کد فرم : FR/FY/11
ویرایش: صفر

(فرم طرح سؤالات امتحانات میان‌ترم)
دانشکده علوم ریاضی

گروه آموزشی: **ریاضی** امتحان درس: **ریاضی ۲ - فنی (۱۵ گروه هماهنگ)** نیمسال (~~اول~~/ دوم) **۹۶-۱۳۹۵**	نام مدرس:
نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی:	تاریخ: **۱۳۹۶/۰۲/۲۱** وقت: **۹۰ دقیقه**

توجه:

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.

استفاده از هرگونه ماشین‌حساب ممنوع است.

سوال ۱- معادله‌ی صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه‌ی $P=(1,1,1)$ عبور کرده و شامل فصل مشترک صفحات $2x-3y+z=1$ و $x-y+2z=1$ می‌باشد. **۱۵ نمره**

سوال ۲- معادله رویه‌ای در دستگاه مختصات کروی به صورت $\rho = 2\sin\varphi(\cos\theta - 2\sin\theta)$ می‌باشد. معادله رویه را در دستگاه مختصات دکارتی بازنویسی کرده، نوع رویه را تعیین کنید و آن را (به طور تقریبی) ترسیم نمایید. **۱۵ نمره**

سوال ۳- معادله‌ی دایره بوسان خم به معادله‌ی $x=4y-y^2$ را در نقطه‌ی $A=(3,1)$ بنویسید. **۱۵ نمره**

سوال ۴- (الف) توابع $z=f(u,v)$ و $u=x+y$ و $v=xy^2$ داده شده‌اند. اگر تمام مشتقات جزئی (نسبی) مرتبه دوم تابع f موجود باشند، در این صورت تابع $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ را محاسبه نمایید.

(ب) وجود و یا عدم وجود حد تابع $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^6+y^2}$ را در مبدا مختصات بررسی نمایید. **۱۰ + ۱۰ نمره**

سوال ۵- مقدار ماکزیمم نسبی تابع $f(x,y,z)=xyz$ را با شرط $x+y^{2}+z^{2}=20$ به دست آورید. **۱۵ نمره**

موفق باشید.

پاسخ سوال ۱ :

ابتدا فصل مشترک صفحات داده شده را به دست می آوریم:

$$\vec{N}_1=(2,-3,1)$$
$$\vec{N}_2=(1,-1,2)$$
$$\Rightarrow \vec{n}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-3&1\\1&-1&2\end{vmatrix}=-5\vec{i}-3\vec{j}+1\vec{k}$$

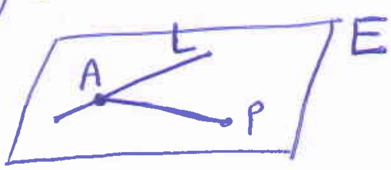
لذا بردار هادی خط فصل مشترک به صورت $\vec{n}=(-5,-3,1)$ می باشد. حال با به دست آوردن یک نقطه بر روی فصل مشترک، می توان معادله آن را نوشت:

$$z=0 \rightarrow \begin{cases}2x-3y=1\\x-y=1\end{cases} \Rightarrow x=2,\ y=1 \rightarrow A\begin{vmatrix}2\\1\\0\end{vmatrix}\in L$$

بنابراین داریم:

$$L:\ \frac{x-2}{-5}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-0}{1}$$

حال دنبال صفحه‌ای هستیم که شامل خط فوق بوده و همچنین شامل نقطه‌ی $P\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix}$ می باشد. چون نقطه‌ی P بر روی خط L واقع نشده است (خارج از خط L) لذا با انتخاب نقطه‌ی $A\begin{vmatrix}2\\1\\0\end{vmatrix}\in L$، بردار نرمال صفحه‌ی مورد نظر به صورت زیر به دست می آید:



$$\vec{u}=\vec{n}\times\vec{AP}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-5&-3&1\\1&0&-1\end{vmatrix}=3\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{k}$$

بنابراین معادله‌ی صفحه به صورت زیر است:

$$E:\ 3(x-1)-4(y-1)+3(z-1)=0$$
$$\boxed{3x-4y+3z=2}$$

پاسخ سوال ۲:

ابتدا توجه کنیم که برای تبدیل از مختصات کروی به دکارتی، روابط زیر را داریم:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\phi\cos\theta \\ y = \rho\sin\phi\sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases} \quad \text{و} \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

حال چون $\rho = 2\sin\phi(\cos\theta - 2\sin\theta)$، با ضرب طرفین تساوی در ρ داریم:

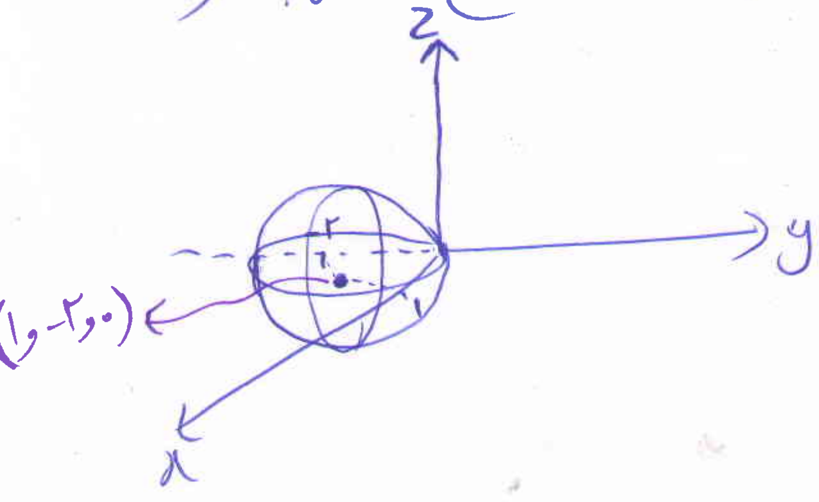
$$\rho^2 = 2\rho\sin\phi\cos\theta - 4\rho\sin\phi\sin\theta$$

و لذا با استفاده از روابط بالا داریم:

$$x^2+y^2+z^2 = 2x-4y$$

$$\Longrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+z^2 = 5$$

بنابراین رویه فوق کره‌ای به مرکز $(1,-2,0)$ و به شعاع $\sqrt{5}$ می‌باشد.



روش اول

پاسخ سوال ۳:

خم $x = 4y - y^2$ را به صورت زیر پارامتری می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = t \\ x = 4t - t^2 \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \gamma(t) = (4t - t^2, t, 0)$$

همچنین نقطه‌ی $(3,1)$ متناظر با $t=1$ روی خم γ می‌باشد. داریم:

$$\gamma'(t) = (4-2t, 1, 0) \Longrightarrow \gamma'(1) = (2, 1, 0) \Longrightarrow |\gamma'(1)| = \sqrt{5}$$

$$\gamma''(t) = (-2, 0, 0) \Longrightarrow \gamma''(1) = (-2, 0, 0)$$

$$\gamma'(1) \times \gamma''(1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 2) \Longrightarrow |\gamma'(1) \times \gamma''(1)| = 2$$

$$\kappa(1) = \frac{|\gamma'(1) \times \gamma''(1)|}{|\gamma'(1)|^3} = \frac{2}{(\sqrt{5})^3} = \frac{2}{5\sqrt{5}}$$

شعاع انحنا $=$ شعاع دایره‌ی بوسان $= \rho(1) = \frac{1}{\kappa(1)} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$

حال به محاسبه‌ی مرکز دایره‌ی بوسان می‌پردازیم، برای این منظور بایستی $N(1)$ را محاسبه نماییم:

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{1+(4-2t)^2}}(4-2t, 1, 0)$$

$$\rightarrow T'(t) = \frac{8-4t}{\left(\sqrt{1+(4-2t)^2}\right)^3}(4-2t, 1, 0) + \frac{1}{\sqrt{1+(4-2t)^2}}(-2, 0, 0)$$

$\longrightarrow T'(۱) = \frac{۴}{۵\sqrt{۵}}(۲,۱,۰) + \frac{۱}{\sqrt{۵}}(-۲,۰,۰) = \frac{۱}{۵\sqrt{۵}}(-۲,۴,۰)$

$\Longrightarrow |T'(۱)| = \frac{\sqrt{۲۰}}{\sqrt{۱۲۵}} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۵\sqrt{۵}} = \frac{۲}{۵}$

$\longrightarrow N(۱) = \frac{T'(۱)}{|T'(۱)|} = \frac{۱}{\sqrt{۵}}(-۱,۲,۰)$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} c(۱) &= \gamma(۱) + \rho(۱)\, N(۱) \\ &= (۳,۱,۰) + \frac{۵\sqrt{۵}}{۲} \times \frac{۱}{\sqrt{۵}}(-۱,۲,۰) \\ &= (۳,۱,۰) + \left(\frac{-۵}{۲}, ۵, ۰\right) \\ &= \left(\frac{۱}{۲}, ۶, ۰\right) \end{aligned}$$

لذا معادله دایره بوسان به صورت زیر می‌باشد:

$$\left(x-\frac{۱}{۲}\right)^۲ + (y-۶)^۲ = \left(\frac{۵\sqrt{۵}}{۲}\right)^۲$$

پاسخ سوال ۳ : (روش دوم)

در این روش که مقدار شعاع دایره بوسان مشابه روش قبل به دست می آوریم داریم $\rho = \frac{5\sqrt{5}}{2}$.

اما برای محاسبه ی مرکز دایره بوسان که می توان به صورت زیر عمل کرد: فرض کنیم مرکز دایره بوسان (α,β) باشد لذا

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2 \qquad ★$$

حال از رابطه ی ★ دوبار نسبت به متغیر x مشتق گیری کرده و داریم:

$$\begin{cases} 2(x-\alpha)+2y'(y-\beta)=0 \\ 2+2y''(y-\beta)+2y'^2=0 \end{cases} \qquad ★★$$

حال مقادیر y' و y'' را از روی معادله ی اصلی به دست می آوریم که داریم:

$$x=4y-y^2 \Longrightarrow \begin{cases} 1=4y'-2yy' \\ 0=4y''-2y'^2-2yy'' \end{cases} \qquad ★★★$$

با جای گذاری نقطه ی $(3,1)$ در روابط ★★★ داریم:

$$\begin{cases} 1=4y'-2y' \Longrightarrow y'=\frac{1}{2} \\ 0=4y''-\frac{1}{2}-2y'' \Longrightarrow y''=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$y'=\frac{1}{2}$, $y''=\frac{1}{4}$, $x=3$, $y=1$

حال با جایگذاری مقادیر y' و y'' در ★★ داریم:

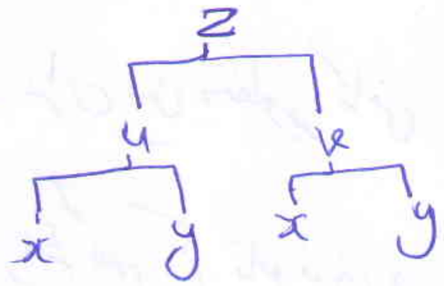
$$\begin{cases} 2(3-\alpha)+1(1-\beta)=0 \\ 2+\frac{1}{2}(1-\beta)+\frac{1}{2}=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta=7 \\ \beta=6 \end{cases} \Longrightarrow \alpha=\frac{1}{2}, \quad \beta=6$$

بنابراین معادله ی دایره بوسان به صورت $(x-\frac{1}{2})^2+(y-6)^2=\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2$ می باشد.

پاسخ سوال ۴:

(الف)

$$\begin{cases} z=f(u,v)\\ u=x+y\\ v=xy^2\end{cases}$$



$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=?$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z_{yx}=?$$

بنا بر قاعده مشتق زنجیره‌ای داریم:

$$z_y=z_u\cdot u_y+z_v\cdot v_y$$

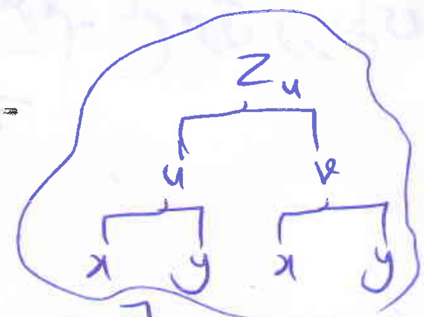
حال چون $u_y=1$ و $v_y=2xy$ ، داریم:

$u_x=1$ و $v_x=y^2$

$$z_y=z_u+z_v(2xy)$$

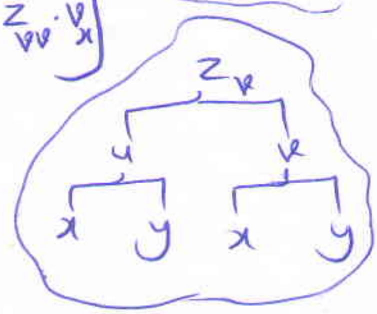
حال باید از تابع فوق نسبت به متغیر x مشتق بگیریم. باید توجه داشته باشیم که z_u و z_v خود توابعی از متغیرهای u و v می‌باشند لذا داریم:

$$z_y=z_u+(2xy)z_v$$



$$\Rightarrow z_{yx}=(z_y)_x=(z_u)_x+\left[(2xy)z_v\right]_x$$

$$=\left[z_{uu}\cdot u_x+z_{uv}\cdot v_x\right]+2y\cdot z_v+2xy\left[z_{vu}\cdot u_x+z_{vv}\cdot v_x\right]$$



$$=z_{uu}+y^2z_{uv}+2yz_v+2xyz_{vu}+2xy^3z_{vv}$$

(ب)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^6+y^3} = ?$$

نشان می‌دهیم حد تابع فوق در $(0,0)$ وجود ندارد. برای این منظور کافی است دو مسیر مختلف (گذرا از نقطه‌ی $(0,0)$) ارائه کنیم که تابع فوق در آن‌ها مقادیر حدی متفاوتی داشته باشد.

مسیر محور xها
$\left(\begin{array}{l} y=0 \\ x\to 0 \end{array}\right)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^6+y^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\overset{\text{صفر مطلق}}{}}{x^6+0} = 0$$

مسیر سهمی $y=x^2$
$\left(\begin{array}{l} y=x^2 \\ x\to 0 \end{array}\right)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^6+y^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(x^2)^2}{x^6+(x^2)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2}$$

لذا چون در مسیرهای مختلف، به مقادیر حدی متفاوت رسیدیم، تابع فوق در نقطه‌ی $(0,0)$ دارای حد نمی‌باشد.

پاسخ سوال ۵:

برای استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، تابع لاگرانژین زیر را درنظر میگیریم:

$$L(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda\left(x + y^2 + z^2 - 20\right)$$

در نقاط اکسترمم نسبی باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow yz + \lambda = 0 & (1) \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow xz + 2\lambda y = 0 & (2) \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow xy + 2\lambda z = 0 & (3) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow x + y^2 + z^2 = 20 & (4) \end{cases}$$

$$(1) \longrightarrow yz + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -yz$$

حال با جایگذاری $\lambda = -yz$ در رابطه (۲) که بدست می آوریم:

$$xz + 2(-yz)y = 0 \longrightarrow \boxed{x = 2y^2}$$

همچنین از روابط (۲) و (۳) داریم:

$$\lambda = \frac{-xz}{2y} = \frac{-xy}{2z} \Rightarrow \boxed{y^2 = z^2}$$

حال با جایگذاری $y^2 = z^2$ و $x = 2y^2$ در رابطه (۴) داریم:

$$2y^2 + y^2 + y^2 = 20 \Rightarrow 4y^2 = 20 \Rightarrow y^2 = 5 \Rightarrow \boxed{y = \pm\sqrt{5}}$$

بنابراین $\boxed{x = 10}$ $\boxed{z = \pm\sqrt{5}}$ و لذا داریم:

$$\mathrm{Max}\left[f(x,y,z)\right] = f(10, \sqrt{5}, \sqrt{5}) = f(10, -\sqrt{5}, -\sqrt{5}) = 50$$