نام و نام خانوادگی : ....

شماره دانشجویی : ....

نام مدرس : ....

دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۳۸۷/۹/۳**

وقت : **۷۵** دقیقه

امتحان میان ترم درس : **ریاضی۲-فنی (۵ گروه هماهنگ)**

نیمسال (**اول** / ~~دوم~~) **۱۳۸۸-۱۳۸۷**

توجه : مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.

سوال ۱ - تابع برداری $r(t)=(\frac{1}{3}t^{3},\frac{1}{2}t^{2},t)$ را در نظر گرفته و بردارهای یکه مماس و قائم ، انحنا و مرکز دایره انحنا (دایره بوسان) را در نقطه $r(1)$ بدست آورید. **۲۰ نمره**

سوال ۲ - اگر f تابعی مشتقپذیر باشد و $u(x,y)=x\,y\,f(\frac{x+y}{x\,y})$

عبارت $\frac{1}{u}(x^{2}u_{x}-y^{2}u_{y})$ را بیابید. **۱۵ نمره**

سوال ۳ - پیوستگی تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x+y} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

را در مبدا مختصات بررسی کنید. **۱۵ نمره**

سوال ۴ - معادله خط قائم و صفحه مماس بر رویه $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=r^{\frac{2}{3}}$ را در نقطه $A(a,b,c)$ را بنویسید. **۱۵ نمره**

سوال ۵ - اگر x ، y و z زوایای یک مثلث باشند ، مطلوب است مقدار ماکزیمم عبارت : **۱۵ نمره**

$$S=\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}$$

موفق باشید

دانشکده ریاضی

پاسخ سوالات امتحان میان ترم درس ریاضی۲(فنی) (۷ گروه هماهنگ)

نیمسال اول ۸۸-۱۳۸۷

پاسخ سوال ۱ – $r(t)=(\frac{۱}{۳}t^{۳},\frac{۱}{۲}t^{۲},t) \;\to\; r'(t)=(t^{۲},t,۱) \;\to\; r''(t)=(۲t,۱,۰) \;\to\; r'\times r''=(۱,۲t,-t^{۲})$

$$|r'(t)|=\sqrt{t^{۴}+t^{۲}+۱} \quad , \quad |r'\times r''|=\sqrt{t^{۴}+۴t^{۲}+۱} \;\to\; k(۱)=\frac{\sqrt{۶}}{(\sqrt{۳})^{۳}}=\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

$$T(t)=\frac{۱}{\sqrt{t^{۴}+t^{۲}+۱}}(t^{۲},t,۱) \;\to\; T(۱)=\frac{۱}{\sqrt{۳}}(۱,۱,۱)$$

$$T'=\frac{-۲t^{۳}-t}{(\sqrt{t^{۴}+t^{۲}+۱})^{۳}}(t^{۲},t,۱)+\frac{۱}{\sqrt{t^{۴}+t^{۲}+۱}}(۲t,۱,۰)=\frac{۱}{(\sqrt{t^{۴}+t^{۲}+۱})^{۳}}(t^{۳}+۲t,-t^{۴}+۱,-۲t^{۳}-t)$$

$$T'(۱)=\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}(۳,۰,-۳)\to N(۱)=\frac{۱}{\sqrt{۲}}(۱,۰,-۱)\;,\;O(۱)=(\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲},۱)+\frac{۳}{\sqrt{۲}}\times\frac{۱}{\sqrt{۲}}(۱,۰,-۱)=(\frac{۱۱}{۶},\frac{۱}{۲},\frac{-۱}{۲})$$

سوال ۲ – $u(x,y)=x\,y\,f(\frac{x+y}{x\,y}) \;\to\; u_x=y\,f(\frac{x+y}{x\,y})-\frac{y}{x}f'(\frac{x+y}{x\,y})\,,\,u_y=x\,f(\frac{x+y}{x\,y})-\frac{x}{y}f'(\frac{x+y}{x\,y})$

$$x^{۲}u_x=x^{۲}y\,f(\frac{x+y}{x\,y})-xyf'(\frac{x+y}{x\,y})\,,\,y^{۲}u_y=xy^{۲}\,f(\frac{x+y}{x\,y})-xyf'(\frac{x+y}{x\,y})\to x^{۲}u_x-y^{۲}u_y=xy(x-y)f(\frac{x+y}{x\,y})$$

یعنی : $\frac{۱}{u}(x^{۲}u_x-y^{۲}u_y)=x-y$

سوال ۳ – روی دو مسیر متفاوت ، حد تابع را محاسبه می کنیم :

$$x=y\to\lim_{(x,y)\to(۰,۰)}\frac{xy}{x+y}=\lim_{x\to۰}\frac{x^{۲}}{۲x}=۰ \quad ; \quad x^{۲}-x=y\to\lim_{(x,y)\to(۰,۰)}\frac{xy}{x+y}=\lim_{x\to۰}\frac{x(x^{۲}-x)}{x+(x^{۲}-x)}=۱$$

چون دو مقدار متفاوت بدست آمد پس حد تابع در مبدا مختصات موجود نیست و در نتیجه ناپیوسته خواهد بود.

سوال ۴ – بردار قائم رویه عبارت است از $N=(\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}},\frac{۲}{۳}y^{-\frac{۱}{۳}},\frac{۲}{۳}z^{-\frac{۱}{۳}})$ که با $(\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}},\frac{۱}{\sqrt[۳]{y}},\frac{۱}{\sqrt[۳]{z}})$ و $(\sqrt[۳]{yz},\sqrt[۳]{xz},\sqrt[۳]{xy})$ موازی است.

معادله صفحه مماس بر رویه $\frac{x}{\sqrt[۳]{a}}+\frac{y}{\sqrt[۳]{a}}+\frac{z}{\sqrt[۳]{a}}=r^{\frac{۲}{۳}}$ و معادله خط قائم بر رویه $\frac{x-a}{\sqrt[۳]{yz}}=\frac{y-b}{\sqrt[۳]{xz}}=\frac{z-c}{\sqrt[۳]{xy}}$ خواهد بود.

سوال ۵ – روش اول : $x+y+z=\pi$ در نتیجه $S=\sin\frac{x}{۲}\sin\frac{y}{۲}\cos\frac{x+y}{۲}$ پس باید

$$\begin{cases} S_x=\frac{۱}{۲}\sin\frac{y}{۲}(\cos\frac{x}{۲}\cos\frac{x+y}{۲}-\sin\frac{x}{۲}\sin\frac{x+y}{۲})=\frac{۱}{۲}\sin\frac{y}{۲}\cos\frac{۲x+y}{۲}=۰ \\ S_y=\frac{۱}{۲}\sin\frac{x}{۲}(\cos\frac{y}{۲}\cos\frac{x+y}{۲}-\sin\frac{y}{۲}\sin\frac{x+y}{۲})=\frac{۱}{۲}\sin\frac{y}{۲}\cos\frac{x+۲y}{۲}=۰ \end{cases}$$

چون $۰<\frac{x}{۲},\frac{y}{۲},\frac{z}{۲}<\frac{\pi}{۲}$ پس $\sin\frac{x}{۲}\sin\frac{y}{۲}\neq۰$ یعنی $\frac{۲x+y}{۲}=\frac{x+۲y}{۲}=\frac{\pi}{۲}$ و در نتیجه $x=y=z=\frac{\pi}{۳}$ و $Max\,S=(\frac{۱}{۲})^{۳}=\frac{۱}{۸}$

روش دوم : تابع $f(x,y,z,\lambda)=\sin\frac{x}{۲}\sin\frac{y}{۲}\sin\frac{z}{۲}-\lambda(x+y+z-\pi)$ را در نظر می گیریم باید داشته باشیم

$f_x=f_y=f_z=f_\lambda=۰$ پس $\frac{۱}{۲}\cos\frac{x}{۲}\sin\frac{y}{۲}\sin\frac{z}{۲}-\lambda=\frac{۱}{۲}\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{y}{۲}\sin\frac{z}{۲}-\lambda=\frac{۱}{۲}\sin\frac{x}{۲}\sin\frac{y}{۲}\cos\frac{z}{۲}-\lambda=۰$

یعنی $\lambda=\frac{۱}{۲}\cos\frac{x}{۲}\sin\frac{y}{۲}\sin\frac{z}{۲}=\frac{۱}{۲}\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{y}{۲}\sin\frac{z}{۲}=\frac{۱}{۲}\sin\frac{x}{۲}\sin\frac{y}{۲}\cos\frac{z}{۲}$

چون $۰<\frac{x}{۲},\frac{y}{۲},\frac{z}{۲}<\frac{\pi}{۲}$ و $\sin\frac{x}{۲}\sin\frac{y}{۲}\sin\frac{z}{۲}\neq۰$ داریم $\tan\frac{x}{۲}=\tan\frac{y}{۲}=\tan\frac{z}{۲}$ و در نتیجه $x=y=z=\frac{\pi}{۳}$ و $Max\,S=\frac{۱}{۸}$