فصل 12

خوشه‌بندی فازی

خوشه‌بندی[1] یکی از شاخه‌های یادگیری بدون سرپرست[2] می‌باشد و فرآیند خودکاری است که در آن، نمونه‌ها به دسته‌هایی که اعضای آن مشابه یکدیگر می‌باشند، تقسیم می‌شوند که به هر یک از این دسته‌ها «خوشه» گفته می‌شود.

خوشه‌بندی یک تکنیک مهم در امر پردازش داده‌ها محسوب می‌شود و در زمینه‌های مختلف کاربرد دارد. مجموعه اشیای موجود در یک خوشه با یکدیگر مشابه بوده ولی با اشیای موجود در دیگر خوشه‌ها، متفاوت هستند. در واقع می‌توان برای هر مجموعه، یک تابع تعلق تعریف کرد تا در روش خوشه‌بندی کلاسیک، هر داده فقط به یک خوشه تعلق داشته باشد. به عبارت بهتر، تابع تعلق برای اعضای آن مجموعه یک است و برای اعضای دیگر مجموعه‌ها برابر با صفر می‌باشد.

زاده در سال 1965 مجموعه‌های فازی را که به دنیای واقعی نزدیک‌تر هستند معرفی کرد. اما نخستین مدل خوشه‌بندی با ایده فازی در سال 1969 توسط راسپینی[3] مطرح شد. در خوشه‌بندی فازی یک نمونه می‌تواند با درجه عضویتهای متفاوت (در محدوده صفر تا یک) متعلق به بیش از یک خوشه باشد. البته مجموع درجات عضویت یک نمونه داده به کل خوشه‌ها، باید برابر با یک باشد. در این فصل به شرح مفاهیم خوشه‌بندی، خوشه‌بندی فازی و چند الگوریتم مهم آن و نیز معیارهای کارایی خوشه‌بندی می‌پردازیم و در انتهای فصل کاربردی از خوشه‌بندی فازی در پردازش تصویر را بررسی می‌کنیم.

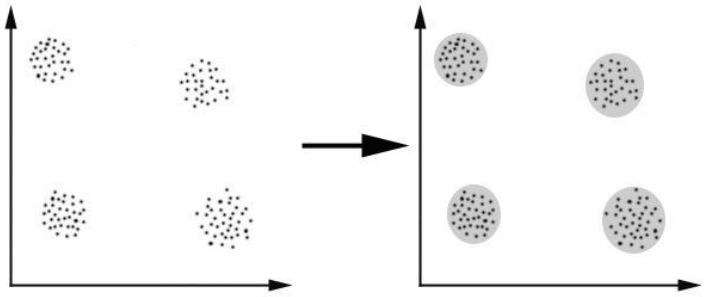
12-1: مفهوم خوشه‌بندی

از معیارهای مختلفی می‌توان برای انجام خوشه‌بندی استفاده کرد. مثلاً می‌توان معیار فاصله را به کار برد و اشیای نزدیک به یکدیگر را به عنوان یک خوشه در نظر گرفت. به این نوع خوشه‌بندی، خوشه‌بندی مبتنی بر فاصله گفته می‌شود.

---

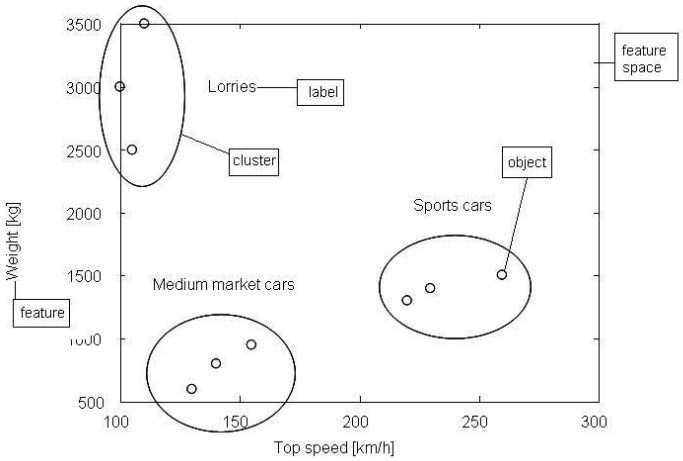
[1] Clustering
[2] Unsupervised
[3] Ruspini

شکل 12-1 این نوع خوشه‌بندی را به تصویر کشیده است. نمونه‌های ورودی در سمت چپ شکل، به چهار خوشه در سمت راست تقسیم شده‌اند. مشخص است که در این مثال، هر یک از نمونه‌های ورودی فقط و فقط به یکی از خوشه‌ها تعلق می‌یابد.



شکل12-1: خوشه‌بندی نمونه‌های ورودی

هر کدام از دایره‌های کوچک در شکل12-2، یک وسیله نقلیه را نشان می‌دهد که با دو ویژگی وزن و حداکثر سرعت مشخص شده است. در این شکل، هر بیضی بیانگر یک خوشه می‌باشد که عبارت کنار آن، برچسب خوشه را نشان می‌دهد. کل دستگاه مختصات که نمونه‌ها در آن نشان داده شده‌اند را فضای ویژگی می‌گویند.



شکل12-2 : خوشه‌بندی چند وسیله نقلیه

در شکل 12-2 وسایل نقلیه به سه خوشه مجزا تقسیم شده‌اند. می‌توان برای هر یک از این خوشه‌ها یک نماینده در نظر گرفت. مثلاً می‌توان میانگین وسایل نقلیه باری را محاسبه کرد و به عنوان نماینده خوشه وسایل نقلیه باری معرفی نمود. در واقع اغلب الگوریتمهای خوشه‌بندی بدین‌نحو عمل می‌کنند که ابتدا یک سری نماینده اولیه برای نمونه‌های ورودی اختیار می‌کنند تا از روی میزان تشابه نمونه‌ها با این نماینده‌ها، مشخص شود که نمونه به کدام خوشه تعلق دارد. بعد از آن، نماینده‌های جدید از روی نمونه‌های متعلق به خوشه محاسبه می‌شوند. نمونه‌ها مجدداً با این نماینده‌ها مقایسه می‌شوند تا مشخص شود که به کدام خوشه تعلق دارند. این فرایند تا زمان عدم تغییر نماینده‌های خوشه‌ها تکرار می‌شود.

ذکر تفاوت خوشه‌بندی با طبقه‌بندی نیز مهم است: در طبقه‌بندی نمونه‌های ورودی برچسب‌گذاری شده‌اند، اما در خوشه‌بندی نمونه‌های ورودی دارای برچسب[1] اولیه نمی‌باشند و در واقع با استفاده از روشهای خوشه‌بندی است که داده‌های مشابه، مشخص شده و به‌طور ضمنی برچسب‌گذاری می‌شوند. در بسیاری از موارد، قبل از عملیات طبقه‌بندی داده‌ها، یک خوشه‌بندی روی نمونه‌ها انجام می‌گیرد. سپس مراکز خوشه‌های حاصل را محاسبه می‌کنند و یک برچسب به خوشه‌ها نسبت می‌دهند. پس از آن، عملیات طبقه‌بندی برای نمونه‌های ورودی جدید انجام می‌شود.

12-2: انواع خوشه

خوشه‌ها انواع مختلفی دارند که در زیر به آنها اشاره شده است:

1. **خوشه‌های به‌خوبی تفکیک‌شده:** مجموعه نقاط داخل این خوشه‌ها، نسبت به نقاط خارج آن به یکدیگر بسیار شبیه‌اند.
2. **خوشه‌های مبتنی بر مرکز:** مجموعه نقاط داخل این خوشه‌ها، به مرکز خوشه نسبت به مراکز خوشه‌های دیگر نزدیکتر هستند.

[1] Label

3. **خوشه‌های مبتنی بر مجاورت و نزدیکی:** مجموعه نقاط داخل این خوشه‌ها، به یک یا تعداد بیشتری از نقاط داخل خوشه نسبت به نقاط خارج آن، شبیه‌تر هستند.

3-12: گامهای اساسی در انجام خوشه‌بندی

اعمال زیر برای تحقق یک خوشه‌بندی مناسب باید انجام شوند:

1. **انتخاب ویژگی**[1]: ویژگیها باید به نحو مناسبی انتخاب شوند تا بتوانند اکثر اطلاعات را کدگذاری کنند.
2. **مقیاس نزدیکی:** این معیار، میزان شباهت یا تفاوت میان دو بردار ویژگی را مشخص می‌کند. تمام ویژگیهای انتخاب‌شده باید در محاسبه این معیار شرکت کنند، اما هیچ ویژگی نباید بر دیگر ویژگیها غلبه کند. به عنوان مثال، می‌توان از فاصله اقلیدسی یا فاصله بلوکی نام برد.
3. **معیار دسته‌بندی:** همان معیاری است که برای تعریف انواع خوشه‌ها مورد استفاده قرارگرفت.
4. **الگوریتم خوشه‌بندی:** در این مرحله، پس از انتخاب معیار دسته‌بندی و مقیاس نزدیکی، نوبت به انتخاب یک الگوریتم خاص جهت روشن‌کردن ساختار دسته‌بندی مجموعه داده‌ها می‌رسد. در ادامه این فصل چند الگوریتم مطرح خوشه‌بندی را معرفی و بررسی می‌کنیم.
5. **بررسی اعتبار نتایج:** صحت و اعتبار نتایج خوشه‌بندی توسط معیارهای کارایی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در قسمتهای بعدی این فصل توضیحات مفصلی در مورد این معیارها ارائه خواهد شد.

---

[1] Feature

12-4: انواع الگوریتمهای خوشه‌بندی

الگوریتمهای خوشه‌بندی به سه دسته اصلی زیر تقسیم می‌شوند:

1. الگوریتمهای خوشه‌بندی ترتیبی
2. الگوریتمهای خوشه‌بندی سلسله‌مراتبی[1]
3. الگوریتمهای خوشه‌بندی مبتنی بر بهینه‌سازی تابع هزینه (تابع هدف)

12-4-1: الگوریتمهای خوشه‌بندی ترتیبی

در الگوریتمهای خوشه‌بندی ترتیبی تعداد خوشه‌ها از قبل مشخص نیست. در واقع خوشه‌های جدید در حین اجرای برنامه ایجاد می‌شوند. برای خوشه‌بندی بدین صورت عمل می‌شود که در ابتدا یک خوشه تنها تولید می‌کنیم. هر بردار ویژگی، با توجه به فاصله بین بردار ویژگی و خوشه، به خوشه‌های موجود یا به خوشه جدید نسبت داده می‌شود. بنابراین نتیجه نهایی، وابسته به ترتیبی است که بردارها به الگوریتم خوشه‌بندی ارائه می‌شوند.

در اکثر الگوریتمهای خوشه‌بندی ترتیبی، بردارهای ویژگی به تعداد دفعات اندک یا فقط یک بار به الگوریتم داده می‌شوند.

12-4-2: الگوریتمهای خوشه‌بندی سلسله‌مراتبی

ایده روشهای سلسله مراتبی بر تئوری گرافها استوار است. در این روش، هر داده را به‌طور مستقل به عنوان یک خوشه در نظر می‌گیریم. فرآیند اصلی خوشه‌بندی سلسله مراتبی به صورت زیر می‌باشد:

1. با تخصیص هر نمونه به یک خوشه شروع می‌کنیم. یعنی اگر N نمونه داشته باشیم، N خوشه داریم که هر یک حاوی یک نمونه هستند.
2. یک معیار شباهت مثلاً فاصله اقلیدسی را در نظر می‌گیریم، دو خوشه‌ای را که به هم نزدیک‌تر هستند ادغام می‌کنیم. اکنون یک خوشه کمتر یعنی N-1 خوشه داریم.

[1] Hierarchical clustering

3. فاصله خوشه جدید را با هر یک از خوشه‌های قدیمی محاسبه می‌کنیم.
4. مراحل 2 و 3 را تکرار می‌کنیم تا در نهایت به تعداد خوشه تعیین‌شده برسیم.

خوشه‌بندی سلسله مراتبی، متراکم‌شونده[1] نیز نامیده می‌شود، زیرا خوشه‌ها را به تدریج ادغام می‌کند. خوشه‌بندی تقسیم‌کننده[2] هم وجود دارد که به صورت معکوس عمل می‌کند. یعنی ابتدا همه اشیا را در یک خوشه اولیه قرار می‌دهد، سپس آن را به خوشه‌های کوچکتر تقسیم می‌کند.

12-4-3: الگوریتمهای خوشه‌بندی مبتنی بر بهینه‌سازی تابع هزینه

این الگوریتمها یک تابع هدف[3] (مثلاً تابع مربع خطا[4]) را تعریف کرده، سعی می‌کنند تا مقدار این تابع را مینیمم کنند. الگوریتم C میانگین و الگوریتمهای خوشه‌بندی فازی که در ادامه معرفی می‌شوند، در این دسته قرار می‌گیرند.

12-4-3-1: الگوریتم خوشه‌بندی C میانگین[5]

خوشه‌بندیC میانگین، یکی از ساده‌ترین الگوریتمهای یادگیری بدون سرپرست است که در حل بسیاری از مسائل خوشه‌بندی استفاده می‌شود. این الگوریتم از یک شیوه ساده برای دسته‌بندی یک مجموعه داده در تعداد معینی (C) خوشه، بهره می‌گیرد. ایده اصلی تعریف C مرکز برای خوشه‌ها می‌باشد که این مراکز باید با دقت زیاد انتخاب شوند، زیرا مراکز مختلف نتایج متفاوتی را ایجاد می‌کنند.

بهترین انتخاب، قراردادن مراکز در حداکثر فاصله ممکن از یکدیگر می‌باشد. در قدم بعدی، هر الگو را به نزدیک‌ترین مرکز اختصاص می‌دهیم. وقتی همه نقاط به مراکز موجود تخصیص یافتند، مرحله اول با انجام یک گروه‌بندی اولیه تکمیل شده است.

---

[1] Agglomerative
[2] Divisive
[3] Objective function
[4] Squared error
[5] C-Means clustering

حال نیاز داریم تا C مرکز جدید برای خوشه‌های مرحله قبل بیابیم. پس از تعیین این مراکز جدید، مجدداً داده‌ها را به مراکز مناسب با آنها تخصیص می‌دهیم. این مراحل را به دفعات لازم تکرار می‌کنیم تا مراکز تغییر نکنند و ثابت بمانند.

همان‌طورکه گفته شد، این الگوریتم تلاش می‌کند تا تابع هدف خود را که در اینجا تابع مربع خطا می‌باشد، مینیمم کند:

$$J = \sum_{j=1}^{c} \sum_{i=1}^{n} \left\| x_i^{(j)} - c_i \right\|^2$$

$\left\| x_i^{(j)} - c_i \right\|^2$ یک معیار فاصله بین نقاط داده $x_i^{(j)}$ و مرکز خوشه C_j می‌باشد که J مشخص‌کننده فاصله n نقطه داده از مرکز خوشه مربوطه است.

مراحل این الگوریتم که قبلاً اشاره‌ای به آن شد، مطابق زیر است:

1. مشخص‌کردن مراکز اولیه دسته‌ها
2. تخصیص هر الگو به دسته‌ای که نزدیکترین فاصله را با آن دسته دارد.
3. وقتی که تمام الگوها تخصیص داده شدند، موقعیت C مرکز دوباره محاسبه می‌شود. (مراکز جدید به صورت میانگین الگوهای موجود در آن دسته محاسبه می‌شوند.)
4. تکرار مراحل 2 و 3 ادامه می‌یابد تا مراکز بدون تغییر باقی بمانند.

الگوریتم C میانگین، یک الگوریتم همیشه پایان‌پذیر است، اما لزوماً جواب بهینه را پیدا نمی‌کند. به عنوان نقطه ضعف این الگوریتم، می‌توان به وابستگی آن به مراکز خوشه اولیه که به صورت تصادفی انتخاب می‌شوند، اشاره کرد. برای کاهش این تاثیر می‌توان الگوریتم را چندین بار (با مراکز متفاوتی برای خوشه اولیه) اجرا کرد.

C میانگین، یک الگوریتم ساده است که برای بسیاری از کاربردها مناسب می‌باشد. اگر معیار تشابه در تابع هدف با توجه به فاصله تعریف شود، می‌توان از تعاریف مبتنی بر فاصله استفاده کرد که چند نمونه از این تعاریف در جدول 12-1 ذکر شده است.

جدول12-1: معیارهای تشابه براساس توابع فاصله

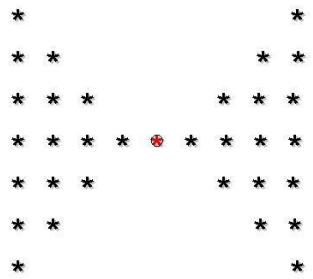
تابع فاصله	فرمول
Euclidian distance	$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$
Haming (city block) distance	$d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i-y_i\rvert$
Tchebyschev distance	$d(x,y)=max \quad i=1,2,...,n\lvert x_i-y_i\rvert$
Minkowski distance	$d(x,y)=\sqrt[p]{\sum_{1}^{n}(x_i-y_i)^p} \quad ,p>0$
Canberra distance	$d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lvert x_i-y_i\rvert}{x_i+y_i}$, x_i *and* y_i *are positive*
Angular separation	$d(x,y)=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right]^{1/2}}$

12-5: خوشه‌بندی فازی

در خوشه‌بندی کلاسیک هر نمونه ورودی فقط و فقط متعلق به یک خوشه است و نمی‌تواند در آن واحد، عضو دو خوشه یا بیشتر باشد. به بیان دیگر، خوشه‌ها با یکدیگر همپوشانی ندارند. اما می‌توان حالتی را در نظر گرفت که میزان تشابه یک نمونه با دو خوشه یا بیشتر، یکسان باشد. برای چنین حالتی در خوشه‌بندی کلاسیک، به دلیل آنکه هر نمونه فقط به یک خوشه تعلق می‌یابد، باید تصمیم‌گیری شود که این نمونه متعلق به کدام خوشه باشد. تفاوت اصلی خوشه‌بندی کلاسیک و خوشه‌بندی فازی در همین نکته است، زیرا در خوشه‌بندی فازی یک نمونه می‌تواند متعلق به بیش از یک خوشه باشد.

شکل12-3 این نکته را بیشتر توضیح می‌دهد. مشخص است که نمونه‌های ورودی موجود در شکل را می‌توان به دو خوشه تقسیم کرد، اما مشکل اینجاست که داده موجود در وسط این مجموعه داده پروانه‌ای، می‌تواند عضو هر دو خوشه باشد. بنابراین باید تصمیم گرفت که داده مورد نظر به کدام خوشه تعلق یابد.

در صورت استفاده از خوشه‌بندی فازی، می‌توان به سادگی داده مورد نظر را با تعلق 0.5 عضوی از خوشه سمت راست و با تعلق 0.5 عضوی از خوشه سمت چپ دانست. تفاوت دیگر دو خوشه‌بندی در این است که مثلاً نمونه‌های ورودی در سمت راست شکل 12-3، می‌توانند با یک درجه تعلق بسیار کم، عضو خوشه سمت چپ هم باشند.

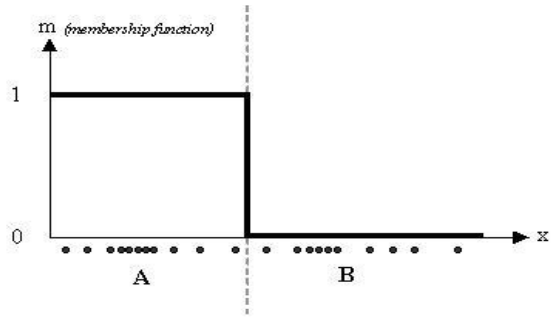


شکل12-3: مجموعه داده پروانه‌ای

در شکل12-4 توزیع یک‌بعدی از نمونه‌های ورودی آورده شده است. در خوشه‌بندی کلاسیک، داده‌های فوق به دو خوشه مجزا تقسیم خواهند شد و تابع تعلق هر نمونه، مقدار صفر یا یک را خواهد داشت. نتیجه خوشه‌بندی کلاسیک در شکل12-5 دیده می‌شود.

شکل 12-4: توزیع یک بعدی نمونه‌ها

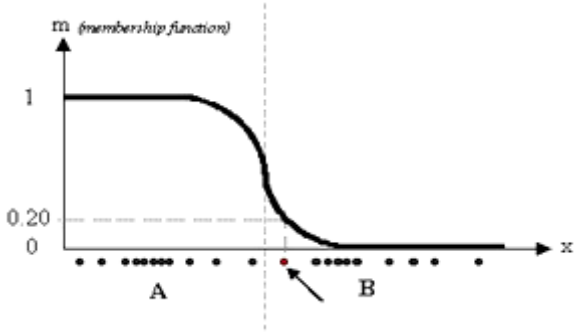
همان‌طور که در شکل12-5 قابل مشاهده است، تابع تعلق مربوط به خوشه B، متمم تابع تعلق خوشه A می‌باشد (اشتراک دو مجموعه تهی است). زیرا نمونه‌های ورودی تنها به یکی از خوشه‌ها تعلق دارند.



شکل12-5: خوشه‌بندی کلاسیک نمونه‌های ورودی

حال برای همین داده‌های ورودی، از خوشه‌بندی فازی استفاده می‌کنیم: در این حالت منحنی تابع تعلق هموارتر است و مرز بین خوشه‌ها به‌طور قطعی مشخص نمی‌باشد.

به عنوان مثال، نمونه‌ای که با فلش مشخص شده است، با درجه تعلق 0.2 به خوشه A و با درجه تعلق 0.8 به خوشه B متعلق است.



شکل12-6: خوشه‌بندی فازی نمونه‌های ورودی

12-5-1: خوشه‌بندی C میانگین فازی: FCM[1]

Ruspini اولین مدل خوشه‌بندی با ایده فازی را در سال 1969 مطرح کرد و در اوایل دهه 80 میلادی، الگوریتم FCM (توسعه‌یافته الگوریتم C میانگین) توسط Bezdek معرفی

[1] Fuzzy c-means

شد. خوشه‌بندی FCM، یکی از مهمترین و پرکاربردترین الگوریتم‌های خوشه‌بندی است. در این الگوریتم نمونه‌ها به c خوشه تقسیم می‌شوند که تعداد c از قبل مشخص شده است. در الگوریتم خوشه‌بندی c میانگین فازی، تابع هدف به صورت زیر می‌باشد:

$$J=\sum_{i=1}^{c}\sum_{k=1}^{n}u_{ik}^{m}d_{ik}^{2} \quad = \quad \sum_{i=1}^{c}\sum_{k=1}^{n}u_{ik}^{m}\left\|x_k-v_i\right\|^2$$

در فرمول فوق $m\in[1,\infty)$ است که میزان فازی بودن را نشان می‌دهد. در اکثر موارد m=2 اختیار می‌شود. اگر $(m\to 1)$ آنگاه خوشه‌بندی سخت‌تر شده و اگر $(m\to\infty)$ آنگاه خوشه‌بندی فازی‌تر خواهد شد. روشن است که انتخاب مقادیر بزرگ m باعث افزایش زمان محاسبات می‌شود.

همچنین در فرمول فوق، x_j نمونه jام و v_i نماینده یا مرکز خوشه iام و n تعداد نمونه‌ها می‌باشد. u_{ij} میزان تعلق نمونه jام به خوشه iام را نشان می‌دهد. علامت $\|*\|$میزان تشابه (فاصله) نمونه با (از) مرکز خوشه می‌باشد که می‌توان از هر تابعی که بیانگر تشابه نمونه و مرکز خوشه باشد استفاده‌کرد. از روی u_{ij} می‌توان یک ماتریس U تعریف کرد که دارای c سطر و n ستون می‌باشد. مولفه‌های این ماتریس می‌توانند هر مقداری بین صفر و یک را اختیار کنند که درواقع میزان عضویت یا تعلق هر عنصر داده به هر خوشه را بیان می‌کند. اگر تمامی مولفه‌های ماتریس U فقط صفر یا یک باشند، الگوریتم فازی مشابه c میانگین کلاسیک خواهد بود.

در این روش دو محدودیت وضع شده‌است: نخست آنکه هیچ خوشه‌ای نباید تهی باشد:

$$\left(\sum\nolimits_{j=1}^{n}u_{ij}>0 \qquad \forall i\in\{1,\ldots,c\}\right)$$

محدودیت دوم، محدودیت نرمال‌سازی نامیده می‌شود، یعنی مجموع درجات عضویت هر داده در تمام خوشه‌ها (مجموع مولفه‌های هر یک از ستونهای ماتریس U) باید برابر با یک باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{c}u_{ij}=1,\forall j=1,\ldots,n$$

برای به دست آوردن فرمولهای مربوط به u_{ij} و v_i باید تابع هدف تعریف‌شده را مینیمم کنیم. با استفاده از شرط فوق و معادل صفر قرار دادن مشتق تابع هدف، فرمولهای مربوطه مطابق زیر به دست می‌آیند:

$$u_{ij} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{c}\left(\frac{d_{ij}}{d_{kj}}\right)^{2/(m-1)}}$$

$$v_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} u^m{}_{ij} x_j}{\sum_{j=1}^{n} u^m{}_{ij}}$$

با توجه به فرمول بالا، الگوریتم خوشه‌بندی c میانگین فازی به صورت زیر می‌باشد:

1. مقداردهی اولیه برای c (تعداد خوشه‌ها)، m (میزان فازی‌بودن) و مراکز خوشه‌ها ($V_1 \ldots V_k$، انتخاب مراکز خوشه‌ها می‌تواند به صورت تصادفی باشد)
2. در نظر گرفتن p=0، که p اندیس تکرار می‌باشد.
3. افزودن یک مقدار به p (p=p+1)
4. محاسبه تابع وابستگی فازی $u_k(x_i)$ در هر مرحله به صورت:

$$u_k^p(x_i) = \frac{\left(\frac{1}{d^2\left(x_i, V_k^p\right)}\right)^{\frac{2}{m-1}}}{\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{1}{d^2\left(x_i, V_k^p\right)}\right)^{\frac{2}{m-1}}} \begin{cases} i = 1, 2, \ldots N \\ k = 1, 2, \ldots, K \end{cases}$$

5. محاسبه مراکز فازی جدید $(V_k, k = 1, 2, \ldots, c)$:

$$V_k^{p+1} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \mu_k^p(x_i)^m x_i}{\sum_{i=1}^{N} \mu_k^p(x_i)^m}$$

6. اگر $\left|u^{p}-u^{p+1}\right|<\varepsilon$ الگوریتم خاتمه می‌یابد. در غیر این صورت، به مرحله 3 برو.

در الگوریتم فوق x بیانگر داده موجود، N تعداد داده‌ها، $u_k\left(x_i\right)$ تابع وابستگی فازی و $d\left(x,y\right)$ بیانگر معیار فاصله تعریف‌شده (مثلاً معیار فاصله اقلیدسی) می‌باشد:

$$d\left(x,y\right)=\sum_{i=1}^{N}\sqrt{\left(x_i-y_i\right)^2}$$

این روش در قله‌های محلی گیر نمی‌کند و همیشه همگرا می‌شود. الگوریتم c میانگین فازی دارای نقطه ضعفهایی نیز هست: زمان محاسبات آن زیاد است، وابسته به حدسهای اولیه است و نسبت به داده‌های نویزی و پرت حساس می‌باشد.

12-5-2: خوشه‌بندی FCM به کمک نمونه‌های برچسب‌گذاری‌شده

در بعضی از کاربردها علاوه بر نمونه‌های بدون برچسب، ممکن است تعداد کمی نمونه برچسب‌دار نیز موجود باشد. در این حالت، می‌توان از روی این نمونه‌ها به حدسهای اولیه بهتری برای مراکز خوشه‌ها رسید. فرض کنید که تعداد نمونه n باشد و M نمونه از این تعداد برچسب‌دار باشند. در این کاربردها تابع هدف به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J_{m,\alpha}\left(U,V;X\right)=\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}u_{ij}^{m}d_{ij}^{2}\quad+\quad\alpha\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left(u_{ij}-l_{ij}b_j\right)^{m}d_{ij}{}^{2}$$

بردار b بدین نحو تعریف می‌شود: اگر نمونه j ام برچسب داشته باشد $b_j=1$ و در غیر این صورت $b_j=0$ است. ضریب α برابر نسبت n به M در نظر گرفته می‌شود.

l_{ij} (مولفه‌های ماتریس L) درجه تعلق نمونه‌های برچسب‌دار را نشان می‌دهند. مشابه قبل، با مشتق گرفتن از تابع هدف، می‌توان فرمولهای به‌روز رسانی u_{ij} را محاسبه کرد. همچنین، برای محاسبه مراکز خوشه‌ها از فرمول ارائه‌شده در الگوریتم c میانگین استاندارد استفاده می‌شود:

$$u_{ij}=\frac{1}{1+\alpha}\left\{\frac{1+\left(1-b_j\sum_{i=1}^{c}l_{ij}\right)+\alpha l_{ij}b_j}{\sum_{i=1}^{c}\frac{d^2ij}{d^2ij}}\right\}$$

در این نوع خوشه‌بندی‌ها:

- اگر M=n باشد، الگوریتم خوشه‌بندی را با سرپرست گویند.
- اگر M<n باشد، الگوریتم خوشه‌بندی را با سرپرست جزئی گویند.
- اگر M=0 باشد، الگوریتم خوشه‌بندی را بدون سرپرست گویند.

3-5-12: خوشه‌بندی PCM[1]

رهیافت فازی PCM برای مقاوم نمودن FCM در برابر داده‌های پرت[2] و نویزدار توسط Krishnapuram و Kaller ارائه شد. این روش، محدودیت نرمال‌سازی در FCM را (مجموع درجات عضویت هر داده به همه خوشه‌ها باید برابر یک باشد) به‌صورت $\max u_{ij} > 0 \ \forall j$ ساده می‌کند، یعنی داده باید حداقل به یکی از خوشه‌ها تعلق داشته باشد. البته یک عبارت پنالتی نیز به تابع هدف اضافه می‌شود:

$$J_f(U,V;X) = \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} u_{ij}^m d_{ij}^2 \quad + \quad \sum_{i=1}^{c}\eta_i \sum_{j=1}^{n} \left(1-u_{ij}\right)^m$$

افزوده‌شدن عبارت دوم به رابطه فوق، مانع میل‌کردن تمام درجه عضویتها به سمت صفر می‌شود. زیرا با کاهش مقدار u_{ij} در عبارت اول، معکوس آن یعنی $\left(1-u_{ij}\right)$ در عبارت دوم افزایش خواهد یافت. $\eta_i > 0$، ثابتی است که باید برای هر خوشه تعریف شود تا تعادل بین دو عبارت را برقرار سازد. به تعبیری، η_i نقطه مرز فازی هر خوشه را مشخص می‌نماید. پس با این پارامتر می‌توان میزان گسترش خوشه‌ها را کنترل نمود.

برای مشخص‌شدن شکل خوشه، تخمین مناسب برای مقدار η_i اهمیت بسیاری دارد:

---

[1] Possibilistic c-means
[2] Outlier

$$\eta_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} u_{ij}{}^{m} d_{ij}{}^{2}}{\sum_{j=1}^{n} u_{ij}{}^{m}}$$

رابطه فوق بیان می‌نماید که هر فاصله (d_{ij}) یک درجه عضویت بـه خوشـه i دارد، پـس بـرای تخمـین η_i یـک میـانگین وزن‌دار روی درجـه عضـویت داده‌هـا مـی‌گیـریم. η_i همزمـان بـا به‌روزرسانی مراکز خوشه‌ها، تغییر می‌کند. یعنی پس از هر بـار سـاخته‌شـدن خوشـه i، مقـدار η_i نیز به‌روزرسانی می‌شود.

با توجه به اینکه روش PCM، شرط دوم روش FCM (محدودیت نرمال‌سـازی) را حـذف می‌کند، فرمول به‌روزرسانی درجه عضویت داده‌ها به صورت زیر تغییر خواهدکرد:

$$u_{ij} = \frac{1}{1+\left(\frac{d^{2}{}_{ij}}{\eta_i}\right)^{1/(m-1)}}$$

به این ترتیب، تعلق داده i تنها به فاصـله بـین همـان داده و خوشـه j وابسـته اسـت و از فاصله داده تا خوشه‌های دیگر مستقل می‌باشد. میزان تعلق داده به هـر خوشـه بـا پـارامتر η_i کنترل می‌شود.

12-5-4: خوشه‌بندی C میانگین امکانی فازی (FPCM[1])

این روش از ترکیب دو روش خوشه‌بندی FCM و PCM حاصل شده است. تابع هدف این نوع خوشه‌بندی توسط رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$J = \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left(u_{ij}^{m} + t_{ij}^{\eta}\right) d_{ij}{}^{2}$$

[1] Fuzzy Possibilistic C-Means (FPCM)

مقادیر t_{ij} میزان خصوصیت داده jام به خوشه iام را نشان می‌دهد. η کنترل‌کننده میزان تاثیر خصوصیت بر خوشه‌بندی است که معمولاً در بازه [5,3] درنظر گرفته می‌شود. برای مقادیر t_{ij} شرط زیر برقرار است:

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij} = 1$$

برای به‌روز رسانی مقادیر u_{ij} و مقادیر خصوصیت t و نیز بردارهای میانگین v_i از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$u_{ij} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{c} \left(\frac{d_{ij}}{d_{kj}} \right)^{2/(m-1)}}$$

$$t_{ij} = \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{d_{ij}}{d_{ik}} \right)^{\frac{2}{\eta-1}} \right]^{-1}$$

$$v_i = \frac{\sum_{k=1}^{n} \left(u^m{}_{ik} + t_{ik}{}^{\eta} \right) x_i}{\sum_{k=1}^{n} \left(u^m{}_{ik} + t_{ik}{}^{\eta} \right)}$$

این روش خوشه‌بندی از اطلاعات درون‌کلاسی استفاده می‌کند و در کار با نویزها و داده‌های دورافتاده از راندمان بالایی برخوردار است. الگوریتم خوشه‌بندی c میانگین فازی امکانی دارای مراحل زیر است:

1. تعیین مقادیر اولیه c، m و v که $2 < c < n$ و $m > 1$ باشند. همچنین، ماتریسهای تصادفی U و T تولید شوند.
2. برای مقادیر i=1, 2, …,c بردار میانگین $\{v_i\}$ را با استفاده از رابطه گفته‌شده به دست آورید.
3. به‌روزرسانی ماتریس U.
4. به‌روزرسانی ماتریس T.

5. در صورت عدم ارضای شرط خاتمه (نرسیدن بهبود در عدد J_m بـه یـک مقـدار آسـتانه) مراحل دوم تا چهارم تکرار شود.

12-5-5: خوشه‌بندی C میانگین امکانی فازی بهبودیافته (MFPCM[1])

می‌توان دریافت که در صورت زیاد بودن تعداد داده‌ها، t_{ik} مقـادیر کـوچکی مـی‌شـوند. بـه عنوان مثال، اگر مجموعه‌ای شامل 1000 نمونه داده بـه دو خوشـه 500 داده‌ای تقسـیم شـود، آنگاه مجموع مقادیر خصوصیت 500 دادهٔ هر خوشه باید یک شود. یعنـی در حالـت سـاده‌ای که فاصلهٔ هر داده تا مرکز خوشه‌اش ثابت باشد، میزان خصوصیت هـر داده نسـبت بـه خوشـهٔ خودش برابر با 0.002 خواهد بود. کوچک‌بودن مقادیر خصوصیت در مقابـل مقـادیر عضـویت به معنی کم‌رنگ شدن تأثیر آنها در تابع هدف خواهد بود.

برای حل این مشکل، با توجه به اینکه $t_{ik} < 1$ هستند، مشخص است که بایـد مقـدار η کاهش یابد. کاهش مقدار η بر مقادیر خصوصیت t_{ik} ها تاثیر مـی‌گـذارد. در داده‌هـای نـویزی و دورافتاده، مقدار d_{ik} / d_{ij} خیلی بزرگتر از یک و برای داده‌های سالم و متعلـق بـه خوشـه‌هـا d_{ik} / d_{ij} تقریباً برابر با یک است، به این ترتیب می‌توان نتیجه‌گرفت که بـرای افـزایش تـاثیر مقادیر خصوصیتهای t_{ik}ها، نمی‌توان تنها از کاهش پارامتر η استفاده‌کرد.

راه دیگر بـرای افـزایش تـاثیر خصوصـیتها، اسـتفاده از مقـادیر بزرگتـر m (کـاهش تـاثیر مقادیر عضویت یعنی u_{ik}ها) است. با بزرگترکردن مقدار m، میزان فـازی‌سـازی افـزایش پیـدا می‌کند ولی افزایش بیش از حد آن، باعث کاهش سـرعت همگرایـی و نیـز در مـواردی باعـث کاهش دقت خوشه‌بندی می‌شود. به این ترتیب تنها با تغییر پارامترهای ηو m نمـی‌تـوان بـه یک خوشه‌بندی دقیق و مقاوم دست‌یافت.

برای رفع این عدم توازن بین مقادیر u_{ik} و t_{ik} و کاهش وابستگی مقـادیر t_{ik} بـه تعـداد داده‌های متعلق به هر خوشه، از تغییر شرط محدودیت نرمال‌سازی استفاده می‌کنیم.

---

[1] Modified Fuzzy Possibilistic C-Means (MFPCM)

بدین‌گونه که در هر تکرار، ابتدا تعداد داده‌های متعلق به هر خوشه را محاسبه کرده، مجموع مقادیر خصوصیت آن خوشه را برابر با این مقدار (بجای عدد یک) قرار می‌دهیم. در این حالت، برای شرط محدودیت نرمال‌سازی خواهیم داشت:

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij} = \#\, sample(i)$$

که منظور از #sample(i) تعداد داده‌های متعلق به خوشه iام در هر تکرار می‌باشد.

با اعمال این شرط جدید و استفاده از ضریب لاگرانژ برای حداقل‌کردن تابع هدف، رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$J = \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}\left(u_{ij}^{m} + t_{ij}^{\eta}\right) d_{ij}^{\,2} - \lambda\left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij} - \#\, sample(i)\right)$$

با مشتق‌گیری از رابطه بالا نسبت به t_{ik} و معادل صفر قراردادن آن، رابطهٔ زیر برای به‌روزرسانی مقادیر خصوصیت به دست می‌آید:

$$t_{ij} = \frac{\#\, sample(i)}{\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{d_{ij}}{d_{ik}}\right]^{\frac{2}{\eta-1}}}$$

12-5-6: الگوریتم خوشه‌بندی فازی ژنتیک: FGC[1]

الگوریتمFGC ضمن پیدا کردن تعداد بهینه مرکز خوشه‌ها با درنظرگرفتن برخی اشیای داده به عنوان مراکز، باعث کارایی بهتر الگوریتم خوشه‌بندی نیز می‌شود.

در این الگوریتم، ابتدا ماتریس فاصله‌ها که فاصله اقلیدسی هر شیء داده نسبت به دیگر اشیا داده را نگهداری می‌کند، محاسبه خواهد شد. سپس به‌ازای هر شیء داده j یک شعاع همسایگی r تعریف می‌شود تا در صورتی که آن شیء داده به عنوان مرکز خوشه قرار بگیرد،

[1] Fuzzy Genetic Clustering (FGC)

میزان تعلق شیء داده i $(i \neq j)$ که در فاصله r از شیء مرکزی j قرار می‌گیرد، $u_{ij} = 0.5$ شود. مقدار r به میزان پراکندگی مجموعه داده‌ها بستگی دارد.

در مرحله بعد، ماتریس درجه عضویت U (مطابق آنچه در روش PCM گفته شد) محاسبه یا به‌روزرسانی می‌شود:

$$u_{ij} = \frac{1}{1+\left(\frac{d^2{}_{ij}}{\eta_i}\right)^{1/(m-1)}}$$

الگوریتم FGC شامل مراحل زیر است:

1. **کدگذاری:** ثابت شده است که در حالت بهینه $k \leq \sqrt{n}$ است. وظیفه هر کروموزوم نگهداری توالی از عناصر به طول $\sqrt{n}$ می‌باشد که هر عنصر وضعیت داده‌ای را نشان می‌دهد که به عنوان مرکز خوشه انتخاب شده است.

W_1	W_2	W_3	……	$W_{\sqrt{n}-1}$	$W_{\sqrt{n}}$

$$W_i \in Z^+, W_i = \begin{cases} 0 & don't \quad care \\ j \in [1..n] x_j & is \quad cluster \quad center \end{cases}$$

جستجوی حالتهای مختلفی از خوشه‌بندی با تعداد خوشه‌های متغیر از فضای حالت، (در میان کروموزومهای یک جمعیت) به سادگی امکان‌پذیر می‌باشد.

2. **مقداردهی اولیه جمعیت:** به هرکدام از ژنهای یک کروموزوم، عددی تصادفی بین صفر و n نسبت داده می‌شود تا با احتمال 0.5 مقدار هر ژن برابر با صفر و با احتمال 0.5 عددی تصادفی بین صفر و n باشد.

3. **محاسبه برازندگی[1] کروموزومها:** سه معیار فاصله درون‌خوشه‌ای، فاصله بین‌خوشه‌ای و تعداد خوشه‌ها برای محاسبه برازندگی (برازش) کروموزومها استفاده می‌شوند.

$$E_k = \sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n} u^m{}_{ij} d_{ij}{}^2 + \sum_{i=1}^{c} \eta_i \sum_{j=1}^{n} (1-u_{ij})^m$$

[1] Fitness

$$D_k = avg_{i,j=1}^{k} \left\| z_i - z_j \right\|$$

$$fitness(k) = \frac{1}{k} \times \frac{E_1}{E_k} \times D_k$$

4. **عملگرهای ژنتیک:** برای عملگر انتخاب از روش چرخ رولت همراه با نخبه‌گزینی و روش جابجایی تک نقطه‌ای استفاده می‌کنیم.
5. **بررسی شرایط توقف:** مشابه روش‌های قبل انجام می‌شود.

12-6: معیارهای کارایی در خوشه‌بندی

هیچ معیار مطلقی در رسیدن به بهترین خوشه‌بندی وجود ندارد، بلکه این نکته بستگی به صورت مسئله و نظر کاربر دارد که در مورد صحت خوشه‌بندی نمونه‌ها تصمیم می‌گیرد. با این حال، معیارهای مختلفی به عنوان ویژگیهای یک خوشه‌بندی خوب ارائه شده‌اند که می‌توانند کاربر را در رسیدن به یک خوشه‌بندی مناسب راهنمایی کنند.

یکی از مهمترین مسائل در خوشه‌بندی، انتخاب تعداد خوشه‌ها می‌باشد. دو شرط زیر باید در انتخاب تعداد خوشه‌ها مدنظر قرار بگیرد:

1. تا حد امکان، نمونه‌های موجود در یک خوشه، شبیه به یکدیگر باشند.
2. تا حد امکان، نمونه‌های متعلق به خوشه‌های متفاوت، نامتشابه با یکدیگر باشند.

عبارات فوق بدین صورت نیز بیان می‌شود که خوشه‌ها باید دارای ماکزیمم فشردگی و حداکثر جدایی باشند. برای یک خوشه‌بندی مناسب، باید هر دو معیار با هم برآورده شوند، چون اگر فقط معیار فشردگی مورد استفاده قرار بگیرد، در آن صورت هر داده می‌تواند به عنوان یک خوشه در نظر گرفته شود (چون هیچ خوشه‌ای فشرده‌تر از خوشه‌ای با یک داده نیست) و اگر فقط معیار جدایی در نظر گرفته شود، در این صورت، بهترین خوشه‌بندی آن است که تمام داده‌ها را یک خوشه (فاصله هر خوشه از خودش صفر است) در نظر بگیریم.

با توضیحات بالا، نیاز است تا از ترکیب دو معیار فوق استفاده شود. در ادامه، چند تابع متداول برای ارزیابی خوشه‌بندی معرفی خواهند شد.

- **تابع ارزیابی ضریب افراز:**

$$v_{PC}(U)=\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{c}u_{ij}^{\ 2}\right)$$

در تابع بالا، n تعداد کل نمونه‌ها و c تعداد خوشه‌ها می‌باشد. انتخاب تعداد خوشه‌های مناسب با ماکزیمم کردن تابع فوق، انجام می‌شود. یعنی برای تعداد خوشه‌های مختلف، خوشه‌بندی را اجرا کرده، با استفاده از ماتریس تعلق به‌دست‌آمده (ماتریسی با ابعاد $n \times c$ که هر درایه آن میزان تعلق نمونه k به کلاس i را نشان می‌دهد) مقدار تابع فوق را محاسبه می‌کنیم. تعداد خوشه‌هایی که به ازای آن، تابع بیشترین مقدار را دارا باشد، به عنوان تعداد خوشه‌های مناسب در مسئله، مورد استفاده قرار می‌گیرد. مقدار تابع فوق بین 1/c و 1 می‌باشد که هر چه این مقدار به یک نزدیکتر باشد، خوشه‌بندی بهتر انجام می‌شود.

- **تابع ارزیابی آنتروپی افراز:**

$$v_{PE}(U)=-\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{c}u_{ij}\log(u_{ij})\right)$$

انتخاب تعداد خوشه‌های مناسب با مینیمم‌کردن تابع فوق به دست می‌آید. تعداد خوشه‌هایی که به ازای آنها، کمترین مقدار تابع حاصل شود، به عنوان تعداد خوشه‌های مناسب برای مسئله، مورد استفاده قرار می‌گیرد. مقدار این تابع بین 0 تا $\log_2 c$ متغیر است. حالت دیگری از این تابع، به تابع ارزیابی آنتروپی نرمال‌شده موسوم است که در آن، مقدار تابع ارزیابی فوق را بر لگاریتم تعداد خوشه‌ها تقسیم می‌کنند.

نکته قابل توجه در مورد دو تابع معرفی‌شده در بالا این است که وقتی PC برابر با یک باشد، PE صفر خواهد بود که معادل با خوشه‌بندی کلاسیک می‌باشد. اگر PC برابر 1/c باشد، PE برابر $\log_2 c$ خواهد بود که فازی‌ترین حالت را برای خوشه‌بندی سبب می‌شود.

از طرف دیگر برای رسیدن به حالت خوشه‌بندی مطلوب، باید PC ماکزیمم و PE مینیمم شود. بنابراین در خوشه‌بندی فازی، تلاش بر این است تا به خوشه‌های کلاسیک نزدیکتر شویم و نمونه‌ها با تعلق زیاد به خوشه ها نسبت داده شوند.

نقطه ضعف دو تابع فوق در این است که از داده‌ها مستقیماً برای ارزیابی خوشه‌بندی استفاده نشده است. اما در توابعی که در ادامه معرفی می‌شوند، خود نمونه‌ها در تعریف تابع ارزیابی نقش دارند.

- **تابع Fukuyama and Sugeno**:

$$v(U;V;X)=\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}{u_{ij}}^{m^2}\left(\left\|x_j-v_i\right\|^2-\left\|v_i-\bar{v}\right\|^2\right)$$

در تابع فوق، $\bar{v}$ میانگین کل نمونه‌ها می‌باشد و انتخاب تعداد خوشه‌های مناسب با مینیمم کردن تابع فوق به دست می‌آید. تعداد خوشه‌هایی که به ازای آنها، کمترین مقدار تابع حاصل شود، به عنوان تعداد خوشه‌های مناسب برای مسئله، استفاده می‌شود.

جمله اول در تابع فوق، معیاری برای فشردگی خوشه‌ها و جمله دوم، معیاری برای جدایی خوشه‌ها از هم می‌باشد. هرچه خوشه‌ها فشرده‌تر باشند جمله اول کوچکتر خواهد بود و هرچه جدایی خوشه‌ها بیشتر باشد جمله دوم بزرگتر می‌شود. بنابراین، مینیمم‌کردن تابع فوق می‌تواند معیار مناسبی برای ارزیابی خوشه‌بندی و تعداد خوشه‌ها باشد.

- **تابع Xie and Beni**:

$$v(U;V;X)=\frac{\sum_{i=1}^{c}\sum_{j=1}^{n}{u_{ij}}^{m}\left\|x_j-v_i\right\|^2}{n\left(\min\left\{v_i-v_j\right\}\right)}$$

انتخاب تعداد خوشه‌های مناسب با مینیمم‌کردن تابع فوق به دست می‌آید. تعداد خوشه‌هایی که به ازای آنها، کمترین مقدار تابع حاصل شود، به عنوان تعداد خوشه‌های مناسب برای مسئله، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

صورت کسر در تابع فوق معیاری برای فشردگی خوشه‌ها و مخرج کسر معیاری برای جدایی خوشه‌ها از هم می‌باشد. هرچه خوشه‌ها فشرده‌تر باشند، صورت کسر کوچکتر خواهد بود و هرچه مخرج کسر بزرگتر باشد، جدایی خوشه‌ها بیشتر می‌شود. بنابراین، مینیمم کردن تابع فوق می‌تواند معیار مناسبی برای ارزیابی خوشه‌بندی و تعداد خوشه‌ها باشد.

12-7: کاربرد خوشه‌های فازی در قطعه‌بندی تصاویر[1]

قطعه‌بندی، اولین مرحله در تحلیل تصاویر می‌باشد و فرآیندی است که تصویر را به قسمتهای اصلی سازنده‌اش تقسیم می‌کند. در این فرآیند، اشیای مختلف موجود در تصویر با توجه به کاربردشان، از یکدیگر تفکیک می‌شوند تا تحلیل تصویر در مراحل بعدی با سهولت بیشتری انجام پذیرد. مثلاً در کاربردهای مربوط به رهگیری وسیله نقلیه از هوا، ابتدا باید جاده را شناسایی کرد و سپس به تشخیص وسیله نقلیه موردنظر اقدام نمود. با این توضیح، در گام اول (مطابق شکل 12-7) ابتدا جاده از تصویر جدا می‌شود.

به طورکلی، قطعه‌بندی یکی از مشکل‌ترین مباحث موجود در پردازش تصویر است که در موفقیت تحلیل تصویر، بسیار موثر می‌باشد. کاربرد این تکنیک در موضوعات مختلف بینایی ماشین، نظیر رهگیری خودکار هدف و جداسازی اشیای موردنظر در تصویر، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

شکل 12-7: قطعه‌بندی برای تشخیص اتومبیل در تصاویر هوایی

برای قطعه‌بندی تصویر روشهای مختلفی وجود دارد که می‌توان آنها را به دو دسته کلی روشهای مبتنی بر هیستوگرام (Histogram-based) و روشهای مبتنی بر انجام خوشه‌بندی (Clustering-Based) تقسیم کرد. در حالت اول، تقسیم‌بندی تصاویر براساس نحوه توزیع پیکسلها صورت می‌گیرد. قدم اصلی در این روشها، یافتن سطح آستانه‌ای مناسب برای اعمال آن به تصویر می‌باشد.

[1] Image segmentation

در روشهای مبتنی بر خوشه‌بندی، از شباهتها و روابط موجود میان داده‌های ورودی برای گروه‌بندی میان آنها استفاده می‌شود. در این روشها داده‌ها به نحوی گروه‌بندی می‌شوند تا داده‌های درون یک خوشه دارای بیشترین شباهت به یکدیگر باشند.

به‌طورکلی، قطعه‌بندی با روشهای مبتنی بر خوشه‌بندی در تصاویری که دارای جزییات فراوانی هستند، از کارایی بیشتری برخوردار است.

در ادامه، قطعه‌بندی تصاویر را با استفاده از خوشه‌بندی ساده و فازی مورد بررسی قرار می‌دهیم و از تکنیک بلوک‌بندی (در هر دو حالت مطرح‌شده) برای رسیدن به نتایج بهتر استفاده می‌کنیم.

12-7-1: استفاده از بلوک‌بندی و الگوریتم فازی برای قطعه‌بندی تصاویر

به عنوان یک الگوریتم شاخص در تکنیکهای قطعه‌بندی تصاویر، می‌توان از الگوریتم غیرفازی k-means نام برد. در این الگوریتم، پیکسلهای یک کلاس با توجه به معیار شباهت و تعداد کلاسهای موجود، فقط به یک کلاس تعلق خواهند داشت. بدین معنا که عضویت یک پیکسل به یک کلاس خاص قطعی بوده، نمی‌تواند به کلاس دیگری وابسته باشد.

اما در الگوریتمهای فازی، هر پیکسل دارای وابستگی قطعی به یک کلاس نیست، بلکه معیار عضویت فازی برای آن تعریف می‌شود که احتمال عضویت یک پیکسل به یک کلاس خاص را مشخص می‌کند. جهت قطعه‌بندی یک تصویر، می‌توان از الگوریتمهای فازی مختلف (مثل FCM که در بخش 12-5-1 بیان‌شد) استفاده کرد.

همچنین می‌توان تصویر موجود را به بلوکهایی کوچک تفکیک نمود. بلوکها می‌توانند با توجه به نوع و ویژگی تصویر، از سایز 2×2، 3×3 یا بالاتر باشند. در شکل 12-8 نمونه‌ای از این نوع تقسیم‌بندی دیده می‌شود.

سپس بلوکها با توجه به تعداد کلاسها (مشخص‌شده از قبل) دسته‌بندی می‌شوند. بدین صورت که با استفاده از مشخصات آماری هر بلوک، تصمیم گرفته می‌شود تا مربوط به چه کلاسی باشد.

شکل12-8: بلوک‌بندی اولیه تصویر جهت تحلیل آماری مقادیر پیکسلها برای قطعه‌بندی

در این روش مجموعه بلوکهای تصویر X با $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ بیان می‌شوند که هر کدام از x_i ها یک ماتریس مربعی از پیکسلها می‌باشند. دو ویژگی از این بلوکها را جهت بررسی میزان وابستگی آنها به هر کلاس استخراج می‌کنیم. عمل قطعه‌بندی را می‌توان با انتخاب ضریب تغییرات و میانگین سطوح خاکستری پیکسلهای موجود در هر بلوک به خوبی انجام‌داد. ضریب تغییرات از روی میانگین و انحراف معیار (جذر واریانس) با توجه به فرمول زیر به دست می‌آید:

$$V_i = \frac{\sigma_i}{m_i}$$

دو ویژگی فوق باعث می‌شوند تا داده‌های موجود در یک کلاس، دارای بیشترین میزان شباهت با یکدیگر باشند و حجم محاسبات نیز کاهش یابد. بلوک‌بندی برای انواع متفاوت روشهای فازی و غیرفازی قابل اعمال است. در شکل 12-9 نتایج حاصل از انواع روش‌های قطعه‌بندی بر روی یک تصویر خاص نشان داده شده است. در این شکل، یک روش غیرفازی (k-means) و یک روش فازی (FCM)، هم در حالت بلوک‌بندی‌شده و هم بدون آن مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

(الف) قطعه‌بندی با استفاده از K-Means

(ب) قطعه‌بندی با استفاده از K-Means بلوک‌بندی‌شده

(پ) قطعه‌بندی با استفاده از Fuzzy C-Means

(ت) قطعه‌بندی با استفاده از Fuzzy C-Means بلوک‌بندی‌شده

شکل12-9: قطعه‌بندی تصویر با استفاده از روشهای مختلف

12-7-2: روش FCM با راهنمایی هندسی[1]: GGFCM

روش FCM یکی از متداول‌ترین روشهای خوشه‌بندی فازی می‌باشد. قطعه‌بندی تصاویر به نواحی مناسب در این روش، براساس مشخصه طیفی رنگ صورت می‌گیرد. بنابراین، در یک تصویر چند متغیره که اشیای آن دارای طیف رنگی مشابه باشند، دارای عملکرد مناسبی نمی‌باشد. در این موارد می‌توان با استفاده از اختلاف ضریب همبستگی و بررسی اطلاعات مکانی، قطعه‌بندی را انجام داد.

اضافه‌کردن اطلاعات مکانی دارای حسن دیگری نیز هست. وقتی که دو شیء متفاوت با یکدیگر هم‌پوشانی دارند، استفاده از اطلاعات مکانی (و مشخصه طیف رنگ) می‌تواند به تفکیک این دو شیء از یکدیگر کمک کند.

در این‌جا تکنیک با سرپرست جزئی GGFCM معرفی می‌شود که از اطلاعات هندسی در حین فرآیند خوشه‌بندی استفاده می‌کند. همسایگی محلی هر پیکسل، شرایط آن را مشخص می‌کند و باعث هدایت فرآیند خوشه‌بندی می‌شود. در ادامه، نشان خواهیم داد که قطعه‌بندی به روش GGFCM، بهبود قطعه‌بندی در تصاویر را سبب می‌شود.

الگوریتم روش GGFCM مانند FCM است با این تفاوت که در هر مرحله از تکرار، متغیری که برای هر پیکسل به‌روز می‌شود، براساس مقادیر عضویت پیکسلهای همسایه در دامنه مکان به دست می‌آید. از این رو GGFCM در حین فرآیند خوشه‌بندی، بین دامنه رنگ و دامنه مکان جابجا می‌شود.

در طول این فرآیند، مقادیر عضویت پیکسلهای احاطه‌کننده (هشت پیکسل همسایه برای یک پیکسل خاص در جهتهای عمودی، افقی و مایل) یک مقدار را برای هر پیکسل مشخص می‌کنند که این مقدار معیار شباهتی برای هر پیکسل با توجه به همسایه‌های احاطه‌کننده آن می‌باشد. اگر این مقدار برابر با یک باشد، بدین معنا است که پیکسلهای احاطه‌کننده، مقادیر درجه عضویت مشابه دارند و مقدار بیشتر از یک بدین معنا است که پیکسلهای احاطه کننده آن، دارای درجه عضویت متفاوتی می‌باشند.

---

[1] Geometrical Guided FCM (GGFCM)

سطرهای ماتریس U نشان‌دهنده پیکسلهای تصویر است و ستونهای این ماتریس، بیانگر تعداد کلاسهای خوشه‌بندی می‌باشد و می‌تواند به تصویری تنظیم شود که تصویر جزئی نامیده می‌شود.

برای هر پیکسل در تصویر جزئی، میانگین انحراف درجه عضویت (Δm) با درجه عضویت پیکسلهای همسایه مقایسه می‌شود. تعریف این معیار مطابق زیر است:

$$\Delta m_{rc,i} = \frac{1}{s^2 - 1} \sum_{(r',c' \in w)} \left| u_{r',c',i} - u_{rc,i} \right|$$

Δm: میانگین انحراف درجه عضویت برای پیکسل در مکان (r,c) هر تصویر جزئی

i: خوشه جاری

w: پنجره همسایگی به طول فرد s

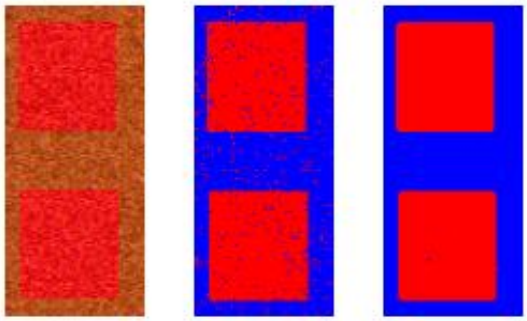
$u_{r',c'}$: درجه عضویت پیکسلهای همسایه در مکان (r',c') در پنجره w تصویر جزئی

$u_{r,c}$: درجه عضویت پیکسل مرکز در پنجره تصویر جزئی

واضح است میانگین انحراف درجه عضویت برای نواحی همگن برابر با صفر است. برای تعیین اینکه پیکسل جاری باید برای کدام خوشه بهبود یابد، مقادیر عضویت با پنجره همسایه برای هر خوشه i محاسبه می‌شود و پیکسل به خوشه دارای بیشترین حاصل‌جمع تعلق می‌یابد. برای آن پیکسل خاص، مقدار یک با میانگین انحراف درجه عضویت (Δm) بهبود می‌یابد و برای مابقی خوشه‌ها، با توجه به مقدار Δm مربوطه تضعیف می‌شود.

برای بیان مزیت روش GGFCM نسبت به FCM، به شکل 12-10دقت می‌کنیم که تصویر دو مربع مشابه با رنگ یکسان (R=150,G=50,B=50) و با پس‌زمینه‌ای به رنگ (R=125,G=75,B=50) را به نمایش می‌گذارد. تعداد پیکسلهای پس‌زمینه[1] با پیکسلهای پیش‌زمینه[2] یکسان است. تصویر با نویز گوسی (μ=0,δ=10) نویزی شده است.

[1] Foreground
[2] Background



شکل12-10: تصویر با نویز گوسی (چپ)، قطعه‌بندی تصویر نویزی با FCM (وسط) و قطعه‌بندی تصویر نویزی با GGFCM (راست)

بهبود قطعه‌بندی و رفع اثر نویز که به دلیل استفاده از اطلاعات مکانی حاصل شده است، در شکل12-10 کاملاً مشهود می‌باشد.

شکل12-11 بیانگر مقایسه دیگری در عملکرد دو روش FCM و GGFCM می‌باشد. تصویر سمت چپ را برای دو روش به پنج کلاس تقسیم کرده‌ایم و پنجره‌ای به اندازه 3×3 روی تصویر حین خوشه‌بندی با GGFCM، در نظر گرفته‌ایم. همان‌طور که در تصویر وسط دیده می‌شود، بعضی از ناحیه‌های قطعه‌بندی‌شده در روش FCM، به وسیله لبه‌های دارای انحراف (به طول چند پیکسل) پوشیده شده‌اند. با اعمال GGFCM (مطابق تصویر سمت راست) و استفاده از اطلاعات مکانی، پیکسلهای لبه‌های انحراف‌دار با کلاسی که پیکسلهای احاطه شده به آن تعلق دارند ادغام می‌شوند. این امر باعث می‌شود تا ناحیه‌های متجانس در یک کلاس قرار بگیرند و لبه‌های دارای انحراف از تصویر پاک شوند.

شکل12-11: تصویر اصلی (چپ)، تصویر قطعه‌بندی‌شده به روش FCM (وسط)، تصویر قطعه‌بندی‌شده به روش GGFCM (راست)