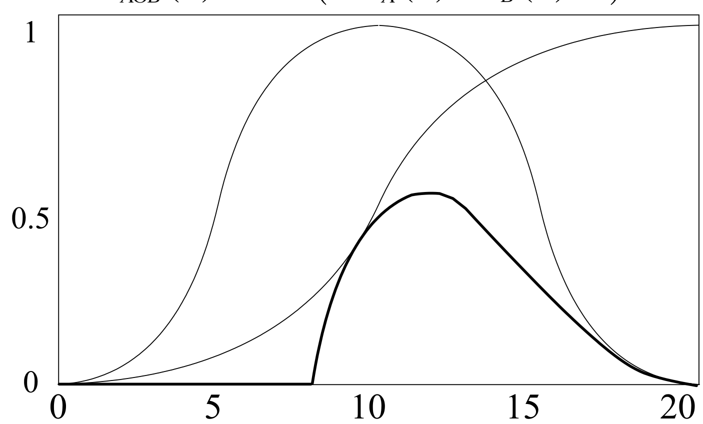
---

[1] Algebraic sum
[2] Bounded sum

تعریف 2-18: *تفریق کران‌دار*[1] دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را با $\tilde{C}=\tilde{A}\Theta\tilde{B}$ نمایش داده، مطابق شکل 2-16 خواهیم داشت:

$$\tilde{C}=\left\{\left(x,\mu_{\tilde{A}\Theta\tilde{B}}(x)\right)\mid x\in X\right\}$$

$$\mu_{\tilde{A}\Theta\tilde{B}}(x)=Max\left(0,\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)-1\right)$$



شکل 2-16: تفریق کران‌دار دو مجموعه فازی

تعریف 2-19: *ضرب جبری* دو مجموعه $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را با $\tilde{C}=\tilde{A}.\tilde{B}$ نشان می‌دهیم. این ضرب که مطابق فرمول زیر بیان می‌شود، در شکل 2-17 نشان داده شده است.

$$\tilde{C}=\left\{\left(x,\mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)\right)\mid x\in X\right\}$$

مثال: اگر

$$\tilde{A}(x)=\left\{(3,0.5),(5,1),(7,0.6)\right\}$$

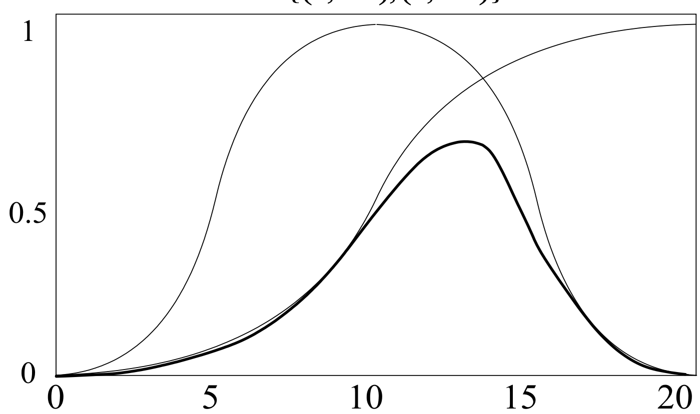
$$\tilde{B}(x)=\left\{(3,1),(5,0.6)\right\}$$

تمامی تعاریف ارائه‌شده فوق برای این مثال به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\tilde{A}\times\tilde{B}=\{\left[(3;3),0.5\right],\left[(5;3),1\right],\left[(7;3),0.6\right],$$
$$\left[(3;5),0.5\right],\left[(5;5),0.6\right],\left[(7;5),0.6\right]\}$$

[1] Bounded difference

$$\tilde{A}^2 = \{(3,0.25),(5,1),(7,0.36)\}$$
$$\tilde{A}+\tilde{B} = \{(3,1),(5,1),(7,0.6)\}$$
$$\tilde{A}\oplus\tilde{B} = \{(3,1),(5,1),(7,0.6)\}$$
$$\tilde{A}\Theta\tilde{B} = \{(3,0.5),(5,0.6)\}$$
$$\tilde{A}.\tilde{B} = \{(3,0.5),(5,0.6)\}$$



شکل2-17: ضرب جبری دو مجموعه فازی

2-3-2: اپراتورهای تئوری مجموعه‌ها

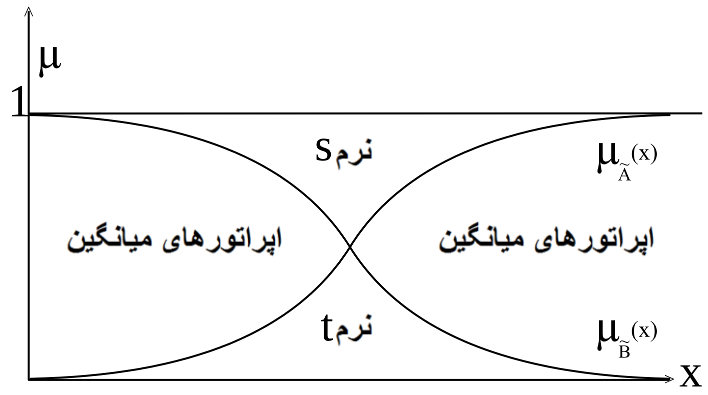
این بخش به تعاریف مربوط به اپراتورهای تئوری مجموعه‌های فازی اختصاص دارد. تاکنون اشتراک دو مجموعه فازی را توسط اپراتور مینیمم به همراه "و منطقی" و اجتماع دو مجموعه فازی را توسط اپراتور ماکزیمم و"یا منطقی" مدل‌سازی کرده‌ایم.

همان‌گونه که قبلا نیز اشاره شد این اپراتورها تنها اپراتورهای قابل تعریف برای اشتراک و اجتماع مجموعه‌های فازی نمی‌باشند. این عدم یکتایی اپراتورها از قابلیت تطابق، کلی بودن و عدم قطعیت منطق زبانی نشأت می‌گیرد. یعنی می‌توان اپراتورهای متفاوت یا دارای پارامتر را به‌نحوی تعریف کرد که در موقعیتهای متفاوت، مفاهیم مربوط به اشتراک و اجتماع مجموعه‌های فازی را مدل‌سازی نمایند.

شایان ذکر است که اپراتورهای مجموعه‌های فازی را می‌توان به دو بخش تقسیم نمود. بخش اول اپراتورهای مربوط به اجتماع و اشتراک بوده که تحت دو حالت با نامهای نُرم t و

نُرم s تعریف می‌شوند. بخش دوم شامل اپراتورهای میانگین می‌باشد که حد وسط دو نرم s و t را در بر می‌گیرند.

همان‌گونه که در شکل 2-18 نیز مشاهده می‌شود میزان عضویتهای به‌دست‌آمده برای مجموعه حاصل از اعمال اپراتورهای میانگین، مابین میزان عضویت به‌دست‌آمده از اعمال اپراتورهای نرم s و t قرار می‌گیرد. هر یک از این دو بخش مشتمل بر اپراتورهای پارامتردار و بدون پارامتر متفاوتی می‌باشد.



شکل2-18: اپراتورهای مجموعه‌های فازی

نرم t : زاده در سال 1965 برای اشتراک مجموعه‌های فازی اپراتورهای مینیمم و ضرب جبری $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را پیشنهاد کرد. به چنین اپراتورهایی، اپراتورهای نرم t می‌گوییم. نرم t یک تابع از $[0,1]\times[0,1]$ به $[0,1]$ است که دارای این چهار خاصیت باشد:

-1

$$t(0,0)=0;\quad t\left(\mu_{\tilde{A}}(x),1\right)=t\left(1,\mu_{\tilde{A}}(x)\right)=\mu_{\tilde{A}}(x),\quad x\in X$$

-2 یکنوایی[1]

[1] Monotony

$$
\begin{aligned}
& if\ \ \mu_{\tilde{A}}(x) \le \mu_{\tilde{C}}(x)\ \ and\ \mu_{\tilde{B}}(x) \le \mu_{\tilde{D}}(x) \\
& \quad then \\
& \qquad t\left(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\right) \le t\left(\mu_{\tilde{C}}(x), \mu_{\tilde{D}}(x)\right)
\end{aligned}
$$

3- جابجایی [۱]

$$t(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = t(\mu_{\tilde{B}}(x), \mu_{\tilde{A}}(x))$$

4- شرکت‌پذیری [۲]

$$t(\mu_{\tilde{A}}(x), t(\mu_{\tilde{B}}(x), \mu_{\tilde{C}}(x))) = t(t(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \mu_{\tilde{C}}(x))$$

نرم t یک گروه عمومی از اپراتورها را برای اشتراک مجموعه‌های فازی معرفی می‌نماید که به علت وجود خاصیت شرکت‌پذیری، می‌توان از اپراتورهای این قاعده بر روی بیش از دو مجموعه فازی نیز به صورت متوالی استفاده نمود.

نرم s : برای اجتماع مجموعه‌های فازی اپراتور ماکزیمم و جمع جبری و جمع کران‌دار معرفی شده‌اند که این موارد را می‌توان در قالب یک قاعده به نام نرم s در کنار یکدیگر قرار داد. نرم s شامل توابعی از $[0,1]\times[0,1]$ به $[0,1]$ است که دارای خواص زیر باشند:

-1

$$s(1,1) = 1;\ \ s\left(\mu_{\tilde{A}}(x), 0\right) = s\left(0, \mu_{\tilde{A}}(x)\right) = \mu_{\tilde{A}}(x), \quad x \in X$$

2- یکنوایی

$$
\begin{aligned}
& if\ \ \mu_{\tilde{A}}(x) \le \mu_{\tilde{C}}(x)\ \ and\ \mu_{\tilde{B}}(x) \le \mu_{\tilde{D}}(x) \\
& \quad then \\
& \qquad S\left(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\right) \le S\left(\mu_{\tilde{C}}(x), \mu_{\tilde{D}}(x)\right)
\end{aligned}
$$

3- جابجایی

$$s(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = s(\mu_{\tilde{B}}(x), \mu_{\tilde{A}}(x))$$

4- شرکت‌پذیری

$$s(\mu_{\tilde{A}}(x), s(\mu_{\tilde{B}}(x), \mu_{\tilde{C}}(x))) = s(s(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \mu_{\tilde{C}}(x))$$

---

[1] Comutativity
[2] Associativity

نرمهای s و t از لحاظ منطقی دوگان یکدیگر هستند. آلسینا[1] در سال 1985 نرم s را به صورت یک تابع از $[0,1]\times[0,1]$ به $[0,1]$ در نظر گرفت و تابع دوگان آن در نرم t را به صورت زیر تعریف نمود:

$$t\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right)=1-s\left(1-\mu_{\tilde{A}}(x),1-\mu_{\tilde{B}}(x)\right)$$

از همین فرمول می‌توان تابع دوگان نرم s را از یک تابع نرم t به دست آورد. اگر اپراتور نفی را نیز به صورت مناسب مثلاً به شکل $n\left(\mu_{\tilde{A}}(x)\right)=1-\mu_{\tilde{A}}(x)$ در نظر بگیریم، دو تابع دوگان از نرم s و t از قانون دمورگان تبعیت می‌کنند (بونیسون[2] و دکر[3] 1996).

$$s\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right)=n\left(t\left(n\left(\mu_{\tilde{A}}(x)\right),n\left(\mu_{\tilde{B}}(x)\right)\right)\right)$$

$$t\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right)=n\left(s\left(n\left(\mu_{\tilde{A}}(x)\right),n\left(\mu_{\tilde{B}}(x)\right)\right)\right)$$

در اینجا تعدادی اپراتور دوگان از نرمهای t و s معرفی می‌شوند:

ضرب قوی:

$$t_w\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right)=\begin{cases}Min\left\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right\} & if \quad Max\left\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right\}=1\\ 0 & Otherwise\end{cases}$$

جمع قوی :

$$s_w\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right)=\begin{cases}Max\left\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right\} & if \quad Min\left\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right\}=0\\ 1 & Otherwise\end{cases}$$

تفریق کران‌دار:

$$t_1\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right)=Max\left\{0,\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)-1\right\}$$

جمع کران‌دار:

$$s_1\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right)=Min\left\{1,\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)\right\}$$

---

[1] Alsina
[2] Bonissone
[3] Decker

ضرب انیشتین[1]:

$$t_{1.5}\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right)=\frac{\mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)}{2-\left[\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)-\mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)\right]}$$

جمع انیشتین:

$$s_{1.5}\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right)=\frac{\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)}{1+\mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)}$$

ضرب جبری:

$$t_{2}\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right)=\mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)$$

جمع جبری:

$$s_{2}\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right)=\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)-\mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)$$

ضرب هاماچر[2]:

$$t_{2.5}\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right)=\frac{\mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)}{\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)-\mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)}$$

جمع هاماچر:

$$s_{2.5}\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right)=\frac{\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)-2\mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)}{1-\mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)}$$

مینیمم:

$$t_{3}\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right)=Min\left\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right\}$$

ماکزیمم:

$$s_{3}\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right)=Max\left\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right\}$$

اپراتورهای تعریف‌شده را می‌توان به صورت زیر مرتب کرد:

$$t_w \le t_1 \le t_{1.5} \le t_2 \le t_{2.5} \le t_3$$

$$s_3 \le s_{2.5} \le s_2 \le s_{1.5} \le s_1 \le s_w$$

---

[1] Einstein
[2] Hamacher

به این ترتیب می‌توان گفت به ازای هر دو مجموعه فازی دلخواه $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ در X که تابع عضویت آنها در [0,1] باشد، یک اپراتور اشتراک در نرم t به اپراتور مینیمم و t_w محدود می‌شود. به عبارت دیگر:

$$t_w\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right)\le t\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right)\le Min\left\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right\}$$

$$Max\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right)\le s\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right)\le s_w\left\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right\}$$

با توجه به این مطلب می‌توانیم اپراتورهای دیگری را نیز تعریف کنیم که در محدوده تعریف‌شده فوق باشند و با تغییر یک پارامتر در توابع مختلفی از نرم t و s تعریف شوند.

در اینجا به معرفی چند اپراتور با پارامتر می‌پردازیم که در حالت خاص خود یکی از اپراتورهای تعریف شده قبلی بوده، از شرایط نرم t و s تبعیت می‌کنند.

تعریف 2-20: هاماچر در سال 1987 تعریف زیر را برای اشتراک دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ ارائه کرد:

$$\tilde{A}\cap\tilde{B}=\left\{\left(x,\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)\right)\mid x\in X\right\}$$

درصورتی‌که :

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)=\frac{\mu_{\tilde{A}}(x)\,\mu_{\tilde{B}}(x)}{\partial+(1-\partial)\left(\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)-\mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)\right)}\quad,\quad \partial\ge 0$$

همچنین اجتماع دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به این صورت تعریف شد :

$$\tilde{A}\cup\tilde{B}=\left\{\left(x,\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)\right)\mid x\in X\right\}$$

درصورتی‌که:

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)=\frac{(\wp-1)\,\mu_{\tilde{A}}(x)\,\mu_{\tilde{B}}(x)+\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)}{1+\wp\,\mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)}\quad,\quad \wp\ge -1$$

در حالتهای خاص $\partial=1$, $\wp=0$ اشتراک و اجتماع تعریف‌شده توسط هاماچر، همان اپراتورهای ضرب جبری و جمع جبری خواهند بود. ویژگی اشتراک و اجتماع هاماچر این است که دارای خواص شرکت‌پذیری و جبران‌پذیری می‌باشند. عملگر * را جبران‌پذیر گوییم اگر در معادله $c=a*b$ بتوانیم تغییرات a را با تغییرات b به‌نحوی جبران کنیم تا c تغییری نکند. این خاصیت می‌تواند نتیجه‌ای شبیه فرمول زیر را ایجاد کند:

$$\tilde{A}\cap\tilde{B}=\tilde{A}\cap\tilde{C}\Rightarrow\tilde{B}=\tilde{C}$$
$$\tilde{A}\cup\tilde{B}=\tilde{A}\cup\tilde{C}\Rightarrow\tilde{B}=\tilde{C}$$

تعریف 2-21: در سال 1980 یاگر[1] اشتراک دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را به صورت زیر پیشنهاد کرد:

$$\tilde{A}\cap\tilde{B}=\left\{\left(x,\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)\right)\mid x\in X\right\}$$

درصورتی‌که :

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)=$$
و
$$1-Min\left\{1,\left(\left(1-\mu_{\tilde{A}}(x)\right)^{p}+\left(1-\mu_{\tilde{B}}(x)\right)^{p}\right)^{1/p}\right\}\quad,\quad p\geq 1$$

اجتماع آنها نیز به فرم زیر خواهد بود:

$$\tilde{A}\cup\tilde{B}=\left\{\left(x,\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)\right)\mid x\in X\right\}$$

درصورتی‌که:

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)=Min\left\{1,\left(\mu_{\tilde{A}}(x)^{p}+\mu_{\tilde{B}}(x)^{p}\right)^{1/p}\right\}\quad,\quad p\geq 1$$

اگر P به سمت ∞ میل کند اشتراک و اجتماع تعریف‌شده توسط یاگر به اپراتورهای مینیمم و ماکزیمم همگرا می‌شوند. درصورتی‌که P=1 باشد اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی همان تفریق و جمع کران‌دار خواهد بود.

به ازای P های مختلف، اپراتورهای اجتماع و اشتراک به‌دست‌آمده از تعریف فوق، دوگان یکدیگر هستند و از قوانین دمورگان جابجایی و شرکت‌پذیری تبعیت می‌کنند و در $\mu(x)$ به صورت یکنوا و غیرنزولی می‌باشند.

تعریف 2-22: دبویز[2] و پرید[3] اشتراک دو مجموعه فازی را به صورت زیر تعریف کردند:

$$\tilde{A}\cap\tilde{B}=\left\{\left(x,\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)\right)\mid x\in X\right\}$$

درصورتی‌که:

---

[1] Yager
[2] Dubois
[3] Prade

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)=\frac{\mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)}{Max\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x),\alpha\}} \quad , \quad \alpha\in[0,1]$$

اپراتور تعریف‌شده برای اشتراک نسبت به α نزولی می‌باشد که اگر $\alpha=0$ باشد این اپراتور تبدیل به اپراتور مینیمم می‌شود و اگر $\alpha=1$ باشد، اپراتور حاصل‌ضرب جبری خواهد بود. این اپراتور، محدود به فاصله بسته $Min\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\}$ و $\mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)$ می‌باشد.

α یک مقدار آستانه‌ای است که عملکرد آن با توجه به تعریف زیر در مورد اشتراک دو مجموعه $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ مشخص‌تر می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)=\frac{\mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)}{\alpha} \qquad for \quad \mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)\in[0,\alpha]$$

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)=Min\{\mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)\} \quad for \quad \mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)\in[\alpha,1]$$

تعریف 2-23: دبویز و پرید، تابع عضویت اجتماع برای دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را با درنظرگرفتن $\alpha\in[0,1]$ به صورت زیر پیشنهاد دادند:

$$\tilde{A}\cup\tilde{B}=\{(x,\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x))\mid x\in X\}$$

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)=$$

$$\frac{\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)-\mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)-Min\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x),(1-\alpha)\}}{Min\{(1-\mu_{\tilde{A}}(x)),(1-\mu_{\tilde{B}}(x)),\alpha\}} \quad , \ \alpha\in[0,1]$$

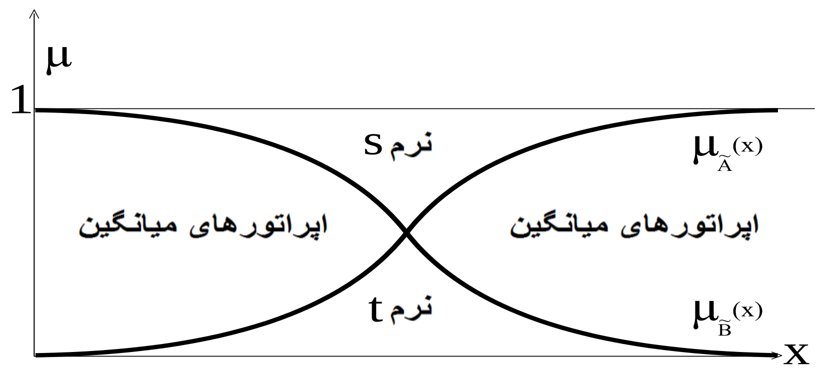
حالت خاص اپراتورهای تعریف‌شده در مجموعه‌های فازی به تعریفهای منطق باینری برمی‌گردد. با توجه به منطق باینری، این سوال پیش می‌آید که چرا اپراتورهای مختلف در منطق باینری دارای تعریف یگانه و دقیق بوده ولی در منطق فازی همان اپراتورها دارای تعاریف گوناگونی هستند؟

پاسخ این سوال ساده است! می‌توان گفت اگر درجه تابع عضویت مجموعه‌های فازی را فقط محدود به صفر و یک بکنیم، تعاریف اپراتورهای فازی نیز یگانه و دقیق می‌شوند ولی اگر این محدودیتها را برداریم، همان تعاریف یگانه و دقیق نتایج کاملاً متفاوتی را ایجاد خواهند کرد.

سوال دیگری که مطرح می‌شود این است که اگر می‌توانیم برای اپراتورهای "و" و "یا" اجتماع و اشتراک تعاریف متعددی ارائه کنیم، آیا ممکن است بتوانیم اپراتورهایی غیر از این اپراتورها را نیز تعریف کنیم؟ یعنی آیا می‌توانیم اپراتورهایی تعریف کنیم که در دسته‌بندی نرمهای t و s نگنجند و نیز نتوانیم آنها را به اشتراک و یا اجتماع مجموعه‌های فازی نسبت دهیم؟ پاسخ این سوال مثبت است. در حالت عمومی می‌توان اپراتورهای "و فازی" و "یا فازی" را به‌گونه‌ای تعریف نمود که در آنالیز، تصمیم‌گیری و دیگر کاربردهای منطق فازی مورد استفاده خوبی داشته، گره از بعضی مشکلات بگشایند. این اپراتورها را اپراتورهای میانگین می‌نامیم و در این قسمت به توضیح بیشتر در مورد آنها می‌پردازیم.

اپراتورهای میانگین: در تصمیم‌گیریها و مسائلی که پارامترهای متعددی در نتیجه نهایی آن موثر است، ضمناً بهینگی هر یک از این پارامترها با بهینگی پارامتر دیگری در تضاد باشد، می‌توان اپراتوری برای حل این مسایل پیشنهاد کرد که پاسخ بهینه عمومی را حاصل نماید، اگرچه ممکن است همه پارامترهای موثر در جواب بهینه نشده باشند.

می‌توان گفت بهینگی محلی یک پارامتر، پاسخ بهینه عمومی را تضعیف می‌کند ولی بهینگی پارامترهای دیگر باعث جبران این تضعیف می‌شود، هرچند پارامتر بهینه‌شده اول را از حالت بهینه کامل خارج می‌کند. در نهایت با جبران این تضعیفها می‌توان به یک پاسخ بهینه عمومی دست یافت.



شکل2-19: اپراتورهای میانگین

با توجه به شکل 2-19 مشخص می‌شود که میزان عضویتهای حاصل از چنین اپراتوری حد وسط میزان عضویت حاصل از اپراتورهای نرم t و s خواهد بود. در ادامه به معرفی بعضی از انواع اپراتورهای میانگین می‌پردازیم.

در سال 1984 ورنرز[1] با ترکیب اپراتورهای مینیمم و ماکزیمم، اپراتورهای "و فازی" و "یا فازی" را پیشنهاد کرد. ترکیب این اپراتورها نتایج خوبی را در مورد داده‌ها و مسائل تجربی باعث شد تا در ارتباط با میزان عضویتهای مجموعه‌های پیشنهادی، مسئله جبران مورد توجه بیشتری قرار بگیرد.

تعریف2-24: در سال 1988 ورنرز تعریف زیر را برای "و فازی" ارائه کرد:

$$\mu_{and}(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)) =$$
$$\partial\cdot\min\left\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right\}+\frac{(1-\partial)(\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x))}{2}\qquad \partial\in[0,1]$$

همچنین"یا فازی" توسط او به صورت زیر پیشنهاد شد:

$$\mu_{or}(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)) =$$
$$\partial\cdot\max\left\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right\}+\frac{(1-\partial)(\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x))}{2}\qquad \partial\in[0,1]$$

پارامتر ∂ میزان نزدیکی اپراتورهای فازی تعریف‌شده نسبت به اپراتورهای قطعی را مشخص می‌کند. باید توجه داشت که در اینجا خود اپراتورها هم فازی هستند، درصورتی‌که در مباحث قبلی مجموعه‌هایی که اپراتورها بر روی آن اعمال می‌شدند فازی بوده، اما خود اپراتورها قطعی بودند. اگر $\partial=1$ فرض شود "و فازی" همان اپراتور مینیمم و "یا فازی" همان اپراتور ماکزیمم خواهد بود. با درنظرگرفتن $\partial=0$ هر دو اپراتور تعریف‌شده، تبدیل به اپراتور ریاضی میانگین می‌شوند.

از انواع اپراتورهای میانگین می‌توان به اپراتورهای تقارنی اشاره کرد که دارای خاصیت شرکت‌پذیری نمی‌باشند. از این نمونه می‌توان از اپراتورهای M_1 و M_2 برای جمع تقارنی و از اپراتورهای N_1 و N_2 برای تفریق تقارنی نام برد که تعریف آنها به صورت زیر می‌باشد:

---

[1] Werners

$$M_1\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right)=\frac{\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)-\mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)}{1+\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)-2\mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)}$$

$$M_2\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right)=\frac{\mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)}{1+\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)-2\mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)}$$

$$N_1\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right)=\frac{Max\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right)}{1+\left|\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)\right|}$$

$$N_2\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right)=\frac{Min\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right)}{1+\left|\mu_{\tilde{A}}(x)-\mu_{\tilde{B}}(x)\right|}$$

اپراتورهای تعریف‌شده فوق بیانگر یک حالت جبرانی ثابت بین دو "و" منطقی و "یا" منطقی می‌باشند. ولی در موقعیتهای تصمیم‌گیری به علت وجود حالت طبیعی که دارای تنوع زیادی می‌باشد، به حالات جبرانی متنوعی بین "و" منطقی و "یا" منطقی نیازمندیم.

در سال 1980 اپراتور"و جبرانی" توسط زیمرمن[۱] و زیسنو[۲] تعریف شد که در آن توسط یک پارامتر می‌توان حالت متفاوتی بین اپراتور اشتراک و اجتماع به وجود آورد.

تعریف 2-25: می‌توان "*و جبرانی*[۳]" را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\mu_{\tilde{A}_i,Comp}(x)=\left[\prod_{i=1}^{m}\mu_i(x)\right]^{(1-\partial)}\left[1-\prod_{i=1}^{m}\left(1-\mu_i(x)\right)\right]^{\partial}\quad,\qquad x\in X,0\le\partial\le1$$

در تعریف فوق میزان عضویت مجموعه حاصل از "و جبرانی " برای تمام مجموعه‌های $\tilde{A}_1,\tilde{A}_2,...,\tilde{A}_m$ معرفی شده است که در آن، علامت Comp مخفف Compensatory به معنی جبران‌کننده (بیانگر نحوه ترکیب ضرب جبری و جمع جبری برای مدل‌سازی "و" و "یا") می‌باشد. اپراتور فوق در محدوده $[0,1]$ پیوسته، یکنوا و دارای خاصیت جابجایی بوده، از قانون دمورگان نیز تبعیت می‌کند.

---

[1] Zimmermann
[2] Zysno
[3] Compensatory AND

اپراتورهای دیگری نیز تعریف شدند که از ترکیب خطی اپراتورهای مدل‌کننده "و" و "یا" حاصل شده‌اند. به عنوان مثال، اپراتور حاصل از ترکیب خطی کوژ اپراتور مینیمم و ماکزیمم به صورت زیر تعریف شده است:

$$\mu_1\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right)=$$
$$\partial.min\left\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right\}+(1-\partial)max\left\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right\}\quad \partial\in[0,1]$$

همچنین اپراتور حاصل از ترکیب خطی کوژ اپراتورهای جمع جبری و ضرب جبری به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$\mu_2\left(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\right)=$$
$$\partial\mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x)+(1-\partial)\left\{\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)-\mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x)\right\}\quad \partial\in[0,1]$$

اپراتورهای متنوع دیگری را نیز می‌توان در گروه اپراتورهای میانگین تعریف کرد تا هر یک برای موقعیتهای متفاوت و تصمیم‌گیریهای با شرایط گوناگون مناسب باشند اما زیمرمن و زیسنو نشان دادند که اپراتور"و جبرانی" برای شبیه‌سازی تصمیم‌گیریهای انسانی، مناسب‌ترین اپراتور در میان اپراتورهای تعریف‌شده در این فصل می‌باشد.

در این فصل با مفاهیم اولیه و تعاریف پایه مجموعه‌های فازی و همچنین اپراتورهای مختلف تعریف‌شده برای آنها آشنا شدیم. حال می‌توانیم به مفاهیم پیشرفته‌تر ریاضی از جمله اندازه‌گیری فازی، روابط و گرافهای فازی، توابع فازی و آنالیز فازی بپردازیم.

این مفاهیم در فصلهای آینده معرفی شده‌اند که با مثالهای متعدد به توضیح بیشتر آنها پرداخته‌ایم.