نام و نام خانوادگی : ....

گروه آموزشی : **ریاضی**

شماره دانشجویی : ....

تاریخ : **۱۳۹۱/۲/۵**

نام مدرس : ....

وقت : **۷۰** دقیقه

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده ریاضی

امتحان میان ترم درس : **ریاضی۲-فنی (۱۱ گروه هماهنگ)**

نیمسال (~~اول~~ / **دوم**) **۱۳۹۱**- ۱۳۹۰

توجه : مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.

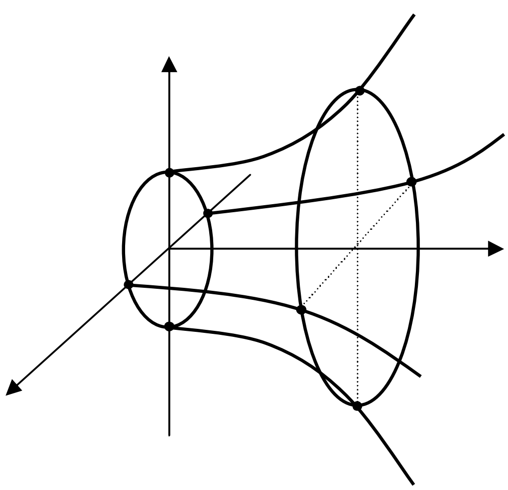
سوال ۱ - بیضی $b>a$, $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ داده شده است. ماکزیمم انحنای آن را بدست آورید. **۱۵ نمره**

سوال ۲ -رویه $y=\sqrt{x^۲+z^۲-۱}$ را رسم کرده و معادله صفحه مماس و خط قائم بر آن در نقطه $(۱,۱,۱)$ را بنویسید. **۱۵ نمره**

سوال ۳ - مخروط $x^۲+۴y^۲=z^۲$ و صفحه $۲x-y+۲z=۱۴$ یکدیگر را در منحنی C قطع می‌کنند.
مشتق تابع $f(x,y,z)=\ln(x^۲+y^۲+z^۲)$ را در نقطه $P=(۳,۲,۵)$
و در سوی بردار مماس بر C بدست آورید. **۲۰ نمره**

سوال ۴ - نقاط بحرانی تابع $f(x,y)=\frac{۱}{y}-\frac{۱}{x}-۴x+y$ را بدست آورده و نوع آنها را مشخص کنید. **۲۰ نمره**

موفق باشید



شکل تقریبی رویه $y=\sqrt{x^۲+z^۲-۱}$ در سوال ۲

پاسخ سوالات امتحان میان ترم درس ریاضی۲-فنی (۱۱ گروه هماهنگ)

نیمسال دوم ۹۱-۱۳۹۰

جواب سوال۱ : روش اول : فرمول انحنا برای یک منحنی در صفحه : $k(x)=\frac{|y''|}{(\sqrt{1+(y')^2}\,)^3}$ اگر $-a\le x\le a$ داریم :

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\ \rightarrow y'=\mp\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ \rightarrow 1+(y')^2=\frac{a^4+(b^2-a^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}\ ,\ y''=\mp\frac{ab}{(\sqrt{a^2-x^2}\,)^3}$$

$$k(x)=\frac{|y''|}{(\sqrt{1+(y')^2}\,)^3}=\frac{ab\big/(\sqrt{a^2-x^2}\,)^3}{(\sqrt{a^4+(b^2-a^2)x^2}\,)^3\big/(a\sqrt{a^2-x^2}\,)^3}=\frac{a^4b}{(\sqrt{a^4+(b^2-a^2)x^2}\,)^3}$$

$$k'(x)=\frac{-3a^4b(b^2-a^2)x}{(\sqrt{a^4+(b^2-a^2)x^2}\,)^5}\ \ ,\ \ k'(x)=0\rightarrow\ x=0\ \rightarrow k(0)=\frac{b}{a^2}$$

این انحنا مربوط به نقاط $(0\,,\pm b)$ است و انحنا در نقاط گوشه ای دامنه یعنی $(\pm a\,,\,.)$ برابر است با $k(a)=\frac{a}{b^2}$

طبق فرض مساله ، $b>a$ بنابر این $\max k=k(0)=\frac{b}{a^2}\ ,\ \min k=k(a)=\frac{a}{b^2}$.

روش دوم : می توانیم بنویسیم $f(t)=(a\cos t,b\sin t)\ ,\ 0\le t\le 2\pi$ که نمودار آن همان بیضی داده شده است.

$$f'(t)=(-a\sin t,b\cos t)\ ,\ f''(t)=(-a\cos t,-b\sin t)\ \rightarrow\ f'\times f''=(0,0,ab)\ ,\ |f'|=\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\cos^2 t}$$

$$k(t)=\frac{|f'\times f''|}{|f'|^3}=\frac{ab}{(\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\cos^2 t}\,)^3}\ \rightarrow \max k=k(\frac{\pi}{2})=\frac{b}{a^2}\ ,\ \min k=k(0)=\frac{a}{b^2}$$

جواب سوال۲ : الف) قرار می‌دهیم : $f(x,y,z)=-y+\sqrt{x^2+z^2-1}$ اکنون داریم : $\nabla f=(\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2-1}},-1,\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2-1}})$

بردار نرمال صفحه مماس و بردار هادی خط قائم در نقطه $(1,1,1)$ برابر است با : $N=(1,-1,1)$

معادله صفحه مماس : $x-y+z=1$ معادله خط قائم : $x-1=\frac{y-1}{-1}=z-1$

جواب سوال۳ : قرار می دهیم $f_1(x,y,z)=x^2+4y^2-z^2$ و صفحه $f_2(x,y,z)=2x-y+2z-14$. بردار مماس بر منحنی C بر هر دو رویه مماس است یعنی بر بردار گرادیان توابع f_1 و f_2 عمود است.

داریم $\nabla f_1=(2x,8y,-2z)\ ,\ \nabla f_2=(2,-1,2)$ و یا $\nabla f_1(P)=(6,16,-10)\ ,\ \nabla f_2(P)=(2,-1,2)$

$\nabla f_1(P)\times\nabla f_2(P)=(22,-32,-38)$ بردار یکه مماس بر منحنی برابر است با : $\vec u=\frac{\pm 1}{\sqrt{758}}(11,-16\,,-19)$

$$\nabla f(x,y,z)=\frac{2}{x^2+y^2+z^2}(x,y,z)\ \ \rightarrow\nabla f(P)=\frac{2}{38}(3,2,5)$$

$$\rightarrow D_{\vec u}f(P)=\frac{2}{38}(3,2,5)\cdot\frac{\pm 1}{\sqrt{758}}(11,-16\,,-19)\ \rightarrow D_{\vec u}f(P)=\frac{\pm 2\times(-94)}{38\sqrt{758}}=\mp\frac{94}{19\sqrt{758}}$$

جواب سوال۴ : $f_x=\frac{1}{x^2}-4\ ,\ f_y=-\frac{1}{y^2}+1\ \ ,\ f_x=0\rightarrow x=\frac{\pm 1}{2}\ \ ,\ \ f_y=0\rightarrow y=\pm 1$

نقاط بحرانی تابع چهار نقطه $A=(\frac{1}{2},1,-2)\ ,\ B=(-\frac{1}{2},1,6)\ ,\ C=(\frac{1}{2},-1,-6)\ ,\ D=(-\frac{1}{2},-1,2)$ هستند.

برای بررسی وضعیت نقاط ، مشتقات دوم را محاسبه می کنیم : $f_{xx}=\frac{-2}{x^3}\ ,\ f_{yy}=\frac{2}{y^3}$

نقاط A و D زینی هستند زیرا $f_{xx}(A)f_{yy}(A)<0\ ,\ f_{xx}(D)f_{yy}(D)<0$. اما نقطه B باید مینیمم نسبی باشد زیرا $f_{xx}(B)>0\ ,\ f_{yy}(B)>0$ و نقطه C باید ماکزیمم نسبی باشد زیرا $f_{xx}(C)<0\ ,\ f_{yy}(C)<0$.

سیدرضا موسوی