نام و نام خانوادگی : . . . . . .

شماره دانشجویی : . . . . . .

نام مدرس : . . . . . .

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۳۹۱/۸/۲۸**

وقت : **۷۰** دقیقه

دانشکده ریاضی

امتحان میان ترم درس : **ریاضی۲-فنی (۶ گروه هماهنگ)**

نیمسال (**اول** / ~~دوم~~) **۱۳۹۲- ۱۳۹۱**

توجه : مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.

سوال ۱ - محل تقاطع دو خط $l_1=\begin{cases}x=2t\\y=3t-1\\z=4\end{cases}$ و $l_2=\begin{cases}x=3t+1\\y=t+4\\z=2t+2\end{cases}$ را بیابید و سپس معادله صفحه شامل آنها را بنویسید. **۱۵ نمره**

سوال ۲ - معادله رویه $x^2+y^2=z^2-1$ را در دستگاه مختصات کروی نوشته و سپس نمودار تقریبی آن را رسم کنید. **۱۵ نمره**

سوال ۳ - منحنی C با تابع برداری $\vec{R}(t)=e^t\cos t\,\vec{i}+e^t\sin t\,\vec{j}+e^t\,\vec{k}$ مفروض است.

الف) انحنای منحنی C را در $t=0$ محاسبه کنید.

ب) شتابهای مماسی و قائم را در $t=0$ بدست آورید. **۲۰ نمره**

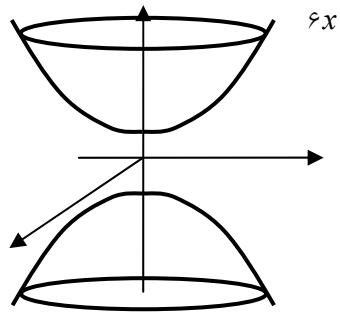
سوال ۴ - آیا تابع $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^6} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ در نقطه $(0,0)$ پیوسته است. نظر خود را ثابت کنید. **۱۰ نمره**

سوال ۵ - اگر $x,y,z>0$ و $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ ، حداقل تابع $u=\dfrac{1}{xyz}$ را بیابید. **۲۰ نمره**

موفق باشید

پاسخ سوالات امتحان میان ترم درس ریاضي۲-فني (آ گروه هماهنگ)
نیمسال اول ۹۲-۱۳۹۱

جواب سوال۱ : برای یافتن نقطه اشتراک دو خط باید دستگاه سه معادله و دو مجهول t, t' را حل کنیم. این دستگاه جواب دارد : $t=۱, t'=۲$ نقطه $M=(۴,۵,۴)$ نقطه اشتراک دو خط است. بردارهای هادی دو خط عبارتند از : $u_۱=(۲,۳,۰)$, $u_۲=(۳,۱,۲)$ و بردار قائم صفحه برابر است با : $N=u_۱\times u_۲=(۶,-۴,-۷)$ و معادله صفحه شامل دو خط برابر است با : $۶x-۴y-۷z=-۲۴$



جواب سوال۲ :

$$x^۲+y^۲=z^۲-۱$$
$$\rightarrow \rho^۲\sin^۲\varphi\cos^۲\theta+\rho^۲\sin^۲\varphi\sin^۲\theta=\rho^۲\cos^۲\varphi-۱$$
$$\rightarrow \rho^۲(\cos^۲\varphi-\sin^۲\varphi)=۱$$
$$\rightarrow \quad \rho^۲\cos ۲\varphi=۱$$

جواب سوال۳ : الف) داریم :

$$\vec{R}(t)=e^t(\cos t\ ,\sin t,۱)\rightarrow R'=e^t(\cos t-\sin t,\sin t+\cos t,۱)$$
$$\rightarrow R''=e^t(-۲\sin t,۲\cos t,۱)\rightarrow R(۰)=(۱,۰,۱)\ \rightarrow R'(۰)=(۱,۱,۱)\rightarrow R''(۰)=(۰,۲,۱)$$
$$|\vec{R}(۰)|=\sqrt{۲}\ ,\ \ R'(۰)\times R''(۰)=(-۱,-۱,۲)\rightarrow |R'\times R''|=\sqrt{۶}\ \rightarrow k(۰)=\sqrt{۶}/(\sqrt{۲})^۳=\sqrt{۳}/۲$$

مولفه مماسی شتاب برابر است با $a_T=(T\cdot a)T=\dfrac{R'\cdot R''}{|R'|^۲}R'\rightarrow a_T(۰)=\dfrac{۳}{(\sqrt{۳})^۲}(۱,۱,۱)=(۱,۱,۱)$

$$(R'\times R'')\times R'=(-۱,-۱,۲)\times(۱,۱,۱)=(-۳,۳,۰)\ \rightarrow N=\frac{۱}{\sqrt{۲}}(-۱,۱,۰)$$

$$a_N=(N\cdot R'')N=\rightarrow a_N(۰)=\frac{۲}{(\sqrt{۲})^۲}(-۱,۱,۰)=(-۱,۱,۰)$$

جواب سوال۴ : تابع f در $(۰,۰)$ حد ندارد بنابر این پیوسته نیست.

$$x=۰\rightarrow \lim_{(x,y)\to(۰,۰)}\frac{xy^۳}{x^۲+y^۶}=\lim_{y\to ۰}\frac{۰}{x^۲}=۰\quad ,\quad x=y^۳\ \rightarrow\ \lim_{(x,y)\to(۰,۰)}\frac{xy^۳}{x^۲+y^۶}=\lim_{y\to ۰}\frac{y^۶}{y^۶+y^۶}=\frac{۱}{۲}$$

جواب سوال۵ : برای استفاده از روش ضرایب لاگرانژ تابع $f(x,y,z,\lambda)=\dfrac{۱}{xyz}-\lambda(\dfrac{x^۲}{a^۲}+\dfrac{y^۲}{b^۲}+\dfrac{z^۲}{c^۲}-۱)$ را در نظر می گیریم.

باید دستگاه ۴ معادله و ۴ مجهول

$$f_x=\frac{-۱}{x^۲yz}-\frac{۲\lambda x}{a^۲}=۰\ ,\ f_y=\frac{-۱}{xy^۲z}-\frac{۲\lambda y}{b^۲}=۰\ ,\ f_z=\frac{-۱}{xyz^۲}-\frac{۲\lambda z}{c^۲}=۰\ ,f_\lambda=-(\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}+\frac{z^۲}{c^۲}-۱)=۰$$

را حل کنیم. از ۳ معادله اول داریم : $\dfrac{x^۲}{a^۲}=\dfrac{y^۲}{b^۲}=\dfrac{z^۲}{c^۲}$ و از معادله چهارم نتیجه می شود : $\dfrac{x^۲}{a^۲}=\dfrac{y^۲}{b^۲}=\dfrac{z^۲}{c^۲}=\dfrac{۱}{\sqrt{۳}}$

یعنی $x=\dfrac{a}{\sqrt{۳}}\ ,\ y=\dfrac{b}{\sqrt{۳}}\ ,\ z=\dfrac{c}{\sqrt{۳}}$ و در نتیجه : $Min\,u=\dfrac{۳\sqrt{۳}}{abc}$

تذکر : می توانستیم به جای یافتن مینیمم تابع $u=\dfrac{۱}{xyz}$ ماکزیمم تابع $v=xyz$ را بیابیم.

سیدرضا موسوي