نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : ....

نام مدرس : ....

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۳۹۵/۲/۱**

وقت : **۷۵** دقیقه

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

امتحان میان ترم درس : **ریاضی۲-فنی (۱۳ گروه هماهنگ)**

نیمسال (~~اول~~ / **دوم**) **۱۳۹۵**- ۱۳۹۴

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال۱ – معادله صفحه بوسان منحنی $r(t)=(۲\sin t-۳\cos t, ۶\sin t+\cos t\ ,\ ۲\cos t\ )$ در نقطه $t=\frac{\pi}{۲}$ را بنویسید. **۱۵ نمره**

سوال۲ - تابع $f(x,y)=\dfrac{x^۲+y^۲-x^۳y^۳}{x^۲+y^۲}$ داده شده است.
مقدار $f(۰,۰)$ را چنان تعیین کنید (با اثبات) که تابع f پیوسته باشد. **۱۵ نمره**

سوال۳ – مشتق جهتی تابع $f(x,y,z)=y^۲+\ln(x^۲+z^۲)$ را
در نقطه $M=(۱,۲,-۱)$ و در امتداد بردار $\vec{A}=(۲,-۲,۱)$ محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

سوال۴ - خط مماس بر فصل مشترک رویه های $z^۲=۴x^۲+۹y^۲$ و $۶x+۳y+۲z=۵$
را در نقطه $A=(۲\ ,۱\ ,-۵)$ بیابید. **۱۵ نمره**

سوال۵ - نوع نقاط بحرانی تابع $f(x,y)=\dfrac{x^۳}{۳}+۴y^۲-x^۲-۳x-۴y-۳$ را مشخص کنید. **۲۰ نمره**

موفق باشید

جواب سوال۱: روش اول : چون r' و r'' درون صفحه بوسان قرار دارند پس بردار نرمال آن با $r' \times r''$ هم امتداد است.

$$r'(t) = (۲\cos t + ۳\sin t, ۶\cos t - \sin t, -۲\sin t), \quad r''(t) = (-۲\sin t + ۳\cos t, -۶\sin t + \cos t, -۲\cos t)$$

$$r'(\frac{\pi}{۲}) = (۳, -۱, -۲), \quad r''(\frac{\pi}{۲}) = (-۲, -۶, ۰) \to \vec{n} = r'(\frac{\pi}{۲}) \times r''(t) = (۳, -۱, -۲) \times (-۲, -۶, ۰)$$

$$\vec{n} = (-۱۲, ۴, -۲۰), \quad A = r(\frac{\pi}{۲}) = (۲, ۶, ۰) \quad \to \quad -۱۲(x-۲) + ۴(y-۶) - ۲۰(z-۰) = ۰ \quad \to \quad ۳x - y + ۵z = ۰$$

روش دوم :

$$r'(t) = (۲\cos t + ۳\sin t, ۶\cos t - \sin t, -۲\sin t), \quad A = r(\frac{\pi}{۲}) = (۲, ۶, ۰)$$

$$|r'(t)| = \sqrt{(۲\cos t + ۳\sin t)^۲ + (۶\cos t - \sin t)^۲ + (-۲\sin t)^۲} = \sqrt{۴۰\cos^۲ t + ۱۴\sin^۲ t} = \sqrt{۲۶\cos^۲ t + ۱۴}$$

$$T(t) = \frac{۱}{\sqrt{۲۶\cos^۲ t + ۱۴}}(۲\cos t + ۳\sin t, ۶\cos t - \sin t, -۲\sin t)$$

$$T'(t) = \frac{۲۶\sin t\cos t}{(\sqrt{۲۶\cos^۲ t + ۱۴})^۳}(۲\cos t + ۳\sin t, ۶\cos t - \sin t, -۲\sin t)$$

$$+\frac{۱}{\sqrt{۲۶\cos^۲ t + ۱۴}}(-۲\sin t - ۳\cos t, -۶\sin t + \cos t, -۲\cos t)$$

$$T'(\frac{\pi}{۲}) = \frac{۱}{\sqrt{۱۴}}(-۲, -۶, ۰) \quad \to \quad N(\frac{\pi}{۲}) = T'(\frac{\pi}{۲}) \Big/ |T'(\frac{\pi}{۲})| = \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}(-۱, -۳, ۰)$$

$$B(\frac{\pi}{۲}) = T(\frac{\pi}{۲}) \times N(\frac{\pi}{۲}) = \frac{۱}{\sqrt{۱۴}}(۳, -۱, -۲) \times \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}(-۱, -۳, ۰) = \frac{۱}{\sqrt{۳۵}}(-۳, ۱, -۵)$$

$$\to \frac{-۳}{\sqrt{۳۵}}(x-۲) + \frac{۱}{\sqrt{۳۵}}(y-۶) - \frac{۵}{\sqrt{۳۵}}(z-۰) = ۰ \quad \to \quad ۳x - y + ۵z = ۰$$

جواب سوال۲: داریم : $f(x,y) = ۱ - (x^۲y^۲)\frac{xy}{x^۲+y^۲}$ و باید داشته باشیم $f(۰,۰) = ۱ - \lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)}(x^۲y^۲)\frac{xy}{x^۲+y^۲}$

می دانیم : $(x \pm y)^۲ \geq ۰ \to x^۲ + y^۲ \geq \pm ۲xy \to x^۲ + y^۲ \geq ۲xy \geq -(x^۲ + y^۲) \to \frac{-۱}{۲} \leq \frac{xy}{x^۲+y^۲} \leq \frac{۱}{۲}$

روش اول (قضیه فشردگی) : بنابر این $\frac{-۱}{۲}(x^۲y^۲) \leq (x^۲y^۲)\frac{xy}{x^۲+y^۲} \leq \frac{۱}{۲}(x^۲y^۲)$

و چون $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)}\frac{-۱}{۲}(x^۲y^۲) = \lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)}\frac{۱}{۲}(x^۲y^۲) = ۰$ بنابر این $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)}(x^۲y^۲)\frac{xy}{x^۲+y^۲} = ۰$ و $f(۰,۰) = ۱$.

روش دوم : چون $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)}(x^۲y^۲) = ۰$ و $\frac{xy}{x^۲+y^۲}$ کراندار است پس $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)}(x^۲y^۲)\frac{xy}{x^۲+y^۲} = ۰$ و داریم $f(۰,۰) = ۱$.

روش سوم (استفاده از مختصات قطبی) : داریم $x = r\cos\theta, \ y = r\sin\theta$ بنابر این :

$$\lim_{(x,y)\to(۰,۰)}(x^۲y^۲)\frac{xy}{x^۲+y^۲} = \lim_{r\to ۰}\frac{r^۶(\cos\theta\sin\theta)^۳}{r^۲} = \lim_{r\to ۰} r(\cos\theta\sin\theta)^۳ = ۰$$

پاسخ سوالات امتحان میان ترم درس ریاضی۲-فنی (۱۳ گروه هماهنگ)

نیمسال دوم ۹۵-۱۳۹۴

جواب سوال۳ : روش اول (استفاده از بردار گرادیان) :

داریم : $f_x=\frac{۲x}{x^۲+z^۲}\ ,\ f_y=۲y\ ,\ f_z=\frac{۲z}{x^۲+z^۲}\ \rightarrow\ f_x(M)=۱\ ,\ f_y(M)=۴\ ,\ f_z(M)=-۱$

و در نتیجه $\nabla f(M)=(۱,۴,-۱)$. بردار یکه بردار $\vec{A}$ عبارت است از $\vec{u}=\frac{۱}{۳}(۲,-۲,۱)$ اکنون مشتق سویی خواسته شده برابر است با :

$$D_{\vec{u}}f(M)=\nabla f(M)\cdot\vec{u}=(۱,۴,-۱)\cdot\frac{۱}{۳}(۲,-۲,۱)=\frac{-۷}{۳}$$

روش دوم (روش محاسبه مستقیم) :

$$D_{\vec{u}}f(M)=\lim_{h\to ۰}\frac{(۲-\frac{۲h}{۳})^۲+\ln((۱+\frac{۲h}{۳})x^۲+(-۱+\frac{h}{۳})^۲)-(۲^۲+\ln(۱^۲+(-۱)^۲))}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{۴-\frac{۸h}{۳}+\frac{۴h^۲}{۹}+\ln(۲+\frac{۲h}{۳}+\frac{۵h^۲}{۹})-۴-\ln ۲}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}(-\frac{۸}{۳}+\frac{۴h}{۹})+\lim_{h\to ۰}\frac{\ln(۱۸+۶h+۵h^۲)-\ln ۱۸}{h}=-\frac{۸}{۳}+\lim_{h\to ۰}\frac{۶+۱۰h}{۱۸+۶h+۵h^۲}=-\frac{۸}{۳}+\frac{۱}{۳}=\frac{-۷}{۳}$$

جواب سوال۴ : می دانیم بردار هادی خط مماس بر بردارهای گرادیان هر دو رویه در نقطه داده شده عمود است.

بردار گرادیان هر دو رویه را پیدا می کنیم . می نویسیم $f(x,y,z)=۴x^۲+۹y^۲-z^۲$ و $g(x,y,z)=۶x+۳y+۲z-۵$

داریم : $\nabla f=(۸x,۱۸y,-۲z)\ ,\ \nabla g=(۶,۳,۲)\ \rightarrow\ \nabla f(A)=(۱۶,۱۸\ ,۱۰)\ ,\ \nabla g(A)=(۶,۳,۲)$

بنابر این $\vec{n}=\nabla f\times\nabla g=(۱۶,۱۸\ ,۱۰)\times(۶,۳,۲)=(۶,۲۸,\ ۱۲)\,||\,(۳,۱۴,۶)$

معادله خط مورد نظر عبارت است از : $\frac{x-۲}{۳}=\frac{y-۱}{۱۴}=\frac{z+۵}{۶}$

جواب سوال۵ : ابتدا نقاط بحرانی تابع را پیدا می کنیم.

$$\begin{cases}f_x=x^۲-۲x-۳\\ f_y=۸y-۴\end{cases}\rightarrow\ \begin{cases}x^۲-۲x-۳=۰\\ ۸y-۴=۰\end{cases}\rightarrow\ A\left|\begin{matrix}-۱\\ ۱/۲\end{matrix}\right.,\ B\left|\begin{matrix}۳\\ ۱/۲\end{matrix}\right.\rightarrow f(A)=\frac{-۷}{۳},f(B)=-۱۳$$

برای تعیین نوع نقاط A و B مشتقات مرتبه دوم را در این نقاط محاسبه می کنیم.

$$f_{xx}=۲x-۲\ ,\ f_{yy}=۸,f_{xy}=۰\ \rightarrow\ f_{xx}(A)=-۴\ ,\ f_{xx}(B)=۴$$

چون f_{yy} همواره مثبت است پس هیچکدام از این نقاط ، نقطه ماکزیمم نیستند.

چون $f_{xx}(A)$ منفی است پس نقطه A نقطه مینیمم هم نیست و بنابر این نقطه A ، نه نقطه ماکزیمم است و نه نقطه مینیمم و نقطه زینی نامیده می شود.

چون $f_{xx}(B)$ مثبت است احتمال دارد که B یک نقطه مینیمم تابع باشد. مثبت بودن دترمینان هسین $\begin{vmatrix}۴&۰\\ ۰&۸\end{vmatrix}$ این نظر را تایید می‌کند.

پس A یک نقطه زینی و B یک نقطه مینیمم موضعی تابع است.

برای تایید مینیمم بودن نقطه B ، می‌توان ضابطه تابع f را به صورت $f(x,y)=\frac{۱}{۳}(x-۳)^۲(x+۳)+(۲y-۱)^۲-۱۳$ نوشت.

حداقل در یک همسایگی به شعاع ۶ حول نقطه B داریم : $f(x,y)\geq -۱۳$