فصل 6

توابع و آنالیز فازی

در فصول قبل با مفاهیم اولیه مجموعه‌های فازی، اصل گسترش، اعداد فازی و گرافهای فازی آشنا شدیم. در این فصل پس از تعریف توابع فازی به آنالیز توابع فازی پرداخته، با مفاهیم اکسترمم، انتگرال و دیفرانسیل در توابع فازی آشنا خواهیم شد.

6-1: توابع فازی

یک تابع فازی مفهومی تعمیم‌یافته از یک تابع کلاسیک می‌باشد. همان‌طورکه می‌دانیم یک تابع کلاسیک، بیانگر یک تصویر از دامنه D (تعریف‌شده برای تابع) به یک فضای S می‌باشد که $f(D) \subseteq S$ را برد تابع می‌نامیم.

مفاهیم مختلف تعریف تابع کلاسیک را می‌توان به صورت فازی تعریف نمود. بنابراین درجات مختلف فازی‌سازی وجود دارد که می‌توان در مورد توابع کلاسیک اعمال کرد. بدین ترتیب، سه گروه از توابع فازی به صورت زیر به دست خواهند آمد:

1. یک تصویرکننده کلاسیک (قطعی) می‌تواند تصویری از یک دامنه فازی به یک برد فازی باشد. بدیهی است که اگر دامنه این تابع یک مجموعه کلاسیک باشد، برد آن نیز یک مجموعه کلاسیک خواهد بود.

2. ممکن است تصویرکننده فازی باشد و یک دامنه قطعی را به یک مجموعه فازی تصویر نماید که معمولاً به این گروه از توابع ، توابع فازی می‌گوییم.

3. ممکن است توابع معمولی دارای خاصیت فازی بوده، با قیود و شرایط فازی تعریف شده باشند.

طبیعی است که ترکیب انواع سه‌گانه فوق نیز ممکن می‌باشد، ولی توجه ما معطوف به مواردی است که بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند.

تعریف 6-1: تابع کلاسیک $f : X \rightarrow Y$ دامنه فازی $\tilde{A}$ در X را به برد فازی $\tilde{B}$ در Y تصویر می‌کند اگر و فقط اگر:

$$\forall x \in X, \mu_{\tilde{B}}\left(f(x)\right) \geq \mu_{\tilde{A}}(x)$$

برای تابع کلاسیک $f : X \to Y$ و دامنه فازی $\tilde{A}$ در X ، اصل گسترش برد فازی $\tilde{B}$ را با تابع عضویت زیر حاصل می‌نماید:

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = sup_{x \in f^{-1}(y)} \ \mu_{\tilde{A}}(x)$$

که f , f^{-1} دو تابع بر طبق تعریف 6-1 می‌باشند.

مثال:

$$y = (50x) \oplus 20 \qquad ,X = Y = \mathbb{R}$$
$$y = e^{-10x} \qquad ,X = Y = \mathbb{R}$$

اگرX یک مجموعه فازی باشد، Y نیز یک مجموعه فازی خواهد بود.

تعریف6-2: اگر X و Y دو مجموعه مرجع باشند و $\tilde{P}(Y)$ مجموعه شامل تمام مجموعه‌های فازی قابل تعریف در Y (مجموعه توانی) باشد و $f : X \to \tilde{P}(Y)$ یک تصویر کننده باشد، $\tilde{f}$ یک تابع فازی است اگر و فقط اگر:

$$\mu_{\tilde{f}(x)}(y) = \mu_{\tilde{R}}(x,y) \qquad , \forall (x,y) \in X \times Y$$

که $\mu_{\tilde{R}}(x,y)$ بیانگر تابع عضویت رابطه فازی است.

مثال: تابع $\tilde{f}$ زیر یک تابع فازی می‌باشد:

$$\tilde{a}, \tilde{b} \in F(\mathbb{R})$$
$$X = \mathbb{R}$$
$$\tilde{f} : x \to \tilde{a}x \oplus \tilde{b}$$

اگر تابع فازی بر یک دامنه فازی اعمال شود، به مجموعه‌های فازی درجه دو می‌رسیم.

6-2: اکسترمم توابع فازی

معمولا اکسترمم (ماکزیمم یا مینیمم) تابع قطعی f یک نقطه دقیق مثل x_0 بر دامنه D می‌باشد. اگر تابع f ، تابع هدف یک مدل تصمیم‌گیری باشد، در نقطه x_0 شرایط برای رسیدن به حالت بهینه فراهم می‌شود.

در نظریه کلاسیک اغلب یک رابطه یکتا میان نقطه اکسترمم یک تابع هدف و تعمیم بهینه در مدل تصمیم‌گیری وجود دارد. اما در مدلهایی که با مفاهیم فازی کار می‌کنند این رابطه به صورت منحصربه‌فرد وجود نخواهد داشت. اکسترمم یک تابع یا تصمیم بهینه در یک مدل تصمیم‌گیری به روشهای مختلفی بیان می‌شود.

در مدلهای تصمیم‌گیری معمولاً تصمیم بهینه، یک مجموعه قطعی D_m فرض می‌شود که اعضای آن، عناصر یک مجموعه فازی با بیشترین درجه عضویت در رسیدن به هدف مورد نظر می‌باشند. به این مجموعه، مجموعه حداکثر گفته می‌شود.

تعریف 6-3: اگر f یک تابع با مقادیر حقیقی بر X تعریف شود که از پایین به مقدار $inf\left(f\right)$ و از بالا به مقدار $sup\left(f\right)$ محدود باشد، برای تابع f *مجموعه حداکثر*[1] را می‌توان به صورت $\tilde{M}=\left\{\left(x,\mu_{\tilde{M}}\left(x\right)\right)|\,x\in X\right\}$ با تابع عضویت زیر تعریف کرد:

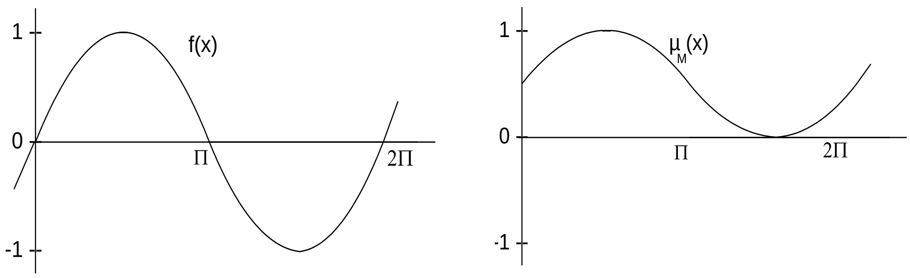
$$\mu_{\tilde{M}}\left(x\right)=\frac{f\left(x\right)-inf\left(f\right)}{sup\left(f\right)-inf\left(f\right)}$$

مثال: مجموعه حداکثر برای تابع sin(x) در شکل 6-1 نشان داده شده است:

$$f\left(x\right)=sin\ \ x$$

$$\mu_{\tilde{M}}\left(x\right)=\frac{sin\ \ x-inf\left(sin\right)}{sup\left(sin\right)-inf\left(sin\right)}=\frac{sin\ \ x-\left(-1\right)}{1-\left(-1\right)}$$

$$=\frac{sin\ \ x+1}{2}=\frac{1}{2}sin\ \ x+\frac{1}{2}$$



شکل 6-1 تابع $f=sin\ \ x$ و مجموعه حداکثر آن

[1] Maximizing set

در تعریف 6-3، f یک تابع قطعی با مقادیر حقیقی (قطعی) است. مجموعه حداکثر شبیه به مجموعه فازی تصمیم، اطلاعاتی درباره همسایگی نقطه اکسترمم تابع در اختیار ما قرار خواهد داد. دامنه این مجموعه فازی، یک مجموعه قطعی می‌باشد. اما اگر f را یک تابع با دامنه فازی در نظر بگیریم، مجموعه حداکثر آن نیز یک مجموعه فازی است که دامنه آن خود یک مجموعه فازی دیگر خواهد بود.

حال به تعریف اکسترمم توابع فازی طبق تعریف 6-2 می‌پردازیم. در این تعریف تابع f بر یک دامنه قطعی تعریف شده است و f(x) یک مجموعه فازی تعریف‌شده بر ℝ می‌باشد. بنابراین مجموعه حداکثر آن فقط یک نقطه در ℝ نبوده، بلکه یک مجموعه فازی خواهد بود که به آن "*مجموعه حداکثر فازی تابع f(x)*" می‌گوییم.

همان‌گونه که در فصل 2 بعضی اپراتورهای فازی را تعریف کردیم، باید ماکزیمم فازی و مینیمم فازی را نیز تعریف نماییم. ماکزیمم و مینیمم در ℝ اپراتورهای صعودی می‌باشند و حاصل آنها نیز یک عدد فازی خواهد بود:

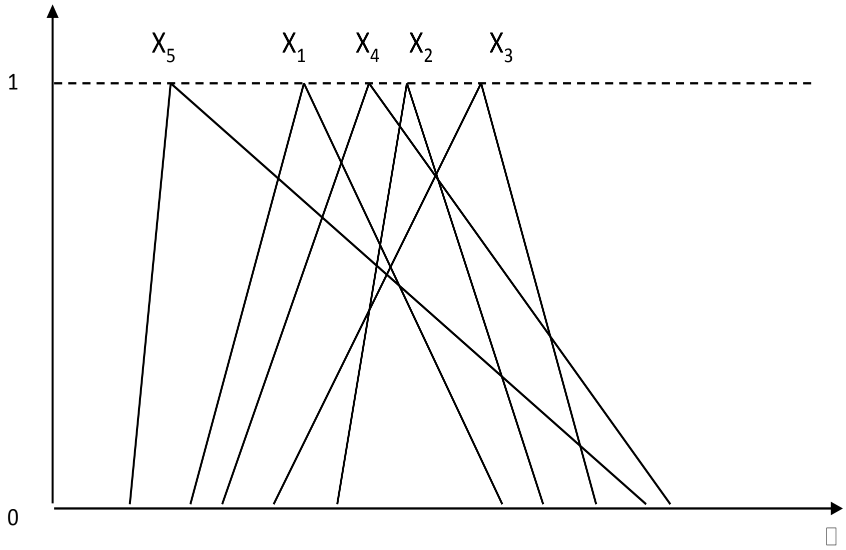
تعریف 6-4: اگر $\tilde{f}(x)$ یک تابع فازی از X به ℝ تعریف‌شده بر دامنه قطعی و متناهی D باشد، ماکزیمم فازی $\tilde{f}(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\tilde{M} = \underset{x\in D}{\tilde{\max}}\, \tilde{f}(x) = \left\{ \left(\sup \tilde{f}(x), \mu_{\tilde{M}}(x) \right) \mid x \in D \right\}$$

اگر $|D| = n$ باشد آنگاه تابع عضویت $\tilde{\max}\, \tilde{f}(x)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\mu_{\tilde{M}}(x) = \min_{j=1,2,\dots,n} \mu_{\tilde{f}(x_j)}\left(\tilde{f}(x_j) \right),\ f(x) \in D$$

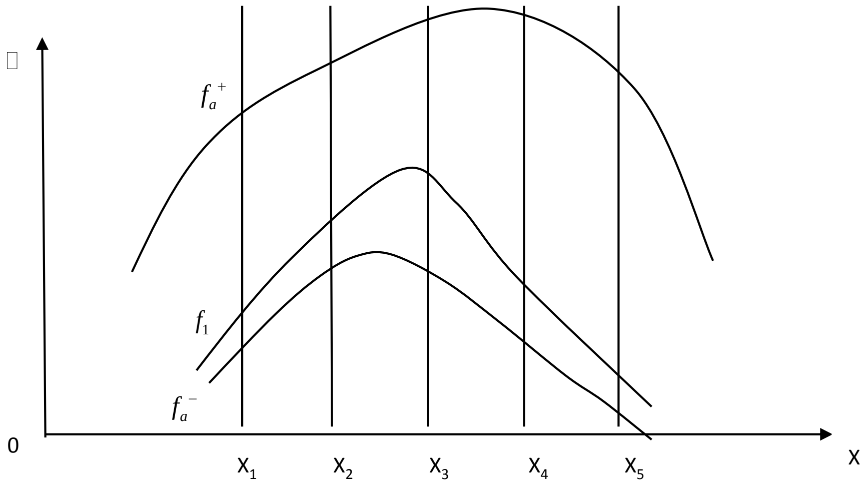
مثال: فرض کنید $\tilde{f}(x)$ یک تابع فازی از ℝ به ℝ بوده که به ازای هر x، $\tilde{f}(x)$ یک عدد فازی مثلثی باشد و دامنه تابع به صورت $D = \{x_1, \dots, x_5\}$ بیان شود. در شکل 6-2 مقدار $\tilde{f}(x)$ به ازای x های دامنه، به صورت اعداد فازی بیان شده است.



شکل6-2: مقدار تابع فازی $\tilde{f}(x)$ به صورت عدد فازی

می‌توان تابع $\tilde{f}(x)$ را به صورت شکل 6-3 نمایش داد که در آن، f_1 یک منحنی با شرط $\mu_{\tilde{f}(x)}\left(f_1(x)\right)=1$ است و برای $f_\alpha^{+}, f_\alpha^{-}$ رابطه زیر را داریم:

$$\mu_{\tilde{f}(x)}\left(f_\alpha^{-}(x)\right)=\mu_{\tilde{f}(x)}\left(f_\alpha^{+}(x)\right)$$



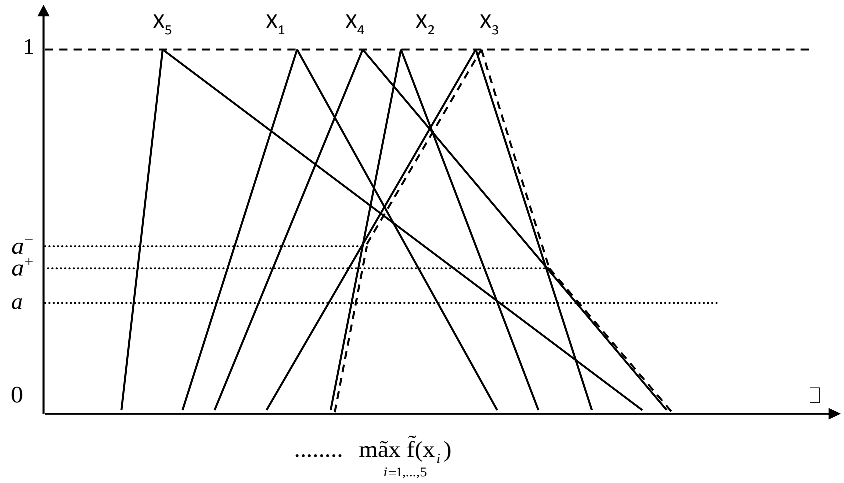
شکل 6-3: یک تابع فازی

در شکل 6-3 چون سطح منحنیها با یکدیگر موازی نمی‌باشند، نقطه اکسترمم تابع در x_i های مختلف واقع می‌شود:

$$max \;\; f_\alpha^{\,+} = \left(f_\alpha^{\,+}\left(x_4\right)\right)$$
$$max \;\; f_1\left(x\right) = f_1\left(x_3\right)$$
$$max \;\; f_\alpha^{\,-} = \left(f_\alpha^{\,-}\left(x_2\right)\right)$$

نقاط x_5, x_1 به مجموعه حداکثر تابع $f\left(x\right)$ تعلق نخواهند داشت. با توجه به شکل 6-4 می‌توان ماکزیمم $\tilde{f}\left(x\right)$ را براساس تعریف 6-4 به صورت زیر تعریف کرد:

$$\alpha \in \left[0, \alpha^-\right] : f^-\left(x_2\right) \geq f_\alpha^{\,-}\left(x_i\right) \qquad \forall i$$
$$\alpha \in \left[\alpha^-, 1\right] : f^-\left(x_3\right) \geq f_\alpha^{\,-}\left(x_i\right) \qquad \forall i$$
$$\alpha \in \left[\alpha^+, 1\right] : f^+\left(x_3\right) \geq f_\alpha^{\,+}\left(x_i\right) \qquad \forall i$$
$$\alpha \in \left[0, \alpha^+\right] : f^+\left(x_4\right) \geq f_\alpha^{\,+}(x_i) \qquad \forall i$$



شکل6-4: ماکزیمم یک تابع فازی

با در نظر گرفتن α^+, α^- که $f_\alpha^{\,+}\left(x_4\right) = f_\alpha^{\,+}\left(x_3\right),\, f_\alpha^{\,-}\left(x_2\right) = f_\alpha^{\,-}\left(x_3\right)$ می‌توانیم ماکزیمم $\tilde{f}\left(x\right)$ را به صورت $\tilde{M}$ تعریف نماییم:

$$\tilde{M} = \left\{\left(x_2, \alpha^-\right), \left(x_3, 1\right), \left(x_4, \alpha^+\right)\right\}$$

در شکل 6-4 مجموعه $\tilde{M}$ با خط‌چین مشخص شده است.

6-3: انتگرال توابع فازی

پیشنهادهای بسیار متفاوتی برای انتگرالهای فازی ،انتگرال توابع فازی و انتگرال توابع قطعی که بر دامنه یا برد فازی عمل می‌کنند ارائه شده است. اولین مفاهیم در مورد انتگرال فازی در سالهای 1972 و 1977 توسط ساگنو ارائه شد. ساگنو با توجه به اندازه‌گیری فازی یک تعریف از انتگرال فازی براساس تعمیم انتگرال لبسک[1] ارائه کرد.

توجه ما در این‌فصل، معطوف به انتگرال ریمن[2] است و از مراجعی مانند مقالات دبویز و پرید (1980 و 1982)، آومن[3] (1965) و نگوین[4](1987) استفاده می‌کنیم.

مفهوم اساسی انتگرال یک تابع با مقادیر حقیقی روی یک فاصله بسته می‌تواند به صورت یکی از حالات زیر بیان شود:

1. تابع براساس تعریف 6-1 بوده، انتگرال روی یک فاصله قطعی تعریف شده باشد.

2. تابع براساس تعریف 6-1 بوده، انتگرال روی یک فاصله فازی (یک فاصله با حد بالا و پایین فازی) تعریف شده باشد.

3. تابع براساس تعریف 6-2 بوده، انتگرال روی یک فاصله قطعی تعریف شده باشد.

4. تابع براساس تعریف 6-2 بوده، انتگرال روی فاصله فازی تعریف شده باشد.

6-3-1: انتگرال تابع فازی روی یک فاصله قطعی

در این بخش به تعریف انتگرال تابع فازی $\tilde{f}$ که در فاصله قطعی $[a,b]$ براساس تعریف 6-2 بیان شده است، می‌پردازیم و فرض می‌کنیم $\tilde{f}(x)$ یک عدد فازی باشد. همچنین از منحنیهای سطح α (برای هر $\alpha \in [0,1]$ داریم: $\mu_{\tilde{f}(x)}(y) = \alpha$) استفاده می‌کنیم.

---

[1] Lebesque
[2] Riemann
[3] Aumann
[4] Nguyen

پارامترهای α, x اگر $\alpha \neq 1$ باشد دقیقاً دو جواب پیوسته $y = f_\alpha^-(x), y = f_\alpha^+(x)$ را خواهند داشت و اگر $\alpha = 1$ باشد فقط یک جواب خواهند داشت. f_α^-, f_α^+ به نحوی تعریف می‌شوند که رابطه زیر برقرار باشد:

$$f_{\alpha'}^+(x) \geq f_\alpha^+(x) \geq f(x) \geq f_\alpha^-(x) \geq f_{\alpha'}^-(x)$$

(برای تمام مقادیر $\alpha \leq \alpha'$)

انتگرال هر منحنی پیوسته در سطح α از $\tilde{f}$ بر روی $[a,b]$ همیشه وجود دارد که مطابق تعریف 6-5 بیان می‌شود.

تعریف 6-5: اگر $\tilde{f}(x)$ تابع فازی از $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ باشد و برای هر $x \in [a,b]$ $\tilde{f}(x)$ یک عدد فازی باشد و $f_\alpha^-(x), f_\alpha^+(x)$ منحنی‌های در سطح α باشند، انتگرال $\tilde{f}(x)$ روی فاصله $[a,b]$ یک مجموعه فازی است که مطابق زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{I}(a,b) = \left\{ \left(\int_a^b f_\alpha^-(x)\,dx + \int_a^b f_\alpha^+(x)\,dx, \alpha \right) \right\}$$

این تعریف بر اساس اصل گسترش می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\mu_{\int_a^b f}(y) = \underset{\substack{g \in y \\ y = \int_a^b g}}{Sup} \ \inf_{x \in [a,b]} \mu_{f(x)}(g(x)) \qquad , y \in \mathbb{R}$$

که $y = \{ g : [a,b] \to \mathbb{R} \}$ و g یک تابع انتگرال‌پذیر است.

با فرض از نوع $L-R$ بودن تابع فازی، انتگرال $\tilde{I}(a,b)$ ساده‌تر به دست خواهد آمد. در سال 1980 دبویز و پرید نشان دادند اگر $\tilde{f}(x) = (f(x), s(x), t(x))_{LR}$ برای هر $x \in [a,b]$ یک عدد فازی $L-R$ باشد و f و s و t توابع مثبت قابل‌انتگرال‌گیری روی $[a,b]$ باشند، تحت این شرایط خواهیم داشت:

$$\tilde{I}(a,b) = \left(\int_a^b f(x)\,dx, \int_a^b s(x)\,dx, \int_a^b t(x)\,dx, \right)_{LR}$$

این روش بسیار مناسب است و در آن می‌توان با توجه به انتگرال‌گیری مقدار میانه‌ای و گسترشهای تابع، انتگرال فازی را به صورت یک عدد فازی از نوع $L-R$ به دست آورد.

مثال: اگر $\tilde{f}(x) = \left(f(x), s(x), t(x)\right)_{LR}$ با مقدار میانه‌ای $f(x) = x^2$ و گسترشهای $t(x) = x/2$ و $s(x) = x/4$ باشد و نیز داشته باشیم:

$$L(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$R(x) = \frac{1}{1+2|x|}$$

برای انتگرال‌گیری در فاصله $[1,4]$ خواهیم داشت:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_1^4 x^2 \quad dx = 21$$

$$\int_a^b s(x)\,dx = \int_1^4 x/4 \quad dx = 1.875$$

$$\int_a^b t(x)\,dx = \int_1^4 x/2 \quad dx = 3.75$$

و با توجه به مقادیر به دست آمده داریم:

$$\tilde{I}(a,b) = (21, 1.875, 3.75)_{LR}$$

خواص انتگرال توابع فازی:

اگر A_α مجموعه در سطح α از مجموعه فازی $\tilde{A}$ باشد، مجموعه پشتیبان $S(\tilde{A})$ به صورت $S(\tilde{A}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} A_\alpha$ تعریف خواهد شد. مجموعه $\tilde{A}$ به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \left\{\left(x, \mu_{\alpha A_\alpha}(x) \mid x \in A_a\right)\right\}$$

$$\mu_{\alpha A_\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha & for \quad x \in A_\alpha \\ 0 & for \quad x \notin A_\alpha \end{cases}$$

اگر یک انتگرال فازی را به صورت $\tilde{A}$ نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$\tilde{A} = \int_I \tilde{f}$$

آنگاه داریم:

$$\int_I \tilde{f} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha\left(\int_1 \tilde{f}\right)_\alpha$$
$$= \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha\left(\int_1 \tilde{f}_\alpha\right)$$

تعریف 6-6: $\int_I \tilde{f}$ قابل محاسبه خواهد بود اگر و فقط اگر:

$$\forall\alpha\in[0,1] \qquad \left(\int_I \tilde{f}\right)_\alpha = \int_I \tilde{f}_\alpha$$

دبویز و پرید (1982) با استفاده از آنالیز توابع قطعی، خواص زیر را برای انتگرالهای فازی ثابت کردند:

الف: اگر $\tilde{f}$ یک تابع فازی باشد، آنگاه

$$\int_I \tilde{f} = \int_a^b \tilde{f} = -\int_b^a \tilde{f}$$

که انتگرالهای فازی، مجموعه‌های فازی با تابع عضویتهای زیر می‌باشند:

$$\mu_{-\int_a^b f}(u) = \mu_{\int_a^b f}(-u) \qquad \forall u$$

ب: اگر I',I دو فاصله مجاور یکدیگر به صورت $I=[a,b]$, $I'=[b,c]$ باشند و تابع فازی $\tilde{f}:[a,c]\to\tilde{p}(\square)$ را در نظر بگیریم، آنگاه:

$$\int_a^c \tilde{f} = \int_a^b \tilde{f} \oplus \int_b^c \tilde{f}$$

که $\oplus$ جمع گسترش‌یافته مجموعه‌های فازی (معرفی شده در فصل چهار) می‌باشد .

اگر $\tilde{g},\tilde{f}$ توابع فازی باشند، آنگاه $\tilde{f}\oplus\tilde{g}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\left(\tilde{f}\oplus\tilde{g}\right)(u) = \tilde{f}(u)\oplus\tilde{g}(u) \quad , \quad u\in X$$

پ: اگر $\tilde{f}$ و $\tilde{g}$ توابع فازی با مجموعه‌های پشتیبان محدود باشند، آنگاه:

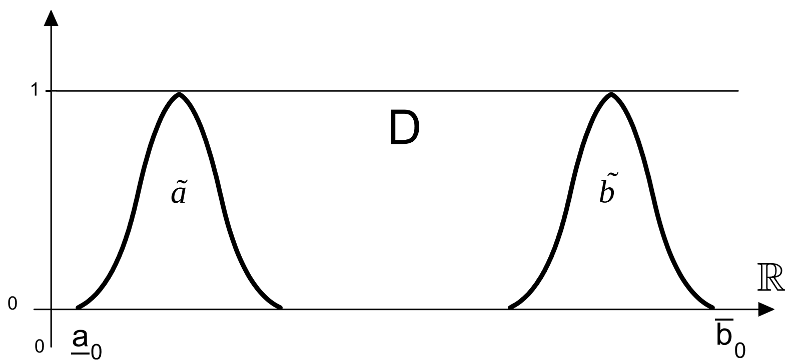
$$\int_I \left(\tilde{f} \oplus \tilde{g} \right) = \int_I \tilde{f} \oplus \int_I \tilde{g}$$

اگر و فقط اگر $\int_I \tilde{f}, \int_I \tilde{g}$ قابل محاسبه با خاصیت جابجایی باشند.

6-3-2: انتگرال تابع مقدار حقیقی قطعی روی یک فاصله فازی

در این بخش به بررسی روش جالبی که دبویز و پرید پیشنهاد کردند می‌پردازیم. با توجه به شکل 6-5، دامنه فازی F از $\mathbb{R}$ به دو مجموعه فازی نرمال کوژ با توابع عضویت $\mu_{\tilde{b}}(x), \mu_{\tilde{a}}(x)$ محدود می‌باشد.

اگر $\overline{b}_0, \underline{a}_0$ بیانگر حدود پایین و بالای مجموعه‌های پشتیبان $\tilde{b}, \tilde{a}$ باشند آنگاه ارتباط b_0, a_0 توسط عبارت $\underline{a}_0 = inf\ S(\tilde{a}) \le sup\ S(\tilde{b}) = \overline{b}_0$ بیان می‌شود.



شکل6-5: فاصله محدود فازی

تعریف 6-7: f یک تابع مقدارحقیقی و انتگرال‌پذیر در $J = [a_0, b_0]$ است. طبق اصل گسترش تابع عضویت انتگرال $\int_F \tilde{f}$ برابر است با

$$\mu_{\int_F \tilde{f}}(z) = \sup_{x,y \in J} \min\left(\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y) \right) \qquad z = \int_x^y f$$

اگر $c \in J, F(x)=\int_{c}^{x} f(y)\,dy$ باشد، آنگاه با توجه به تعریف اصل گسترش، تابع عضویت $F(\tilde{a})$ با شرط $\tilde{a} \in \tilde{P}(\square)$ برابر خواهد بود با: $\mu_{F(\tilde{a})}(z)=\sup\limits_{x:z=F(x)} \mu_{\tilde{a}}(x)$

قضایای دبویز و پرید (1982)، تحت‌عنوان قضیه 6-1 تا 6-4 بررسی شده‌اند:

قضیه 6-1: اگر Θ بیانگر تفریق گسترش‌یافته روی مجموعه‌های فازی باشد، داریم:

$$\int_{D} f = F(\tilde{b})\,\Theta\, F(\tilde{a})$$

مثال: اگر داشته باشیم:

$$\tilde{a}=\{(4,0.8),(5,1),(6,0.4)\}$$
$$\tilde{b}=\{(6,0.7),(7,1),(8,0.2)\}$$
$$f(x)=2, x\in[a_0,b_0]=[4,8]$$

آنگاه جزئیات محاسبات را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\int_{D} f(x)\,dx=\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} 2dx = 2x\Big|_{\tilde{a}}^{\tilde{b}}$$

(a,b)	$\int_{a}^{b} 2dx$	$Min\{\mu_x(a),\mu_x(b)\}$
$(4,6)$	4	0.7
$(4,7)$	6	0.8
$(4,8)$	8	0.2
$(5,6)$	2	0.7
$(5,7)$	4	1.0
$(5,8)$	6	0.2
$(6,6)$	0	0.4
$(6,7)$	2	0.4
	4	0.2

با انتخاب ماکزیمم میان عضویتهای نظیر هریک از مقادیر به‌دست‌آمده برای انتگرال (در ستون دوم) خواهیم داشت:

$$\int_D f = \{(0,0.4),(2,0.7),(4,1),(6,0.8),(8,0.2)\}$$

قضیه 6-2: اگر $\tilde{g}, \tilde{f}$ دو تابع $f,g : I \to \mathbb{R}$ و روی I انتگرال‌پذیر باشند آنگاه:

$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} (f+g) \subseteq \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f \oplus \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} g$$

که $\oplus$ بیانگر جمع گسترش‌یافته برای مجموعه‌های فازی می‌باشد.

مثال: اگر

$$f(x) = 2x - 3$$
$$g(x) = -2x + 5$$

و

$$\tilde{a} = \{(1,0.8),(2,1),(3,0.4)\}$$
$$\tilde{b} = \{(3,0.7),(4,1),(5,0.3)\}$$

داریم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[x^2 - 3x\right]_a^b$$

$$\int_a^b g(x)\,dx = \left[-x^2 + 5x\right]_a^b$$

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \left[2x\right]_a^b$$

مانند مثال قبل خواهیم داشت:

$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f = \{(0,0.4),(2,0.7),(4,0.4),(6,1),(10,0.3),(12,0.3)\}$$

$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} g = \{(-6,0.3),(-4,0.3),(-2,0.1),(0,0.8),(2,0.7)\}$$

با استفاده از فرمول جمع گسترش‌یافته داریم:

$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f + \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} g =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (-6,0.3),(-4,0.3),(-2,0.4),(0,0.7),(2,0.7),(4,1),(6,0.8),(8,0.7), \\ (10,0.3),(12,0.3),(14,0.3) \end{array} \right\}$$

همانند محاسبات مثال قبل خواهیم داشت:

$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} (f+g) = \{(0,0.4),(2,0.7),(4,1),(6,0.8),(8,0.3)\}$$

حال به آسانی می‌توان دید که :

$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} (f+g) \subseteq \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f \oplus \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} g$$

قضیه 6-3: اگر $f,g : I \to \mathbb{R}^+$ یا $f,g : I \to \mathbb{R}^-$ باشند، خواهیم داشت:

$$\int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} (f+g) = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f \oplus \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} g$$

قضیه 6-4: اگر $\tilde{D} = (\tilde{a},\tilde{b}), \tilde{D}' = (\tilde{a},\tilde{c}), \tilde{D}'' = (\tilde{c},\tilde{b})$ آنگاه داریم:

$$\int_{\tilde{D}} f \subseteq \int_{\tilde{D}'} f \oplus \int_{\tilde{D}''} f$$

و اگر و فقط اگر $\tilde{c} \in \mathbb{R}$ باشد یا به عبارت دیگر $\tilde{c}$ یک عدد حقیقی قطعی باشد، خواهیم داشت:

$$\int_{\tilde{D}} f = \int_{\tilde{D}'} f \oplus \int_{\tilde{D}''} f$$

6-4 : دیفرانسیل فازی

همانند انتگرال، دیفرانسیل نیز قابلیت گسترش به ساختارهای ریاضی فازی را دارا است. مسلماً نتیجه دیفرانسیل فازی به این بستگی دارد که کدام نوع تعریف تابع در نظر گرفته شود. فرض ما بر این است که تابع غیرفازی بوده، دامنه و برد آن فازی باشند. یعنی می‌خواهیم دیفرانسیل یک تابع دیفرانسیل‌پذیر مثل $f : R \supseteq [a,b] \to \mathbb{R}$ را در یک نقطه فازی $\tilde{X}_0$ که یک زیرمجموعه فازی کوژ از $\mathbb{R}$ می‌باشد به دست آوریم. با این فرض که مجموعه پشتیبان نقاط فازی مفروض، در فاصله بسته $[a,b]$ واقع باشد و $S(\tilde{X}) \subseteq [a,b]$.

نقطه فازی ممکن است به صورت امکان پخش و گستردگی x بیان شود که به طور تقریبی محل دقیق آن را می‌دانیم.

عدم قطعیت در دانستن محل دقیق نقطه‌ای که محاسبه دیفرانسیل آن مورد نیاز است، باعث بروز عدم قطعیت در مشتق $f'(x)$ از تابع $f(x)$ در آن نقطه می‌شود.

مشتق یک تابع حقیقی در یک نقطه فازی را به صورت یک مجموعه فازی $f'(\tilde{X}_0)$ تعریف می‌کنیم. تابع عضویت این مجموعه فازی، درجه نزدیکی به مشتق تابع در محل دقیق $\tilde{X}_0$ را مشخص می‌کند.

تعریف 6-8: تابع عضویت مجموعه فازی"مشتق یک تابع مقدارحقیقی در نقطه فازی $\tilde{X}_0$" براساس اصل گسترش برابر است با:

$$\mu_{f'(\tilde{X}_0)}(y) = \sup_{x \in f'^{-1}(y)} \mu_{\tilde{X}_0}(x)$$

که $\tilde{X}_0$ یک عدد فازی مشخص‌کننده یک محل فازی است.

مثال: اگر $f(x) = x^3 \quad , \quad \tilde{X}_0 = \{(-1,0.4),(0,1),(1,0.6)\}$ یک محل فازی باشد. چون $f'(x) = 3x^2$ می‌باشد، $f'(\tilde{X}_0) = \{(0,1),(3,0.6)\}$ مشتق تابع مقدارحقیقی فوق در نقطه فازی $\tilde{X}_0$ است.

قضیه 6-5: حاصل‌جمع گسترش‌یافته مشتقات دو تابع مقدارحقیقی f و g در نقطه فازی $\tilde{X}_0$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{(f'+g')(\tilde{x}_0)}(y) = \sup_{x:y=f'(x)+g'(x)} \mu_{\tilde{x}_0}(x)$$

بنابراین:

$$f'(\tilde{x}_0) \oplus g'(\tilde{x}_0) \supseteq (f'+g')(\tilde{x}_0)$$

قضیه 6-6: اگر f', g' پیوسته بوده، هر دوی آنها غیرصعودی یا غیر نزولی باشند، آنگاه خواهیم داشت:

$$f'(\tilde{X}_0) \oplus g'(\tilde{X}_0) \supseteq (f'+g')(\tilde{X}_0)$$

قضیه 6-7:

الف:

$$(f.g)'(\tilde{X}_0) =$$
$$(f'g + fg')(\tilde{X}_0) \subseteq \left[f'(\tilde{X}_0) \square\ g(\tilde{X}_0) \right] \oplus \left[f(\tilde{X}_0) \square\ g'(\tilde{X}_0) \right]$$

ب: اگر g', f', g, f پیوسته ، g, f هر دو مثبت و g', f' هر دو غیرنزولی (یا g, f هر دو منفی و g', f' هر دو غیر صعودی) باشند، خواهیم داشت:

$$(f.g)'(\tilde{X}_0) = \left[f'(\tilde{X}_0) \square\ g(\tilde{X}_0) \right] \oplus \left[f(\tilde{X}_0) \square\ g'(\tilde{X}_0) \right]$$