نام و نام خانوادگی : . . . .

شماره دانشجویی : . . . .

نام مدرس : . . . .

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۳۹۴/۸/۲۸**

وقت : **۸۰** دقیقه

دانشکده علوم ریاضی

امتحان میان ترم درس : **ریاضی۲-فنی (۸ گروه هماهنگ)**

نیمسال (**اول** / ~~دوم~~) **۱۳۹۵**- ۱۳۹۴

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال۱ - شکل تقریبی رویه $۴y^۲ + z^۲ - x - ۱۶y + ۴z + ۱۹ = ۰$ را رسم کنید. **۱۵ نمره**

سوال۲ - الف) معادله خط مماس بر منحنی $r(t) = (\cos ۳t, \sin ۲t, ۳t)$ در نقطه $t = \frac{\pi}{۶}$ را بنویسید. **۱۰ نمره**

ب) مقدار مشتق سویی تابع $f(x,y,z) = xyz$ را در نقطه $M = (۲ , ۳ , ۴)$
و در امتداد خط مماس قسمت (الف) محاسبه کنید. **۱۰ نمره**

سوال۳ - تابع برداری $f(t) = (۶t + \cos^۲ t \ , \ ۳t - \cos ۲t \ , ۲t - ۳)$ داده شده است.

بردارهای یکه مماس ، قائم و قائم دوم آن را در نقطه $t = \frac{\pi}{۲}$ به دست آورید. **۱۵ نمره**

سوال۴ - توابع $z = f(u,v)$ و $u = xy^۲ \ , \ v = ۲x - y$ داده شده اند.

اگر مشتقات نسبی مرتبه دوم f موجود باشند ، $\frac{\partial^۲ z}{\partial x \partial y}$ را محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

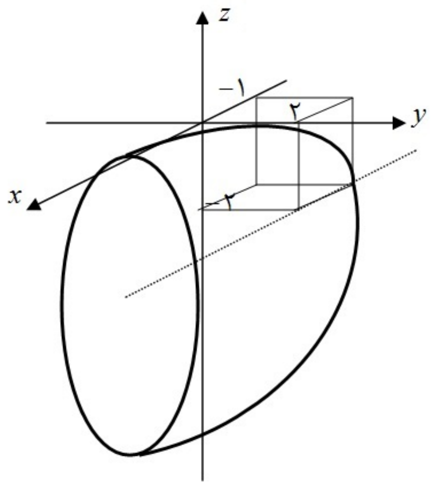
سوال۵ - مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x,y) = x^۲ - y^۲ - ۲x + ۴y$ را روی ناحیه
محدود به خطهای $y = x + ۲ \ , \ x = ۲ \ , \ y = ۰$ بیابید. **۱۵ نمره**

موفق باشید

دانشکده علوم ریاضی
۱۳۹۴/۸/۲۸

پاسخ سوالات امتحان میان ترم درس ریاضی۲-فنی (۸ گروه هماهنگ)

نیمسال اول ۹۵-۱۳۹۴



جواب سوال۱ : معادله رویه را به صورت استاندارد می نویسیم :

$$x+۱=۴(y-۲)^{۲}+(z+۲)^{۲}$$

این رویه یک سهمیگون بیضوی است که راس آن نقطه $(-۱,۲,-۲)$ است و محور تقارن آن موازی محور x ها است.

جواب سوال۲ : الف) خط مماس مورد نظر در نقطه $A=r(\frac{\pi}{۳})=(۰,\frac{\sqrt{۳}}{۲},\frac{\pi}{۲})$ بر منحنی مماس است و چون داریم $r'(t)=(-۳\sin ۳t,۲\cos ۲t,۳)$ بنابر این بردار هادی خط مماس در نقطه A برابر است با $\vec{v}=(-۳,۱,۳)$ و در نتیجه معادله خط بر منحنی مماس در نقطه A عبارت است از :

$$\frac{x}{-۳}=\frac{y-\sqrt{۳}/۲}{۱}=\frac{z-\pi/۲}{۳}$$

ب) داریم $\nabla f=(yz,xz,xy)$ بنابر این $\nabla f(M)=\nabla f(۲,۳,۴)=(۱۲,۸,۶)$

بردار $\vec{v}$ در قسمت قبل محاسبه شده است اما بردار یکه نیست.

بنابر این باید بردار یکه آن یعنی $\vec{u}=\frac{۱}{\sqrt{۱۹}}(-۳,۱,۳)$ را در نظر بگیریم.

$$D_{\vec{u}}f(M)=\nabla f(M)\cdot\vec{u}=(۱۲,۸,۶)\cdot\frac{۱}{\sqrt{۱۹}}(-۳,۱,۳)=\frac{۱۰}{\sqrt{۱۹}}$$

جواب سوال۳ : داریم $f'(t)=(۶-\sin ۲t\ ,\ ۳+۲\sin ۲t\ ,۲)$ و $|f'(t)|=\sqrt{۵\sin^{۲}۲t+۴۹}$

بنابر این

$$T(t)=\frac{۱}{\sqrt{۵\sin^{۲}۲t+۴۹}}(۶-\sin ۲t\ ,\ ۳+۲\sin ۲t\ ,۲)$$

$$T'(t)=\frac{-۵\sin ۴t}{(\sqrt{۵\sin^{۲}۲t+۴۹})^{۳}}(۶-\sin ۲t,۳+۲\sin ۲t,۲)+\frac{۱}{\sqrt{۵\sin^{۲}۲t+۴۹}}(-۲\cos ۲t,۴\cos ۲t,۰)$$

اکنون داریم $N(t)=\frac{T'(t)}{|T'(t)|}$ و $B(t)=T(t)\cdot N(t)$. بنابر این محاسبات را در نقطه $t=\frac{\pi}{۲}$ انجام می‌دهیم.

$$|T'(\frac{\pi}{۲})|=\frac{۲\sqrt{۵}}{۷}\ ،\ T'(\frac{\pi}{۲})=\frac{۱}{۷}(۲,-۴,۰)\ ،\ T(\frac{\pi}{۲})=\frac{۱}{۷}(۶\ ,\ ۳\ ,۲)$$

یعنی $N(\frac{\pi}{۲})=\frac{۱}{\sqrt{۵}}(۱,-۲,۰)$ و در نتیجه : $B(\frac{\pi}{۲})=\frac{۱}{۷}(۶\ ,\ ۳\ ,۲)\times\frac{۱}{\sqrt{۵}}(۱,-۲,۰)=\frac{۱}{۷\sqrt{۵}}(۴,۲,\ -۱۵)$

جواب سوال۴ : داریم : $\frac{\partial z}{\partial y}=f_u u_y+f_v v_y=۲xyf_u-f_v$

و در نتیجه :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{۲}z}{\partial x\partial y}&=۲y\ f_u+۲xy\frac{\partial}{\partial x}f_u-\frac{\partial}{\partial x}f_v=۲y\ f_u+۲xy(f_{uu}u_x+f_{uv}v_x)-(f_{vu}u_x+f_{vv}v_x)\\&=۲y\ f_u+۲xy(y^{۲}f_{uu}+۲f_{uv})-(y^{۲}f_{vu}+۲f_{vv})\\&=۲y\ f_u+۲xy^{۳}f_{uu}+۴xyf_{uv}-y^{۲}f_{vu}-۲f_{vv}\end{aligned}$$

جواب سوال۵ : نقاط گوشه ای ناحیه مثلثی عبارتند از $C=(۲,۴)$, $B=(۲,۰)$, $A=(-۲,۰)$

و داریم : $f(۲,۴)=۰$, $f(۲,۰)=۰$, $f(-۲,۰)=۸$

روی مرز AB داریم $g(x)=f(x,۰)=x^۲-۲x$ و $g'(x)=۲x-۲$.

اکنون اگر $g'(x)=۰$ آنگاه $x=۱$ و نقطه $M=(۱,۰)$ یک نقطه بحرانی است.

روی مرز AC داریم $h(x)=f(x,x)=۲x$ و $h'(x)=۲$. اکنون $h'(x)\neq ۰$ یعنی روی این مسیر نقطه بحرانی نداریم.

روی مرز BC داریم $k(y)=f(۲,y)=-y^۲+۴y$ و $k'(y)=-۲y+۴$.

اکنون اگر $k'(y)=۰$ آنگاه $y=۲$ و نقطه $N=(۲,۲)$ یک نقطه بحرانی است.

در ناحیه داخل مثلث برای پیدا کردن نقاط بحرانی بای دگرادیان تابع برابر صفر باشد

یعنی $f_x=۲x-۲=۰$ و $f_y=-۲y+۴=۰$ که نتیجه می دهد نقطه $P=(۱,۲)$ یک نقطه بحرانی درون ناحیه مثلثی است.

مقدار تابع را در نقاط بحرانی محاسبه می کنیم : $f(۱,۲)=۳$ $f(۲,۲)=۴$ $f(۱,۰)=-۱$

بنابر این ماکزیمم مطلق تابع f در نقطه $A=(-۲,۰)$ اتفاق می افتد و برابر ۸ است و مقدار مینیمم مطلق آن در نقطه $M=(۱,۰)$ اتفاق می افتد و برابر ۱− است.

سیدرضا موسوی