فصل 4

اصل گسترش و کاربردهای آن

اصلی‌ترین قسمت تئوری مجموعه‌های فازی که مفاهیم ریاضیات کلاسیک (قطعی) را به مجموعه‌های فازی تعمیم می‌دهد، اصل گسترش[1] می‌باشد که اولین بار در سال 1965 توسط زاده به شکلی جزئی تعریف شد و نیز توسط او در سال 1973 و دبویز و پرید در سال 1980 به تعاریف اصلاح‌شده و کامل‌تری رسید. مطالب این فصل بیانگر این تعاریف برای اصل گسترش می‌باشد.

تعریف 4-1: اگر X بیانگر حاصل‌ضرب کارتزین مجموعه‌های مرجع در یکدیگر یعنی $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_r$ باشد و $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_r$ نشان‌دهنده مجموعه‌های فازی تعریف شده در $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_r$ باشند، f نیز یک تابع از X به مجموعه مرجع Y است که با تعریف $y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_r\right)$ نشان داده می‌شود.

با اصل گسترش مجموعه فازی $\tilde{B}$ در Y را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{B} = \left\{\left(y, \mu_{\tilde{B}}(y)\right) \mid y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_r\right), \left(x_1, x_2, \ldots, x_r\right) \in X\right\}$$

که تابع عضویت از فرمول زیر حاصل خواهد شد:

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \underset{(x_1, x_2, \ldots, x_r) \in f^{-1}(y)}{Sup} \; Min\left\{\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \ldots, \mu_{\tilde{A}_r}(x_r)\right\} & f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0 & Otherwise \end{cases}$$

f^{-1} بیانگر تابع معکوس f می‌باشد.

اگر فرض کنیم $r = 1$ باشد، اصل گسترش به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\tilde{B} = f\left(\tilde{A}\right) = \left\{\left(y, \mu_{\tilde{B}}(y)\right) \mid y = f(x), x \in X\right\}$$

در این‌حالت تابع عضویت $\mu_{\tilde{B}}(y)$ برابر است با:

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \underset{x \in f^{-1}(y)}{Sup} \; \mu_{\tilde{A}}(x) & f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0 & Otherwise \end{cases}$$

مثال: بر روی مجموعه فازی زیر تابع $f(x) = x^2$ را اعمال می‌کنیم:

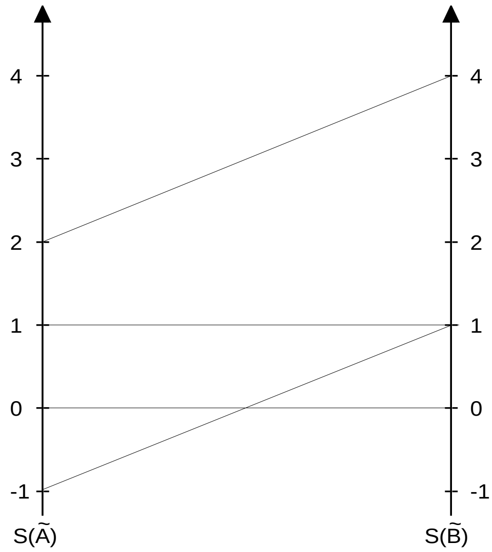
---

[1] Extension principle

$$\tilde{A}=\{(-1,0.5),(0,0.8),(1,1),(2,0.4)\}$$

مجموعه فازی $\tilde{B}$ مطابق زیر (شکل1-4) به دست می‌آید:

$$\tilde{B}=f\left(\tilde{A}\right)=\{(0,0.8),(1,1),(4,0.4)\}$$



شکل1-4: اصل گسترش

در سال 1980 دبویز و پرید پیشنهاد کردند که با اصلاح تعریف اصل گسترش، به جای تابع Sup از جمع جبری و به جای اپراتور مینیمم از ضرب استفاده شود. اما تعریف 4-1 حالت عمومی‌تری دارد، بنابراین در ادامه فصل از این تعریف استفاده می‌کنیم.

4-1 : اپراتورهای مجموعه‌های فازی نوع دوم

مجموعه‌های فازی دوم در تعریف 2-9 معرفی شده‌اند. در این قسمت با استفاده از اصل گسترش به معرفی اپراتورهای مربوط به این مجموعه‌ها می‌پردازیم، البته فرض می‌کنیم که این مجموعه‌های فازی نوع دوم، دامنه گسسته داشته باشند.

فرض کنید دو مجموعه فازی نوع دوم $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به صورت زیر تعریف شده باشند:

$$\tilde{A}(x)=\{(x,\mu_{\tilde{A}}(x))\}$$

$$\tilde{B}(x)=\{(x,\mu_{\tilde{B}}(x))\}$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\{(u_i,\mu_{ui}(x))\mid x\in X, v_i,\mu_{ui}(x)\in[0,1]\}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\{(v_j,\mu_{vj}(x))\mid x\in X, v_j,\mu_{vj}(x)\in[0,1]\}$$

u_i و v_i درجه عضویتهای مجموعه‌های فازی نوع اول بوده، $\mu_{ui}(x)$ و $\mu_{vj}(x)$ نیز تابع عضویتهای نظیرشان می‌باشند. حال با استفاده از اصل گسترش، اپراتورهای تئوری مجموعه‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف 4-2: برای مجموعه‌های $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ با تعریف فوق، تابع عضویت اجتماع به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)\cup\mu_{\tilde{B}}(x)=\{(w,\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(w))\mid w=max\{u_i,v_j\},u_i,v_j\in[0,1]\}$$

درصورتی‌که:

$$\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(w)=\sup_{w=max\{u_i,v_j\}} min\{\mu_{ui}(x),\mu_{vj}(x)\}$$

تابع عضویت اشتراک دو مجموعه $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)\cap\mu_{\tilde{B}}(x)=\{(w,\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(w))\mid w=min\{u_i,v_j\},u_i,v_j\in[0,1]\}$$

که داریم:

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(w)=\sup_{w=min\{u_i,v_j\}} min\{\mu_{ui}(x),\mu_{vj}(x)\}$$

و متمم مجموعه $\tilde{A}$ دارای تابع عضویت زیر است:

$$\mu_{n\tilde{A}}(x)=\{[(1-\mu_i),\mu_{\tilde{A}}(u_i)]\}$$

مثال: اگر $X = 1,2,3,\ \ldots,10$

$\tilde{A}=$ اعداد صحیح کوچک

$\tilde{B}=$ اعداد صحیح نزدیک به چهار

تعریف‌شده به صورت زیر باشند:

$$\tilde{A}(x)=\left\{\left(x,\mu_{\tilde{A}}(x)\right)\right\}$$

$$\tilde{B}(x)=\left\{\left(x,\mu_{\tilde{B}}(x)\right)\right\}$$

که به ازای x = 3 داریم:

$$\mu_{\tilde{A}}(3)=\left\{\left(u_i,\mu_{ui}(3)\right)\mid i=1,2,3\right\}=\left\{(0.8,1),(0.7,0.5),(0.6,0.4)\right\}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(3)=\left\{\left(v_j,\mu_{vj}(3)\right)\mid j=1,2,3\right\}=\left\{(1,1),(0.8,0.5),(0.7,0.3)\right\}$$

مقایسه‌های لازم براساس فرمولها در جدول 4-1 دیده می‌شود.

جدول4-1: مراحل لازم برای محاسبه تابع اشتراک در مثال

u_i	v_j	$w=Min\{u_i,v_j\}$	$\mu_{u_i}(3)$	$\mu_{v_j}(3)$	$Min\{\mu_{u_i}(3),\mu_{v_j}(3)\}$
0.8	1	0.8	1	1	1
0.8	0.8	0.8	1	0.5	0.5
0.8	0.7	0.7	1	0.3	0.3
0.7	1	0.7	0.5	1	0.5
0.7	0.8	0.7	0.5	0.5	0.5
0.7	0.7	0.7	0.5	0.3	0.3
0.6	1	0.6	0.4	1	0.4
0.6	0.8	0.6	0.4	0.5	0.4
0.6	0.7	0.6	0.4	0.3	0.3

سپس حداکثر درجه عضویت را برای همه زوجهای (u_i,v_j) که دارای W های مساوی می‌باشند، به دست می‌آوریم:

$$Sup\{1,0.5\}=1$$

$$0.8=min\{u_i,v_j\}$$

$$Sup\{0.3,0.5,0.5,0.3\}=0.5$$

$$0.7=min\{u_i,v_j\}$$

$$Sup\{0.4,0.4,0.3\}=0.4$$

$$0.6=min\{u_i,v_j\}$$

تابع عضویت مربوط به اشتراک دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به ازای $x = 3$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(3)=\{(0.8,1),(0.7,0.5),(0.6,0.4)\}$$

در سال 1976 میزوموتو[1] و تاکانا[2] نشان دادند که مجموعه‌های فازی نوع دومی که به صورت فوق تعریف شده‌اند، دارای خاصیت خودبرگشتی[3] $(xox=x)^{3}$، جابجایی و شرکت پذیری بوده، از قوانین دمورگان نیز تبعیت می‌کنند. اما دارای خاصیت پخش‌پذیری نبوده، از قوانین جذب، همانی و متمم تبعیت نمی‌کنند.

مثال عنوان‌شده یک نمونه قابل محاسبه برای اعمال اپراتورهای تئوری مجموعه‌ها روی مجموعه‌های فازی نوع دوم است. اما باید توجه کرد که محاسبات انجام شده در مثال، فقط مربوط به یک عضو از مجموعه فازی نوع دوم بوده، برای محاسبه $\tilde{A}*\tilde{B}$ که * هر اپراتور دلخواهی از تئوری مجموعه‌ها است، باید محاسبات را برای تمامی عضوهای دیگر مثلاً به ازای $x=4, x=5, \ldots$ نیز انجام داد.

2-4: اعداد فازی و عملیات جبری

در این قسمت به تعریف اعداد فازی[4] و عملیات مربوط به آنها می‌پردازیم:

تعریف 4-3: عدد *فازی* $\tilde{M}$ یک مجموعه فازی نرمال کوژ در حوزه $\mathbb{R}$ می‌باشد که:

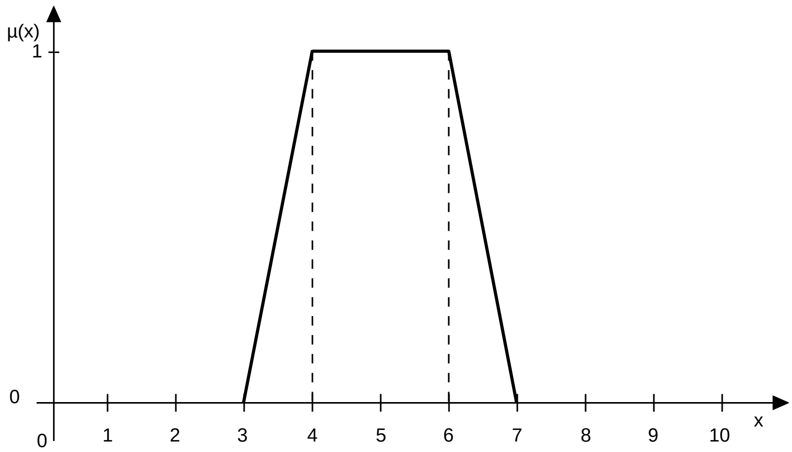
الف: دقیقا یک $x_0 \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که $\mu_{\tilde{M}}(x_0)=1$ باشد. به x_0 مقدار میانه‌ای مجموعه فازی $\tilde{M}$ گفته می‌شود.

ب: تابع عضویت $\mu_{\tilde{M}}(x)$ به صورت قطعه‌ای پیوسته باشد.

امروزه تعریف 4-3 اصلاح شده است و به منظور افزایش کارایی محاسبات و آسان‌شدن استفاده از آن در داده‌های مختلف، توابع عضویت ذوزنقه‌ای[1] مورد استفاده قرار می‌گیرند.

---

[1] Mizumoto
[2] Tanaka
[3] Idempotent
[4] Fuzzy number



شکل4-2: نمایش مجموعه فازی " تقریباً پنج" با تابع عضویت ذوزنقه‌ای

در شکل4-2 مجموعه فازی "تقریباً پنج" رسم شده است. همان‌طورکه دیده می‌شود اعداد فاصله $[3,7]$ دارای تابع عضویت غیرصفر می‌باشند. علاوه بر توابع عضویت ذوزنقه‌ای[1]، از توابع عضویت مثلثی[2] نیز حسب مورد استفاده می‌شود.

تعریف4-4: عدد فازی $\tilde{M}$ را مثبت (منفی) می‌نامیم اگر تابع عضویت آن به ازای $0 < x\forall(0 > x\forall)$ برابر با صفر باشد.

مثال : مجموعه‌های فازی زیر اعداد فازی هستند:

$$\text{تقریباً پنج} = \{(3,0.2),(4,0.6),(5,1),(6,0.7),(7,0.1)\}$$

$$\text{تقریباً ده} = \{(8,0.3),(9,0.7),(10,1),(11,0.7),(12,0.3)\}$$

اما $\{(3,0.8),(4,1),(5,1),(6,0.7)\}$ یک عدد فازی نیست زیرا $\mu(4)$, $\mu(5)$ هردو برابر با یک می‌باشند. به این نکته باید توجه داشت که هر مجموعه فازی الزاماً عدد فازی نیست. مثلاً مجموعه "تقریباً پنج"رسم‌شده در شکل 4-2 عدد فازی نیست، اما تعریف "تقریباً پنج" در مثال عددی بالا بیانگر یک عدد فازی می‌باشد.

[1] Trapezoidal membership functions
[2] Triangular membership functions

قبلاً با اپراتورهای جبری تعریف‌شده بر روی اعداد قطعی آشنا شده‌ایم. حال اگر بخواهیم از مجموعه‌های فازی در کاربردهای مختلف استفاده کنیم، باید بتوانیم آنها را در مورد اعداد فازی نیز به کار ببریم. بدین منظور اصل گسترش می‌تواند اپراتورهای تعریف‌شده را از اعداد منطقی به اعداد فازی توسعه دهد.

فرض کنید $F(\mathbb{R})$ مجموعه اعداد فازی تعریف شده در بازه اعداد حقیقی و $X = X1 \times X2$ باشد. می‌توانیم خواص زیر را برای اپراتورهای دو عملوندی تعریف نماییم:

تعریف 4-5: اپراتور دو عملوندی * در $\mathbb{R}$ صعودی (نزولی) می‌باشد اگر:

$$\begin{aligned} &for \;\; x_1 > y_1 \;\; and \;\; x_2 > y_2 \\ &x_1 * x_2 > y_1 * y_2 \quad \left(x_1 * x_2 < y_1 * y_2\right) \end{aligned}$$

مثال:

اپراتور صعودی می‌باشد	$f(x,y) = x + y$
بر $\mathbb{R}^+$ یک اپراتور صعودی می‌باشد	$f(x,y) = x.y$
اپراتور نزولی می‌باشد	$f(x,y) = -(x+y)$

اگر اپراتورهای معمولی + ،- ، . ، / برای استفاده بر روی اعداد فازی توسعه داده شوند به صورت $\oplus, \Theta, \odot, \oslash$ نمایش داده می‌شوند.

در سال 1980 دبویز و پرید بیان کردند که اگر $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ اعداد فازی با توابع عضویت پیوسته به صورت نگاشتی از $\mathbb{R}$ به $[0,1]$ باشند و × نیز یک اپراتور دو عملوندی صعودی (نزولی) پیوسته باشد، آنگاه $\tilde{M} \otimes \tilde{N}$ یک عدد فازی با تابع عضویت پیوسته به صورت نگاشتی از $\mathbb{R}$ به $[0,1]$ خواهد بود. علاوه بر این، آنها روالهایی برای مشخص‌کردن تابع عضویت $\mu_{\tilde{M}\otimes\tilde{N}}$ بر اساس $\mu_{\tilde{M}}$ و $\mu_{\tilde{N}}$ معرفی کردند که به صورت زیر بیان شده است:

اگر $\tilde{M}, \tilde{N} \in F(\mathbb{R})$ با توابع عضویت پیوسته $\mu_{\tilde{M}}(x), \mu_{\tilde{N}}(x)$ باشد، با استفاده از اصل گسترش برای اپراتور دو عملوندی $X : \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، تابع عضویت عدد فازی $\tilde{M} \otimes \tilde{N}$ از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\mu_{\tilde{M}\otimes\tilde{N}}(z) = \sup_{z=x*y} \min\left\{\mu_{\tilde{M}}(x), \mu_{\tilde{N}}(x)\right\}$$

اپراتور گسترش یافته $\otimes$ شرایط زیر را دارا می‌باشد:

الف: برای هر اپراتور $\times$ که دارای خاصیت جابجایی باشد، اپراتور گسترش‌یافته $\otimes$ نیز دارای خاصیت جابجایی می‌باشد.

ب: برای هر اپراتور $\times$ که دارای خاصیت شرکت‌پذیری باشد، اپراتور گسترش‌یافته $\otimes$ نیز دارای خاصیت شرکت‌پذیری می‌باشد.

در اینجا به معرفی بعضی اپراتورهای گسترش‌یافته می‌پردازیم. ابتدا اپراتورهای یک عملوندی و سپس دو عملوندی را معرفی می‌کنیم. می‌توان معرفی اپراتورهای دو عملوندی را به اپراتورهای n عملوندی تعمیم داد.

برای اپراتورهای یک عملوندی $f : X \to Y, X = X_1$ ، با توجه به تعریف اصل گسترش، می‌توان تابع عضویت هر یک از اعضای $\tilde{M} \in F(\mathbb{R})$ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\mu_{f(\tilde{M})}(z) = \underset{x \in f^{-1}(z)}{Sup} \quad \mu_{\tilde{M}}(x)$$

مثال:

الف: برای $f(x) = -x$ ، مخالف عدد فازی $\tilde{M}$ با $-\tilde{M} = \left\{\left(x, \mu_{-\tilde{M}}(x) \mid x \in X\right)\right\}$ به دست می‌آید که: $\mu_{-\tilde{M}}(x) = \mu_{\tilde{M}}(-x)$

ب: اگر $f(x) = 1/x$ ، معکوس عدد فازی $\tilde{M}$ با $\tilde{M}^{-1} = \left\{\left(x, \mu_{\tilde{M}^{-1}}(x)\right) \mid x \in X\right\}$ به دست می‌آید که: $\mu_{\tilde{M}}^{-1}(x) = \mu_{\tilde{M}}(1/x)$

پ: برای هر $f(x) = \lambda.x, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ ضرب یک عدد اسکالر در عدد فازی به صورت $\lambda\tilde{M} = \left\{\left(x, \mu_{\lambda\tilde{M}}(x)\right) \mid x \in X\right\}$ می‌باشد که: $\mu_{\lambda\tilde{M}}(x) = \mu_{\tilde{M}}(x/\lambda)$

جمع گسترش‌یافته:

یک اپراتور صعودی و براساس تعریف دبویز و پرید می‌باشد. حاصل‌جمع گسترش‌یافته + روی اعداد فازی را که در آن $\tilde{M}, \tilde{N} \in F(\mathbb{R}), f(\tilde{N}, \tilde{M}) = \tilde{N} \oplus \tilde{M}$ می‌باشد، می‌توان یک عدد فازی دانست یعنی $\tilde{N} \oplus \tilde{M} \in F(\mathbb{R})$ است.

جمع گسترش‌یافته دارای خواص زیر می‌باشد:

الف: $\Theta\left(\tilde{M} \oplus \tilde{N}\right) = \left(\Theta\tilde{M}\right) \oplus \left(\Theta\tilde{N}\right)$

ب: خاصیت جابجایی

پ: خاصیت شرکت‌پذیری

ت: $\oplus$ دارای عضو بی‌اثر $\left(0 \in \mathbb{R} \subseteq F\left(\mathbb{R}\right) \right)$ می‌باشد که:

$$\tilde{M} \oplus 0 = \tilde{M} \quad , \quad \forall \tilde{M} \in F\left(\mathbb{R}\right)$$

ث: برای هر عنصر $\tilde{M}$ لزوما یک عنصر وارون به صورت $\Theta\tilde{M}$ وجود ندارد. به عبارت دیگر:

$$\tilde{M} \oplus \left(\Theta\tilde{M}\right) = 0$$

ضرب گسترش‌یافته:

ضرب در حوزه $\mathbb{R}^+$ یک اپراتور صعودی و در حوزه $\mathbb{R}^-$ یک اپراتور نزولی است. پس براساس تعریف دبویز و پرید، ضرب اعداد فازی مثبت یا ضرب اعداد فازی منفی یک عدد فازی مثبت می‌باشد.

اگر $\tilde{M}$ یک عدد فازی مثبت و $\tilde{N}$ یک عدد فازی منفی باشد آنگاه $\Theta\tilde{M}$ یک عدد فازی منفی بوده، حاصل $\left(\tilde{M} \odot \tilde{N}\right) = \Theta\left(\Theta\tilde{M} \odot \tilde{N}\right)$ نیز یک عدد فازی منفی می‌باشد.

ضرب گسترش‌یافته دارای خواص زیر است:

الف: $\left(\Theta\tilde{M}\right) \odot \tilde{N} = \Theta\left(\tilde{M} \odot \tilde{N}\right)$

ب: خاصیت جابجایی

پ: خاصیت شرکت‌پذیری

ت: عدد $\left(1 \in \mathbb{R} \subseteq F\left(\mathbb{R}\right) \right)$ عضو بی‌اثر برای اپراتور $\odot$ می‌باشد که:

$$\tilde{M} \odot 1 = \tilde{M} \quad , \quad \forall \tilde{M} \in F\left(\mathbb{R}\right)$$

ث: برای هر عنصر $\tilde{M}$ لزوما یک عنصر وارون به صورت $\tilde{M}^{-1}$ وجود ندارد. به عبارت دیگر:

$$\tilde{M} \odot \tilde{M}^{-1} \neq 1$$

با توجه به خواص فوق می‌توان گفت اگر $\tilde{M}$ یک عدد فازی مثبت یا منفی باشد و $\tilde{N}$ و $\tilde{P}$ هر دو اعداد فازی مثبت یا اعداد فازی منفی باشند آنگاه خواهیم داشت:

$$\tilde{M} \odot \left(\tilde{N} \oplus \tilde{P}\right) = \left(\tilde{M} \odot \tilde{N}\right) \oplus \left(\tilde{M} \odot \tilde{P}\right)$$

تفریق گسترش‌یافته :

اپراتور تفریق نه یک اپراتور صعودی و نه یک اپراتور نزولی می‌باشد. پس نمی‌توان تئوری دبویز و پرید را روی آن اعمال کرد. اما باز هم می‌توان اپراتور تفریق را به کمک اپراتور جمع به صورت زیر درنظر گرفت:

$$\tilde{M} \Theta \tilde{N} = \tilde{M} \oplus \left(\Theta \tilde{N}\right)$$

با اعمال اصل گسترش خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{M}\Theta\tilde{N}}(z) &= sup_{z=x-y}\, min\left\{\mu_{\tilde{M}}(x), \mu_{\tilde{N}}(y)\right\} \\ &= sup_{z=x+y}\, min\left\{\mu_{\tilde{M}}(x), \mu_{\tilde{N}}(-y)\right\} \\ &= sup_{z=x+y}\, min\left\{\mu_{\tilde{M}}(x), \mu_{-\tilde{N}}(y)\right\}\end{aligned}$$

بنابراین اگر $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ اعداد فازی باشند، $\tilde{M}\Theta\tilde{N}$ نیز یک عدد فازی خواهد بود.

تقسیم گسترش‌یافته:

تقسیم نیز همانند تفریق نه اپراتوری صعودی و نه اپراتوری نزولی است. ولی اگر $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ اعداد فازی مثبت فرض شوند، می‌توانیم روابط مربوط به تقسیم گسترش‌یافته را به کمک اپراتور ضرب به صورت زیر بدست آوریم:

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{M} \oslash \tilde{N}}(z) &= sup_{z=x/y}\, min\left\{\mu_{\tilde{M}}(x), \mu_{\tilde{N}}(y)\right\} \\ &= sup_{z=xy}\, min\left\{\mu_{\tilde{M}}(x), \mu_{\tilde{N}}(1/y)\right\} \\ &= sup_{z=xy}\, min\left\{\mu_{\tilde{M}}(x), \mu_{\tilde{N}^{-1}}(y)\right\}\end{aligned}$$

چون $\tilde{N}^{-1}$ یک عدد فازی مثبت است، استفاده از تئوری دبویز و پرید برای آن مجاز خواهد بود. همچنین اگر $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ هر دو اعداد فازی منفی باشند، باز هم می‌توانیم تقسیم

گسترش‌یافته را تعریف نماییم. نظیر نتایج فوق را برای دیگر اپراتورهای جبری تعریف‌شده در فصل قبل نیز می‌توان به دست آورد.

باید توجه داشت اپراتورهای گسترش‌یافته که از مینیمم و ماکزیمم در تعریف آنها استفاده شده است، نمی‌توانند مستقیماً بر اعداد فازی با حوزه گسسته اعمال شوند زیرا ممکن است نتیجه آنها کوژ نبوده، نتوانیم آن را به عنوان عدد فازی بپذیریم. مثال زیر برای توضیح بیشتر این مطلب است.

مثال: اگر فرض شود

$$\tilde{M}=\{(1,0.3),(2,1),(3,0.4)\}$$
$$\tilde{N}=\{(2,0.7),(3,1),(4,0.2)\}$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$\tilde{M}\odot\tilde{N}=\{(2,0.3),(3,0.3),(4,0.7),(6,1),(8,0.2),(9,0.4),(12,0.2)\}$$

همان‌گونه که مشاهده می‌کنید نتیجه نهایی به خاطر عضو $(9,0.4)$ کوژ نبوده، بیانگر یک عدد فازی نخواهد بود. ضمناً با توجه به اینکه تئوری دبویز و پرید در مورد اپراتورهای گسترش‌یافته عمومی بوده و محدودیتی برای توابع عضویت اعداد فازی ندارد، این اپراتورها دارای حجم محاسباتی زیادی خواهند بود.

برای کاهش این حجم از محاسبات می‌توان با محدودکردن توابع عضویت اعداد فازی به نمایش L-R یا مثلثی‌شکل از عمومیت تئوری کم کرده، یک محدودیت قابل‌صرف‌نظر در اپراتورهای گسترش‌یافته ایجاد کرد.

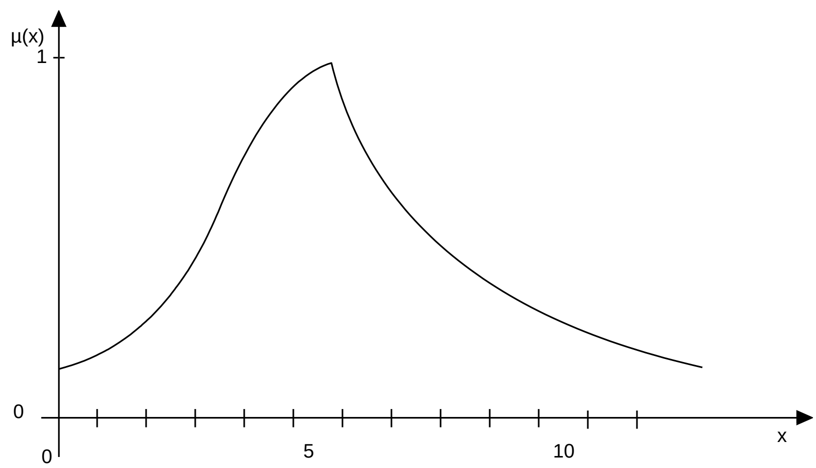
در سال 1979 دبویز و پرید یک نمایش خاص از اعداد فازی را پیشنهاد کردند. آنها یک تصویرگر از R^+ به $[0,1]$ را که نزولی است L (وR) نامیدند که در آن:

$$L(0)=1$$
$$L(x)<1 \quad for \quad \forall x>0$$
$$L(x)>1 \quad for \quad \forall x<1$$
$$L(1)=0$$

تعریف 4-6: عدد فازی $\tilde{M}$ از نوع L-R می‌باشد اگر توابع L (برای چپ) و R (برای راست) و اعداد اسکالر $\beta>0,\alpha>0$ با شرایط زیر وجود داشته باشند:

$$\mu_{\tilde{M}}(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right) & for \quad x\le m \\ R\left(\dfrac{x-m}{\beta}\right) & for \quad x\ge m \end{cases}$$

m مقدار میانه‌ای $\tilde{M}$ نامیده می‌شود و یک عدد حقیقی است. α,β گسترشهای چپ و راست نام دارند و $\tilde{M}$ به صورت $(m,\alpha,\beta)_{LR}$ نمایش داده می‌شود (شکل 4-3).



شکل 4-3: عدد فازی نوع L-R

برای L(Z) می‌توان توابع مختلفی را انتخاب کرد. دبویز و پرید توابع زیر را (P>0) پیشنهاد دادند. البته مسئله این است که در موقعیتها و مواضع مختلف کدامیک از این توابع بهترین انتخاب هستند؟

$$L(x) = max\left\{0,(1-x)^p\right\}$$
$$L(x) = max\left\{0,(1-x^p)\right\}$$
$$L(x) = e^{-x^2} \quad L(x) = e^{-x}$$

مثال: اگر $L(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, R(x) = \dfrac{1}{1+2|x|}, \alpha = 2, \beta = 3, m = 5$ باشد

براساس تعریف 4-6 خواهیم داشت:

$$\mu_{\tilde{M}}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{5-x}{2}\right) = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{5-x}{2}\right)^2} & for \quad x \le 5 \\ R\left(\dfrac{x-5}{3}\right) = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{2(5-x)}{3}\right)} & for \quad x \ge 5 \end{cases}$$

اگر m بجای آنکه یک عدد حقیقی باشد یک گستره $\lfloor \underline{m}, \overline{m} \rfloor$ را نشان بدهد (که $\underline{m}, \overline{m}$ حد پایین و بالای گستره را مشخص می‌کنند)، $\tilde{M}$ نیز بجای آنکه یک عدد فازی باشد یک *گستره فازی*[1] خواهد بود. گستره فازی به صورت نمایش L-R به فرم زیر تعریف می‌شود:

تعریف 4-7 : $\tilde{M}$ یک گستره فازی از نوع L-R خواهد بود اگر توابع L و R و 4 پارامتر $\alpha, \beta, (\underline{m}, \overline{m}) \in R^2 \cup \{-\infty, +\infty\}$ وجود داشته باشند و نیز تابع عضویت آن به صورت زیر باشد:

$$\mu_{\tilde{M}}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right) & for \quad x \le \underline{m} \\ 1 & for \quad \underline{m} \le x \le \overline{m} \\ R\left(\dfrac{x-\overline{m}}{\beta}\right) & for \quad x \ge \overline{m} \end{cases}$$

گستره فازی $\tilde{M}$ را به صورت $\tilde{M} = (\underline{m}, \overline{m}, \alpha, \beta)_{LR}$ نمایش می‌دهیم.

---
[1] Fuzzy interval

این تعریف خیلی کلی است و انواع مختلفی از اطلاعات را می‌توان در آن بیان نمود. به عنوان مثال اگر $\tilde{M}$ یک عدد حقیقی قطعی فرض شود:

$$\tilde{M}=\left(m,m,0,0\right)_{LR},\forall L,\forall R$$

یا اگر $\tilde{M}$ یک گستره قطعی فرض شود:

$$\tilde{M}=\left(a,b,0,0\right)_{LR},\forall L,\forall R$$

اگر $\tilde{M}$ یک عدد فازی ذوزنقه‌ای باشد، تعریف $L\left(x\right)=R\left(x\right)=\max\left\{0,1-x\right\}$ آن را در این قالب می‌گنجاند.

برای اعداد فازی نوع L-R نیز اپراتورهای ساده‌ای معرفی شده‌اند که با نمایشهای فوق سازگاری دارند. در اینجا به معرفی آنها می‌پردازیم:

اگر $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ دو عدد فازی از نوع L-R باشند:

$$\tilde{M}=\left(m,\alpha,\beta\right)_{LR}$$
$$\tilde{N}=\left(n,\gamma,\delta\right)_{LR}$$

آنگاه روابط زیر برقرار خواهد بود:

الف:

$$\left(m,\alpha,\beta\right)_{LR}\oplus\left(n,\gamma,\delta\right)_{LR}=\left(m+n,\alpha+\gamma,\beta+\delta\right)_{LR}$$

ب:

$$-\left(m,\alpha,\beta\right)_{LR}=\left(-m,\beta,\alpha\right)_{LR}$$

پ:

$$\left(m,\alpha,\beta\right)_{LR}\Theta\left(n,\gamma,\delta\right)_{LR}=\left(m-n,\alpha+\delta,\beta+\gamma\right)_{LR}$$

مثال: اگر برای L(x) و R(x) و $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ روابط زیر را داشته باشیم:

$$L\left(x\right)=R\left(x\right)=\frac{1}{1+x^2}$$
$$\tilde{M}=\left(1,0.5,0.8\right)_{LR}$$
$$\tilde{N}=\left(2,0.6,0.2\right)_{LR}$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$\tilde{M} \oplus \tilde{N} = \left(3, 1.1, 1\right)_{LR}$$

حال اگر فرض کنیم:

$$\tilde{O} = \left(2, 0.6, 0.2\right)_{LR}$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$\Theta \tilde{O} = \left(-2, 0.2, 0.6\right)_{LR}$$
$$\tilde{M} \Theta \tilde{O} = \left(-1, 0.7, 1.4\right)_{LR}$$

اگر $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ اعداد فازی تعریف 4-3 باشند آنگاه برای $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ مثبت داریم:

$$\left(m, \alpha, \beta\right)_{LR} \otimes \left(n, \gamma, \delta\right)_{LR} \approx \left(mn, m\gamma, n\alpha + n\beta + m\delta\right)_{LR}$$

برای $\tilde{N}$ مثبت و $\tilde{M}$ منفی:

$$\left(m, \alpha, \beta\right)_{LR} \otimes \left(n, \gamma, \delta\right)_{LR} \approx \left(mn, n\alpha - m\delta, n\beta - m\gamma\right)_{LR}$$

و برای $\tilde{N}$ و $\tilde{M}$ منفی:

$$\left(m, \alpha, \beta\right)_{LR} \otimes \left(n, \gamma, \delta\right)_{LR} \approx \left(mn, -n\beta - m\delta, n\alpha - m\gamma\right)_{LR}$$

مثال: اگر $\tilde{M} = \left(-1, 0.7, 1.4\right)_{LR}$ و $\tilde{N} = \left(3, 0.1, 1.3\right)_{LR}$ اعداد فازی نوع L-R با توابع مرجع زیر باشند:

$$L\left(z\right) = R\left(z\right) = \begin{cases} 1 & -1 \le z \le 1 \\ 0 & else \end{cases}$$

برای به دست آوردن $\tilde{M} \otimes \tilde{N}$ با توجه به مطالب عنوان‌شده داریم:

$$\mu_{\tilde{M}}\left(x\right) = \begin{cases} L\left(\dfrac{2-x}{0.2}\right) & for \quad x \le 2 \\ R\left(\dfrac{x-2}{0.1}\right) & for \quad x \ge 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & -1 \le \dfrac{2-x}{0.2} \le 1 \quad and \quad -1 \le \dfrac{x-2}{0.1} \le 1 \\ 0 & else \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & 1.9 \le x \le 2.1 \\ 0 & else \end{cases}$$

این محاسبات نشان می‌دهد که $\tilde{M}$ مثبت است.

$$\mu_{\tilde{N}}(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{3-x}{0.1}\right) & for \quad x\le 3 \\ R\left(\dfrac{x-3}{0.3}\right) & for \quad x\ge 3 \end{cases}$$
$$=\begin{cases} 1 & 2.9\le x\le 3.1 \\ 0 & else \end{cases}$$

یعنی $\tilde{N}$ هم مثبت می‌باشد که در نتیجه داریم:

$$\tilde{M} \odot \tilde{N} \approx \left(2\times 0.3, 2\times 0.1+3\times 0.2, 2\times 0.3+3\times 0.1\right)_{LR}=\left(6,0.8,0.9\right)_{LR}$$