فصل 5

روابط و گرافهای فازی

روابط فازی، زیرمجموعه‌های فازی $X \times Y$ به صورت تصویری از X به Y هستند. روابط فازی توسط جمعی از محققین (زاده (1965و1971) کافمن و روزنفلد (1975)) مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. در این فصل به توضیح و بررسی روابط فازی، گرافهای حاصل از این روابط، خواص و کاربردهایشان می‌پردازیم.

5-1: روابط فازی

تعریف 5-1: اگر $X,Y \subseteq \mathbb{R}$ مجموعه‌های مرجع باشند آنگاه:

$$\tilde{R} = \left\{ \left(\left(x,y \right), \mu_{\tilde{R}}\left(x,y \right) \right) | \left(x,y \right) \in X \times Y \right\}$$

یک *رابطه فازی* بر $X \times Y$ نامیده می‌شود.

مثال: اگر $X = Y = \mathbb{R}$ و "به حد کافی بزرگتر از"$=: \tilde{R}$ باشد، تابع عضویت رابطه فازی که البته خود یک مجموعه فازی بر $X \times Y$ است می‌تواند به صورت زیر باشد:

$$\mu_{\tilde{R}}\left(x,y \right) = \begin{cases} 0 & for \;\; x \le y \\ \dfrac{\left(x-y \right)}{10y} & for \;\; y<x \le 11y \\ 1 & for \; x>11y \end{cases}$$

برای حالات گسسته، روابط فازی را می‌توان توسط ماتریس نمایش داد.

مثال: اگر $Y = \left\{ y_1, y_2, y_3, y_4 \right\}, X = \left\{ x_1, x_2, x_3 \right\}$ و رابطه $\tilde{R}$ به صورت "x به حد کافی بزرگتر از y است" تعریف شود، می‌توان رابطه $\tilde{R}$را به صورت ماتریس زیر نمایش داد:

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.8	1	0.1	0.7
x_2	0	0.8	0	0
x_3	0.9	1	0.7	0.8

و رابطه "y خیلی به x نزدیک است" $\tilde{Z} =$ را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.4	0	0.9	0.6
x_2	0.9	0.4	0.5	0.7
x_3	0.3	0	0.8	0.5

باید توجه داشت که در تعریف 5-1، $\mu_{\tilde{R}}$ یک تصویر از $X \times Y$ به $[0,1]$ می‌باشد. یعنی به زوج (x,y) یک عدد حقیقی متعلق به فاصله بسته $[0,1]$ نسبت داده می‌شود. در بیشتر موارد از جمله در گرافهای فازی در نظر داشتن این نکته که یک رابطه، تصویری از مجموعه‌های فازی شامل مجموعه‌های مرجع به فاصله $[0,1]$ است، مفید می‌باشد. می‌توان تعریف 5-1 را به صورت زیر تعمیم داد:

تعریف 5-2: اگر $X,Y \subseteq$ و مجموعه‌های $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ با تعریف زیر مفروض باشند:

$$\tilde{A}(x) = \left\{\left(x, \mu_{\tilde{A}}(x)\right) \mid x \in X\right\}$$

$$\tilde{B}(x) = \left\{\left(x, \mu_{\tilde{B}}(x)\right) \mid x \in X\right\}$$

آنگاه $\tilde{R} = \left\{\left[(x,y), \mu_{\tilde{R}}(x,y)\right] \mid (x,y) \in X \times Y\right\}$ یک رابطه فازی بر $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ خواهد بود اگر:

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) \le \mu_{\tilde{A}}(x), \forall (x,y) \in X \times Y$$

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) \le \mu_{\tilde{B}}(y), \forall (x,y) \in X \times Y$$

این تعریف خصوصاً در گرافهای فازی مفید خواهد بود. اگر هر یک از عناصر رابطه فازی تعریف 5-2 را به عنوان یک گره از گراف فرض کنیم و درجات عضویت اعضا را نشان‌دهنده جریان نودهای گراف در نظر بگیریم که به عنوان وزن یالهای گراف نمایش داده می‌شوند، می‌توان یک رابطه را به صورت یک گراف نمایش داد.

ضمناً باقیمانده تعریف 5-2 $\mu_{\tilde{R}}(x,y) \le min\left\{\mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)\right\}$ مشخص می‌کند که جریان مورد نظر در نودها هرگز افزوده نخواهد شد.

روابط فازی به‌روشنی مجموعه‌های فازی در فضاهای ضربی می‌باشند. بنابراین می‌توانیم اپراتورهای جبری و نیز اپراتورهای تئوری مجموعه‌ها که در فصل 2 تعریف شده‌اند را با استفاده از اصل گسترش برای روابط فازی تعریف کنیم.

تعریف 5-3: اگر $\tilde{R}$ و $\tilde{Z}$ دو رابطه فازی در یک فضای ضربی باشند، اجتماع و اشتراک آنها را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\mu_{\tilde{R}\cup\tilde{Z}}(x,y) = max\left\{\mu_{\tilde{R}}(x,y), \mu_{\tilde{Z}}(x,y)\right\} \qquad (x,y) \in X \times Y$$

$$\mu_{\tilde{R}\cap\tilde{Z}}(x,y) = min\left\{\mu_{\tilde{R}}(x,y), \mu_{\tilde{Z}}(x,y)\right\} \qquad (x,y) \in X \times Y$$

مثال: فرض کنید $\tilde{R}$ و $\tilde{Z}$ دو رابطه فازی تعریف شده در مثالهای قبل باشند. اجتماع دو رابطه $\tilde{R}$ و $\tilde{Z}$ یعنی $\tilde{R} \cup \tilde{Z}$ که آن را می‌توان به صورت "X به حد کافی بزرگتر از Y یا خیلی نزدیک به Y است" بیان کرد، به صورت زیر می‌باشد:

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.8	1	0.9	0.7
x_2	0.9	0.8	0.5	0.7
x_3	0.9	1	0.8	0.8

واشتراک دو مجموعه یعنی $\tilde{R} \cap \tilde{Z}$ به صورت زیر نشان داده می‌شود:

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.4	0	0.1	0.6
x_2	0	0.4	0	0
x_3	0.3	0	0.7	0.5

همان‌گونه که مشاهده شد از اپراتورهای مینیمم و ماکزیمم برای تعریف اجتماع و اشتراک استفاده شده است. از آنجا که هر رابطه فازی، خود یک مجموعه فازی می‌باشد اپراتورهای متفاوت تعریف‌شده در فصل 2 برای روابط فازی قابل اعمال است.

مفاهیم دیگری که در زمینه روابط فازی قابل تعریف هستند، مشتمل بر تصویر و توسعه استوانه‌ای روابط فازی می‌باشند.

تعریف 5–4: اگر $\tilde{R} = \left\{ \left[(x,y), \mu_{\tilde{R}}(x,y) \right] | (x,y) \in X \times Y \right\}$ یک رابطه فازی دوسویه باشد، *تصویر اول*[1] $\tilde{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{R}^{(1)} = \left\{ \left(x, \max_{y} \mu_{\tilde{R}}(x,y) \right) | (x,y) \in X \times Y \right\}$$

و تصویر دوم آن[2]:

$$\tilde{R}^{(2)} = \left\{ \left(y, \max_{x} \mu_{\tilde{R}}(x,y) \right) | (x,y) \in X \times Y \right\}$$

---
[1] First projection
[2] Second projection

و *تصویر کلی*[1] آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{R}^{(T)} = \max_x \max_y \left\{ \left(\mu_{\tilde{R}}\left(x,y\right) \right) | \left(x,y\right) \in X \times Y \right\}$$

مثال: اگر $\tilde{R}$ یک رابطه فازی نظیر ماتریس داده‌شده باشد، تصویر اول (ماکزیمم y_j ها برای x خاص)، تصویر دوم (ماکزیمم x_i ها برای y خاص) و تصویر کلی نظیر این رابطه با اعمال فرمولهای تعریف 5-4 به دست می‌آید. ستون آخر نشان‌دهنده تصویر اول و سطر آخر نشان‌دهنده تصویر دوم می‌باشد. تصویر کلی بیانگر بزرگترین درجه عضویت موجود در ماتریس (تلاقی تصویر اول و دوم در نمایش ماتریسی) است.

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	0.1	0.2	0.4	0.8	1	0.8
x_2	0.2	0.4	0.8	1	0.8	0.6
x_3	0.4	0.8	1	0.8	0.4	0.2

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	تصویر اول
x_1	0.1	0.2	0.4	0.8	1	0.8	**1**
x_2	0.2	0.4	0.8	1	0.8	0.6	**1**
x_3	0.4	0.8	1	0.8	0.4	0.2	**1**
تصویر دوم	**0.4**	**0.8**	**1**	**1**	**1**	**0.8**	**1**

اگر یک فضای عمومی به صورت $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ را در نظر بگیریم که $\tilde{R}_q$ یک تصویر در فضای $X_{i_1} \times X_{i_2} \times \ldots \times X_{i_k}$ بوده، $\left(i_1, i_2, \ldots, i_3\right)$ یک زیردنباله از دنباله $\left(1,2,\ldots,n\right)$ باشد، واضح است که رابطه‌های فازی در آن فضای مرجع می‌توانند دارای همان تصویر باشند و می‌توانیم برای هر تصویر، یک $\tilde{R}_{qL}\left(x_1, x_2, \ldots, x_r\right)$ با تابع عضویت $\mu_{\tilde{R}_{qL}}\left(X_{i_1} \times X_{i_2} \times \ldots \times X_{i_k}\right)$ را به عنوان رابطه بزرگترین تعریف کنیم.

---

[1] Total projection

تعریف 5-5: $\tilde{R}_{qL} \subset X$ را رابطه بزرگترین در X می‌گوییم که از رابطه تصویرشده $\tilde{R}_q$ به دست آمده است. $\tilde{R}_{qL}$ را *توسعه استوانه‌ای* [1] برای $\tilde{R}_q$ و در مقابل، $\tilde{R}_q$ را *پایه* برای $\tilde{R}_{qL}$ می‌نامیم.

مثال: توسعه استوانه‌ای $R^{(2)}$ در مثال قبل برابر است با :

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	0.4	0.8	1	1	1	0.8
x_2	0.4	0.8	1	1	1	0.8
x_3	0.4	0.8	1	1	1	0.8

تعریف5-6: اگر $\tilde{R}$ یک رابطه فازی در فضای $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ باشد و $\tilde{R}_2, \tilde{R}_1$ دو تصویر فازی در فضای $\left(X_s \times \ldots \times X_n\right), \left(X_1 \times \ldots \times X_r\right)$ باشند و شرط $s \le r+1$ برقرار باشد و $\tilde{R}_{2L}, \tilde{R}_{1L}$ توسعه استوانه‌ای روابط $\tilde{R}_2, \tilde{R}_1$ باشند، *پیوند* [2] $\tilde{R}_2, \tilde{R}_1$ به صورت $\tilde{R}_{2L} \cap \tilde{R}_{1L}$ و برخورد [3] آنها به صورت $\tilde{R}_{2L} \cup \tilde{R}_{1L}$ تعریف می‌شود.

5-1-1: ترکیب فازی

روابط فازی که در فضاهای ضربی متفاوتی تعریف شده‌اند می‌توانند توسط اپراتور با یکدیگر ترکیب شوند. انواع متفاوتی از ترکیب پیشنهاد شده‌اند که در خواص ریاضی و نتایج با یکدیگر متفاوت هستند. ترکیب ماکزیمم- مینیمم یکی از بهترین پیشنهادها در زمینه ترکیب فازی است.

تعریف 5-7: ترکیب ماکزیمم- مینیمم [4]:

اگر $\tilde{R}_1\left(x,y\right)$ و $\tilde{R}_2\left(y,z\right)$ دو رابطه فازی مطابق شرط زیر باشند:

$$\left(x,y\right) \in X \times Y$$
$$\left(y,z\right) \in Y \times Z$$

ترکیب ماکزیمم-مینیمم دو رابطه $\tilde{R}_2, \tilde{R}_1$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

---
[1] Cylindrical extension
[2] Join
[3] Meet
[4] Max-min composition

$$\tilde{R}_1 \;\; max\text{-}min\; \tilde{R}_2 : \tilde{R}_1 o \tilde{R}_2 \;\; =$$
$$\left\{\left[(x,z), \max_y\left\{min\left\{\mu_{\tilde{R}_1}(x,y), \mu_{\tilde{R}_2}(y,z)\right\}\right\}\right] x \in X, y \in Y, z \in Z\right\}$$

$\mu_{\tilde{R}_1 o \tilde{R}_2}$ همان تابع عضویت یک رابطه فازی بر مجموعه‌های فازی است که در تعریف 5-2 قید شده است. یک تعریف عمومی از ترکیب، ترکیب "ماکزیمم-*" می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف 5-8: اگر $\tilde{R}_2, \tilde{R}_1$ با تعریف 5-7 تعریف شده باشند، ترکیب *ماکزیمم- ** از $\tilde{R}_2, \tilde{R}_1$ به این صورت بیان می‌شود:

$$\tilde{R}_1 \underset{*}{o} \tilde{R}_2 \;\; = \left\{\left[(x,z), \max_y\left\{\mu_{\tilde{R}_1}(x,y) * \mu_{\tilde{R}_2}(y,z)\right\}\right] x \in X, y \in Y, z \in Z\right\}$$

اگر * یک اپراتور شرکت‌پذیر و نسبت به هر آرگومانش غیرنزولی و یکنوا باشد، اساساً ترکیب ماکزیمم- * (max-*) همان ترکیب ماکزیمم-مینیمم خواهد بود.

تعریف 5-9: اگر $\tilde{R}_2, \tilde{R}_1$ به صورت تعریف 5-7 تعریف شده باشند، ترکیب *ماکزیمم-ضرب*[1] $\tilde{R}_1 \underset{\bullet}{o} \tilde{R}_2$ و *ماکزیمم-میانگین*[2] $\tilde{R}_1 \underset{av}{o} \tilde{R}_2$ به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\tilde{R}_1 \underset{\bullet}{o} \tilde{R}_2(x,z) = \left\{\left[(x,z), \max_y\left\{\mu_{\tilde{R}_1}(x,y) . \mu_{\tilde{R}_2}(y,z)\right\}\right] \mid x \in X, y \in Y, z \in Z\right\}$$
$$\tilde{R}_1 \underset{av}{o} \tilde{R}_2(x,z) = \left\{\left[(x,z), \max_y\left\{\frac{\mu_{\tilde{R}_1}(x,y) + \mu_{\tilde{R}_2}(y,z)}{2}\right\}\right] \mid x \in X, y \in Y, z \in Z\right\}$$

مثال: اگر $\tilde{R}_2(y,z), \tilde{R}_1(x,y)$ به صورت ماتریسهای رابطه‌ای زیر تعریف شده باشند:

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0.1	0.2	0	1	0.7
x_2	0.3	0.5	0	0.2	1
x_3	0.8	0	1	0.4	0.3

[1] Max-prod composition
[2] Max-av composition

	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0.9	0	0.3	0.4
y_2	0.2	1	0.8	0
y_3	0.8	0	0.7	1
y_4	0.4	0.2	0.3	0
y_5	0	1	0	0.8

ابتدا ترکیب ماکزیمم-مینیمم $\tilde{R}_1 \underset{\bullet}{o} \tilde{R}_2(x,z)$ را محاسبه می‌کنیم. البته به دلیل تکراری‌بودن محاسبات فقط حالت $x = x_1, z = z_1$ را به طور کامل بررسی خواهیم کرد.

$$y = y_i; i = 1,2,\dots,5, z = z_1, x = x_2$$

$$min\left\{\mu_{\tilde{R}_1}(x_1,y_1), \mu_{\tilde{R}_2}(y_1,z_1)\right\} = min\{0.1,0.9\} = 0.1$$

$$min\left\{\mu_{\tilde{R}_1}(x_1,y_2), \mu_{\tilde{R}_2}(y_2,z_1)\right\} = min\{0.2,0.2\} = 0.2$$

$$min\left\{\mu_{\tilde{R}_1}(x_1,y_3), \mu_{\tilde{R}_2}(y_3,z_1)\right\} = min\{0,0.8\} = 0$$

$$min\left\{\mu_{\tilde{R}_1}(x_1,y_4), \mu_{\tilde{R}_2}(y_4,z_1)\right\} = min\{1,0.4\} = 0.4$$

$$min\left\{\mu_{\tilde{R}_1}(x_1,y_5), \mu_{\tilde{R}_2}(y_5,z_1)\right\} = min\{0.7,0\} = 0$$

$$\begin{aligned}\tilde{R}_1 \underset{\bullet}{o} \tilde{R}_2(x_1,z_1) &= \left((x_1,z_1), \mu_{\tilde{R}_1 o \tilde{R}_2}(x_1,z_1)\right)\\ &= \left((x_1,z_1), max(0.1,0.2,0,0.4,0)\right)\\ &= \left((x_1,z_1), 0.4\right)\end{aligned}$$

به همین ترتیب به ازای بقیه (x_i,z_j) ها که $j=1,\dots,4, i=1,\dots,3$ درجه عضویت را برای هر حالت ترکیب فازی به دست آورده، جدول زیر را حاصل می‌نماییم.

	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0.4	0.7	0.3	0.7

x_2	0.3	1	0.5	0.8
x_3	0.8	0.3	0.7	1

و برای ترکیب ماکزیمم-ضرب می‌توانیم روابط زیر را به دست آوریم:

$$\begin{aligned}
&x = x_1, z = z_1, y = y_i; i = 1,\ldots,5\\
&\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_1).\mu_{\tilde{R}_2}(y_1, z_1) = 0.1 \cdot 0.9 = 0.09\\
&\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_2).\mu_{\tilde{R}_2}(y_2, z_1) = 0.2 \cdot 0.2 = 0.04\\
&\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_3).\mu_{\tilde{R}_2}(y_3, z_1) = 0 \cdot 0.8 = 0\\
&\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_4).\mu_{\tilde{R}_2}(y_4, z_1) = 1 \cdot 0.4 = 0.4\\
&\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_5).\mu_{\tilde{R}_2}(y_5, z_1) = 0.7 \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_1 o \tilde{R}_2 (x_1, y_1) &= \left\{(x_1, y_1), \mu_{\tilde{R}_1 o \tilde{R}_2}(x_1, z_1)\right\}\\
&= \left((x_1, z_1), max(0,0.9,0.04,0,0.4,0)\right)\\
&= \left((x_1, z_1), 0.4\right)
\end{aligned}$$

در نهایت، حاصل $\tilde{R}_1 \underset{\bullet}{o} \tilde{R}_2$ به صورت جدول زیر به دست می‌آید:

	z_1	**z_2**	**z_3**	**z_4**
x_1	0.4	0.7	0.3	0.56
x_2	0.27	1	0.4	0.8
x_3	0.8	0.3	0.7	1

و ترکیب ماکزیمم-میانگین به صورت زیر حاصل می‌شود:

i	$\mu(x_1, y_i) + \mu(y_i, z_1)$
1	1
2	0.4
3	0.8
4	1.4
5	0.7

بنابراین

$$\tfrac{1}{2}\times\max_{y}\left\{\mu_{\tilde{R}_1}\left(x_1, y_i\right)+\mu_{\tilde{R}_2}\left(y_i, z_1\right)\right\}=\tfrac{1}{2}\times 1.4=0.7$$

با انجام تمام محاسبات، $\tilde{R}_1 \underset{av}{o} \tilde{R}_2$ مطابق زیر حاصل می‌شود:

	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0.7	0.85	0.65	0.75
x_2	0.6	1	0.65	0.9
x_3	0.9	0.65	0.85	1

علاوه بر ترکیبهای ماکزیمم- مینیمم، ماکزیمم- ضرب و ماکزیمم- میانگین به ترکیبهای مینیمم- ماکزیمم، ماکزیمم- ماکزیمم، مینیمم- مینیمم و جمع- ضرب نیز می‌توان اشاره کرد که سه مورد اول مانند ترکیبهای تعریف‌شده بیان می‌شوند و ترکیب جمع-ضرب نیز به صورت زیر قابل تعریف است:

$$\tilde{R}_1+\tilde{R}_2\left(x,z\right)=$$
$$\left\{\left[\left(x,z\right),f\left\{\sum_{y}\left[\mu_{\tilde{R}_1}\left(x,y\right).\mu_{\tilde{R}_2}\left(y,z\right)\right]\right\}\right]\mid x\in X, y\in Y, z\in Z\right\}$$

f معمولاً یک تابع سیگموئید یا تابع پله اختیار می‌شود.

5-1-2: خواص ترکیب ماکزیمم- مینیمم

در این قسمت به توضیح خواص ترکیب ماکزیمم- مینیمم می‌پردازیم و تعاریف پیشنهادشده برای هر یک را معرفی می‌کنیم. از خواص ترکیب ماکزیمم- مینیمم می‌توان به خاصیت شرکت‌پذیری اشاره کرد. شرکت‌پذیری در ترکیب ماکزیمم-مینیمم به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\left(\tilde{R}_3 o \tilde{R}_2\right) o \tilde{R}_1=\tilde{R}_3 o\left(\tilde{R}_2 o \tilde{R}_1\right)$$

توان سوم رابطه فازی به صورت $\tilde{R}_1 o \tilde{R}_1 o \tilde{R}_1=\tilde{R}_1^{\,3}$ تعریف می‌شود. حال به بیان بعضی خواص قابل تعریف در رابطه‌های فازی پرداخته، خواصی را که ترکیب ماکزیمم-مینیمم واجد آنها می‌باشد معرفی می‌کنیم.

برای خاصیت انعکاسی[1] در سال 1971 و 1975 تعاریف زیر پیشنهاد شده است:

تعریف 5-10: اگر $\tilde{R}$ یک رابطه فازی در $X\times X$ باشد، $\tilde{R}$ یک رابطه *انعکاسی* خواهد بود اگر:

$$\mu_{\tilde{R}}\left(x,x\right)=1 \qquad \forall x\in X$$

$\tilde{R}$ یک رابطه $\varepsilon-$انعکاسی است اگر:

$$\mu_{\tilde{R}}\left(x,x\right)\geq\varepsilon \qquad \forall x\in X$$

---
[1] Reflexivity

به $\tilde{R}$ رابطه انعکاسی ضعیف می‌گوئیم اگر:

$$\left.\begin{aligned}\mu_{\tilde{R}}(x,y)\le\mu_{\tilde{R}}(x,x)\\ \mu_{\tilde{R}}(y,x)\le\mu_{\tilde{R}}(x,x)\end{aligned}\right\}\qquad \forall x,y\in X$$

مثال: رابطه "y به x نزدیک است" که با ماتریس رابطه‌ای زیر بیان می‌شود یک رابطه انعکاسی است.

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	0	0.2	0.3
x_2	0	1	0.1	1
x_3	0.2	0.7	1	0.4
x_4	0	1	0.4	1

اگر $\tilde{R}_1,\tilde{R}_2$ دو رابطه فازی انعکاسی باشند آنگاه ترکیب ماکزیمم-مینیمم $\tilde{R}_1 o \tilde{R}_2$ نیز انعکاسی خواهد بود.

تعریف 5-11: رابطه فازی $\tilde{R}$ دارای خاصیت *تقارنی*[1] است اگر:

$$\tilde{R}(x,y)=\tilde{R}(y,x)\qquad \forall x,y\in X$$

تعریف5-12: رابطه $\tilde{R}$ دارای خاصیت *پادتقارنی*[2] است اگر برای $x\neq y$ های مختلف داشته باشیم:

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y)\neq\mu_{\tilde{R}}(y,x) \quad \text{یا} \quad \mu_{\tilde{R}}(x,y)=\mu_{\tilde{R}}(y,x)=0$$

اگر به ازای $x\neq y$ و $\mu_{\tilde{R}}(x,y)>0$ بتوان نتیجه گرفت: $\mu_{\tilde{R}}(y,x)=0$ آنگاه چنین رابطه‌ای دارای خاصیت *کاملاً پادتقارنی*[3] است.

مثال: در ماتریسهای زیر: $\tilde{R}_1$ بیانگر رابطه کاملاً پادتقارنی، $\tilde{R}_2$ بیانگر رابطه پادتقارنی و $\tilde{R}_3$ بیانگر یک رابطه غیرمتقارن است.

$\tilde{R}_1$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0.4	0	0.1	0.8
x_2	0.8	1	0	0
x_3	0	0.6	0.7	0
x_4	0	0.2	0	0

[1] Symmetry
[2] Antisymmetry
[3] Perfectly antisymmetry

$\tilde{R}_2$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0.4	0	0.7	0
x_2	0	1	0.9	0.6
x_3	0.8	0.4	0.7	0.4
x_4	0	0.1	0	0

$\tilde{R}_3$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0.4	0.8	0.1	0.8
x_2	0.8	1	0	0.2
x_3	0.1	0.6	0.7	0.1
x_4	0	0.2	0	0

در رابطه $\tilde{R}_3$ چون $x, y \in X$ به‌نحوی وجود دارد تا $\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \mu_{\tilde{R}}(y, x)$ برقرار باشد، رابطه $\tilde{R}_3$ پادتقارنی نمی‌باشد، درنتیجه کاملاً پادتقارنی هم نخواهد بود.

تعریف 5-13: رابطه فازی $\tilde{R}$ دارای خاصیت تعدی[1] (تراگذری) می‌باشد اگر:

$$\tilde{R} o \tilde{R} \subseteq \tilde{R}$$

مثال: رابطه $\tilde{R}$ را به صورت یک ماتریس رابطه‌ای در نظر بگیرید:

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0.2	1	0.4	0.4
x_2	0	0.6	0.3	0
x_3	0	1	0.3	0
x_4	0.1	1	1	0.1

[1] Transitivity

با ترکیب ماکزیمم-مینیمم رابطه $\tilde{R}o\tilde{R}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0.2	0.6	0.4	0.2
x_2	0	0.6	0.3	0
x_3	0	0.6	0.3	0
x_4	0.1	1	0.3	0.1

به ازای $\forall x,y \in X$ داریم $\mu_{\tilde{R}o\tilde{R}}(x,y) \le \mu_{\tilde{R}}(x,y)$، پس رابطه $\tilde{R}$ دارای خاصیت تعدی می‌باشد.
حال که با خاصیتهای انعکاسی، تقارنی و پادتقارنی آشنا شده‌ایم، خواص یک ترکیب ماکزیمم-مینیمم را با توجه به این سه خاصیت به صورت زیر بیان می‌کنیم:

1. اگر $\tilde{R}_1$ یک رابطه انعکاسی و $\tilde{R}_2$ یک رابطه دلخواه فازی باشد آنگاه:

$$\tilde{R}_2 \subseteq \tilde{R}_1 o \tilde{R}_2$$
$$\tilde{R}_2 \subseteq \tilde{R}_2 o \tilde{R}_1$$

2. اگر $\tilde{R}$ انعکاسی باشد آنگاه: $\tilde{R} \subseteq \tilde{R}o\tilde{R}$
3. اگر $\tilde{R}_2, \tilde{R}_1$ روابط انعکاسی باشند آنگاه $\tilde{R}_1 o \tilde{R}_2$ نیز انعکاسی خواهد بود.
4. اگر $\tilde{R}_2, \tilde{R}_1$ روابط تقارنی باشند آنگاه $\tilde{R}_1 o \tilde{R}_2$ رابطه تقارنی خواهد بود اگر $\tilde{R}_1 o \tilde{R}_2 = \tilde{R}_2 o \tilde{R}_1$
5. اگر $\tilde{R}$ تقارنی باشد هر توان از آن نیز تقارنی خواهد بود.
6. اگر $\tilde{R}$ دارای خاصیتهای تقارنی و متعدی باشد، آنگاه به ازای $\forall x,y \in X$ خواهیم داشت:

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) \le \mu_{\tilde{R}}(x,x)$$

7. اگر $\tilde{R}$ انعکاسی و متعدی باشد آنگاه $\tilde{R}o\tilde{R} = \tilde{R}$
8. اگر $\tilde{R}_2, \tilde{R}_1$ متعدی باشند و $\tilde{R}_1 o \tilde{R}_2 = \tilde{R}_2 o \tilde{R}_1$ آنگاه $\tilde{R}_1 o \tilde{R}_2$ نیز خاصیت تعدی خواهد داشت.

تمام خواص فوق مربوط به ترکیب ماکزیمم- مینیمم می‌باشد. ترکیب ماکزیمم- ضرب از خاصیتهای شماره1،3و6 تبعیت نمی‌کند و ترکیب ماکزیمم- میانگین فقط خواص 1،3،6و8 را داراست. برای هر اپراتور که خاصیت جابجایی دارد، خاصیت 5 برقرار است.

5-2: گرافهای فازی

اگرچه می‌توان تعاریف 5-1 و 5-2 را که برای روابط فازی ارائه شده‌اند برای تعریف گرافهای فازی نیز استفاده کرد، اما برای نزدیک‌بودن به فرهنگ لغات تئوری گرافها تعریف زیر را ارائه می‌کنیم:

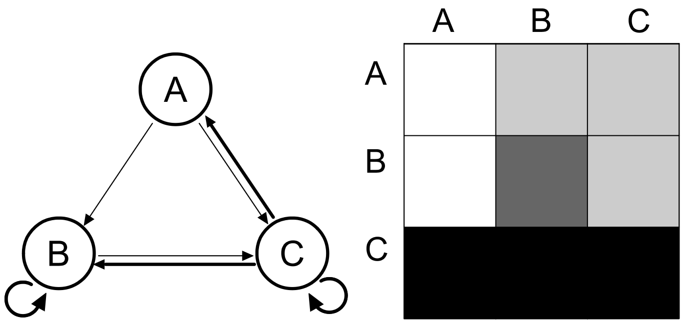
تعریف 5-14: اگر E یک مجموعه کلاسیک (قطعی) از گره‌ها باشد یک گراف فازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{G}\left(x_i, x_j\right) = \left\{\left(\left(x_i, x_j\right), \mu_{\tilde{G}}\left(x_i, x_j\right)\right) \mid \left(x_i, x_j\right) \in E \times E\right\}$$

اگر E یک مجموعه فازی باشد، گراف فازی مشابه تعریف 5-2 تعریف می‌شود.

مثال:

الف: اگر $E = \{A, B, C\}$ باشد و سه درجه عضویت ممکن برای مجموعه فازی فرض کرده باشیم، می‌توان گراف را به صورت شکل5-1در نظر گرفت:



شکل5-1: گراف فازی

ب: اگر $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ باشد، یک گراف فازی برای آن به صورت زیر است :

$$\tilde{G}\left(x_i, y_i\right) = \left\{\begin{matrix} \left[\left(x_1, x_2\right), 0.3\right], \left[\left(x_1, x_3\right), 0.6\right], \left[\left(x_1, x_1\right), 1\right], \left[\left(x_2, x_1\right), 0.4\right], \\ \left[\left(x_3, x_1\right), 0.2\right], \left[\left(x_3, x_2\right), 0.5\right], \left[\left(x_4, x_3\right), 0.8\right] \end{matrix}\right\}$$

گرافهای ارائه‌شده در مثال فوق، گرافهای دوبعدی می‌باشند، همچنین می‌توان گرافهای چندبعدی از فضاهای ضربی نیز تعریف کرد. ولی در این بخش منظور از گراف فازی، گراف فازی دوبعدی می‌باشد که دارای خاصیت تقارنی بوده یعنی بتوان یالهای آن را بدون‌جهت در نظر گرفت.

اکنون با استفاده از تعاریف تئوری گرافها به تعریف مفاهیم گرافهای فازی می‌پردازیم:

تعریف 5-15: $\tilde{H}\left(x_i, x_j\right)$ یک *زیرگراف*[1] از $\tilde{G}\left(x_i, x_j\right)$ می‌باشد اگر

$$\mu_{\tilde{H}}\left(x_i, x_j\right) \le \mu_{\tilde{G}}\left(x_i, x_j\right) \qquad \forall \left(x_i, x_j\right) \in E \times E$$

[1] Sub-graph

گراف $\tilde{H}(x_i, x_j)$، گراف $\tilde{G}(x_i, x_j)$ را *می‌پوشاند*[1] اگر مجموعه گره‌های هر دو گراف $\tilde{H}(x_i, x_j)$ و $\tilde{G}(x_i, x_j)$ با هم یکسان بوده، فقط وزن کمانهای آنها متفاوت باشد.

مثال: اگر $\tilde{G}(x_i, x_j)$ گراف تعریف‌شده در قسمت (ب) مثال قبل باشد، یک گراف پوشیده‌شده از $\tilde{G}(x_i, x_j)$ را می‌توان به صورت $\tilde{H}(x_i, x_j)$ با تعریف زیر معرفی کرد:

$$\tilde{H}(x_i, y_j) = \{[(x_1, x_2), 0.2], [(x_1, x_3), 0.4], [(x_3, x_2), 0.4], [(x_4, x_3), 0.7]\}$$

تعریف 5-16: یک مسیر[2] در گراف فازی $\tilde{G}(x_i, x_j)$ مشتمل بر تعدادی از گره‌های متوالی $x_1, x_2, \ldots, x_n$ است که برای هر (x_i, x_{i+1}) داشته باشیم $\mu_{\tilde{G}}(x_i, x_{i+1}) > 0$

قدرت مسیر برابر است با $min\{\mu_{\tilde{G}}(x_i, x_{i+1})\}$ برای گره‌هایی که به طور پیوسته در مسیر می‌باشند.

طول مسیر وقتی‌که $n > 0$ ، برابر با تعداد گره‌هایی است که در مسیر قرار دارند.

هر زوج گره (x_i, x_{i+1}) که $\mu(x_i, x_{i+1}) > 0$ باشد یک *لبه* یا *کمان* نامیده می‌شود و به یک مسیر، *مدار*[3] می‌گوییم اگر $x_0 = x_n$ بوده، $n \geq 3$ باشد.

می‌توانیم نزدیکترین مسیر بین دو گره را فاصله آن دو گره بنامیم، اما این تعریف معایبی نیز دارد. تعریف بهتر به صورت زیر ارائه می‌شود:

تعریف 5-17: $\mu-$طول یک مسیر $P = x_0, \ldots, x_n$ برابر است با

$$L(P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu(x_i, x_{i+1})}$$

و $\mu-$فاصله[4] $d(x_i, x_j)$ بین دو گره x_i, x_j برابر با کمترین $\mu-$ طول از مسیر x_i به x_j است که $x_i, x_j \in \tilde{G}$

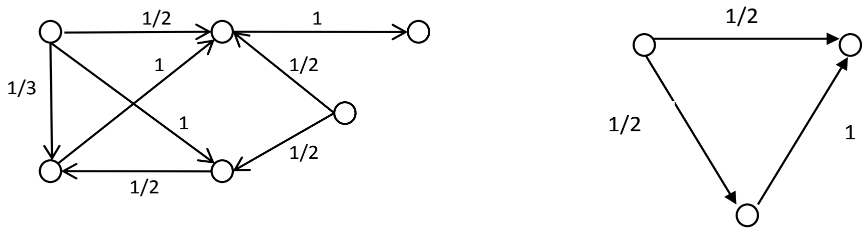
تعریف 5-18: دو نود که توسط یک مسیر به یکدیگر متصل باشند *نودهای مرتبط*[5] خوانده می‌شوند. مرتبط‌بودن یک رابطه متعدی می‌باشد.

---

[1] Spans
[2] Path
[3] Cycle
[4] µ-distance
[5] Connected nodes

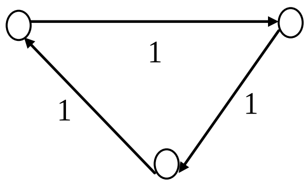
تعریف 5-19: به یک گراف فازی *جنگل*[1] می‌گوییم اگر هیچ مداری نداشته باشد. به یک جنگل فازی که مرتبط باشد یک درخت می‌گوییم.

مثال: گرافهای فازی شکل5-2 جنگل هستند چون در گراف خود هیچ مداری ندارند.



شکل5-2: جنگل فازی

اما گراف فازی شکل5-3 به دلیل داشتن مدار، جنگل نمی‌باشد:



شکل5-3: گراف فازی غیرجنگل

5-3- روابط فازی خاص

از روابط فازی خاصی که برای ما جالب‌توجه هستند، می‌توان به خاصیتهای هم‌ارزی و ترتیب اشاره کرد که به صورتهای زیر تعریف می‌شوند:

تعریف 5-20: یک رابطه دارای خاصیت *هم‌ارزی*[2] است اگر انعکاسی و تقارنی بوده، نسبت به عمل ترکیب ماکزیمم-مینیمم متعدی باشد.

مثال: رابطه نشان‌داده‌شده در زیر بیانگر یک رابطه هم‌ارزی است:

[1] Forest
[2] Similarity

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1	0.2	1	0.6	0.2	0.6
x_2	0.2	1	0.2	0.2	0.8	0.2
x_3	1	0.2	1	0.6	0.2	0.6
x_4	0.6	0.2	0.6	1	0.2	0.8
x_5	0.2	0.8	0.2	0.2	1	0.2
x_6	0.6	0.2	0.6	0.8	0.2	1

یک رابطه هم‌ارزی که تعداد عناصر آن محدود باشد می‌تواند به صورت درخت هم‌ارزی نشان داده شود که هر سطح این درخت، نشان‌دهنده یک رابطه هم‌ارزی در سطح α است. درخت هم‌ارزی نظیر رابطه هم‌ارزی فوق، در زیر مشاهده می‌شود. مجموعه عناصر واقع در سطح α را می‌توان به عنوان یک کلاس هم‌ارزی در سطح α در نظر گرفت.

$$\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\} \qquad \tilde{R}_{0.2}$$

$$\{x_1,x_3,x_4,x_6\} \quad \{x_2,x_5\} \qquad \tilde{R}_{0.6}$$

$$\{x_1,x_3\} \quad \{x_4,x_6\} \quad \{x_2,x_5\} \qquad \tilde{R}_{0.8}$$

$$\{x_1,x_3\} \quad \{x_4\} \quad \{x_6\} \quad \{x_2\} \quad \{x_5\} \qquad \tilde{R}_1$$

خواص رابطه هم‌ارزی که در تعریف 20-5 بیان شده است بسیارمحدود بوده، کاملاً با تفکر فازی تطابق ندارد. برای رفع این محدودیت، می‌توان در تعریف رابطه هم‌ارزی تغییراتی ایجاد کرد. مثلاً انعکاسی‌بودن آن را بصورت $\varepsilon-$ انعکاسی‌بودن و یا انعکاسی‌بودن ضعیف تغییر داد و یا تعدی ماکزیمم-مینیمم را با تعدی ماکزیمم-* که در تعریف 10-5 توضیح داده شده است جایگزین کرد. حال به تعریف خاصیت ترتیب می‌پردازیم:

همان‌گونه که اشاره شد یک رابطه هم‌ارزی، دارای خواص انعکاسی، تقارنی و تعدی (ماکزیمم-مینیمم) است. میزان تقارنی‌بودن باعث می‌شود تا یک رابطه هم‌ارزی تغییر کند. اگر یک رابطه هم‌ارزی به جای خاصیت تقارنی، خاصیت پادتقارنی داشته باشد، یک رابطه ترتیبی خواهد بود و می‌توانیم رابطه‌های ترتیبی متفاوتی را برحسب درجه تقارنی‌بودن آنها داشته باشیم.

تعریف 5-21: یک رابطه فازی که متعدی (ماکزیمم- مینیمم) و انعکاسی باشد یک رابطه *پیش ترتیب فازی*[1] نامیده می‌شود.

تعریف 5-22: یک رابطه فازی که دارای خواص تعدی (ماکزیمم- مینیمم)، انعکاسی و کاملاً پادتقارنی باشد، رابطه *کاملاً ترتیبی فازی*[2] خوانده می‌شود.

تعریف 5-23: یک رابطه *ترتیبی فازی جامع*[3] یا رابطه *ترتیبی خطی فازی*، یک رابطه فازی ترتیبی خواهد بود به نحوی‌که:

$$\forall x,y \in X : x \neq y \quad either \quad \mu_{\tilde{R}}(x,y) > 0 \quad or \quad \mu_{\tilde{R}}(y,x) > 0$$

مثال: اگر رابطه $\tilde{R}$ به شکل زیر تعریف شود، یک رابطه ترتیبی فازی جامع خواهد بود.

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.7	0.4	0.8	0.8
x_2	0	1	0	0.2
x_3	0	0.6	0	0.4
x_4	0	0	0	0.7

در محیطهای فازی، رابطه‌های ترتیبی فازی نقش بسیار مهمی در مدلهای تصمیم‌گیری ایفا می‌کنند که خود بحثی مفصل و جداگانه را می‌طلبد. خصوصیات روابط فازی مطرح‌شده، در جدول 5-1 گردآوری شده است.

جدول5-1: خواص روابط فازی

	انعکاسی	تعدی	پادتقارنی	کاملاً پادتقارنی	خطی	تقارنی
رابطه پیش‌ترتیب فازی	×	×				
رابطه هم‌ارزی	×	×				×
رابطه ترتیبی فازی	×	×	×			
رابطه کاملاً ترتیبی‌فازی	×	×		×		
رابطه ترتیبی فازی خطی	×	×		×	×	

[1] Fuzzy preorder
[2] Perfect fuzzy order
[3] Total fuzzy order