گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۳۹۲/۲/۱**

وقت : **۷۰** دقیقه

نام و نام خانوادگی : . . . .

شماره دانشجویی : . . . .

نام مدرس : . . . .

دانشکده ریاضی

امتحان میان ترم درس : **ریاضی۲-فنی (۱۳ گروه هماهنگ)**

نیمسال (~~اول~~ / **دوم**) **۱۳۹۲-۱۳۹۱**

توجه : مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.

سوال ۱ - شکل تقریبی منحنی $r(t) = (1+\cosh t, \sinh t, 2)$ را رسم کنید. **۱۵ نمره**

سوال ۲ - مولفه‌های مماسی و قائم شتاب را برای خم $f(t) = (t, t^2, 2t)$ بیابید. **۲۰ نمره**

سوال ۳ - انحنای منحنی حاصل از برخورد رویه های $x^2 + y^2 = 1$ و $x + y + z = 0$ را در نقطه $A = (0, 1, -1)$ محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

سوال ۴ - اگر f تابعی مشتق‌پذیر باشد و $z = y f(x^2 - y^2)$ ، عبارت $\frac{1}{x}\times\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\times\frac{\partial z}{\partial y}$ برابر چیست ؟ **۱۵ نمره**

سوال ۵ - مقدار $f(0,0)$ را طوری تعیین کنید که تابع $f(x,y) = \ln\left(\frac{3x^2 + 3y^2 + x^2y^2}{x^2 + y^2}\right)$ در مبدا مختصات پیوسته باشد. **۱۵ نمره**

موفق باشید

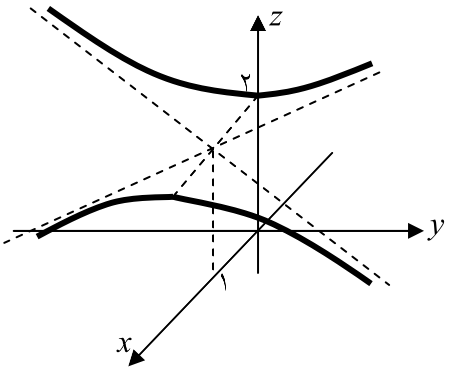
دانشکده ریاضی

۱۳۹۲/۲/۱

پاسخ سوالات امتحان میان ترم درس ریاضی۲-فنی (۱۳ گروه هماهنگ)

نیمسال دوم ۹۲-۱۳۹۱

جواب سوال۱ : قرار می دهیم : $x = ۱ + \cosh t,\ y = \sinh t, z = ۲$
و داریم $(x-۱)^۲ - y^۲ = ۱$. این معادله ، معادله یک هذلولی است
که در صفحه $z = ۲$ قرار دارد.



جواب سوال۲ :
$$f(t) = (t, t^۲, ۲t)\ ,\ f'(t) = (۱, ۲t, ۲)\ ,\ f''(t) = (۰, ۲, ۰)\ ,\ T(t) = \frac{۱}{\sqrt{۵ + ۴t^۲}}(۱, ۲t, ۲)$$
$$T'(t) = \frac{-۴t}{\sqrt{(۵+۴t^۲)^۳}}(۱, ۲t, ۲) + \frac{۱}{\sqrt{۵+۴t^۲}}(۰, ۲, ۰) = \frac{۲}{\sqrt{(۵+۴t^۲)^۳}}(-۲t, ۵, -۴t),$$
$$N(t) = \frac{۱}{\sqrt{۵(۵+۴t^۲)}}(-۲t, ۵, -۴t) \quad \to\ a_T = T \cdot f'' = \frac{۴t}{\sqrt{۵+۴t^۲}}\quad ,\ a_N = N \cdot f'' = \frac{۱۰}{\sqrt{۵(۵+۴t^۲)}}$$

جواب سوال۳ : معادله منحنی را به دو صورت می توانیم پارامتری کنیم. $f(x) = (x, \pm\sqrt{۱-x^۲}, -(x \pm \sqrt{۱-x^۲}))$
$$f(t) = (\cos t, \sin t, -(\cos t + \sin t))$$
از معادله دوم استفاده می کنیم. باید انحنا را در نقطه $t = \pi/۲$ بنویسیم. $f'(t) = (-\sin t, \cos t, \sin t + \cos t)$
$$f''(t) = (-\cos t, -\sin t, \cos t - \sin t) \to f'(\pi/۲) = (-۱, ۰, ۱)\ ,\ f''(\pi/۲) = (۰, -۱, -۱))$$
$$|f'(\pi/۲)| = \sqrt{۲}\ ,\ |f'(\pi/۲) \times f''(\pi/۲)| = \sqrt{۳} \qquad \to\quad k(\pi/۲) = \sqrt{۳}\big/(\sqrt{۲})^۳ = \sqrt{۶}\big/۴$$

جواب سوال۴ :
$$\frac{۱}{x} \times \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{۱}{y} \times \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{۱}{x}[۲xyf'(x^۲ - y^۲)] + \frac{۱}{y}[f(x^۲ - y^۲) - ۲y^۲ f'(x^۲ - y^۲)] = \frac{۱}{y} f(x^۲ - y^۲)$$

جواب سوال۵ : داریم : $f(x,y) = \ln(\frac{۳x^۲ + ۳y^۲ + x^۲y^۲}{x^۲ + y^۲}) = \ln(۳ + \frac{x^۲y^۲}{x^۲ + y^۲})$

چون $(x \pm y)^۲ \geq ۰$ پس $\frac{-۱}{۲} \leq \frac{xy}{x^۲ + y^۲} \leq \frac{۱}{۲}$ و در نتیجه $\frac{-|xy|}{۲} \leq \frac{x^۲y^۲}{x^۲ + y^۲} \leq \frac{|xy|}{۲}$

اکنون داریم $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{x^۲y^۲}{x^۲ + y^۲} = ۰$ و $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y) = \ln ۳$

یعنی اگر $f(۰,۰) = \ln ۳$ آنگاه تابع f در مبدا مختصات پیوسته است.

سیدرضا موسوی