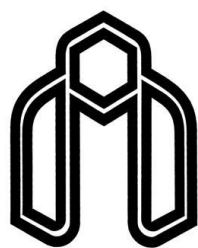


الله أكبر
محمد وآله



دانشگاه صنعتی شاهرود

جزوه درس
ریاضیات مهندسی
استاد فاتح

بارم بندی :

۱. نمره پایان ترم ___

۲. نمره میان ترم ___

۳. نمره فعالیت کلاسی ___

۴. نمره حل تمرین ___

*تاریخ امتحان میان ترم: ___/___/___

فهرست مطالب

۶	فصل اول
۶	اعداد مختلط
۹	نواحی در صفحه مختلط:
۱۰	تابع مختلط، حد، پیوستگی، مشتق، تابع تحلیلی
۱۴	معادله کوشی-ریمان
۱۴	روابط کوشی-ریمان در مختصات قطبی
۱۷	تابع نمایی
۱۸	توابع مثلثاتی و هذلولی
۱۸	توابع متناوب با دوره 2π
۱۸	تابع لگاریتمی و توان عمومی
۱۹	توابع معکوس مثلثاتی و هذلولی
۲۰	تمرین فصل اول
۲۱	فصل دوم
۲۱	انتگرال مختلط
۲۲	خواص اساسی انتگرال روی خط
۲۳	قضیه کوشی-گورسا
۲۴	قضیه(فرمول انتگرال کوشی)
۲۶	انتگرال توابعی گویا از $\cos \theta$ و $\sin \theta$
۲۸	تمرین فصل دوم
۲۹	فصل سوم
۲۹	دنباله ها و سری ها
۲۹	دنباله ها
۲۹	دنباله کراندار
۲۹	سری
۳۰	سری توانی، سری تیلور، سری لوران
۳۱	قضیه تیلور
۳۲	بسط مک لورن برخی از توابع مقدماتی مهم
۳۴	سری لوران
۳۸	تمرین فصل سوم

۳۹ فصل چهارم
۳۹ انتگرال گیری به روش مانده ها
۳۹ روش های محاسبه مانده
۴۰ قضیه مانده
۴۴ محاسبه ی انتگرال های حقیقی ناسره
۴۷ تمرین فصل چهارم
۴۸ فصل پنجم
۴۸ سری و انتگرال فوریه
۵۱ سری فوریه و توابع زوج و فرد
۵۶ به دست آوردن مقادیر برخی از سری ها به کمک تبدیل و سری فوریه
۵۷ بسط نیم دامنه
۵۹ انتگرال گیری جمله به جمله از سری فوریه
۶۰ تساوی پار سوال
۶۱ صورت مختلط سر فوریه ، ضرایب فوریه مختلط
۶۱ انتگرال فوریه
۶۲ انتگرال های موسوم به لاپلاس
۶۴ صورت مختلط انتگرال فوریه ، تبدیل فوریه
۶۸ تمرین فصل پنجم
۶۹ فصل ششم
۶۹ معادلات با مشتق جزئی
۷۳ تمرین فصل ششم

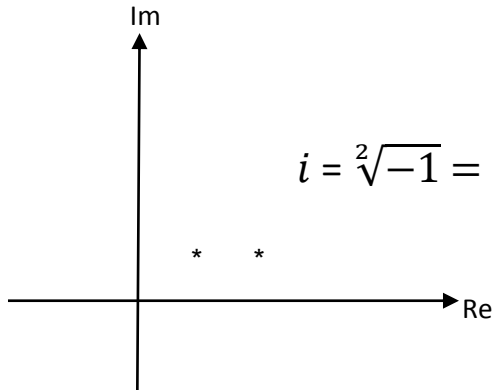
فصل اول

اعداد مختلط

$$۱ + i$$

$$۲ + i$$

$$i = \sqrt[2]{-1} = i^2 = (\sqrt[2]{-1})^2 = -1$$



مثال: معادله‌ی $X^2 + 4 = 0$ را حل کنید.

$$X^2 = -4 \Rightarrow X = \pm \sqrt[2]{-4} = \pm 2\sqrt[2]{-1} = \pm 2i$$

$$Z_1 = X_1 + iY_1 \quad Z_2 = X_2 + iY_2 \quad Z = X + iY$$

مثال: $Z_1 + Z_2$ و $Z_1 - Z_2$ و $Z_1 * Z_2$ و $\frac{Z_1}{Z_2}$ را محاسبه نمایید.

$$Z_1 + Z_2 = (X_1 + X_2) + i(Y_1 + Y_2)$$

$$Z_1 - Z_2 = (X_1 - X_2) + i(Y_1 - Y_2)$$

$$Z_1 * Z_2 = X_1X_2 - Y_1Y_2 + i(X_1Y_2 + X_2Y_1) \quad \text{مختلط مزدوج } Z \text{ را } \bar{Z} \text{ گویند.}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{X_1 + iY_1}{X_2 + iY_2} = \frac{(X_1 + iY_1)(X_2 - iY_2)}{(X_2 + iY_2)(X_2 - iY_2)} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2}{X_2^2 + Y_2^2} + i \frac{X_2Y_1 - X_1Y_2}{X_2^2 + Y_2^2}$$

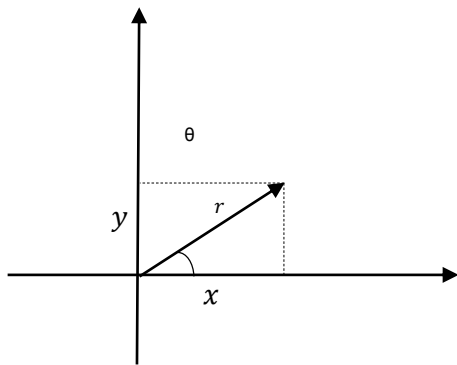
مثال: حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$Z_1 = 2 + 3i \quad Z_2 = 6i$$

$$Z_1 + Z_2 = ? \quad Z_1 - Z_2 = ? \quad Z_1 * Z_2 = ? \quad \frac{Z_1}{Z_2} = ?$$

$$Z_1 + Z_2 = 2 + 9i \quad Z_1 - Z_2 = 2 - 3i \quad Z_1 * Z_2 = -18 + 12i \quad \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i$$

اعداد مختلط در دستگاه قطبی



$$\begin{cases} X = r \cos \theta \\ Y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$z = x + iy = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \text{آرگومان } z$$

$$\theta = \arg z = \arctan \frac{y}{x} \quad (-\pi < \theta \leq \pi) \iff \tan \theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad Z_1 Z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$Z = r e^{i(\theta)}$$

$$Z_1 = r_1 e^{i(\theta_1)} \quad Z_2 = r_2 e^{i(\theta_2)}$$

مثال : مقدار $e^{i(2\pi)}$ را در دستگاه دکارتی بدست آورید؟

$$e^{i(2\pi)} = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta) = 1(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 1$$

فرمول اویلر:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \implies Z = r e^{i\theta}$$

فرمول موآور:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

مثال: جواب معادله $w = Z^{\frac{1}{n}}$ را بدست آورید.

$$w = \rho e^{i\varphi} \implies \rho^n e^{in\varphi} = r e^{i\theta}$$

$e^{i\theta}$ متناوب با دوره تناوب 2π است.

$$\rho^n = r \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r} \quad n\varphi = \theta + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

$$w_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

مثال: معادله $X^4 + 16 = 0$ را حل کنید.

$$X^4 = -16 = 16e^{i\pi}$$

$$X = \rho e^{i\varphi}$$

$$\rho = \sqrt[4]{16} = 2 \quad 4\varphi = \pi + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi + 2k\pi}{4} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$k = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4} \quad k = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$k = 3 \Rightarrow \varphi = \frac{7\pi}{4} \quad k = 2 \Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{4}$$

نواحی در صفحه مختلط:

$$\forall \varepsilon(z_0) = \{z | z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < \varepsilon\}$$

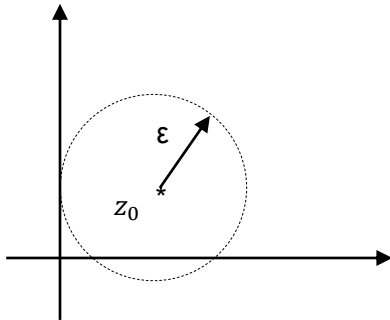
نقاط درونی دایره :

$$\forall \varepsilon(z_0) = \{z | z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq \varepsilon\}$$

نقاط درون و روی دایره :

$$\forall \varepsilon(z_0) = \{z | z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = \varepsilon\}$$

نقاط روی دایره :



$|z - z_0| > \varepsilon$ نقاط بیرون دایره

$\varepsilon_1 < |z - z_0| < \varepsilon_2$ نقاط بین دو دایره متحدالمركز

حال فرض کنید S مجموعه‌ای از نقاط در صفحه مختلط باشند.

نقطه داخلی S : یک ε همسایگی از z_0 وجود داشته باشد که $N_\varepsilon(z_0) \subset S$.

نقطه خارجی S : یک ε همسایگی از z_0 وجود داشته باشد که $N_\varepsilon(z_0) \subset \mathbb{C} - S$.

نقطه مرزی S : اگر نقطه نه داخلی باشد نه خارجی.

مجموعه باز: اگر نقاط متعلق به S نقطه‌های داخلی باشند.

مجموعه بسته: اگر نقاط متعلق به S نقطه‌های داخلی و مرزی باشند.

مجموعه کراندار: اگر عدد حقیقی $N > 0$ وجود داشته باشد به قسمی که برای هر $|z| < N, z \in S$.

نقاط روی یک خط مجموعه کراندار نیست.

همبند: هر دو نقطه دلخواه آن را به وسیله یک خط درون S به هم وصل کند.

تابع مختلط، حد، پیوستگی، مشتق، تابع تحلیلی:

$$W = f(z) \quad \text{تابعی از } Z$$

$$Z = X + iY \quad W = U + iV$$

مثال: اگر $f(z) = z^2$ آنگاه u و v را محاسبه کنید.

$$f(z) = (X + iY)^2 = X^2 - Y^2 + 2iXY \quad u(x, y) = X^2 - Y^2 \quad v(x, y) = 2XY$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = W_0$$

حد تابع در صورت وجود منحصر به فرد است:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

نکته:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

تابع $f(z)$ را در $z = z_0$ پیوسته گوییم هرگاه:

اگر $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ و $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = M$ آنگاه روابط زیر را خواهیم داشت:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm g(z)] = L \pm M$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)g(z)] = LM$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{L}{M}, M \neq 0$$

اگر $f(z)$ و $g(z)$ هر دو در $z = z_0$ پیوسته باشند، آنگاه توابع $[f(z) \pm g(z)]$ و $f(z)g(z)$ و $\frac{f(z)}{g(z)}$ در $z = z_0$ پیوسته اند ($g(z_0) \neq 0$). در ریشه های مخرج برابر با صفر حد نداریم.

توابع چند جمله ای بر حسب z در تمام نقاط پیوسته اند.

توابع گویا در تمام نقاط به جز ریشه های مخرج پیوسته اند.

اگر $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$ و $g(z)$ در یک همسایگی از z_0 کراندار باشد آنگاه رابطه زیر برقرار است:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = 0$$

اگر تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ و $z_0 = x_0 + iy_0$ خواهیم داشت:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(z) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) + i \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y)$$

برای بررسی حد و پیوستگی توابع حقیقی u و v را می‌توان بررسی نمود. تابع $f(z)$ در z_0 پیوسته است اگر و فقط اگر توابع u و v در $z_0 = (x_0, y_0)$ پیوسته باشد.

مثال: $f(z) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$ در $z = 0$ دارای حد نیست.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x = 0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} (y = 0) = \frac{x}{|x|} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} (y = 0) = \frac{x}{|x|} = -1$$

مثال: $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{\sin z^2}$ را محاسبه کنید.

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \left(\frac{z}{2} \right)}{\sin z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{z}{2} \right)^2}{z^2} = \frac{1}{2}$$

مشتق تابع $f(z)$ در z_0 به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

مشروط به این که حد فوق موجود باشد. در این صورت گوئیم f در z_0 مشتق پذیر است.

مثال: تابع $f(z) = z^2$ به ازای کدام یک از مقادیر z مشتق پذیر است؟

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \frac{z^2 + h^2 + 2zh - z^2}{h} = 2z$$

چون حد موجود است، f در تمام نقاط مشتق پذیر است.

نکته: تمام قواعد مشتق پذیری از توابع حقیقی در مشتق گیری از توابع مختلط صدق می‌کند.

مثال: وضعیت مشتق پذیری تابع $f(z) = \bar{z}$ را بررسی کنید.

برای بررسی مشتق پذیری، یک بار x را ثابت و y را متغیر و بار دیگر y را ثابت و x را متغیر در نظر می‌گیریم. اگر جواب‌ها متفاوت بود مشتق ندارد. اگر جواب یکی شد آنگاه $\Delta y = m\Delta x$ قرار می‌دهیم و دوباره رابطه را بررسی می‌کنیم. اگر به m بستگی نداشت مشتق داریم.

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{x + \Delta x - iy - x + iy}{\Delta x} = 1$$

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta x = 0}} \frac{x - i(y + \Delta y) - x + iy}{i\Delta y} = -1$$

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = m\Delta x}} \frac{x + \Delta x - i(y + \Delta y) - x + iy}{\Delta x + i\Delta y} =$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = m\Delta x}} \frac{x + \Delta x - i(y + m\Delta x) - x + iy}{\Delta x + im\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = m\Delta x}} \frac{\Delta x - i(m\Delta x)}{\Delta x + im\Delta x} =$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = m\Delta x}} \frac{\Delta x(1 - im)}{\Delta x(1 + im)} = \frac{(1 - im)}{(1 + im)}$$

$$h = \Delta x + i\Delta y$$

چون دو حد فوق مقدار برابری باهم ندارند پس تابع $f(z) = \bar{z}$ مشتق پذیر نیست.

توابع $f(z) = Re(z)$ و $f(z) = Im(z)$ هیچ جا مشتق پذیر نیستند.

تمرین: شماره ۱

توابع چند جمله‌ای در تمام نقاط مشتق پذیر و توابع گویا به جز در ریشه‌های مخرج مشتق پذیر اند.

قضیه: اگر $f(z)$ در $z = 0$ مشتق پذیر باشد، آنگاه $f(z)$ در $z = z_0$ پیوسته است.

عکس قضیه فوق صادق نیست. برای مثال $f(z) = |z|$ هیچ جا مشتق پذیر نیست اما در تمام نقاط پیوسته است.

تابع f را در نقطه z_0 تحلیلی نامیم اگر f در تمام نقاط یک همسایگی z_0 مشتق پذیر باشد.

تابع f را در حوزه D تحلیلی خوانیم اگر f در هر نقطه D تحلیلی باشد.

اگر تابع $f(z)$ در کلیه نقاط صفحه مختلط تحلیلی باشد آن را تابع تام نامیم.

اگر f در نقطه z_0 تحلیلی نباشد اما در نقطه ای در همسایگی z_0 تحلیلی باشد، آنگاه z_0 را یک نقطه تکین تابع f گویند.

مثال: $f(z) = \frac{1}{z}$ ، $f(z)$ در نقطه $z \neq 0$ دارای یک نقطه تکین می باشد.

به جز 0 در تمام صفحه مشتق پذیر است $\Rightarrow f'(z) = \frac{-1}{z^2}$ $z \neq 0$

معادله کوشی-ریمان:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad z = x + iy \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y$$

از دو مسیر مختلف مشتق را اعمال می‌کنیم. باید جواب‌ها برابر باشد. یکبار Δx به سمت صفر میل می‌کند و Δy صفر مطلق قرار داده می‌شود (رابطه ۱) و یکبار یکبار Δy به سمت صفر میل می‌کند و Δx صفر مطلق قرار داده می‌شود (رابطه ۲).

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = u_x + iv_x \quad (1)$$

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z} = \frac{\partial u}{i \cdot \partial y} + i \frac{\partial v}{i \partial y} = -iu_y + v_y \quad (2)$$

$$(1)=(2) \Rightarrow u_x = v_y, v_x = -u_y$$

اگر رابطه بالا برقرار نباشد، تابع مشتق پذیر نیست.

برقرار بودن رابطه بالا دلیل بر مشتق پذیر بودن تابع نیست و فقط شرط لازم برای مشتق پذیری است.

شرط لازم و کافی برای آن که تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در حوزه D تحلیلی باشد، آن است که u_x, u_y, v_x, v_y در D پیوسته و در معادلات کوشی-ریمان صدق کنند.

مثال: وضعیت تحلیلی بودن تابع $f(z) = z^2$ را در کلیه نقاط صفحه مختلط بررسی کنید.

$$z = x + iy \xrightarrow{f(z)=z^2} f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy \Rightarrow u = x^2 - y^2, v = 2xy$$

$$u_x = 2x, u_y = -2y, v_x = 2y, v_y = 2x$$

چون توابع $2x$ و $2y$ در کلیه نقاط پیوسته هستند و همچنین در معادلات کوشی-ریمان صدق می‌کنند $(u_x = v_y, v_x = -u_y)$ ، پس تابع مربوطه در کلیه نقاط صفحه مختلط تحلیلی است.

تمرین: تمرین شماره ۲

روابط کوشی-ریمان در مختصات قطبی:

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta, \quad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta$$

تمرین: تمرین شماره ۳

مثال: وضعیت تحلیلی بودن تابع $f(z) = \bar{z}$ را بررسی کنید. $\bar{z} = x - iy$

$$u = x, v = -y \Rightarrow u_x = 1 \neq v_y = -1$$

چون معادلات کوشی-ریمان برقرار نیست، لذا در هیچ نقطه‌ای تحلیلی نیست.

تابع حقیقی h از دو متغیر حقیقی x و y را در حوزه D از صفحه xy همساز گوییم اگر در آن حوزه دارای مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم پیوسته باشد و در معادله لاپلاس صدق کند.

$$\nabla^2 h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

حال فرض کنید تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در حوزه D تحلیلی باشد، آنگاه مشتقات جزئی مرتبه اول u و v در معادله کوشی-ریمان صدق می‌کنند. یعنی:

$$u_x = v_y \Rightarrow u_{xx} = v_{yx}, u_{xy} = v_{yy}$$

$$v_x = -u_y \Rightarrow v_{xx} = -u_{yx}, v_{xy} = -u_{yy}$$

*یک بار نسبت به x و یک بار نسبت به y مشتق گرفته شده است.

پیوستگی مشتقات جزئی متضمن آن است که $u_{xy} = u_{yx}$ و $v_{xy} = v_{yx}$ بنابراین خواهیم داشت:

$$u_{xx} = -u_{yy} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0, v_{xx} = -v_{yy} \Rightarrow v_{xx} + v_{yy} = 0$$

بنابراین اگر $f(z)$ در حوزه D تحلیلی باشد، توابع u و v در D همسازند.

اگر دو تابع u و v در D همساز باشند و مشتقات جزئی مرتبه اول آن‌ها در معادلات کوشی-ریمان صدق کنند، گوییم v یک مزدوج همساز u است.

قضیه: شرط لازم و کافی برای تحلیلی بودن تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در حوزه D آن است که v یک مزدوج همساز u در D باشد.

اگر v یک مزدوج همساز u در D باشد، لازم نیست که u نیز یک مزدوج همساز v در D باشد.

*مزدوج یک تابع همساز را می‌توان از معادلات کوشی-ریمان بدست آورد.

مثال: نشان دهید تابع $u = x^2 - y^2$ همساز است و مزدوج آن را بیابید.

$$u_{xx} = 2, u_{yy} = -2, u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$u_x = v_y \Rightarrow 2x = v_y, u_y = -v_x \Rightarrow v_x = 2y$$

$$v = \int 2x dy + h(x) = 2xy + h(x) + c = 2xy + \overbrace{h(x)}^{\text{جدید}}$$

$$v_x = 2y + h'(x) = 2y \Rightarrow h'(x) = 0 \Rightarrow h(x) = c \Rightarrow v = 2xy + c$$

مثال: روابط کوشی-ریمان را برای توابع زیر بررسی نمایید.

$$۱. f(z) = |z| \Rightarrow f(z) = \sqrt{x^2 + y^2} = u + 0i$$

$$u_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \neq v_y$$

$$۲. f(z) = \arg z \Rightarrow f(z) = \theta$$

$$v_r = 0 \neq -\frac{1}{r} = -\frac{1}{r} u_\theta$$

$$۳. f(z) = \ln z \quad z = re^{i\theta} \quad \ln z = \ln r + \ln e^{i\theta} = \ln r + i\theta \Rightarrow f(z) = \ln r + i\theta$$

$$u_\theta = 0 \Rightarrow -\frac{1}{r} u_\theta = v_r, u_r = \frac{1}{r} = \frac{1}{r} v_\theta$$

مثال: اگر $v(x, y)$ یک مزدوج همساز تابع $u = (x^2 - y^2 + 1)^2 - 4x^2y^2$ باشد و داشته باشیم $v(0,0) = 0$ ، آنگاه مقدار $v(1,1)$ را محاسبه نمایید.

$$u_x = 4x(x^2 - y^2 + 1) - 8xy^2 = v_y \Rightarrow v = \int (4x^3 - 12xy^2 + 4x) dy + f(x)$$

$$v = 4x^3y - 4xy^3 + 4xy + f(x)$$

$$v_x = -u_y \Rightarrow 12x^2y - 4y^3 + 4y + f'(x) = 4y(x^2 - y^2 + 1) + 8x^2y$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = c, v(x, y) = 4x^3y - 4xy^3 + 4xy + c$$

$$v(0,0) = 0 \Rightarrow c = 0, v(1,1) = 4$$

تابع نمایی:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$(e^z)' = e^z, |e^z| = e^x, \arg e^z = y, \bar{z} = re^{-i\theta}, (e^z)^n = e^{nz}$$

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1 \Rightarrow e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$$

مثال: اگر z یک عدد مختلط باشد، اندازه و آرگومان عدد e^{z+i} را بیابید.

$$e^{z+i} = e^{x+i(y+1)} = e^x e^{i(y+1)} \Rightarrow |e^{z+i}| = e^x, \arg e^{z+i} = y + 1$$

توابع مثلثاتی و هذلولی:

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

توابع متناوب با دوره 2π :

$$\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$$

$$\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$$

$$\sin hz = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$

$$\cos hz = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$

توابع فوق به ازای کلیه مقادیر z تحلیلی می‌باشد و هر دو متناوب و با دوره تناوب $2\pi i$ هستند.

$$\cos hz = \cos iz$$

$$\sin hz = -i \sin iz$$

$$\cos h^2 z - \sin h^2 z = 1$$

تابع لگاریتمی و توان عمومی:

$$\log z = \ln r + i\theta$$

$$\theta = \varphi + 2n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (-\pi < \varphi < \pi)$$

$\log z$ تابعی چندمقداری است، مقداری از $\log z$ که متناظر با مقدار اصلی $\arg z$ است را مقدار اصلی $\log z$ نامیده و آن را با $Log z$ نشان می‌دهیم.

$$Log z = \ln r + i\varphi \quad (-\pi < \varphi < \pi)$$

$$\log z = Log z \pm 2n\pi i, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$Log i = \frac{\pi}{2}i, \log i = \frac{\pi}{2}i, -\frac{3\pi}{2}i, \frac{5\pi}{2}i, \dots$$

مثال:

$$Log(-2 - 2i) = \ln \sqrt{8} - \frac{3\pi}{4}i$$

$$\log z^n \neq n \log z, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$z = e^w \Leftrightarrow w = \log z, \quad \frac{d}{dx} Log z = \frac{1}{z} \quad (|z| > 0, -\pi < \arg z < \pi)$$

$$z^c = e^{c \log z}$$

مثال: مقدار i^i را بدست آورید.

$$z^c = e^{c \log z} \Rightarrow i^i = e^{i \log i} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}i \pm 2n\pi i\right)} = e^{-\pi/2 \mp 2n\pi}$$

توابع معکوس مثلثاتی و هذلولی:

$$\sin^{-1} z = -i \log \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right)$$

اثبات:

$$z = \sin w \quad e^{iw} = \cos w + i \sin w = \sqrt{1 - \sin^2 w} + i \sin w$$

$$e^{iw} = \sqrt{1 - z^2} + iz \Rightarrow iw = \log \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right) \Rightarrow w = -i \log \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right)$$

$$\cos^{-1} z = -i \log \left(z + i\sqrt{1 - z^2} \right)$$

$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \log \frac{i + z}{i - z}$$

$$\sinh^{-1} z = \log \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right)$$

$$\cosh^{-1} z = \log \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \log \frac{1 + z}{1 - z}$$

$$\frac{d}{dz} \sin^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

$$\frac{d}{dz} \cos^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

تمرین : تمرین شماره ۴

مثال: مقدار اصلی $(1 + i)^{(1-i)}$ را بدست آورید.

$$z^c = e^{c \log z} \Rightarrow (1 + i)^{(1-i)} = e^{(1-i) \log(1+i)}$$

$$\text{Log}(1 + i) = \ln \sqrt{2} + i \frac{\pi}{4} \quad \text{مقدار اصلی}, (1 + i)^{(1-i)} = e^{(1-i)(\ln \sqrt{2} + i \frac{\pi}{4})}$$

$$= e^{(\ln \sqrt{2} + i \frac{\pi}{4}) + i(-\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4})} = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} \right) \right)$$

تمرین : تمرین شماره ۵

تمرین فصل اول

۱- ثابت کنید $f(z) = |z|^2$ فقط در $z=0$ مشتق پذیر است؟

۲- ثابت کنید $f(z) = \bar{z}$ در هیچ نقطه ای از صفحه مختلط تحلیلی نیست؟

۳- روابط کوشی-ریمان در مختصات قطبی را ثابت کنید؟

۴- مقدار \sqrt{i} را به دست آورید؟

۵- تابع $w = \log z$ را به ازای عدد مختلط $z = re^{i\theta}$ و $-\pi < \theta < \pi$ چنین تعریف

میکنیم. $\log z = \ln r + i\theta$. اگر $z = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ آن گاه $\log z^2$ را به دست آورید؟

فصل دوم

انتگرال مختلط

قوس (منحنی) C ، مجموعه‌ای از نقاط $Z = (x, y)$ در صفحه مختلط است و با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$z = z(t) = x(t) + i y(t) \quad a \leq t \leq b$$

فرض کنید تابع $f(z)$ روی C پیوسته قطعه‌ای باشد و $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ آنگاه:

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$$

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C (u + iv)(dx + idy) = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy \\ &= \int_a^b (u + iv)(x' + iy') dt = \int_a^b (ux' - vy') dt + i \int_a^b (vx' + uy') dt \end{aligned}$$

مثال: مطلوبست محاسبه $\int_C |z| dz$ از $A = z = -i$ تا $B = z = +i$ در طول

الف) پاره خط AB (ب) نیم دایره یکه‌ای که در نیم صفحه چپ واقع شده است

الف): $C = z(t) = it \quad -1 < t < +1 \quad dz = i dt$

$$\int_C |z| dz = \int_{-1}^{+1} \underbrace{|it|}_{\text{تابع زوج}} i dt = 2i \int_0^{+1} t dt = (it^2 \Big|_0^1) = i$$

ب): $C = z(t) = \cos t + i \sin t \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

$$\int_C |z| dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (-\sin t + i \cos t) dt = \left(\cos t + i \sin t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \right) = 2i$$

خواص اساسی انتگرال روی خط:

اگر مسیر C را به دو قسمت C_1 و C_2 تقسیم کنیم:

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$$

$$\int_a^b f(z) dz = - \int_b^a f(z) dz$$

$$\int_C [Af_1(z) + Bf_2(z)] dz = A \int_C f_1(z) dz + B \int_C f_2(z) dz$$

L طول منحنی مسیر C و M عدد حقیقی که در هر نقطه تابع از آن مقدار کمتر است.

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML$$

مثال: مقدار انتگرال زیر را حساب کنید (m عدد صحیح و z_0 ثابت است. C دایره است به شعاع r و مرکز z_0)

$$\oint_C (z - z_0)^m dz$$

به فرم مقابل می نویسیم: $0 < t < 2\pi$

$$z(t) = z_0 + r(\cos t + i \sin t) = z_0 + re^{it}$$

$$(z - z_0)^m = r^m e^{imt} \quad z'(t) = rie^{it}$$

$$\int_0^{2\pi} f(z(t)) z'(t) dt = \int_0^{2\pi} r^m e^{imt} \cdot rie^{it} dt = ir^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt$$

$$\oint_C (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 2\pi i & m = -1 \\ 0 & m \neq -1 \end{cases}$$

قضیه کوشی - گورسا:

اگر $f(z)$ در تمام نقاط درون و روی منحنی ساده بسته C تحلیلی باشد آنگاه:

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

مثال: در $\oint_C \bar{z} dz$ نمی توان از قضیه بالا استفاده کرد چون \bar{z} تحلیلی نیست.

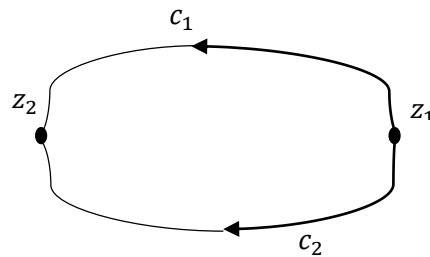
مثال: انتگرال $\oint_C \frac{z+1}{z^3-2z^2} dz$ را حساب کنید (C دایره ای به معادله $|z-1-2i|=2$ است)

$$\oint_C \frac{z+1}{z^3-2z^2} dz = \oint_C \frac{z+1}{z^2(z-2)} dz = \begin{cases} \text{بیرون دایره } |0-1-2i| = \sqrt{5} > 2 \\ \text{بیرون دایره } |2-1-2i| = \sqrt{5} > 2 \end{cases}$$

پس جواب صفر است زیرا درون ناحیه مربوطه تابع تحلیلی است.

هرگاه f در ناحیه D تحلیلی باشد و C_1 و C_2 مسیرهای دلخواهی مانند شکل زیر باشند آنگاه:

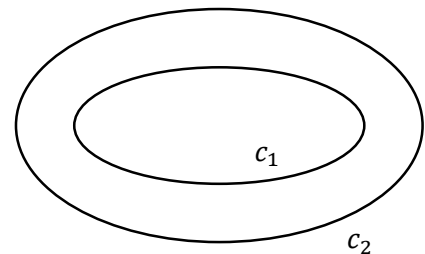
$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$



بنابراین انتگرال $f(z)$ از z_1 تا z_2 مستقل از مسیر D است.

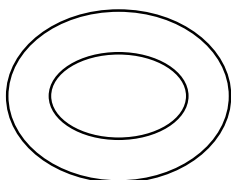
اگر تابع f روی مرز C_1 و C_2 و ناحیه C (ناحیه بین دو منحنی) تحلیلی باشد، معادله به شکل زیر نوشته می شود:

$$\left\{ \int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz \quad : \text{همجهت } C_1 \text{ و } C_2 \right.$$



$$\left\{ \int_{C_1} f(z) dz = - \int_{C_2} f(z) dz \quad : \text{غیرهمجهت } C_1 \text{ و } C_2 \right.$$

حوزه همبند ساده: حوزه D در صفحه مختلط را حوزه همبند ساده گوئیم اگر منحنی بسته ساده ای در D فقط شامل نقاط D باشد.



مثال نقض: ناحیه D ، ناحیه بین دو بیضی

قضیه: اگر $f(z)$ در حوزه همبند ساده D تحلیلی باشد، داریم:

$$\int_a^b f(z) dz = F(b) - F(a)$$

مثال: مقدار $\int_C (z^2 + 1)^2 dz$ را در امتداد منحنی C به معادله پارامتری زیر از نقطه $t = 0$ تا $t = 2\pi$ محاسبه نمایید.

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

حل:

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad z_a = 0$$

$$t = 2\pi \Rightarrow \begin{cases} x = 2\pi a \\ y = 0 \end{cases} \quad z_b = 2\pi a$$

$$\int_0^{2\pi a} (z^2 + 1)^2 dz = \left(\frac{z^5}{5} + \frac{2z^3}{3} + z \right) \Big|_0^{2\pi a} \Rightarrow \frac{(2\pi a)^5}{5} + \frac{2(2\pi a)^3}{3} + (2\pi a) = 2\pi a(48\pi^4 a^4 + 40\pi^2 a^2 + 15)$$

قضیه (فرمول انتگرال کوشی):

فرض کنید $f(z)$ در حوزه همبند ساده D تحلیلی باشد، آنگاه به ازای هر نقطه z_0 از D و هر مسیر بسته ساده C در D که z_0 نقطه‌ای در درون آن باشد، داریم:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \quad \text{انتگرال در جهت مثبت انجام می‌شود.}$$

مثال: $\oint_C \frac{1}{z} dz$ روی هر مسیر بسته ساده که شامل مبدا باشد و شامل مبدا نباشد را بدست آورید.

$$f(z) = 1, z_0 = 0, f(0) = 1 \Rightarrow \oint_C \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i \quad \text{شامل مبدا باشد:}$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{z} dz = 0 \quad \text{شامل مبدا نباشد:}$$

مثال: انتگرال $\oint_C \frac{e^z}{z} dz$ را محاسبه نمایید (C عبارت است از دایره $|z| = 2$)

$$f(z) = e^z, z_0 = 0 \Rightarrow \oint_C \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i \cdot e^0 = 2\pi i$$

قضیه: اگر $f(z)$ در حوزه D تحلیلی باشد داریم:

که C مسیر بسته ساده‌ای در D است که z_0 در درون آن قرار دارد و در جهت مثبت پیموده می‌شود.

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

نکته مهم: شکل استاندارد حائز اهمیت است: $(2z - 1)^2 = 4(z - \frac{1}{2})^2$

مثال: انتگرال $\oint_C \frac{3z+1}{z^3-z^2} dz$ را محاسبه نمایید. مسئله را با حالت های مختلف برای C حل کنید.

الف: $|z| = \frac{1}{2}$ ب: $|z| = 2$ (در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت)

تمرین: ج: $|z - 2 - i| = 2$

الف: فقط $z = 0$ داخل دایره است. پس داریم:

$$\oint_C \frac{3z+1}{z^2(z-1)} dz \Rightarrow f(z) = \frac{3z+1}{z-1}, n+1=2 \Rightarrow n=1$$

$$\oint_C \frac{3z+1}{z^2(z-1)} dz = \frac{2\pi i}{1!} \cdot \left(\frac{3z+1}{z-1} \right)' \Big|_{z=0} = 2\pi i \cdot \frac{3(z-1) - 3z - 1}{(z-1)^2} \Big|_{z=0} = -8\pi i$$

ب: تفکیک کسرها: چون باید توابع صورت تحلیلی باشند که بتوان از رابطه استفاده کرد.

$$\frac{3z+1}{z^2(z-1)} = \frac{A}{z^2} + \frac{B}{z} + \frac{C}{z-1}$$

$$B = (f(z)(z^2))' \Big|_{z=0} = \left(\frac{3z+1}{z-1} \right)' \Big|_{z=0} = \frac{3(z-1) - (3z+1)}{(z-1)^2} \Big|_{z=0} = -4$$

$$A = f(z)(z^2) \Big|_{z=0} = -1$$

$$C = f(z)(z-1) \Big|_{z=1} = 4$$

$$\oint_C \frac{3z+1}{z^2(z-1)} dz = - \oint_C \frac{dz}{z^2} - 4 \oint_C \frac{dz}{z} + 4 \oint_C \frac{dz}{z-1} = 2\pi i \cdot \frac{(-1)'}{1!} - 4(2\pi i) + 4(2\pi i) = 0$$

تمرین: شماره ۱ و ۲

محاسبه برخی انتگرال‌های حقیقی به کمک انتگرال مختلط

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a + \cos \theta}, \quad a > 1$$

مثال: حاصل انتگرال حقیقی مقابل را محاسبه کنید.

$$z = re^{i\theta} \quad r = 1, -\pi < \theta < \pi \Rightarrow \frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} = iz \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = \frac{1}{2} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz \left(a + \frac{z + z^{-1}}{2} \right)} = \frac{1}{2} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\frac{i}{2} z^2 + iaz + \frac{i}{2}}$$

$$\text{استاندارد} = \frac{1}{2} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\frac{i}{2}(z^2 + 2az + 1)} = -i \int \frac{dz}{(z^2 + 2az + 1)}$$

$$z^2 + 2az + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4(1)(1)}}{2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

داخل دایره: $-a + \sqrt{a^2 - 1}$ خارج دایره: $-a - \sqrt{a^2 - 1}$

$$I = -i \int \frac{dz}{(z + a + \sqrt{a^2 - 1})(z + a - \sqrt{a^2 - 1})} = 2\pi i \cdot f(z_0)$$

$$= 2\pi i \cdot -i \cdot \frac{1}{-a + \sqrt{a^2 - 1} + a + \sqrt{a^2 - 1}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

تمرین: تمرین‌های ۳ و ۴ و ۵ و ۶

انتگرال توابعی گویا از $\cos \theta$ و $\sin \theta$:

برای محاسبه انتگرال‌هایی از نوع $I = \int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ که در آن F توابعی گویا از $\cos \theta$ و $\sin \theta$ و در فاصله $0 \leq \theta \leq 2\pi$ متناهی است. به صورت زیر عمل می‌شود:

$$z = e^{i\theta} \quad \cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad \sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

$$d\theta = \frac{dz}{iz} \quad \oint_C F\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}$$

که در آن C دایره $|z| = 1$ و در جهت مثلثاتی پیموده می‌شود.

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z^3(z^2+1)} dz = ?$$

مثال: مقدار انتگرال مقابل را محاسبه نمایید.

$$z = 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2} \quad \text{درون دایره :}$$

$$z = i \Rightarrow |i| = 1 > \frac{1}{2} \quad \text{بیرون دایره :}$$

$$z = -i \Rightarrow |-i| = 1 > \frac{1}{2} \quad \text{بیرون دایره :}$$

$$f(z) = \frac{e^z}{(z^2+1)} \Rightarrow f'(z) = \frac{e^z(z^2+1) - 2ze^z}{(z^2+1)^2} = \frac{(z-1)^2 e^z}{(z^2+1)^2} = \frac{(z-1)^2}{(z^2+1)^2} e^z$$

$$f''(z) = 2 \left(\frac{z^2+1-2z^2+2z}{(z^2+1)^2} \right) \left(\frac{z-1}{z^2+1} \right) e^z + \left(\frac{z-1}{z^2+1} \right)^2 e^z$$

$$f''(0) = -1, n+1=3 \Rightarrow n=2 \Rightarrow \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z^3(z^2+1)} dz = \frac{2\pi i \cdot f''(0)}{2!} = -\pi i$$

تمرین فصل دوم

۱- حاصل $\oint_C \frac{\ln(1+z^2)}{(2z-i)^2} dz$ ، که C منحنی $|z - \frac{i}{2}| = \frac{1}{3}$ در جهت مثبت است را محاسبه کنید؟

۲- مقدار انتگرال $\oint \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{z-2} dz$ را در صورتی که $C: |z| = \frac{1}{3}$ را به دست آورید؟

۳- حاصل $\oint_{|z|=5} \frac{e^z}{(z^2-6z)} dz$ را به دست آورید؟

۴- حاصل $\oint_{|z|=1} \frac{z+1}{(z^3-2z^2)} dz$ را به دست آورید؟

۵- مقدار انتگرال $\oint \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz$ را در صورتی که $C: |z| = 3$ را به دست آورید؟

۶- حاصل انتگرال $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{4} - \sin \theta}$ را محاسبه کنید؟

۷- اگر $z=x+iy$ باشد ، آن گاه مقدار انتگرال $\oint_{|z|=1} \frac{z}{z^3(z^2+1)} dz$ را به دست آورید؟

۸- انتگرال $\oint \frac{e^z}{z^2(z+2)} dz$ را به دست آورید؟

۹- اگر $U(x, y) = 2x(1 - y)$ و تابع u یک مزدوج همساز u باشد، $f'(z)$ را به دست آورید؟

۱۰- اگر $F(0)=0$ و $U(x, y) = x^3 - 3xy^2$ ، $f(z)$ را به دست آورید؟

فصل سوم

دنباله ها و سری ها

دنباله ها:

اگر به هر عدد صحیح مثبت n عددی مانند z_n نسبت داده شود، آنگاه گوییم اعداد z_1, z_2, \dots, z_n یک دنباله

را تشکیل می دهند. دنباله $\{z_n\}$ را همگرا گوییم اگر:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = Z \text{ عدد}$$

اگر دنباله همگرا نباشد، واگرا نامیده می شود.

مثال: دنباله ای که جملات آن به فرم $z_n = \frac{n-3}{2n+1}$ است. به چه عددی همگرا است؟

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

قضیه: دنباله z_1, z_2, \dots, z_n که در آن $z_n = x_n + iy_n$ به $z = x + iy$ همگرا است اگر و فقط اگر دنباله

های قسمت حقیقی x_1, x_2, \dots, x_n به x و دنباله های قسمت های موهومی y_1, y_2, \dots, y_n به y همگرا باشد.

دنباله کراندار:

دنباله $\{z_n\}$ را کراندار گوییم اگر عددی مثبت مانند M وجود داشته باشد به طوری که:

$$\forall n \in \mathbb{N}, |z_n| < M$$

اگر دنباله ای کراندار نباشد آن را بیکران نامیم.

قضیه: هر دنباله همگرا، کراندار است.

سری:

اگر z_1, z_2, \dots دنباله ای از اعداد مختلط باشد، مجموع زیر را سری نامتناهی یا سری نامیم.

$$\sum_{i=1}^{\infty} z_i = z_1 + z_2 + \dots \quad (*)$$

قضیه: اگر $z_n = x_n + iy_n$ باشد، گوییم سری همگرا به $z = x + iy$ است، اگر و فقط اگر سری قسمت های

حقیقی و سری قسمت های موهومی یعنی $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ و $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ به ترتیب به x و y همگرا باشند.

سری $(*)$ را همگرایی مطلق نامیم هرگاه سری زیر همگرا باشد:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |z_i| = |z_1| + |z_2| + \dots (**)$$

اگر سری (*) همگرا ولی سری (**) واگرا باشد، سری را همگرای مشروط نامیم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$$

هرگاه سری (*) همگرا باشد، آنگاه:

سری توانی، سری تیلور، سری لوران:

یک سری توانی برحسب توان های $z - z_0$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m (z - z_0)^m = C_0 + C_1 (z - z_0) + C_2 (z - z_0)^2 + \dots (*)$$

اگر $z_0 = 0$ ، حالت خاص سری توانی برحسب توان های z بدست می آید (بسط مک لورن)

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m (z)^m = C_0 + C_1 (z) + C_2 (z)^2 + \dots$$

ناحیه همگرایی را می توان با استفاده از آزمون نسبت معین نمود:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right|$$

اگر $R = \infty$ ، سری برای همه مقادیر z همگرا است.

اگر $R = 0$ ، سری فقط به ازای z_0 همگرا است.

اگر $0 < R < \infty$ ، آنگاه سری برای تمام مقادیر z که $|z - z_0| < R$ همگرا بوده و برای z هایی که $|z - z_0| > R$ واگرا می باشد.

R را شعاع همگرایی، $|z - z_0| = R$ را دایره همگرایی، $|z - z_0| < R$ را قرص همگرایی نامند.

قضیه: اگر سری (*) در نقطه $z = z_1$ همگرا باشد، این سری به ازای هر z که در رابطه‌ی

$$|z - z_0| < |z_1 - z_0|$$

صدق کند به طور مطلق همگرا است.

مثال: همگرایی سری زیر را بررسی نمایید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \Rightarrow \frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = 0 \Rightarrow R = \infty$$

به ازای هر z (متناهی) به طور مطلق همگرا است.

مشتق گیری از سری به صورت زیر می باشد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z)^n \xrightarrow{\text{مشتق}} \sum_{n=1}^{\infty} n C_n(z)^{n-1} = C_1 + 2C_2 z + \dots$$

قضیه: شعاع همگرایی سری مشتق یک سری توانی برابر با شعاع همگرایی سری اصلی است.

قضیه: انتگرال گیری از سری به صورت زیر می باشد که شعاع همگرایی آن برابر با شعاع همگرایی سری اصلی است.

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z)^n \xrightarrow{\text{انتگرال}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n+1} (z)^{n+1} = C_0 z + \frac{C_1}{2} z^2 + \dots$$

قضیه: هر سری توانی با شعاع همگرایی $R > 0$ در داخل همگرایی خود، تابع تحلیلی است.

قضیه تیلور:

فرض کنید $f(z)$ در حوزه D تحلیلی باشد و $z = z_0$ نقطه ای در D باشد، در این صورت دقیقاً یک سری به مرکز z_0 وجود دارد که $f(z)$ را نشان می دهد. این سری به صورت زیر است:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m (z - z_0)^m, \quad C_m = \frac{1}{m!} f^{(m)}(z_0), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

مثال: بسط مک لورن e^z را بدست آورید (در بسط مک لورن $z_0 = 0$)

$$C_m = \frac{1}{m!} f^{(m)}(z_0) = \frac{1}{m!} e^z \Big|_{z=z_0} = \frac{1}{m!} e^0 = \frac{1}{m!}$$

$$e^z = \sum_{m=0}^{\infty} C_m (z)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (z)^m = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots \quad |z| < \infty$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{m+1}}{C_m} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(m+1)!}}{\frac{1}{(m)!}} \right| = 0 \Rightarrow R = \infty$$

بسط مک لورن برخی از توابع مقدماتی مهم:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots \quad |z| < 1$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots \quad |z| < \infty$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \dots \quad |z| < \infty$$

مثال: بسط مک لورن توابع زیر را بدست آورید.

در بسط $\frac{1}{1-z}$ اگر به جای تمامی z ها $-z$ قرار دهید بسط مربوطه بدست می آید.

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)}$$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - \dots \quad |z| < 1$$

در بسط $\cos z$ اگر به جای z ، iz قرار دهیم بسط مربوطه بدست می آید.

$$\cos hz = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times \frac{(i)^{2n} * (z)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \dots \quad |z| < \infty$$

$$\sin hz = -i \sin iz$$

$$\sin hz = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times -i \times \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \times -i \times \overbrace{i^{2n+1}}^{(i^2)^n \cdot i} \times z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z)^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad |z| < \infty$$

$$\ln|1+z| = \int \frac{1}{1+z} dz = \int 1 - z + z^2 - \dots dz = z - \frac{z^2}{2} + \dots \quad |z| < 1$$

تمرین: تمرین شماره ۱

مثال: شعاع همگرایی سری زیر را بدست آورید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n \Rightarrow \frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4n^2}{n^2} \right| = 4 \Rightarrow R = \frac{1}{4}$$

نکته مهم:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} \quad \frac{1}{e} = e^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

ناحیه همگرایی را با استفاده از آزمون کشی نیز می توان معین نمود:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C_n}$$

مثال: شعاع همگرایی سری توانی زیر را بدست آورید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n \Rightarrow \frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow R = e$$

تمرین: تمرین شماره ۲

مثال: سری تیلور تابع $f(z) = \cos^2 z$ را حول نقطه $z = 0$ بدست آورید.

$$\cos^2 z = \frac{1}{2}(1 + \cos 2z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2z)^{2n}}{(2n)!}$$

اگر تابع $f(z)$ در حوزه D تحلیلی باشد، نقطه z_0 متعلق به D را صفر تابع $f(z)$ گوئیم هرگاه $f(z_0) = 0$ باشد.

فرض کنید z_0 یک صفر تابع $f(z)$ باشد، کوچکترین عدد صحیح n که $f_{z_0}^{(n)} \neq 0$ باشد را مرتبه صفر $f(z)$ گوئیم.

مثال: مرتبه صفر تابع $f(z) = z^2$ را در $z = 0$ پیدا کنید.

$$f'(z) = 2z \Rightarrow f'(0) = 0, f''(z) = 2 \Rightarrow f''(0) = 2 \Rightarrow f''(0) \neq 0$$

بنابراین مرتبه صفر برابر ۲ است.

نقطه‌ای از مجموعه A را نقطه تنها A نامیم اگر یک همسایگی از A وجود داشته باشد که هیچ نقطه دیگری از A را شامل نشود.

در بسیاری از موارد لازم است که تابع $f(z)$ حول نقطه‌ای که تابع در آن نقطه تکین است بسط داده شود. قضیه تیلور را نمی‌توان در این موارد به کار برد. برای این منظور از سری لوران استفاده می‌کنیم.

سری لوران:

اگر $f(z)$ روی دو دایره متحدالمرکز C_1 و C_2 به مرکز Z_0 و در طوق بین آن‌ها تحلیلی باشد، آنگاه $f(z)$ را می‌توان با سری لوران زیر نمایش داد:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(z - z_0)^n} = C_0 + C_1(z - z_0) + \dots + \frac{a_1}{z - z_0} + \frac{a_2}{(z - z_0)^2} + \dots$$

که در آن

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (z - z_0)^{n-1} f(z) dz$$

هریک از انتگرال‌ها روی مسیر بسته ساده‌ای مانند C که در طوق قرار دارد و در جهت مثبت فرمول به صورت خلاصه شده مطابق زیر می‌باشد:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \quad C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

سری لوران یک تابع تحلیلی، در طوق همگرایی منحصر به فرد است و این یکتا بودن حائز اهمیت است. زیرا معمولاً ضرائب مربوطه از فرمول‌های داده شده به دست نمی‌آیند و ما از روش‌های دیگری برای محاسبه آن استفاده می‌کنیم.

مثال: سری لوران تابع $f(z) = \frac{e^{-z}}{z^3}$ را بدست آورید.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \Rightarrow e^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!}$$

$$\frac{e^{-z}}{z^3} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{6} + \frac{z}{24} - \dots$$

مثال: سری لوران تابع $f(z) = \frac{\cos 2z}{z^2}$ را بدست آورید.

$$\frac{\cos 2z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left(1 - \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} - \dots \right) = \frac{1}{z^2} - 2 + \frac{2z^2}{3} - \frac{4z^4}{45} + \dots$$

مثال: بسط تابع $f(z) = \frac{1}{a-z}$ را حول $z = 0$ بدست آورید ($a > 0$).

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots \quad |z| < 1$$

$$f(z) = \frac{1}{a-z} = \frac{1}{a \left(1 - \frac{z}{a} \right)} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a} \right)^n \quad |z| < a$$

$$f(z) = \frac{1}{a-z} = \frac{1}{-z \left(1 - \frac{a}{z} \right)} = \frac{-1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z} \right)^n \quad |z| > a$$

$$f(z) = \frac{1}{a - (z - z_0)} = \frac{1}{-(z - z_0) \left(1 - \frac{a}{z - z_0} \right)} = \frac{-1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z - z_0} \right)^n \quad |z - z_0| > a$$

اگر تابع $f(z)$ در نقطه‌ای مانند $z = z_0$ تکینیتی تنها داشته باشد، می‌توان آن را با سری لوران که در یک همسایگی $z = z_0$ (به جز در $z = z_0$) اعتبار دارد نمایش داد.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(z - z_0)^n}$$

سری دوم را بخش اصلی $f(z)$ در نزدیکی $z = z_0$ می‌نامیم.

اگر تابع بخش اصلی در بسط لوران دارای تعداد متناهی جمله باشد یعنی سری بالا به صورت زیر بیان شود:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \frac{a_0}{(z - z_0)} + \dots + \frac{a_m}{(z - z_0)^m}$$

و $a_n = 0$ برای هر $n > m$ تکین f در $z = z_0$ را **قطب** و m را **مرتبه قطب** می‌نامیم.

برای تعیین مرتبه قطب می‌توان $\lim_{z \rightarrow 0} (z - z_0)^m f(z)$ را به ازای $m = 1, 2, 3, \dots$ محاسبه کنیم.

مقدار m که به ازای آن اولین بار، حد فوق برابر مقداری متناهی شود، مرتبه قطب است.

اگر تابع تحلیلی f ، تکینیتی غیر از قطب داشته باشد، این تکین را تکین ضروری f یا نقطه ویژه اساسی نامیم.

مثال: تابع زیر دارای چه قطب هایی و از چه مرتبه هایی است؟

$$f(z) = \frac{2}{z(z-1)^3} + \frac{-5}{(z-1)^2}$$

$$f(z) = \frac{2 - 5(z)(z-1)}{z(z-1)^3} = \frac{-5z^2 + 5z + 2}{z(z-1)^3}$$

$z = 0$ قطب ساده و $z = 1$ قطب مرتبه ۳ است.

مثال: تابع $e^{\frac{1}{z}}$ دارای چه نقاط تکینیتی است؟

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \dots$$

تکین ضروری تنها: $z = 0$

اگر تابع تحلیلی $f(z)$ در $z = a$ دارای قطبیتی باشد، آنگاه اگر $z \rightarrow a$ خواهیم داشت: $|f(z)| \rightarrow \infty$

مثال: در مورد تابع زیر نقاط $z = 2$ و $z = -2$ چه نقطه‌هایی هستند؟

$$f(z) = \frac{z^7}{(z^2 - 4)^2 e^{\frac{1}{z-2}}} = \frac{z^7}{(z-2)^2 (z+2)^2 e^{\frac{1}{z-2}}}$$

$z = \pm 2$ نقاط تکین تابع و $z = -2$ قطب مرتبه دوم و $z = 2$ نقطه ویژه اساسی می‌باشد.

نقطه $z = z_0$ را یک تکین برداشتنی گوئیم اگر تابع $f(z)$ در $z = z_0$ تحلیلی نباشد ولی بتوان آن را در $z = z_0$ به نحوی تعریف کرد که در آن نقطه تحلیلی شود.

مثال: نقطه $z = 0$ در تابع $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z}$ چه نقطه‌ای است؟

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z} = \frac{1}{z} \left(1 - 1 + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \dots \right) = \frac{z}{2!} - \frac{z^3}{4!}$$

$z = 0$ نقطه تکین برداشتنی است.

تمرین: تمرین شماره ۳

تمرین: سری لوران تابع $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$ در ناحیه $|z-1| > 2$ را بدست آورید.

ابتدا تابع را به نحوی می نویسیم که تمام عبارت های آن شامل $z-1$ باشد.

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{(z-1)((z-1)+2)}$$

مثال: سری لوران تابع $f(z) = \frac{3}{2+z-z^2}$ در ناحیه $1 < |z| < 2$ را بیابید.

$$f(z) = \frac{3}{2+z-z^2} = \frac{A}{1+z} + \frac{B}{2-z} = \frac{1}{1+z} + \frac{1}{2-z}$$

$$\frac{1}{1+z} = \frac{-1}{-z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{-z}\right)^n \quad |z| > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n} \quad |z| > 1$$

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\frac{z}{2}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \quad |z| < 2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad |z| < 2$$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

تمرین : تمرین شماره ۴

مثال: سری لوران تابع $f(z) = \frac{1-2z}{z^4-1}$ در ناحیه $|z| < 1$ را بدست آورید.

$$f(z) = (2z-1) \frac{1}{1-z^4} = (2z-1) \sum_{n=0}^{\infty} z^{4n} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} z^{4n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} z^{4n}$$

مثال: سری لوران تابع $f(z) = \frac{\sin z}{z-\pi}$ حول نقطه $z = \pi$ را بدست آورید.

$$\frac{\sin((z-\pi)+\pi)}{z-\pi} = -\frac{\sin(z-\pi)}{(z-\pi)} = \frac{-1}{(z-\pi)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \dots \quad |z| < \infty$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-\pi)^{2n}}{(2n+1)!}$$

تمرین فصل سوم

۱- بسط مک لورن $\ln \left| \frac{1+z}{1-z} \right|$ را به دست آورید؟

۲- شعاع هم گرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$ را به دست آورید؟

۳- نقطه $z=1$ در تابع $e^{\frac{-1}{(z-1)^2}}$ چه نوع نقطه ای است؟

۴- سری لوران تابع $F(z) = \frac{3}{z^2+z-2}$ در ناحیه $|z| > 2$ را به دست آورید؟

فصل چهارم

انتگرال گیری به روش مانده ها

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n + \frac{C_{-1}}{z - z_0} + \frac{C_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots$$

$$C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-1+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz \Rightarrow \oint_C f(z) dz = 2\pi i \cdot C_{-1}$$

ضریب C_{-1} را مانده $f(z)$ در نقطه $z = z_0$ گویند و آن را با نماد زیر نشان می دهند:

$$C_{-1} = \operatorname{Res}_{z = z_0} f(z)$$

روش های محاسبه مانده:

اگر $f(z)$ در نقطه $z = a$ دارای یک قطب ساده باشد، آنگاه:

$$\operatorname{Res}_{z = a} f(z) = C_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z)$$

اگر $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ و $p(z)$ و $q(z)$ در $z = a$ تحلیلی و $p(a) \neq 0$ و $q(z)$ دارای یک صفر ساده در $z = a$ باشد، آنگاه:

$$\operatorname{Res}_{z = a} f(z) = \operatorname{Res}_{z = a} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(a)}{q'(a)}$$

اگر $z = a$ یک قطب مرتبه m تابع $f(z)$ باشد، آنگاه:

$$\operatorname{Res}_{z = a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - a)^m f(z) \right]$$

قضیه مانده:

فرض کنید C مرز ساده و بسته ای باشد که در درون و روی آن به جز در تعداد متناهی از نقاط منفرد Z_1, Z_2, \dots, Z_n که در داخل C واقع اند، تحلیلی است، آنگاه:

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{Res} f(z)_{z=Z_j}$$

در جهت مثبت C

مثال: مانده تابع $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$ در $z = \pm 1$ را حساب کنید.

$$\operatorname{Res} f(z)_{z=+1} = \lim_{z \rightarrow +1} [f(z)] = \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{Res} f(z)_{z=-1} = \frac{1}{(1)!} \lim_{z \rightarrow -1} \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-1} \right) \right] = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{-1}{(z-1)^2} = \frac{-1}{4}$$

مثال: مانده سری لوران تابع $f(z) = \frac{e^z}{1-z}$ در مجاورت $z = 0$ را بدست آورید.

$$f(z) = (1 + z + z^2 + \dots) \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots \right)$$

باید ضریب جمله $\frac{1}{z}$ را پیدا کنیم:

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{2!z} + \dots + \frac{1}{3!z}$$

پس ضریب جمله $\frac{1}{z}$ برابر است با:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

همچنین داریم:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \Rightarrow e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$\operatorname{Res} f(z)_{z=a} = e$$

مثال: مانده تابع $ze^{\frac{-1}{z-1}}$ در $z = 1$ بدست آورید.

$$f(z) = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (z-1)^n} = (z-1) \left(1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2! (z-1)^2} - \dots \right)$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2! (z-1)^2} - \dots \right) = (z-1) - 1 + \frac{1}{2! (z-1)} - \dots + 1 - \frac{1}{z-1}$$

ضریب $\frac{1}{z-1}$ برابر با $\frac{-1}{2}$ است.

تمرین: تمرین شماره ۱ و ۲ و ۳

مثال: مبداء مختصات چه نوع ویژگی برای تابع $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ است و مانده تابع در این نقطه چند است؟

$$\lim_{z \rightarrow 0} (z-0)^m f(z) \quad m = 1, 2, \dots$$

اولین m که مقدار آن متناهی می شود و مرتبه قطب است.

$$\lim_{z \rightarrow 0} (z)^m \frac{\sin z}{z^2} = 1$$

بنابراین $z = 1$ قطب ساده است.

$$\text{Res } f(z)_{z=0} = \lim_{z \rightarrow 0} (z)^m \frac{\sin z}{z^2} = 1$$

مثال: نوع نقاط تکین تابع $f(z) = \frac{1}{1-\cos z}$ و مقدار $I = \int_C \frac{dz}{1-\cos z}$ وقتی $|z| = 1$ در جهت مثبت باشد را بدست آورید.

$$1 - \cos z = 0 \Rightarrow z = 2k\pi \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

نقاط تکین

فقط $z = 0$ درون دایره $|z| = 1$ است. برای بدست آوردن مرتبه این قطب داریم:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{1 - \cos z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{2 \sin^2 \frac{z}{2}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{2 \left(\frac{z}{2}\right)^2} = \infty$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{1 - \cos z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{2 \sin^2 \frac{z}{2}} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{2 \left(\frac{z}{2}\right)^2} = 2 \quad \text{متناهی و دوم مرتبه قطب}$$

$$\begin{aligned} \text{Res } f(z) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z^2}{1 - \cos z} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2z(1 - \cos z) - \sin z (z)^2}{(1 - \cos z)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2z(1 - \cos z) - z^2 \sin z}{1 + \underbrace{\cos^2 z}_{1 - \sin^2 z} - 2 \cos z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2z \left(\sin^2 \frac{z}{2} \right) - z^2 \sin z}{-\sin^2 z + 2 \left(\frac{1 - \cos z}{\sin^2 \frac{z}{2}} \right)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2z * \frac{z^2}{4} - z^3}{-z^2 + 2 \left(\frac{z}{2} \right)^2} = z = 0 \end{aligned}$$

$$I = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res } f(z)_{z=z_j} = 0$$

مثال: اگر مقدار انتگرال زیر برابر است با $2\pi i M$ که در آن M مجموع مانده های تابع در قطب های واقع در درون دایره در جهت مثبت $C: |Z| = 3$ است. در این صورت مقدار این انتگرال

$$\oint_C \frac{e^z dz}{(z^2 + 4)(z - 4)}$$

$$(z^2 + 4)(z - 4) = 0 \Rightarrow z = 4, 2i, -2i$$

نقاط $\pm 2i$ درون دایره $|Z| = 3$ است.

$$|2i + 1| + |2i - 1| = 2\sqrt{5} < 4\sqrt{3}$$

$$|-2i + 1| + |-2i - 1| = 2\sqrt{5} < 4\sqrt{3}$$

$$|4 + 1| + |4 - 1| = 8 > 4\sqrt{3}$$

پس نقاط $\pm 2i$ درون C_2 هستند و مقدار انتگرال روی C با مقدار انتگرال روی C_2 برابر است:

$$\oint_{C_2} \frac{e^z dz}{(z^2 + 4)(z - 4)} = 2\pi i M$$

مثال: فرض کنید C بیضی $\frac{(X+4)^2}{9} + \frac{Y^2}{16} = 1$ در جهت مثبت مثلثاتی باشد. آنگاه مقدار $f'(2)$ را زیر بدست آورید.

$$f(w) = \oint_C \frac{z^2 - z + 1}{z(z-w)} dz$$

$$z = 0 \Rightarrow \frac{16}{9} > 0 \text{ خارج دایره}$$

به ازای $z = w$ که خارج از بیضی است $f(w) = 0$ و $f'(2) = 0$ که $w = 2$ خارج بیضی است.

$$f(w) = 2\pi i * \frac{w^2 - w + 1}{w} \quad \text{به ازای } z = w \text{ که داخل از بیضی است :}$$

تمرین : تمرین شماره ۴ و ۵ و ۶

مثال: انتگرال زیر را با توجه به این که C دایره‌ای است به شعاع e و مرکز مبدا را بدست آورید.

$$\oint_{C^+} \sin\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

درون دایره : $z = 1$

$$\sin\left(1 + \frac{1}{z-1}\right) = \sin(1) \cos\left(\frac{1}{z-1}\right) + \cos(1) \sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$$

$$\cos\left(\frac{1}{z-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} * \left(\frac{1}{z-1}\right)^{2n} \Rightarrow Res(1) = 0$$

$$I = \oint_{C^+} \sin\left(\frac{z}{z-1}\right) = 2\pi i * (Res(1) + Res(2)) = 2\pi i * \cos(1)$$

مثال : مقدار انتگرال $I = \oint_C \frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z} dz$ که در آن $C: |z|=1$ است را به دست آورید ؟

$$\text{Res } F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \sin \frac{1}{z} = \sin 1$$

$$F(z) = \frac{-1}{1-z} \sin \frac{1}{z} = (1+z+z^2+\dots) \left(\frac{-1}{z} + \frac{1}{3!z^3} + \dots \right)$$

$$\frac{1}{z} = -1 + \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!} + \dots = -\sin 1$$

$$\text{Res } F(z) = -\sin 1$$

$$I = 2\pi i(-\sin 1 + \sin 1) = 0$$

تمرین : تمرین شماره ۷

مثال : فرض کنید مرز C مربعی با رئوس های $\pm\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$ در جهت مثبت پیموده شده اند. در این صورت

$$\oint_C \frac{\cos h\pi z}{z(z^2+1)} dz \text{ را به دست آورید ؟}$$

$$\oint_C \frac{\cos h\pi z}{z(z^2+1)} dz = 2\pi i \left[\text{Res } f(z)_{z=0} + \text{Res } f(z)_{z=i} + \text{Res } f(z)_{z=-i} \right]$$

$$= 2\pi i \left[\frac{\cosh 0}{1} + \frac{\cosh i}{2i^2} + \frac{\cosh \pi i}{-2i(-i)} \right]$$

$$= 2\pi i \left[\frac{\cosh 0}{1} + \frac{\cosh i^2 \pi}{-2} + \frac{\cosh -i^2 \pi}{-2} \right] = 4\pi i$$

محاسبه ی انتگرال های حقیقی ناسره

قضیه : اگر $f(z)$ تابعی گویا و دارای قطب روی محور های X ها نباشد و درجه مخرج حداقل دو درجه

بیشتر از درجه صورت باشد ، آن گاه

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{y>0} \text{Res } f(z)$$

مثال : مقدار انتگرال $I = \int_0^{\infty} \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}$ را محاسبه کنید ؟

تابع $F(x)$ زوج است ، پس داریم :

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4} dx = \frac{1}{2} \times 2\pi i \left[\text{Res } f(z) \Big|_{z=2i} + \text{Res } f(z) \Big|_{z=i} \right]$$

$$= \pi i \left[\lim_{z \rightarrow 2i} (z-2i)f(z) + \lim_{z \rightarrow i} (z-i)f(z) \right]$$

$$= \pi i \left[\frac{2 \times (2i)^2}{4i \times ((2i)^2 + 1)} + \frac{2i^2 - 1}{2i \times (i^2 + 4)} \right] = \pi i \times \frac{9-6}{12i} = \frac{\pi}{4}$$

تمرین : تمرین شماره ۸

فرض کنید $f(x)$ تابعی گویا به صورت $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ و به ازای مقدار حقیقی x ، $f(x)$ مخالف صفر باشد ،
قضیه مانده ها میتواند در محاسبه ی انتگرال های زیر مفید باشند :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos ax \, dx = \text{Real} \left[2\pi i \sum_{y>0} \text{Res } f(z) e^{iaz} \right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin ax \, dx = \text{Im} \left[2\pi i \sum_{y>0} \text{Res } f(z) e^{iaz} \right]$$

مثال : مقدار انتگرال ناسره $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2} dx$ را به دست آورید ؟

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2} dx = \text{Real} \left[2\pi i \text{Res} \frac{e^{2iz}}{z^2+1} \right] = \text{Re} \left[2\pi i \frac{e^{-2}}{2i} \right] = \frac{\pi}{e^2}$$

مثال : انتگرال غیر عادی $I = \int_0^{+\infty} \frac{w \sin wx}{w^2+1} dw$ را به دست آرید ؟

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w \sin wx}{w^2+1} dw = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[2\pi i \operatorname{Res} \frac{z}{z^2+1} e^{ixz} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[2\pi i \operatorname{Res} \frac{i}{2i} e^{-x} \right] = \frac{\pi}{2} e^{-x}$$

مثال : انتگرال غیر عادی $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos mx}{(x^2+1)^2} dx$ ($m > 0$) را به دست آورید ؟

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[2\pi i \operatorname{Res} \frac{e^{imz}}{(z+i)^2(z-i)^2} \right]$$

$$\operatorname{Re} \frac{e^{imz}}{(z+i)^2(z-i)^2} = \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{d}{dz} \frac{e^{imz}}{(z+i)^2} \right] =$$

$$\lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{ime^{imz}(z+i)^2 - 2e^{imz}(z+i)}{(z+i)^4} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{ime^{imz}(z+i) - 2e^{imz}}{(z+i)^3} \right]$$

$$= \frac{-2me^{-m} - 2e^{-m}}{-8i} = \frac{e^{-m}(1+m)}{4i} \Rightarrow I = \operatorname{Re} \left[\pi i \times \frac{e^{-m}(1+m)}{4i} \right]$$

$$= \frac{\pi}{4} e^{-m}(1+m)$$

تمرین : تمرین شماره ۹

تمرین فصل چهارم

- ۱- مقدار مانده تابع $f(z) = (z-1)^5 \cos\left(\frac{-1}{z-1}\right)$ در $z=1$ را محاسبه کنید؟
- ۲- مقدار مانده تابع $\frac{z^2}{(z-1)(z^2+1)}$ در نقطه i را به دست آورید؟
- ۳- مقدار مانده تابع $\frac{1}{z(z+2)^3}$ در $z=-2$ را به دست آورید؟
- ۴- انتگرال $\int_c \tan z \, dz$ که c دایره $|z|=3$ در جهت مثبت مثلثاتی باشد را حساب کنید؟
- ۵- انتگرال $I = \int_c \frac{\sin z}{z^4} dz$ که در c دایره $|z|=3$ را حساب کنید؟
- ۶- انتگرال $I = \int z^2 e^{\frac{1}{z}}$ را محاسبه کنید؟
- ۷- انتگرال $I = \int_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right) e^{\frac{1}{z}}$ را محاسبه کنید؟
- ۸- انتگرال $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-1}{x^4+5x^2+4} dw$ را محاسبه کنید؟
- ۹- اگر $n > 0$ عدد درست باشد، آن گاه $\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(n\theta - \sin \theta)$ را به دست آورید؟

فصل پنجم

سری و انتگرال فوریه

$F(x+P)=F(x)$: P تناوب با دوره ی $F(x)$ متناوب

کوچکترین عدد $P>0$ دوره تناوب تابع $F(x)$

$\sin x$ و $\cos x$ متناوب با دورهی تناوب 2π

$$\cos 2x \Rightarrow 2x = 2\pi \Rightarrow x = \pi$$

دوره تناوب

$$\cos \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = 2\pi \Rightarrow x = 4\pi$$

دوره تناوب

$$\sin (2x + \pi) \Rightarrow 2x = 2\pi \Rightarrow x = \pi$$

دوره تناوب

نکته : اگر $f_1(x)$ و $f_2(x)$ توابعی متناوب با دوره تناوب P باشند ، آن گاه $f(x) = af_1(x) + bf_2(x)$

(a و b ثابت) نیز تابعی متناوب با دوره تناوب P است.

*تابع $f(x)$ را در یک فاصله به طور قطعه ای پیوسته گوییم هرگاه بتوان فاصله را به تعداد متناهی زیر فاصله

تقسیم کرد به طوری که در هر یک از این زیر فواصل تابع $f(x)$ پیوسته و حد چپ و راست تابع $f(x)$ در هر

یک از نقاط انتهایی زیر فاصله ها متناهی باشد.

تعریف : فرض کنید تابع $f(x)$ در فاصله ی $(-L, L)$ تعریف شده و در خارج این فاصله داشته باشیم

$$f(x + 2L) = f(x)$$
 یعنی تابع $f(x)$ دارای تناوب $2L$ باشد. سری فوریه یا بسط فوریه متناظر با $f(x)$

به صورت زیر است :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ضرایب a_n و b_n را از فرمول های زیر نیز میتوان به دست آورد.

$$a_n = \frac{1}{l} \int_c^{c+2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_c^{c+2l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

سری بالا فقط یک سری متناظر با $f(x)$ است، نمیدانیم همگرا است یا خیر.

قضیه (شرایط دیریکله): فرض کنید تابع $f(x)$ در فاصله $(-l, l)$ تعریف شده است.

$f(x)$ و $f'(x)$ در $(-l, l)$ به طور قطعه ای پیوسته باشند، آنگاه سری بالا به سمت

الف) $f(x)$ همگرا است اگر X یک نقطه همگرایی باشد.

ب) $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ همگراست، اگر X یک نقطه ناپیوستگی باشد.

بنابراین در هر نقطه پیوستگی X ، میتوان نوشت:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

شرایط اعمال شده در قضیه بالا، شرایط کافی هستند ولی لازم نیستند. یعنی اگر شرایط برقرار باشند همگرایی تضمین می شود و اگر شرایط برقرار نباشد ممکن است سری همگرا یا واگرا باشد. یعنی همگرایی سری فوریه در صورت پیوستگی $f(x)$ تضمین میشود.

مثال (دوره تناوب تابع $f(x) = |\sin x|$ را به دست آورید؟

$$f(x + \pi) = |\sin(x + \pi)| = |-\sin x| = |\sin x| = f(x)$$

مثال (تابع $f(x)$ به فرم زیر است. مقدار این تابع را در $x = \frac{l}{2}$ به دست آورید؟

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x > \frac{l}{2} \\ 1 & x < \frac{l}{2} \end{cases}$$

با توجه به شرایط دیریکله در نقاط ناپیوستگی داریم:

$$f \frac{l}{2} = \frac{1}{2} (f(x+0) + f(x-0)) = \frac{1}{2} (1+0) = \frac{1}{2}$$

مثال : هرگاه سری فوریه مثلثاتی به صورت زیر باشد ، آنگاه برای $f(x) = (\sin x + \cos 2x)^2$ مقدار b_3 را به دست آورید ؟

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad y = f(x), -\pi < x < \pi, T = 2\pi$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + \dots + b_1 \sin x + \dots + b_3 \sin 3x$$

$$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 2x + 2 \sin x \cos 2x = \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} + \sin 3x - \sin x \Rightarrow b_3 = 1$$

مثال : بسط فوریه تابع دلتای دیراک را به دست آورید ؟

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(t) dt = \frac{1}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(t) \sin nt dt = 0$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum \cos nt$$

مثال : سری فوریه مثلثاتی تابع $f(t) = \sin^2 t * \cos 2t$ را با تناوب 2π را به دست آورید ؟

$$f(t) = \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) \cos 2t = \frac{1}{2} \cos 2t - \frac{1}{2} \cos^2 2t = \frac{1}{2} \cos 2t - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 4t$$

مثال: سری فوریه مثلثاتی تابع متناوب f با یک دوره تناوب $2l$ را به دست آورید؟

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \frac{l}{2} \leq x < \frac{3l}{2} \\ 0 & 0 \leq x < \frac{l}{2} \text{ یا } \frac{3l}{2} < x < 2l \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{\frac{l}{2}}^{\frac{3l}{2}} dx = 1$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \int_{\frac{l}{2}}^{\frac{3l}{2}} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \times \frac{-l}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{l} \Big|_{\frac{l}{2}}^{\frac{3l}{2}} \\ &= \frac{-1}{n\pi} \left[\cos \frac{3n\pi}{2} - \cos \frac{n\pi}{2} \right] = 0 \end{aligned}$$

n فرد هر دو \cos صفر

n زوج $1-1=0$ یا $-1+1=0$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{\frac{l}{2}}^{\frac{3l}{2}} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{l} \Big|_{\frac{l}{2}}^{\frac{3l}{2}} = \frac{1}{n\pi} \left(\sin \frac{3n\pi}{2} - \sin \frac{n\pi}{2} \right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{زوج } n = 2k \\ \frac{2(-1)^k}{(2k-1)\pi} & \text{فرد } n = 2k-1 \end{cases}$$

سری فوریه و توابع زوج و فرد

تابع زوج $\forall x \in Df, f(-x) = f(x)$

تابع فرد $\forall x \in Df, f(-x) = -f(x)$

$\sin x$ تابعی فرد و $\cos x$ تابعی زوج است.

$$f(x) \text{ زوج} \Rightarrow \int_{-l}^l f(x) dx = 2 \int_0^l f(x) dx$$

$$f(x) \text{ فرد} \Rightarrow \int_{-l}^l f(x) dx = 0$$

اگر $f(x)$ تابعی زوج یا فرد باشد، در تعیین ضرایب فوریه میتوان از محاسبات غیر ضروری اجتناب کرد.

قضیه: سری فوریه تابع زوج $f(x)$ با دوره تناوب $2l$ تنها یک سری فوریه کسینوسی است.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

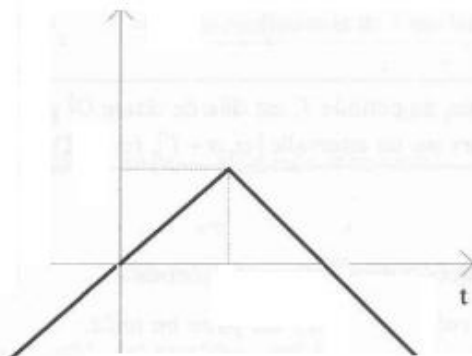
قضیه: سری فوریه تابع فرد $f(x)$ با دوره تناوب $2l$ تنها یک سری فوریه سینوسی است.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

مثال: سری فوریه تابع زیر را بنویسید؟

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}t & -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi(\pi - t)}{4} & \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$



$\pi - t$	$\sin nt$
-1	$\frac{-1}{n} \cos nt$
0	$\frac{-1}{n^2} \sin nt$

$+$	t	$\sin nt$
$-$	1	$\frac{-1}{n} \cos nt$
$+$	0	$\frac{-1}{n^2} \sin nt$

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi t}{4} \sin nt \, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi(\pi - t)}{4} \sin nt \, dt \right] =$$

$$\frac{1}{2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin nt \, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - t) \sin nt \, dt \right] =$$

$$\frac{1}{2} \left[\left. \frac{-1}{n} t \cos nt \right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n^2} \sin nt \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n} (\pi - t) \cos nt \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n^2} \sin nt \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right] =$$

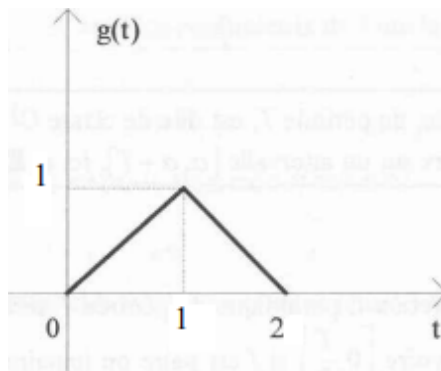
$$\frac{1}{2} \left[\frac{-1}{n} \frac{\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n} \times \frac{-\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right] = \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2} & \text{فرد } n = 2k-1 \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$f(t) = \sum \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2} \sin((2k-1)t)$$

مثال: اگر تابع $f(t)$ به صورت زیر تعریف شده باشد. آن گاه سرس فوریه تابع $f(t)$ را به دست آورید؟

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1 \\ 2-t & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$



+	t	$\cos n\pi t$
-	1	$\frac{1}{n\pi} \sin n\pi t$
+	0	$\frac{-1}{(n\pi)^2} \cos n\pi t$

$$a_0 = 2 \int_0^1 t \, dt = 1, \quad b_n = 0$$

$$a_n = 2 \int_0^1 t \cos n\pi t dt = 2 \left[\frac{t}{n\pi} \sin n\pi t + \frac{\cos n\pi t}{(n\pi)^2} \right] = \frac{2(\cos n\pi - 1)}{(n\pi)^2} =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ \frac{-4}{((2k-1)\pi)^2} & \text{فرد } n = 2k - 1 \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)\pi t)$$

تمرین : تمرین های شماره ۱

مثال : تابع $f(x) = \cos \alpha x$, $-\pi < x < \pi$ با α عدد ثابت نادرست مفروض است . سری فوریه این تابع را به دست آورید ؟

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos \alpha x dx = \frac{2 \sin \alpha \pi}{\alpha \pi}, \quad b_n = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos \alpha x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2} [\cos(\alpha + n)x + \cos(\alpha - n)x] dx =$$

$$\frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(\alpha + n)x}{\alpha + n} \right]_0^\pi + \frac{\sin(\alpha - n)x}{\alpha - n} \left[\right]_0^\pi =$$

$$\frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\alpha + n} \sin(\alpha + n)\pi + \frac{1}{\alpha - n} \sin(\alpha - n)\pi \right] =$$

$$\frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\alpha + n} (\sin \alpha \pi \cos n\pi + \cos \alpha \pi \sin n\pi) + \right.$$

$$\left. \frac{1}{\alpha - n} (\sin \alpha \pi \cos n\pi - \sin n\pi \cos \alpha \pi) \right]$$

$$\frac{1}{\pi} \left[\frac{\alpha \sin \alpha \pi \cos n\pi - n \sin \alpha \pi \cos n\pi + \alpha \sin \alpha \pi \cos n\pi + n \sin \alpha \pi \cos n\pi}{\alpha^2 - n^2} \right] =$$

$$\frac{2\alpha \sin \alpha \pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \cdot \cos n\pi = \begin{cases} \frac{2\alpha \sin \alpha \pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)} & \text{زوج } n \\ \frac{-2\alpha \sin \alpha \pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)} & \text{فرد } n \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha \sin \alpha \pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \cos nx$$

تمرین : تمرین شماره ۲

به دست آوردن مقادیر برخی از سری ها به کمک تبدیل و سری فوریه

مثال : حاصل سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$ را به کمک بسط فوریه تابع متناوب $f(x) = |x|$ در فاصله $(-1,1)$ بیابید ؟

+	x	$\cos n\pi x$
-	1	$\frac{1}{n\pi} \sin n\pi x$
+	0	$\frac{-1}{(n\pi)^2} \cos n\pi x$

$$a_0 = 2 \int_0^1 t dt = 1, \quad b_n = 0$$

$$a_n = 2 \int_0^1 x \cos n\pi x dx = 2 \left[\frac{x}{n\pi} \sin n\pi x \right]_0^1 + \frac{1}{(n\pi)^2} \cos n\pi x \Big|_0^1 =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ \frac{-4}{(2k-1)^2 \pi^2} & \text{فرد } n \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos \frac{n\pi}{l} x dx + \sum b_n \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)\pi x$$

اگر $x = 0$ باشد داریم:

$$|x| = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

مثال : اگر $\frac{\pi}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = 2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1+\cos nx)^2}{(n^2-1)^2}$ و n عددی زوج است. آن گاه مقدار عبارت $\frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \dots$ را به دست آورید ؟

به ازای $x = 0$ ، طرف دوم رابطه به صورت زیر است :

$$2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1 + \cos nx)^2}{(n^2 - 1)^2} = 2 + 4 \left(\frac{1}{1^2 \times 3^2} + \frac{1}{3^2 \times 5^2} + \dots \right)$$

از طرفی داریم :

$$\frac{\pi}{4} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{4} \int_0^{+\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{4} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\frac{\pi^2}{4} = 2 + 4 \left(\frac{1}{1^2 \times 3^2} + \frac{1}{3^2 \times 5^2} + \dots \right) \Rightarrow \left(\frac{1}{1^2 \times 3^2} + \frac{1}{3^2 \times 5^2} + \dots \right) = \frac{\pi^2 - 8}{16}$$

بسط نیم دامنه

به دست آوردن سری فوریه در توابعی که در فاصله متناهی تعریف شده اند.

مثلا تابع $f(x)$ بر فاصله ای مانند $0 \leq x \leq l$ تعریف شده است و می خواهیم روی همین فاصله، $f(x)$ را با یک سری فوریه نمایش دهیم.

این تابع به علت متناوب نبودن دارای بسط فوریه نیست اما می توان توابع زوج یا فردی را چنان تعریف نمود که سری فوریه آن ها در فاصله $0 \leq x \leq l$ بر تابع $f(x)$ منطبق باشد، مثلا تابع $f_1(x)$ را به صورت زیر تعریف میکنیم :

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq l \\ g(x) & -l \leq x \leq 0 \end{cases} \quad f_1(x+2l) = f_1(x)$$

$g(x)$ هر تابع دلخواهی می تواند باشد. اما سری های فوریه متناظر از گسترش زوج و فرد $f(x)$ کاربردی ترند.

در گسترش زوج قرار می دهیم: $g(x) = f(-x)$ و داریم :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_c^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

در گسترش فرد قرار می دهیم: $g(x) = -f(-x)$ و داریم:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



مثال: بسط نیم دامنه ی کسینوس فوریه تابع $f(t) = 1 - \frac{t}{2}$, $0 < t < 2$ را به دست آورید؟

+	$1 - \frac{t}{2}$	$\cos \frac{n\pi t}{2}$
-	$\frac{-1}{2}$	$\frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi t}{2}$
+	0	$-\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \cos \frac{n\pi t}{2}$

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) dt = \int_0^2 \left(1 - \frac{t}{2}\right) dt = \left[t - \frac{t^2}{4}\right]_0^2 = 1$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos \frac{n\pi t}{l} dt = \int_0^2 \left(1 - \frac{t}{2}\right) \cos \frac{n\pi t}{2} dt =$$

$$\left(1 - \frac{t}{2}\right) \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi t}{2} \Big|_0^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \cos \frac{n\pi t}{2} \Big|_0^2 = -\frac{1}{2} * \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 [(-1)^n - 1]$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{زوج } n = 2k \\ \frac{4}{(2k-1)^2 \pi^2} & \text{فرد } n = 2k-1 \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum \frac{1}{(2k-1)^2} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi t}{2}\right)$$

انتگرال گیری جمله به جمله از سری فوریه

قضیه: اگر سری فوریه تابع پیوسته قطعه ای $f(x)$ در فاصله تناوب $-l < x < l$ به صورت زیر بیان شده باشد:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

آن گاه:

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{a_0}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{n\pi} \left(a_n \sin \frac{n\pi x}{l} - b_n \cos \frac{n\pi x}{l} \right) + C$$

مثال: اگر بسط فوریه $f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$ به صورت $f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right)$ باشد، آن گاه بسط فوریه تابع $f(x) = |x|$ ، $-\pi < x < \pi$ را به دست آورید؟

$$|x| = \frac{-4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + C$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = 0 + C \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

مثال: اگر سری فوریه تابع $f(x) = \frac{x}{2}$ ، $-\pi < x < \pi$ به صورت زیر باشد، بسط فوریه تابع

$$f(x) = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots, \quad T = 2\pi$$

آن گاه سری فوریه تابع $g(x) = x^2$ ، $-\pi < x < \pi$ ، $T = 2\pi$ را به دست آورید؟

$$\frac{x^2}{4} = -\cos x + \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 3x}{9} + \dots + C \quad C = \frac{a_0}{2}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x^2}{4} dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3}{12} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow C = \frac{\pi^2}{12}$$

$$x^2 = 4 * \left(-\cos x + \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 3x}{9} + \dots \right) + \frac{\pi^2}{3}$$

تساوی پار سوال

اگر تابع $f(x)$ در فاصله متناوب $[-l, l]$ در شرایط قضیه دیریکله صدق کند و داریم:

$$\frac{1}{T} \int_0^T f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \quad \text{یا}$$

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^l [f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$$

مثال: اگر بسط $f(x) = \sin x$, $0 < x < \pi$ به صورت زیر باشد.

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1 + \cos n\pi}{n^2 - 1} \right) \cos nx$$

مقدار سری $\frac{1}{1^2 \times 3^2} + \frac{1}{3^2 \times 5^2} + \dots$ را محاسبه کنید؟ (n عددی زوج است.)

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(2k)^2 - 1} \right) \cos 2kx$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{16}{\pi^2 (4k^2 - 1)^2} \right)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2(x) dx = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2} + \sum \frac{8}{\pi^2 (2k - 1)^2 (2k + 1)^2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2} \sum \frac{1}{(2k - 1)^2 (2k + 1)^2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2 \times 3^2} + \frac{1}{3^2 \times 5^2} + \dots \right)$$

$$\left(\frac{1}{1^2 \times 3^2} + \frac{1}{3^2 \times 5^2} + \dots \right) = \frac{\pi^2 - 8}{16}$$

صورت مختلط سری فوریه، ضرایب فوریه مختلط

با استفاده از فرمول اویلر $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$. $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

سری فوریه $f(x)$ را به صورت زیر می توان نوشت:

سری فوریه مختلط:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{in\pi}{l}x}$$

ضرایب:

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-\frac{in\pi}{l}x} dx$$

فرض بر آن است که شرایط دیریکله برقرارند و $f(x)$ در x پیوسته است. هرگاه $f(x)$ و x پیوسته نباشند، طرف چپ رابطه را با $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$ جایگزین می کنیم.

انتگرال فوریه

*در قسمت قبل سری فوریه برای توابع متناوب معرفی شد، ولی برای بسیاری از مسایل عملی شامل توابعی هستند که متناوب نیستند.

*می توان روش فوریه را تعمیم داد تا توابع غیر متناوب را نیز شامل شود.

*تابع نا متناوب $y = f(x)$ تعریف شده برای اعداد حقیقی، سری فوریه ندارند ولی اگر تابع متناوب $f_l(x)$

با دوره تناوب $2l$ را بررسی کرده و l را به سمت ∞ میل کرده اگرچه تابع $f(x)$ حاصل متناوب نیست ولی آن را به صورت حد سری فوریه یک تابع دیگر نمایش داده ایم.

قضیه (انتگرال فوریه)

فرض کنید تابع $f(x)$ در هر فاصله متناهی پیوسته قطعه ای و در هر نقطه دارای مشتق چپ و راست بوده و $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ موجود باشد. آن گاه تابع $f(x)$ را در هر نقطه پیوستگی میتوان با انتگرال فوریه زیر نمایش

داد و در نقاط ناپیوستگی ، مقدار انتگرال فوریه برابر با میانگین حد چپ و راست تابع $f(x)$ در آن نقطه است.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(w) \cos wx + B(w) \sin wx] dw$$

$$A(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(wt) dt \quad , \quad B(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(wt) dt$$

*اگر $f(x)$ تابعی زوج باشد، انتگرال فوریه آن کسینوسی است و $B(w) = 0$ است و داریم :

$$A(w) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos(wt) dt \quad , \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(w) \cos wx] dw$$

*اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد، انتگرال فوریه آن سینوسی است و $A(w) = 0$ است و داریم :

$$B(w) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \sin(wt) dt \quad , \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [B(w) \sin wx] dw$$

انتگرال های موسوم به لاپلاس

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(wx)}{k^2 + w^2} dw = \frac{\pi}{2k} e^{-kx} \quad (x > 0, k > 0) \quad \text{رابطه اول}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{w \sin(wx)}{k^2 + w^2} dw = \frac{\pi}{2} e^{-kx} \quad (x > 0, k > 0) \quad \text{رابطه دوم}$$

اثبات رابطه اول:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\cos(wx)}{k^2 + w^2} dw &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(wx)}{k^2 + w^2} dw = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[2\pi i \sum_{y>0} \frac{e^{ixz}}{k^2 + z^2} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{\pi i e^{-xk}}{2ik} \right] \\ &= \frac{\pi}{2k} e^{-kx} \end{aligned}$$

مثال : انتگرال فوريه تابع زیر را حساب کنید؟

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

$$A(w) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos(wt) dt = 2 \int_0^1 (1 * \cos wt) dt = \frac{2}{w} \sin w$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{2}{w} \sin w \cos wx \right] dw$$

مثال : انتگرال فوريه تابع زیر را حساب کنید؟

$$f(x) = e^{-x} \quad , \quad x > 0 \quad , \quad f(x) = f(-x)$$

با توجه به این که تابع زوج است و با توجه به فرمول لاپلاس داریم :

$$A(w) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(wt) dt$$

امکان محاسبه $A(w)$ نیست. از این رو از انتگرال‌های موسوم به لاپلاس بهره می‌گیریم.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(wx)}{1+w^2} dw = \frac{\pi}{2} e^{-x} \Rightarrow e^{-x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(wx)}{1+w^2} dw$$

تمرین : تمرین شماره ۳

مثال : اگر $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [a(w) \cos wx] dw$ باشد ، آن گاه $A(w)$ در نمایش

$$x * f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(w) \sin wx] dw$$

$$a(w) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos(wt) dt$$

$$\frac{d a(w)}{d w} = -2 \int_0^{+\infty} t f(t) \sin(wt) dt$$

چون $f(x)$ زوج است ، پس $x f(x)$ تابعی فرد است ، یعنی $B(w) = A(w)$ و داریم :

$$x f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [B(w) \sin wx] dw$$

$$B(w) = 2 \int_0^{+\infty} t f(t) \sin(wt) dt \quad \Rightarrow \quad A(w) = -\frac{d a(w)}{d w}$$

صورت مختلط انتگرال فوریه ، تبدیل فوریه

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i w(x-t)} dt \right] dw$$

رابطه بالا را شکل مختلط انتگرال فوریه می نامیم و آن را به صورت زیر می توانیم بنویسیم :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iwx} dw$$

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt$$

$F(w)$ را تبدیل فوریه تابع $f(x)$ و $f(x)$ را تبدیل فوریه معکوس $F(w)$ می نامیم .

با توجه به انتگرال های فوریه کسینوسی و سینوسی ، تبدیل فوریه کسینوسی $f(x)$ با نماد $c(w)$ و تبدیل فوریه سینوسی با نماد $s(w)$ به صورت زیر هستند :

$$c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos wt dt$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} c(w) \cos wx dw$$

$$s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin wt dt$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} s(w) \sin wx \, dw$$

مثال : انتگرال فوريه به صورت مختلط تابع زیر را محاسبه کنید ؟

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}$$

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt} \, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iwt} \, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{-1}{iw} e^{-iwt} \Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$\frac{-e^{-i w \pi} + e^{+i w \pi}}{\sqrt{2\pi} i w} = \frac{2 \sin w \pi}{\sqrt{2\pi} w}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w \pi}{w} e^{iwx} \, dw$$

مثال : اگر تبدیل فوريه تابع $f(t) = \frac{t}{t^2+a^2}$ به صورت زیر باشد ، مقدار آن را حساب کنید ؟ ($w > 0$)

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} \, dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{t^2+a^2} (\cos wt - i \sin wt) \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{t^2+a^2} (-i \sin wt) \, dt, \quad w > 0$$

$$-2i \int_0^{\infty} \frac{t}{t^2+a^2} \sin wt \, dt = -2i \times \frac{\pi}{2} e^{-aw} = -\pi i e^{-aw}$$

از انتگرال های موسوم به لاپلاس برای حل انتگرال نهایی استفاده شده است.

$$\int_0^{\infty} \frac{w \sin(wx)}{k^2+w^2} \, dw = \frac{\pi}{2} e^{-kx} \quad (x > 0, k > 0)$$

مثال : تابع $f(x)$ در رابطه زیر صدق می کند. $f(x)$ را تعیین کنید ؟

$$\int_0^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx = \begin{cases} 1-\alpha & 0 \leq \alpha \leq 1 \\ 0 & \alpha > 1 \end{cases}$$

$$A(w) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos(wt) dt \quad , \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(w) \cos wx] dw$$

$$A(\alpha) = 1-\alpha \quad 0 < \alpha \leq 1$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-\alpha) \cos \alpha x d\alpha = \frac{2(1 - \cos x)}{\pi x^2}$$

انتگرال بالا به کمک جز به جز حل می شود.

تمرین : تمرین شماره ۴

مثال : اگر $f(t) = -\sin t$ و $g(t) = \cos(\frac{t}{2})$ باشند ، تبدیل فوریه $g(t)$ ، $G(w)$ را بر حسب $f(w)$ به دست آورید ؟

(۱) مشتق گیری در حیطه ی فوریه معادل ضرب iw در $f(w)$ است.

(۲) شیفت در حیطه زمان معادل ضرب تبدیل فوریه در e^{iw} (شیفت مقدار) است.

(۳) انبساط و انقباض در حیطه زمان معادل انبساط و انقباض در حیطه فوریه است که ضریب مربوطه را نیز باید لحاظ کرد. یعنی اگر t به $t/2$ تبدیل شود، $f(w)$ به $2f(2w)$ تبدیل خواهد شد.

$$f(t) = -\sin t \Rightarrow \frac{d(-\sin(t))}{dt} = -\cos(t) = \cos(t + \pi) \text{ and } G(w) = iw f(w)$$

$$\cos(t + \pi) \Rightarrow \cos(t) \text{ and } G(w) = iw f(w)e^{-iw\pi}$$

$$\cos(t) \Rightarrow \cos(\frac{t}{2}) \text{ and } G(w) = 2iwf(2w)e^{-iw\pi}$$

$$2(2iwf(2w)e^{-iw\pi}) = 4wif(2w)e^{-iw\pi}$$

راه حل (۲)

$$G(w) = \int_0^{4\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) e^{-iw\pi} dt$$

$$G(w) : t = 2T + 2\pi \Rightarrow dt = 2dT$$

$$t = 0 \Rightarrow 2T + 2\pi = 0 \Rightarrow T = -\pi$$

$$t = 4\pi \Rightarrow 2T + 2\pi = 4\pi \Rightarrow T = \pi$$

$$G(w) = \int_{-\pi}^{\pi} 2 \cos(T + \pi) e^{-iw2\pi} \cdot e^{-iw2T} dt$$

$$G(w) = 2e^{-iw2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t + \pi) e^{-iw2T}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(t + \pi) e^{-iw2T} dT =$$

$$e^{-iw2T} \sin(T + \pi) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(T + \pi) \times (-2wi) e^{-iw2T} dT$$

$$= 2iw \int -\sin T \times e^{-iw2T} dT = 2iw f(2w) \Rightarrow 4iwe^{-iw2\pi} f(2w)$$

تمرین فصل پنجم

۱- سری فوریه تابع زیر را بیابید؟

$$f(x) = \begin{cases} -k & -\pi < x < 0 \\ k & 0 < x < \pi \end{cases} \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

۲- سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x) = |\sin x|$, $0 < x < 2\pi$ را بیابید؟

۳- انتگرال فوریه تابع زیر را به دست آورید؟

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & |x| \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

۴- مقدار عددی انتگرال $I = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{2} dx$ را به دست آورید؟

فصل ششم

معادلات با مشتق جزئی

حل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از روش ضربی یا جداسازی متغیرها

می خواهیم معادله موج یک بعدی (۱) با رابطه کرانه های (مرزی) و اولیه زیر را حل کنیم :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial u}{\partial x^2} \quad u \neq 0 \quad (1) \quad \text{معادله ی موج}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad t > 0 \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad (3)$$

$$u_t(x, 0) = g(x) \quad (4)$$

*سوال ما پیدا کردن جوابی از معادله ی موج است که در شرایط مرزی صدق کند.

برای این منظور ۳ مرحله ی زیر را انجام می دهیم :

(۱) با به کار بردن روش جدا کردن متغیرها ، دو معادله ی دیفرانسیل معمولی ایجاد می شود.

(۲) جواب هایی از دو معادله را که در شرایط کرانه های (۲) صدق می کند را معین می کنیم.

(۳) جواب ها را طوری ترکیب می کنیم که عبارت حاصل ، جواب معادله (۱) باشد و در شرایط (۳) و (۴) صدق کند.

(مرحله ی اول)

$$u(x, t) = F(x)G(t)$$

$$F(x)G''(t) = c^2 F''(x)G(t)$$

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{c^2 G(t)} \quad \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(t)}{c^2 G(t)} = k$$

$$F''(x) - kF(x) = 0 \quad , \quad G''(t) - c^2 G(t) = 0$$

مرحله ی دوم (حال جواب های F و G را طوری تعیین می کنیم که $u(x, t) = F(x)G(t)$ در رابطه دوم (۲) صدق کند.

$$F''(x) - kF(x) = 0$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

اگر $G = 0$ نتیجه می دهد $u \equiv 0$ که جواب ما نیست و $G \neq 0$ است و $F(0) = F(l) = 0$

اگر در $F'' - KF = 0$ ، $K = 0$ باشد آن گاه $F(x) = ax + b$ و داریم که مورد نظر نیست

$$F(0) = b = 0$$

$$F(l) = al = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow F(x) \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0 \quad \text{که مورد نظر نیست}$$

به ازای $K = \mu^2$ جواب عمومی به صورت زیر به دست می آید

$$F''(x) - kF(x) = 0 \Rightarrow F''(x) - \mu^2 F(x) = 0 \quad F(x) = Ae^{st}$$

$$As^2 e^{st} - \mu^2 Ae^{st} = 0 \quad s^2 = \mu^2 \Rightarrow s = \pm \mu$$

$$F(x) = Ae^{\mu t} + Be^{-\mu t}$$

$$F(0) = A + B = 0 \Rightarrow A = -B \Rightarrow F(x) = Ae^{\mu t} - Ae^{-\mu t}$$

$$F(l) = A(e^{\mu l} - e^{-\mu l}) = 0 \Rightarrow e^{\mu l} = e^{-\mu l} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 0 & \text{غ ق ق} \\ \mu = 0 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = 0 \quad F(x) = 0 \Rightarrow u = 0 \quad \text{خلاف فرض}$$

$k = -\mu^2$ یعنی عددی منفی است :

$$F''(x) + \mu^2 F(x) = 0 \quad , \quad s^2 + \mu^2 = 0 \quad , \quad s = \pm i\mu$$

$$F(x) = A \cos \mu x + B \sin \mu x \quad F(0) = A = 0 \Rightarrow F(x) = B \sin \mu x$$

$$F(l) = B \sin \mu l = 0 \begin{cases} B = 0 \\ \sin \mu l = 0 \end{cases} \Rightarrow B = 0, F(x) = 0, u = 0 \quad \text{خلاف فرض}$$

$$\text{if } B = 1 \Rightarrow \sin \mu l = 0, \mu l = n\pi, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\mu = \frac{n\pi}{l}, \quad k = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad F(x) = B \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$G''(t) + c^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 G(t) = 0, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l} c$$

$$G''(t) + \lambda_n^2 G(t) = 0, \quad s^2 + \lambda_n^2 = 0, \quad s = \pm i \lambda_n$$

$$G(t) = A' \sin \lambda_n t + B' \sin \lambda_n t$$

مرحله سوم: با توجه به این معادله (۱) خطی همگن است، پس مجموع جواب ها نیز جواب است.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x = F(x)$$

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n \sin \frac{n\pi}{l} x = g(x)$$

$$B_n^* = \frac{2}{cn\pi} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

مثال: جواب سوال زیر را به دست آورید؟

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & ; & 0 < x < \pi & , & t > 0 \\ u(x, 0) = 0 & ; & u_t(x, 0) = 2 \sin x & , & 0 \leq x \leq \pi \\ u(t, 0) = 0 & ; & u(\pi, t) = 0 & , & t \geq 0 \end{cases}$$

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad , \quad c = 1 \quad , \quad l = \pi \quad , \quad f(x) = 0 \quad , \quad g(x) = 2 \sin x$$

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 0 \times \sin \frac{n\pi}{\pi} x dx = 0$$

$$B_n^* = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} 2 \sin x \sin \frac{n\pi}{\pi} x dx = \frac{2n\pi}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos(1-n)x - \cos(1+n)x) dx$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ n \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{if } n \neq 1 \Rightarrow \frac{2}{n\pi} \left[\frac{\sin(1-n)x}{1-n} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi} \left[\frac{\sin(1+n)x}{1+n} \right]_0^{\pi} =$$

$$\frac{2}{n\pi} (\sin(1-n)\pi - \sin(1+n)\pi) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{if } n = 1 \Rightarrow \frac{2}{\pi} \int_0^\pi 2 \sin^2 x \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (1 - \cos 2x) \, dx =$$

$$\frac{2}{\pi} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^\pi \Rightarrow \frac{2}{\pi} \left(\pi - \sin \frac{2\pi}{2} \right) = 2$$

تمرین : تمرین شماره ۱

مثال : جواب معادله ی $u_x + u_y = 2(x+y)U$ را به دست آورید؟

$$U(x, y) = F(x)G(y)$$

$$F'(x)G(y) + F(x)G'(y) = 2(x+y)F(x)G(y)$$

$$\frac{F'(x)}{F(x)} + \frac{G'(y)}{G(y)} = 2x + 2y \Rightarrow \frac{F'(x)}{F(x)} - 2x = 2y - \frac{G'(y)}{G(y)} = C$$

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = C + 2x \Rightarrow \ln F(x) = Cx + x^2 + c_1 \Rightarrow F(x) = c_2 e^{cx+x^2}$$

$$\frac{G'(y)}{G(y)} = 2y - C \Rightarrow \ln G(y) = y^2 - Cy + c_3 \Rightarrow G(y) = c_4 e^{y^2-cy}$$

$$U(x, y) = F(x)G(y) \Rightarrow c_2 c_4 e^{cx+x^2+y^2-cy} = k e^{x^2+y^2+c(x-y)}$$

تمرین : تمرین شماره ۲

مثال : معادله ی $u_{xx} = u_{tt}$ با تغییر متغیر $r = x + t$ و $s = x - t$ به چه صورتی می شود؟

$$\frac{\partial r}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial s}{\partial t} = 1$$

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial r} \times \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial s} \times \frac{\partial s}{\partial t} = u_r - u_s$$

$$u_{tt} = \frac{\partial(u_r - u_s)}{\partial r} \times \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial(u_r - u_s)}{\partial s} \times \frac{\partial s}{\partial t} = u_{rr} - u_{sr} + u_{ss}$$

$$u_{rr} - 2u_{sr} + u_{ss} = u_{tt}$$

$$u_{xx} = u_{rr} + 2u_{sr} + u_{ss} \Rightarrow u_{rr} - 2u_{sr} + u_{ss} - u_{rr} - 2u_{sr} + u_{ss} = 0$$

$$-4u_{sr} = 0 \Rightarrow u_{sr} = 0$$

تمرین : تمرین شماره ۳

تمرین فصل ششم

۱- جواب سوال زیر را به دست آورید؟

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & ; & 0 < x < \pi & , & t > 0 \\ u(x, 0) = 1 & ; & u_t(x, 0) = 0 & , & 0 \leq x \leq \pi \\ u(t, 0) = 0 & ; & u(\pi, t) = 0 & , & t \geq 0 \end{cases}$$

۳- جواب معادله ی $xu_x = yu_y$ را به دست آورید؟

۲- معادله با مشتق جزئی $u_{xx} = 4u_{yy}$ بعد از تغییر متغیر $u = y + 2x$ و $z = y - 2x$ به چه صورتی می شود؟