اصل پونتریاگین :

اگر $u(t)$ مقید به کران باشد نمی‌توان از رابطه $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}=0$ استفاده کرد زیرا ممکن است u بدست آمده خارج از محدوده مجاز U باشد. پونتریاگین نشان داد که علیرغم محدودیت اعمال روی u باز هم کنترل بهینه (u^*) باید هامیلتونین را کمینه کند. این اصل را اصل پونتریاگین گویند.

$$\min_{u \in U} \mathcal{H}(x^*, \lambda^*, u, t) = \mathcal{H}(x^*, \lambda^*, u^*, t)$$

یا بطور معادل :

$$\mathcal{H}(x^*, \lambda^*, u^*, t) \leq \mathcal{H}(x^*, \lambda^*, u, t)$$

هامیلتونین در شرایط بهینه

در شرایط بهینه برای هامیلتونین می‌توان نوشت :

$$\mathcal{H}^* = \mathcal{H}(x^*, u^*, \lambda^*, t)$$

$$\frac{d\mathcal{H}^*}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial x}^T \dot{x}^* + \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \lambda}^T \dot{\lambda}^*}_{=0} + \cancelto{0}{\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial u}} \dot{u}^* + \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial t}$$

$\Rightarrow \frac{d\mathcal{H}^*}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial t}$ یعنی در امتداد مسیر بهینه، مشتق کلی $\mathcal{H}$ نسبت به زمان مشابه مشتق جزئی $\mathcal{H}$ نسبت به زمان است.

اگر $\mathcal{H}$ صراحتاً به t وابسته نباشد آنگاه $\frac{d\mathcal{H}^*}{dt}=0$ یعنی در امتداد مسیر بهینه، $\mathcal{H}$ نسبت به زمان ثابت است.

فصل ۶ اصل حداقل پونتریاگین

فرض: ورودی مقید

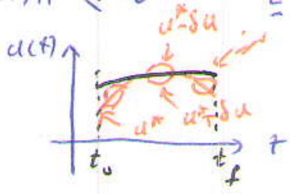
$$u(t) = u^*(t) + \delta u(t)$$

$$\Delta J(u^*, \delta u(t)) = J(u(t)) - J(u^*(t)) \geq 0$$
$$= \delta J(u^*, \delta u(t)) + H.O.T$$

تغییرات مرتبه اول $\delta J = \frac{\partial J}{\partial u}\, \delta u(t)$

اگر سیستم نامقید باشد δJ را برابر صفر قرار داده (قضیه اساسی) و کنترل بهینه را بدست می‌آوردیم. به عبارتی شرط لازم برای حداقل بودن این است که تغییرات مرتبه اول δJ به ازای یک تغییر اختیاری $\delta u(t)$ صفر باشد ولی در اینجا یک محدودیت روی کنترل $u(t)$ قرار دارد:

$$\|u(t)\| \leq U \quad \text{یا} \quad |u_j(t)| \leq U_j \Rightarrow U_j^- \leq u_j(t) \leq U_j^+$$



حال اگر $u^*(t)$ روی شرایط مرزی اشباع باشد δu دیگر اختیاری نیست.

شرط لازم برای اینکه $u^*(t)$ تابع J را حداقل کند این است که:

$$\delta J(u^*, \delta u(t)) \geq 0$$

رابطه $\delta J = 0$ وقتی معتبر است که $u^*(t)$ داخل مرز باشد.

با توجه به نتایج فصل ۲، تغییرات مرتبه اول به شکل زیر است:

$$\delta J(u^*, \delta u) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} + \dot{\lambda}(t)\right]_*^T \delta x(t) + \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}\right]_*^T \delta u(t) + \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} - \dot{x}(t)\right]_*^T \delta \lambda(t) \right\} dt$$
$$+ \left[\frac{\partial S}{\partial x} - \lambda(t)\right]_{*t_f}^T \delta x_f + \left[\mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t}\right]_{*t_f} \delta t_f$$

اگر δx و $\delta \lambda$ طوری انتخاب شوند که ضرایب آنها صفر شود داریم:

$$\delta J(u^*(t), \delta u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}\right]^T \delta u(t)\, dt$$

$$\left[\frac{\partial \mathcal{H}(x^*, \lambda^*, u^*, t)}{\partial u}\right]^T \delta u(t) = \mathcal{H}(x^*, u^* + \delta u, \lambda^*, t) - \mathcal{H}(x^*, u^*, \lambda^*, t)$$

$$\Rightarrow \delta J(u^*, \delta u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\mathcal{H}(x^*, u^* + \delta u, \lambda^*, t) - \mathcal{H}(x^*, u^*, \lambda^*, t)\right] dt$$

با توجه به اینکه $\delta J \geq 0$ برای همه δu های مجاز باشد لذا:

$$\mathcal{H}(x^*, u^* + \delta u, \lambda^*, t) \geq \mathcal{H}(x^*, u^*, \lambda^*, t) \quad \text{یا} \quad \mathcal{H}(x^*, u^*, \lambda^*, t) \leq \mathcal{H}(x^*, u, \lambda^*, t)$$

اصل پونتریاگین

به عبارت دیگر

$$\min_{\|u(t)\| \leq U} \{\mathcal{H}(x^*, u, \lambda^*, t)\} = \mathcal{H}(x^*, u^*, \lambda^*, t)$$

۶-۲-۱ خلاصه اصل پونتریاگین

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

$$J = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t)\, dt$$

شرایط مرزی $x(t_0) = x_0$ ، $x(t_f) = x_f$: free, t_f : free

برای تعیین کنترل بهینه ابتدا تابع $\mathcal{H}$ (پونتریاگین، همیلتونین) را تشکیل می‌دهیم:

$$\mathcal{H}(x, u, \lambda, t) = V + \lambda^T f$$

$\mathcal{H}$ را نسبت به $|u| \le U$ به صورت زیر حداقل می‌کنیم:

$$\mathcal{H}(x^*, u^*, \lambda^*, t) \le \mathcal{H}(x^*, u, \lambda^*, t)$$

سپس معادلات حالت و کمک حالت را به صورت زیر حل می‌کنیم

$$\dot{x}^* = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}, \quad \dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}$$

شرایط مرزی

$$\left[\frac{\partial S}{\partial x} - \lambda(t)\right]_{*t_f} \delta x_f + \left[\mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t}\right]_{*t_f} \delta t_f = 0$$

شرط کافی:

$$\left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^2}\right)_* > 0$$

۶-۲-۲ شرایط لازم اضافی

پونتریاگین و دیگر همکاران شرایط لازم اضافی را برای سیستم‌های کنترل بهینه مقید به دست آوردند.

۱- اگر زمان نهایی t_f ثابت بوده و هامیلتونین به طور صریح به t وابسته نباشد، در این صورت هامیلتونین در امتداد مسیر بهینه ثابت است. $\mathcal{H}(x^*, u^*, \lambda^*) = c \quad \forall t \in [t_0, t_f]$

۲- اگر زمان نهایی t_f آزاد باشد، و هامیلتونین صریحاً به t وابسته نباشد آنگاه هامیلتونین در امتداد مسیر بهینه برابر صفر است. $\mathcal{H}(x^*, \lambda^*, u^*) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f]$

برنامه‌ریزی پویا

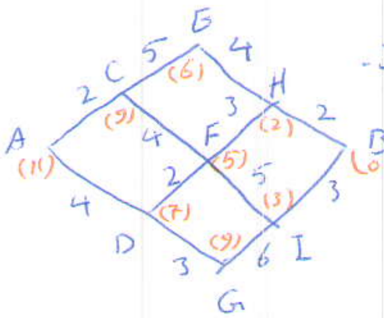
برای یک پروسه یا فرآیند دینامیکی و شاخص عملکرد داده شده، دو روش حل مسأله کنترل بهینه وجود دارد: ۱- اصل حداقل پونتریاگین ۲- برنامه‌ریزی پویا (بلمن). در برنامه‌ریزی پویا، در هر مرحله چند تصمیم تنها یکی وجود دارد که باید تصمیم بهینه اخذ شود.

اصل بهینگی

$J_{AB} =$

هر بخش از یک مسیر بهینه، بهینه است.

مثال: اقتصادی‌ترین (کم هزینه‌ترین) مسیر از A به B را تعیین کنید.



می‌توان حرکت به سمت پایین را $u=-1$ و به سمت بالا را $u=+1$ در نظر گرفت.

در نقطه F اگر $u=+1$ ← هزینه برابر ۵ و اگر $u=-1$، هزینه $= 8$

بنابراین $u=+1$ اقتصادی‌تر است

ACFHB یا ADFHB

$u = +1\ -1\ +1\ -1 \qquad -1\ +1\ +1\ -1$

مسیر بهینه

۶-۵-۲ کنترل بهینه با استفاده از برنامه ریزی پویا (DP)

برنامه ریزی پویا یک فرآیند گسسته است. برای آن سیستم پیوسته نیز، ابتدا یکی از روش‌های گسسته سازی را سیستم را گسسته کرده، پس از DP استفاده می‌کنیم. سیستم گسسته زیر را در نظر بگیرید:

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k)$$

$$J_i(\underbrace{x(k_i)}_{\text{زمان اولیه / شرط اولیه}}) = J = S(x(k_f), k_f) + \sum_{k=i}^{k_f-1} V(x(k), u(k))$$

; x n بعدی ، u m بعدی

فرض کنید کنترل، حالت و هزینه بهینه برای همه زمان‌های k_f تا $k+1$ را پیدا کرده‌ایم (بازگشتی). بدر مرحله k از اصل بهینگی استفاده می‌کنیم.

$$J_k^*(x(k)) = \min_{u(k)} \left[V(x(k), u(k)) \right] + J_{k+1}^*(x^*(k+1))$$

معادله تابعی برنامه ریزی پویا

مثال ۶-۳

$$x(k+1) = x(k) + u(k)$$

$$J = \tfrac{1}{2} x^2(k_f) + \tfrac{1}{2} \sum_{k=k_0}^{k_f-1} [x^2(k) + u^2(k)]$$

فرض: $k_f = 2$ ، $-1 \le u(k) \le +1$, $k = 0, 1, 2$ یا $u(k) = \{-1, -0.5, 0, +.5, 1\}$

$0 \le x(k) \le +2$, $k = 0, 1$ یا $x(k) = 0, .5, 1, 1.5, 2$

دنباله کنترل بهینه و حالت بهینه را طوری بیابید که معیار عملکرد را حداقل کند.

$x(2) = x(1) + u(1)$

$J_{12} = .5x^2(2) + .5u^2(1) + .5x^2(1)$

محاسبه هزینه در مرحله اول $k=2$

حالت فعلی $x(1)$	کنترل فعلی $u(1)$	حالت بعدی $x(2)$	هزینه J_{12}	هزینه بهینه $J^*_{12}(x(1))$	کنترل بهینه $u^*(x(1))$
2	-1	1	3	$J^*_{12}(2) = 2.25$	$u^*(2,1) = -.5$
	-.5	1.5	2.25		
	0	2	4		
	.5	~~2.5~~			
	1	~~3~~			
1.5	-1	.5	1.75	$J^*_{12}(1.5) = 1.75$	$u^*(1.5,1) = -1$
	-.5	1	1.75	$J^*_{12}(1.5) = 1.75$	$u^*(1.5,1) = -.5$
	0	1.5	2.25		
	.5	2	3.25		
	1	~~2.5~~			
1	-1	0	1	$J^*_{12}(1.0) = .75$	$u^*(1,1) = -.5$
	-.5	.5	.75		
	0	1	1		
	.5	1.5	1.75		
	1	2	3		
.5	-1	~~-.5~~		$J^*_{12}(.5) = .25$	$u^*(.5,1) = -.5$
	-.5	0	.25	$J^*_{12}(.5) = .25$	$u^*(.5,1) = 0$
	0	.5	.25		
	+.5	1	.75		
	1	1.5	1.75		
0	-1	~~-1~~		$J^*_{12}(0) = 0$	$u^*(0,1) = 0$
	-.5	~~-.5~~			
	0	0	0		
	.5	.5	.25		
	1	1	1		

$$J_{02} = .5\,u^2(0) + .5\,x^2(0) + J_{12}^*(x(1)) \quad , \; x(1) = x(0) + u(0)$$

$k=1,0$ محاسبه هزینه در مرحله

حالت فعلی $x(0)$	کنترل فعلی $u(0)$	حالت بعدی $x(1)$	هزینه J_{02}	هزینه بهینه $J_{02}^*(x(0))$	کنترل بهینه $u^*(x(0),0)$
2	-1	1	3.25	$J_{02}^*(2)=3.25$	$u^*(2,0)=-1$
	$-.5$	1.5	3.875		
	0	2	4.25		
	.5	~~2.5~~			
	1	~~3~~			
1.5	-1	.5	1.875	$J_{02}^*(1.5)=1.875$	$u^*(1.5,0)=-1$
	$-.5$	1	2		
	0	1.5	2.875		
	.5	2	3.25		
	1	~~2.5~~			
1	-1	0	1	$J_{02}^*(1)=1$	$u^*(1,0)=-1$
	$-.5$	+.5	1.875		
	0	1	1.25		
	.5	1.5	2.375		
	1	2	3		
0.5	-1	~~$-.5$~~		$J_{02}^*(.5)=.25$	$u^*(1,0)=-.5$
	$-.5$	0	.25		
	0	.5	.375		
	.5	1	1		
	1	1.5	2.375		
0	-1	~~-1~~		$J_{02}^*(0)=0$	$u^*(0,0)=0$
	$-.5$	~~$-.5$~~			
	0	0	0		
	.5	.5	.375		
	1	1	1.25		

کنترل بهینه سیستم‌های پیوسته زمانی

برای استفاده از برنامه‌ریزی پویا به دو روش می‌توان عمل کرد

۱- گسسته سازی

۲- پیاده‌سازی مستقیم با استفاده از معادله همیلتون-ژاکوبی-بلمن (HJB)

گسسته سازی

۱- روش اویلر

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_f)Fx(t_f) + \frac{1}{2}\int_t^{t_f}[x^TQx + u^TRu]\,d\tau$$

$$\dot{x}(t) = \frac{x(k+1) - x(k)}{T} \quad , \quad x(k) = x(kT)$$

T: پریود نمونه برداری

$$\Rightarrow x(k+1) = [I + TA]x(k) + TBu(k)$$

$$J = \frac{1}{2}x^T(k_f)Fx(k_f) + \frac{1}{2}\sum_{k=k_0}^{k_f-1}[x^T(k)Q_d x(k) + u^T(k)R_d u(k)] \qquad *$$

$$Q_d = TQ \quad , \quad R_d = TR$$

۲- روش ~~[illegible]~~ نگهدارنده مرتبه صفر (ZOH)

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) \qquad A_d = e^{AT} \quad , \quad B_d = \int_0^T e^{A\tau}B\,d\tau$$

که در نهایت معادله * است.

۶-۴ معادله همیلتون-ژاکوبی-بلمن (HJB)

این روش سعی می‌کند کنترل بهینه حلقه بسته با استفاده از اصل بهینگی بلمن بدست آورد

فرض

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

اصل بهینگی بلمن: هر قسمت از مسیر بهینه خود بهینه است.

$$J(x(t_0), t_0) = \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t)\,dt$$

فرض کنید $J^*(x^*(t),t)$ حداقل هزینه از لحظه t تا t_f باشد یعنی:

$$J^*(x^*(t),t) = \int_t^{t_f} V(x^*(\tau), u^*(\tau), \tau)\,d\tau$$

$$\frac{dJ^*}{dt} = \frac{\partial J^*}{\partial x^*}^T \dot{x}^*(t) + \frac{\partial J^*}{\partial t} = \frac{\partial J^*}{\partial x^*}^T f(x^*, u^*, t) + \frac{\partial J^*}{\partial t} \xrightarrow{\frac{dJ^*}{dt} = -V(x^*, u^*, t)}$$

$$\frac{\partial J^*}{\partial t} + V(x^*, u^*, t) + \frac{\partial J^*}{\partial x^*}^T f(x^*, u^*, t) = 0$$

تعریف کنیم

$$\mathcal{H} \triangleq V(x, u, t) + \frac{\partial J^*}{\partial x^*}^T f(x^*, u, t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial J^*}{\partial t} + \mathcal{H}\left(x^*, \frac{\partial J^*}{\partial x^*}, u^*, t\right) = 0 \qquad \forall\, t \in [t_0, t_f]$$ معادله HJB

شرط مرزی $\quad J^*(x^*(t_f), t_f) = 0 \xrightarrow[\text{تابع هزینه نهایی باشد}]{\text{یا اگر شاخص عملکرد شامل}} J^*(x^*(t_f), t_f) = S(x^*(t_f), t_f)$

با مقایسه با هامیلتونین قبلی ثابت شده در می‌آید که :

$$\lambda^*(t) = \frac{\partial J^*}{\partial x^*}$$

و کنترل بهینه :

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}\right)_* = 0 \quad \rightarrow u^*(t) = h(x^*(t), J^*_x, t)$$

$$J^*_t \triangleq \frac{\partial J^*}{\partial t} \qquad J^*_x = \frac{\partial J^*}{\partial x^*} \Rightarrow \boxed{J^*_t + \mathcal{H}(x^*, J^*_x, u^*, t) = 0} \quad \text{HJB}$$

یک معادله دیفرانسیل غیرخطی

با حل HJB ، J^* بدست آمده سپس ، u^* از رابطه بدست می‌آید.

مثال ۲ :

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + u(t)$$

$$J = \tfrac{1}{2} x^2(t_f) + \tfrac{1}{2}\int_0^{t_f} [x^2 + u^2]\, dt$$

$$V = \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{2} u^2 \qquad S = \tfrac{1}{2} x^2(t_f) \qquad f = -2x + u$$

گام ۱ ـ هامیلتونین

$$\mathcal{H} = V + J_x f = \tfrac{1}{2} u^2 + \tfrac{1}{2} x^2 + J_x(-2x + u)$$

گام ۲ : کنترل بهینه

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0 \longrightarrow u^*(t) + J_x = 0 \Rightarrow u^*(t) = -J_x$$

گام ۳ : HJB

$$\rightarrow \mathcal{H} = \tfrac{1}{2}(-J_x)^2 + \tfrac{1}{2} x^2 + J_x(-2x - J_x)$$

$$\Rightarrow \text{HJB} : \quad J_t - \tfrac{1}{2} J_x^2 + \tfrac{1}{2} x^2 - 2x J_x = 0$$

شرط مرزی $\quad J(x(t_f), t_f) = S = \tfrac{1}{2} x^2(t_f)$

گام ۴ : حل HJB

حدس می‌زنیم که

$$J(x(t)) = \tfrac{1}{2} P(t)\, x^2(t)$$

$$J(x(t_f)) = \tfrac{1}{2} x^2(t_f) \quad \Rightarrow \quad P(t_f) = 1$$

$$J_x = P x \qquad J_t = \tfrac{1}{2}\dot{P} x^2 \quad \Rightarrow u^*(t) = -P(t)\, x^*(t)$$ کنترل حلقه بسته

$$\xrightarrow[\text{HJB}]{\text{قرار دادن در}} \left(\tfrac{1}{2}\dot{P} - \tfrac{1}{2}P^2 - 2P + \tfrac{1}{2}\right)x^2 = 0 \Rightarrow \cancel{\tfrac{1}{2}}\dot{P} - P^2 - 4P + 1 = 0$$

$$\Rightarrow p(t) = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2}) + (\sqrt{5}+2)\left[\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right] e^{2\sqrt{5}(t-t_f)}}{1-\left[\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right] e^{2\sqrt{5}(t-t_f)}}$$

نکته: $t_f \to \infty \to p(t) \longrightarrow \bar{p} = \sqrt{5}-2 \Rightarrow u^*(t) = -(\sqrt{5}-2)x^*(t)$

سیستم LQR با استفاده از معادله HJB

حل مسئله LQR به روش دیگری است. (بعدها را ببینید)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_f)F(t_f)x(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f}(x^TQx + u^TR(t)u)\,dt$$

گام ۱:

$$\mathcal{H}(x,u,J_x^*,t) = \frac{1}{2}x^TQx + \frac{1}{2}u^TRu + J_x^{*T}(Ax+Bu)$$

گام ۲:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0 \longrightarrow Ru + B^TJ_x^* = 0 \longrightarrow u(t) = -R^{-1}B^TJ_x^*$$

(شرط کافی) $\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^2} = R > 0$

گام ۳: معادله HJB (قرار دادن u در $\mathcal{H}$)

$$\mathcal{H}(x,u,J_x^*,t) = \frac{1}{2}x^TQx - \frac{1}{2}J_x^{*T}BR^{-1}B^TJ_x^* + J_x^{*T}Ax$$

$\Rightarrow$ معادله HJB $\quad J_t^* + \mathcal{H} = 0 \to J_t^* + \quad '' \quad = 0$

$$J^*(x^*(t_f), t_f) = \frac{1}{2}x^T(t_f)F(t_f)x^*(t_f)$$

گام ۴: حدس J: چون شاخص عملکرد مربعی است.

$J^*(x,t) = \frac{1}{2}x^Tp(t)x(t)$ $\quad$ P متقارن مثبت معین

$$\frac{\partial J^*}{\partial t} = J_t = \frac{1}{2}x^T\dot{p}x \qquad \overset{HJB}{\Longrightarrow} \frac{1}{2}x^T\dot{p}(t)x + \frac{1}{2}x^TQx - \frac{1}{2}x^TPBR^{-1}B^TP + x^TPAx = 0$$

$$J_x = p(t)x(t)$$

$$\Rightarrow \dot{p}(t) = -PA - A^TP + PBR^{-1}B^TP - Q(t)$$

$$p(t_f) = F(t_f)$$

گام ۵: کنترل بهینه حلقه بسته

$$u^*(t) = -R^{-1}B^TPx^*(t)$$

حل ۶-۴ (ص ۲۵۷)

کنترل بهینه را برای سیستم مرتبه اول زیر به روش HJB بیابید.

$$\dot{x} = -2x + u$$

$$J = \int_0^{\infty} (x^2 + u^2)\, dt$$

حدس $\quad J^* = g\, x^2(t)$

$$V(x,u) = x^2 + u^2, \quad f = -2x + u$$

گام ۱: $H(x, u, J_x^*) = V + J_x^{*T} f = x^2 + u^2 + 2gx[-2x + u]$

$$= x^2 + u^2 - 4g\, x^2 + 2g\, xu$$

گام ۲: $\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0 \Rightarrow 2u^* + 2g\, x^* = 0 \rightarrow u^*(t) = -g\, x^*(t)$

گام ۳: $\mathcal{H}^* = x^{*2} - 4g\, x^{*2} - g^2 x^{*2}$

گام ۴: $HJB: \quad \mathcal{H}^* + \underset{0}{J_t^*} = 0 \rightarrow x^{*2} - 4g\, x^{*2} - g^2 x^{*2} = 0 \Rightarrow g^2 + 4g - 1 = 0$

$$\Rightarrow g = -2 \pm \sqrt{5} \xrightarrow{g>0} g = -2 + \sqrt{5}$$

گام ۵: $u^*(t) = -g\, x^*(t) = -(\sqrt{5} - 2)\, x^*(t)$

فصل هفتم: سیستم‌های کنترل بهینه مقید

در فصل‌های قبل، روی متغیرهای حالت و کنترل هیچ قیدی وجود نداشت. در این فصل برخی محدودیت‌ها روی کنترل یا حالت‌ها در نظر گرفته می‌شود.

مسائلی که در این فصل مورد بررسی قرار می‌گیرند عبارتند از کنترل بهینه زمانی (TOC)، کنترل بهینه سوخت (FOC) و کنترل بهینه انرژی (EOC). سیستم‌های مورد نظر نیز برای سیستم‌های LTI فرض می‌شوند.

کنترل بهینه مقید: خلاصه اصول طراحی (برای سیستم LTV)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$|u(t)| \le U \quad \text{یا} \quad U^- \le u(t) \le U^+$$

$$J(x(t_0), u(t), t_0) = \tfrac{1}{2}x^T(t_f)F(t_f)x(t_f) + \tfrac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}(x^TQx + u^TRu)\,dt$$

$x(t_0) = x_0$: معلوم $\qquad x(t_f) = x_f \ ,\ t_f$ آزاد

$$\mathcal{H}(x, u, \lambda, t) = \tfrac{1}{2}x^TQx + \tfrac{1}{2}u^TRu + \lambda^T(t)(Ax + Bu)$$

ابتدا $\mathcal{H}$ را نسبت به u کمینه کنید.

$$\mathcal{H}(x^*, u^*, \lambda^*, t) \le \mathcal{H}(x^*, u, \lambda^*, t)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}^*(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}, \quad \dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}$$

$2n$ معادله با شرایط مرزی x_0 و

$$\left[\mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t}\right]_{*t_f}\delta t_f + \left[\frac{\partial S}{\partial x} - \lambda\right]^T_{*t_f}\delta x_f = 0$$

حل کنید.

که $S(x(t_f), t_f) = \tfrac{1}{2}x^T(t_f)F(t_f)x(t_f)$ حالت کلی

نکته: دقت کنید که از $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0$ برای یافتن u نمی‌توانید استفاده کنید.

کنترل بهینه زمانی برای سیستم‌های LTI

هدف رساندن سیستم از حالت اولیه به نهایی در حداقل زمان است.

$$\dot{x}(t) = A\underset{n\times 1}{x(t)} + B\underset{r\times 1}{u(t)}$$

فرض: سیستم کاملاً کنترل‌پذیر است

قید: $\|u(t)\| \le U$ یا $|u_j(t)| \le U_j,\ j = 1, \dots, r$ با قرار دادن دامنه U در B می‌توان قید را ساده‌تر کرد.

$$-1 \le u(t) \le +1 \rightarrow |u(t)| \le 1$$

گام ۱: شاخص عملکرد

$$J = t_f - t_0 = \int_{t_0}^{t_f} 1 \, dt$$

گام ۲: هامیلتونین

$$\mathcal{H}(x, \lambda, u) = 1 + \lambda^T (Ax + Bu) = 1 + (Ax)^T \lambda + u^T B^T \lambda$$

گام ۳: معادلات حالت و کمک حالت

$$\dot{x}^* = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} = A x^* + B u^*$$

$$\dot{\lambda}^* = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -A^T \lambda(t)$$

شرایط مرزی $x^*(t_0) = x_0$, $x^*(t_f) = 0$ $\qquad$ t_f آزاد

گام ۴: شرایط بهینه

$$1 + (Ax^*)^T \lambda^* + u^{*T} B^T \lambda^* \le 1 + (Ax^*)^T \lambda^* + u^T B^T \lambda^*$$

$$\Rightarrow \quad u^{*T} B^T \lambda^* \le u^T B^T \lambda^* \qquad B^T \lambda^* = q^*$$

$$\Rightarrow \quad u^{*T} q^* \le u^T q^*$$

گام ۵: کنترل بهینه

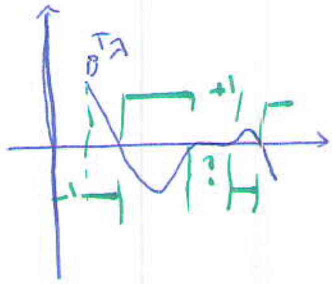
۱- اگر $q^*(t)$ مثبت باشد آنگاه $u^*(t) = -1$ باشد

۲- " $q^*(t)$ منفی " " $u^*(t) = +1$

$$\Rightarrow \quad u^*(t) = \begin{cases} +1 & q^* < 0 \\ -1 & q^* > 0 \\ \text{نامعین} \; -k < 1 & q^* = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u^*(t) = -\operatorname{sgn}(q^*(t))$$

کنترل بنگ-بنگ

اگر سیستم کاملاً کنترل‌پذیر باشد ناحیه ویژه (منفرد) ایجاد نمی‌شود.



کنترل حداقل زمان سیستم‌های LTI

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$$
$$|u_i(t)| \le 1 \qquad i=1,\dots,m$$

هدف رساندن $x(t)$ از x_0 به مبدا است.
(در کمترین زمان / حداقل زمان)

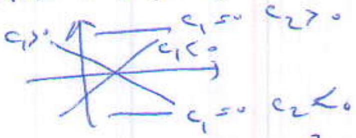
مثال
$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\dot{x}_2 = u(t)$$

$$\mathcal{H} = 1 + p_1 x_2 + p_2 u(t) \xrightarrow{\text{مینیمم سازی}} p_2^* u^*(t) \le p_2^*(t)\, u(t)$$

$$\Rightarrow u^*(t) = \begin{cases} -1 & p_2^* > 0 \\ 1 & p_2^*(t) < 0 \end{cases} = -\operatorname{sgn}(p_2^*(t))$$

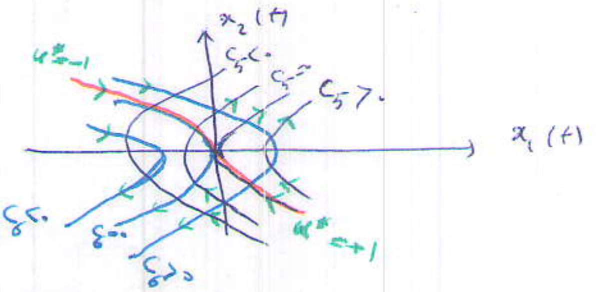
$$\dot{p}_1^*(t) = 0 \rightarrow p_1^*(t) = c_1$$
$$\dot{p}_2^*(t) = -p_1^*(t) \rightarrow p_2^*(t) = -c_1 t + c_2$$

تابع کنترل $u^*(t) = \{\{+1\},\{-1\},\{+1,-1\},\{-1,+1\}\}$



$$u = \pm 1 \rightarrow x_2(t) = \pm t + c_3$$
$$x_1(t) = \pm \tfrac{1}{2} t^2 + c_3 t + c_4$$

$$u = +1 \Rightarrow x_1(t) = \tfrac{1}{2} x_2^2(t) + c_5$$
$$u = -1 \Rightarrow x_1(t) = -\tfrac{1}{2} x_2^2 + c_6$$



وضعیت‌های قابل دسترس

$$c_5 = c_6 = 0 \rightarrow x_1(t) = -\tfrac{1}{2} x_2(t)\,|x_2(t)|$$

منحنی تغییر علامت یا منحنی کلیدزنی

$$S(x(t)) = x_1(t) + \tfrac{1}{2} x_2(t)\,|x_2(t)|$$

تعداد کلیدزنی برابر $n-1$ است در این مثال $2-1=1$ است.
(به شرط مقادیر ویژه A غیرمثبت باشند)

$$u^*(t) = \begin{cases} -1 & S(x(t)) > 0 \\ +1 & S(x(t)) < 0 \\ -1 & S(x(t)) = 0;\ x_2 > 0 \\ +1 & S(x(t)) = 0;\ x_2 < 0 \\ 0 & x(t) = 0 \end{cases}$$

با توجه به $p_2^*(t)$ مسئله کنترل فوق ناحیه منفرد ندارد زیرا

$$p_2^*(t) = 0 = c_1 t + c_2 \rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \rightarrow p_1^* = 0 \Rightarrow \mathcal{H}^* = 1 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

در حالی که باید $\mathcal{H}$ در طول مسیر بهینه صفر باشد (t_f آزاد و $\mathcal{H}$ صریحاً تابع t نیست)

تبصره: اگر مقادیر ویژه A همه حقیقی بوده و کنترل بهینه زمان منحصر بفرد وجود داشته باشد (مقادیر ویژه باید غیرمثبت باشند) آنگاه هر مؤلفه کنترل حداکثر می‌تواند $(n-1)$ بار تغییر علامت دهد (کلیدزنی)

حداقل نیروی کنترل — minimum control effort

چنین مواردی بیشتر در کاربردهای فضایی که منابع کنترل محدود هستند بروز می‌کند.

$$\dot{x}(t) = a(x, u, t)$$

محدودیت $\quad M_{i-} \leq u_i(t) \leq M_{i+} \qquad i = 1, 2, \dots, m$

هدف: انتقال سیستم از x_0 به یک مجموعه هدف $S(t)$ که با مصرف حداقل نیروی (تلاش) کنترل

در معیار عملکرد برای این منظور تعریف می‌شود: حداقل سوخت Minimum fuel problem

$$J_1(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\sum_{i=1}^{m} \beta_i |u_i| \right] dt$$

$r_i, \beta_i \geq 0$

$$J_2(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\sum_{i=1}^{m} r_i u_i^2 \right] dt$$

حداقل انرژی — " energy "

مسأله حداقل سوخت!

فرض: معادلات بصورت آفین باشد

$$\dot{x}(t) = a(x(t), t) + B(x(t), t)u(t)$$

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\sum_{i=1}^{m} |u_i(t)| \right] dt$$

$$-1 \leq u_i(t) \leq +1 \quad i = 1, \dots, m, \quad t \in [t_0, t_f]$$

$$\mathcal{H}(x, u, p, t) = \sum_{i=1}^{m} |u_i| + p^T a(x, t) + p^T(t) B(x, t) u(t)$$

اصل حداقل‌یابی

$$\sum_{i=1}^{m} |u_i^*(t)| + p^{*T} a(x^*, t) + p^{*T} B u^*(t) \leq \sum_{i=1}^{m} |u_i(t)| + p^{*T}(t) a(x^*, t) + p^{*T} B(x^*(t), t) u(t)$$

$$\Rightarrow \sum |u_i^*| + p^{*T} B u^* \leq \sum |u_i| + p^{*T} B u(t)$$

مسأله حداقل‌سازی زیر B را بصورت نمایش می‌دهیم.

$$B(x^*(t), t) = [b_1 \mid b_2 \mid \dots \mid b_m(x^*, t)]$$

با فرض استقلال مؤلفه‌های u داریم:

$$|u_i^*| + p^{*T}(t) b_i u_i^* \leq |u_i| + p^{*T} b_i u_i \qquad |u_i(t)| \overset{\text{تعریف}}{=} \begin{cases} u_i & u_i > 0 \\ -u_i & u_i < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |u_i| + p^{*T} b_i u_i = \begin{cases} (1 + p^{*T} b_i) u_i & u_i \geq 0 \quad ① \\ (-1 + p^{*T} b_i) u_i & u_i(t) \leq 0 \quad ② \end{cases}$$

حال اگر $p^{*T} b_i > 1$ باشد مقدار حداقل ① برابر صفر است زیرا $u_i \geq 0$ و مقدار حداقل ② به ازای $u_i = -1$ بدست می‌آید

$(+1 - p^T b_i) < 0$

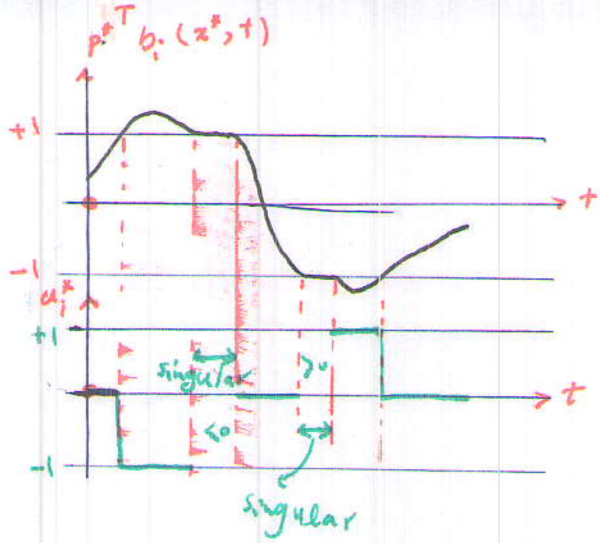
بنابراین مقدار حداقل $\mathcal{H}$ به ازای $u_i^* = -1$ بدست می‌آید

اگر $\quad u_i^* \leq 0 \Leftarrow p^{*T} b_i = 1$

اگر $\quad u_i^* = 0 \Leftarrow 0 < p^{*T} b_i < 1$

لذا

$$\Rightarrow u_i^*(t) = \begin{cases} 1 & p^{*T} b_i < -1 \\ 0 & -1 < p^{*T} b_i < 1 \\ -1 & +1 < p^{*T} b_i \\ \text{نامعین غیرمنفی} & p^{*T} b_i = -1 \\ \text{نامعین غیرمثبت} & p^{T} b_i = 1 \end{cases}$$



مشاهده می‌شود که کنترل حداقل سوخت به صورت bang-off-bang است.

مثال ۱: سیستم $\dot{x} = u(t)$ که به مبدأ با کمترین سوخت منتقل شود

$|u(t)| < 1$ $\quad B=1$

$J(u) = \int_0^{t_f} |u(t)| dt$

t_f آزاد

$$\mathcal{H} = |u| + pu \;\rightarrow\; \dot{p}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = 0 \rightarrow p^*(t) = c_1 \;\rightarrow\; u^*(t) = \begin{cases} 1 & p^*b = c_1 < -1 \\ 0 & -1 < c_1 < 1 \\ -1 & 1 < c_1 \\ \text{نامعین نامنفی} & c_1 = -1 \\ \text{نامعین نامثبت} & c_1 = +1 \end{cases}$$

$\mathcal{H}^* = 0 \rightarrow u^* = 0$

$\delta x_f = 0 \rightarrow$ نمی‌توان گفت $p(t_f) = 0$

$x(t) = x_0 + \int_0^t u(t)\,dt$

$x(t_f) = 0$

$$\Rightarrow 0 = x_0 + \int_0^{t_f} u(t)\,dt \rightarrow x_0 = -\int_0^{t_f} u(t)\,dt$$

چون t_f آزاد است برای u بینهایت جواب وجود دارد، مثلاً فرض کنید $x_0 = 5$

$u(t) = -1 \Rightarrow t \in [0,5]$

$u = -0.5 \Rightarrow t \in [0,10]$

$u = -0.1 \Rightarrow t \in [0,50]$

$u(t) = \begin{cases} -1 & t \in [0,2] \\ -0.5 & t \in [2,8] \end{cases}$

$$|x_0| = \left| \int_0^{t_f} u(t)\,dt \right| \le \int_0^{t_f} |u(t)|\,dt = J$$

با توجه به اینکه برای u ها $J = |x_0|$ و مسئله بینهایت جواب دارد.

با هر u یک t_f داریم.

مثال ۲:

$\dot{x} = ax + u \quad a > 0 \qquad |u(t)| \le 1 \qquad J(u) = \int_0^{t_f} |u(t)|\,dt$

$\delta x_f = 0 \Rightarrow$ نمی‌توان گفت $p(t_f) = 0$

$$\mathcal{H}(x,u,p) = |u| - \hat{p} a x + \hat{p} u \qquad \dot{\hat{p}}^* = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = a p^* \rightarrow \hat{p}^*(t) = c_1 e^{at}$$

$B = 1 \qquad u^*(t) = \begin{cases} 1 & \hat{p}^*(t) < -1 \\ 0 & -1 < \hat{p}^*(t) < 1 \\ -1 & 1 < \hat{p}^*(t) \end{cases}$

$p^*(t)$ حداکثر یکبار مقادیر ۱+ و ۱- را می‌گیرد زیرا $a>0$

و تابع نمایی در هیچ نقطه‌ای توقف ندارد

$|p^*(t)| = 1$ نقطه کلید

$x^*(t_1) = 0 \Leftarrow p^*(t_1) = 1 < t_1$

$x^*(t_2) = 0 \Leftarrow p^*(t_2) = -1 \; t_2$

فرض کن $t_f = T$

با توجه به مقدار c_1 یکی از چهار حالت زیر اتفاق می‌افتد.

$u^*(t) = -1 \quad t \in [0, t_f] \qquad 1 \le c_1 \rightarrow p^*(t) > 1$

$u^*(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, t_1] \\ -1 & t \in [t_1, t_f] \end{cases} \qquad 0 < c_1 < 1$

$u^*(t) = \begin{cases} 0 \\ +1 \end{cases} \quad t \in [t_1, t_f] \qquad -1 < c_1 < 0$

$u^*(t) = +1 \quad t \in [0, t_f] \qquad c_1 < -1$

$u^*(t) = 0 \qquad c_1 = 0$

$$\Rightarrow u^* = \{-1\}, \{0,-1\}, \{0,+1\}, \{+1\}, \{0\}$$

اگر مسأله حداقل زمان مطرح باشد $u=\pm 1$ است. اگر x_0 مثبت باشد $u=-1$ وگرنه $u=+1$

$$x(T)=0=e^{-aT}x_0+e^{-aT}\int_0^T e^{a\tau}[\pm 1]\,d\tau \Rightarrow x_0=\mp\frac{1}{a}[e^{aT}-1]$$

اگر $|x_0|>\frac{1}{a}[e^{aT}-1]$ باشد نمی‌توان با هیچ کنترلی x_0 را به صفر در زمان T رساند. حال فرض کنید $|x_0|\le\frac{1}{a}[e^{aT}-1]$

یعنی فرصت کافی برای رساندن x_0 به صفر باشد. در این حالت اگر $x_0>0$ آنگاه $u^*\in\{0,-1\}$ وگرنه $u^*\in\{\cancel{+1,0}\}$

یعنی تا t_1 ثانیه صفر و بعد ± 1

فرض. $x_0>0 \Rightarrow \begin{array}{ll} u=0 & t\in(0,t_1) \\ u=-1 & t\in[t_1,T] \end{array}$

با استدلال اخیر داریم:

$$x(t_1)=e^{-at_1}x_0$$
$$x(T)=x(t_1)e^{-a(T-t_1)}-\int_{t_1}^{T}e^{-a(T-\tau)}d\tau$$

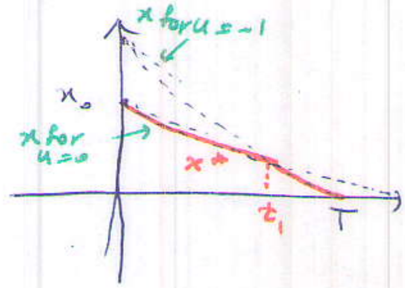
$$x(T)=0=e^{-aT}x_0-\frac{1}{a}e^{-aT}[e^{aT}-e^{at_1}]$$

$$\Rightarrow t_1=\frac{1}{a}\ln(e^{aT}-ax_0)$$

به همین ترتیب

$$x_0<0 \Rightarrow t_1'=\frac{1}{a}\ln(e^{aT}+ax_0)$$

$$\Rightarrow u^*(t)=\begin{cases} 0 & x_0>0 \quad t<\frac{1}{a}\ln(e^{aT}-ax_0) \\ -1 & x_0>0 \quad T\ge t\ge \;'' \\ 0 & x_0<0 \quad t<\frac{1}{a}\ln[e^{aT}+ax_0] \\ +1 & x_0<0 \quad T\ge t\ge \;'' \end{cases}$$



$$x_0>0 \rightarrow \begin{array}{l} 0<t\le t_1 \rightarrow x(t)=e^{-at}x_0 \\ t_1\le t\le T \rightarrow x(t)=\frac{1}{a}[e^{a(T-t)}-1] \end{array}$$

ترکیب وزن‌دار حداقل سوخت و زمان

$$J(u)=\int_{t_0}^{t_f}[\lambda+|u(t)|]\,dt$$

زمان نهایی t_f آزاد و غیر مشخص است

مثال (در مثال قبل)

$$\dot{x}=-ax+u \qquad |u|\le 1$$

$$\mathcal{H}=\lambda+|u|-pax+pu(t)$$

$$\Rightarrow \dot{p}^*=ap^* \rightarrow p^*(t)=c_1e^{at}$$

اصل حداقل پونتریاگین

$$\Rightarrow u^*(t)=\begin{cases} 1 & p^*<-1 \\ 0 & -1<p^*<1 \\ -1 & p^*>1 \\ \text{نامنفی نامعین} & p^*=-1 \\ \text{نامثبت نامعین} & p^*=1 \end{cases}$$

مثل قبل بدست می‌آید

حالت تکین

اگر $u(t)=0$ باشد به جهت زمان طولانی که داشتیم به صفر برسد $(x=x_0e^{-at})$ لذا $J\to\infty$ که نشان می‌دهد کنترل بهینه نیست

شرایط لازم برای بهینگی

پونتریاگین دو حالت از شرایط لازم برای بهینگی را به شکل زیر بدست آورده است:

۱- اگر زمان نهایی ثابت باشد و هامیلتونین بطور صریح به زمان بستگی نداشته باشد آنگاه هامیلتونین روی مسیر بهینه مقدار ثابت است

$$\mathcal{H}^*(x^*, u^*, p^*) = c \qquad t \in [t_0, t_f]$$

۲- اگر زمان نهایی آزاد باشد و هامیلتونین بطور صریح به زمان بستگی نداشته باشد آنگاه هامیلتونین روی مسیر بهینه صفر است (آزاد یا نامعین)

$$\mathcal{H}(x^*, u^*, p^*) = 0 \qquad t \in [t_0, t_f]$$

در این مثال چون t_f آزاد و $\mathcal{H}$ به t وابسته نیست

$$\mathcal{H} = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_f]$$

$$\Rightarrow \text{if } u(t) = 0 \ \forall t \Rightarrow \mathcal{H} = \lambda - p^* a x^* = 0 \rightarrow x^* = \frac{\lambda}{a p^*} \Rightarrow x^* = \frac{\lambda}{c_1 a e^{at}}$$

یعنی بی‌نهایت زمان طول می‌کشد که x صفر شود

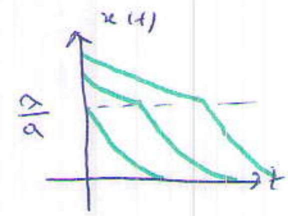
اگر $u^* \in \{0, -1\}$ در زمان t_1 کنترل تغییر می‌کند. $(|u^*(t)| = -u^*(t))$

$$\mathcal{H}(x^*(t_1), p^*(t_1), u^*(t_1)) = \lambda - u^*(t_1) - a x^*(t_1) + u^*(t_1) = 0 \rightarrow x^*(t_1) = \frac{\lambda}{a}$$

توجه شود که در لحظه تغییر کنترل $p^*(t_1) = 1$

$$x(t) = x_0 e^{-at} \quad \text{if } x(t) > \frac{\lambda}{a} \quad (u(t) = 0)$$

$$x(t) = \frac{\lambda}{a} e^{-a[t-t_1]} - \frac{1}{a}\left[1 - e^{-a[t-t_1]}\right] \qquad 0 < x(t) \le \frac{\lambda}{a} \quad (u(t) = -1)$$



مثال: قانون کنترل بهینه برای انتقال سیستم از $x(0) = x_0 \neq 0$ به مبدا یعنی $x(t_f) = 0$ با حداقل سازی تابع معیار را پیدا کنید

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2 = u(t)$$

$$J = \int_0^{t_f} [\lambda + |u|]\, dt$$

$$|u(t)| \le 1$$

$$\mathcal{H} = \lambda + |u| + p_1 x_2 + p_2 u(t)$$

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & p_2^* < -1 \\ 0 & -1 < p_2^* < 1 \\ -1 & 1 < p_2^* \\ \ge 0 \text{ نامعین} & p_2^* = -1 \\ \le 0 & p_2^* = +1 \end{cases}$$

$$\dot{p}_1^* = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} = 0 \rightarrow p_1^* = c_1$$

$$\dot{p}_2^* = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} = -p_1^*(t) = -c_1 \rightarrow p_2^* = -c_1 t + c_2$$

واضح است که p_2^* نمی‌تواند بیش از یکبار تغییر علامت دهد (خطی)

$$\Rightarrow u^*(t) = \{0\}, \{+1\}, \{-1\}, \{0, +1\}, \{0, -1\}, \{+1, 0\}, \{-1, 0\}, \{+1, 0, -1\}, \{-1, 0, +1\}$$

سؤال؟ چرا $\{-1, +1\}$ و $\{+1, -1\}$ در ~~...~~ ترتیب‌ها قابل قبول قرار ندارند؟ زیرا با توجه به p_2^*، u^* نمی‌تواند از ∓ 1 به ± 1 جهش کند. (p_2^* جهش ندارد)

اگر برای مدت زمان محدودی $|P_2^*| = 1$ لازم است که $C_1 = 0$ و $C_2 = \pm 1$ ⇐ جایگذاری در $\mathcal{H}$

$\mathcal{H}(x^*, u^*, p^*) = \lambda > 0$

$\lambda + \cancel{x} + 0 - \cancel{x}$ $\quad P_2 = -1$ $\qquad P_2 = +1 \to u \leq 0 \quad \lambda - \cancel{x} + 0 - \cancel{x} = \lambda$

که با شرایط لازم بودن تناقض دارد. بنابراین شرایط استثنایی رخ نمی‌دهد. لذا طرفین $u(t) = 0$ باید باشد که $u(t) > 0$

سیستم لازم است... هر u^* را که آخرین صفر است از کنترل‌های قابل قبول حذف می‌شوند. فرض کنید

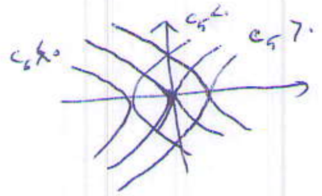
$$u^* = \{-1\}, \{0, -1\}, \{+1, 0, -1\}$$

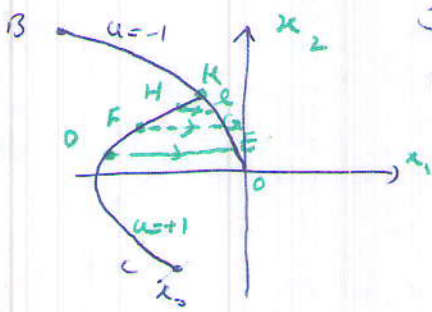
لذا همه کنترل‌ها با $u(t) = -1$ به مبدأ ختم می‌شوند.

$\Rightarrow u(t) = 0 \to \dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = 0 \quad \to \quad x_2 = C_3,\ x_1 = C_3 t + C_4$

در $u(t) = +1 \qquad x_1 = \frac{1}{2} x_2^2 + C_5$

حل $u(t) = -1 \qquad x_1 = -\frac{1}{2} x_2^2 + C_6$





باید نقطه تغییر علامت $u = +1$ به صفر را بیابیم سپس نقطه صفر را با $u = -1$ زمان دوم را تعیین کنیم

روی منحنی $o-k$ داریم $\left(\begin{array}{l} u = -1 \\ C_6 = 0 \end{array}\right)$

$$x_1^* = -\frac{1}{2} x_2^{*2}$$

$$x_1^*(t_2) = -\frac{1}{2} x_2^{*2}(t_2)$$

با انتگرال گیری از $\dot{x}_1 = x_2$ نتیجه

$x_1(t_2) - x_1(t_1) = x_2(t_1)(t_2 - t_1)$

روی خط $u = 0$ داریم $\quad x_1^*(t_2) = x_1^*(t_1) + x_2^*(t_1)[t_2 - t_1]$ *

(t_1 زمان) تغییر u از $+1$ به صفر

$\Rightarrow P_2^*(t_1) = -C_1 t_1 + C_2 = -1$ زمان تغییر از $+1$ به صفر

$P_2^*(t_2) = -C_1 t_2 + C_2 = +1$ صفر به -1 **

$\mathcal{H}(t_1) = \lambda + C_1 x_2^*(t_1) = 0$

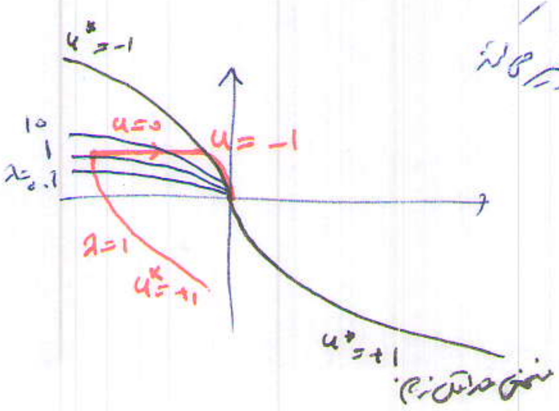
$\mathcal{H}(t_2) = \lambda + C_1 x_2^*(t_2) = 0$

$\Rightarrow x_2^*(t_1) = x_2^*(t_2) = -\frac{\lambda}{C_1} \quad \Rightarrow C_1 = -\frac{\lambda}{x_2^*(t_1)}$

$** \Rightarrow \quad t_2 - t_1 = -\frac{2}{C_1} = \frac{2 x_2^*(t_1)}{\lambda} \quad \overset{*}{\Rightarrow} \begin{cases} x_1^*(t_2) = x_1^*(t_1) + \dfrac{2 x_2^{*2}(t_1)}{\lambda} \\ \text{از طرفی} \quad x_1^*(t_2) = -\frac{1}{2} x_2^{*2}(t_2) = -\frac{1}{2} x_2^{*2}(t_1) \end{cases}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} x_2^{*2}(t_1) = x_1^*(t_1) + \frac{2 x_2^{*2}(t_1)}{\lambda} \quad \Rightarrow x^*(t_1) = -\frac{\lambda + 4}{2\lambda} x_2^{*2}(t_1)$$

معادله فوق محل هندسی نقاطی است که در آنها کنترل از $+1$ به صفر تغییر می‌کند



منحنی حداقل زمان

برای $u^* = \{-1, 0, +1\}$ نیز مثل قبل داریم:

$$x_1^*(t_1') = +\frac{\lambda + 4}{2\lambda} x_2^{*2}(t_1')$$

حداقل انرژی

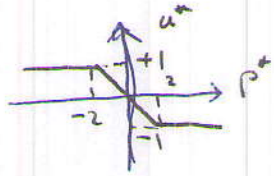
سیستم $\dot{x}(t)=-ax(t)+u(t)$ باید از یک وضعیت اختیاری $x(0)=x_0$ با حداقل کردن $J(u)=\int_0^{t_f}[\lambda+u^2(t)]dt$ منتقل شود

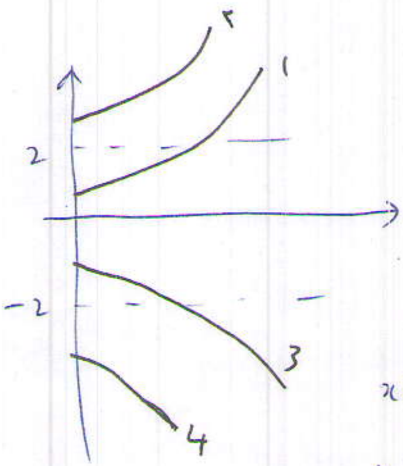
$\lambda , a>0$ و t_f آزاد $\qquad |u(t)|\le 1$

$$\mathcal{H}=\lambda+u^2(t)-pax(t)+pu(t) \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}=-\dot{p}^*=ap^*(t) \rightarrow p^*(t)=c_1e^{at}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}=2u^*(t)+p^*(t)=0 \rightarrow u^*(t)=-\tfrac{1}{2}p^*(t) \qquad |u(t)|\le 1 \quad \Rightarrow |p^*(t)|<2$$

$$\text{if} \quad |p^*(t)|\ge 2 \Rightarrow \quad u^*(t)=\begin{cases} +1 & p^*(t)\le -2 \\ -1 & p^*\ge 2 \\ -\frac{1}{2}p^*(t) & -2<p^*<2 \end{cases}$$





اگر $u^*=0$ آنگاه ... t_f ... در نتیجه p^* هرگز نمی‌تواند صفر باشد

کنترل‌های قابل قبول

۱- $u^*=\{-\frac{1}{2}p^*\}$ یا $\{-\frac{1}{2}p^*,-1\}$

۲- $u^*=\{-1\}$

برای x_0 مثبت

۳- $u^*=\{-\frac{1}{2}p^*\}$ یا $u^*=\{-\frac{1}{2}p^*,+1\}$

۴- $u^*=\{+1\}$

برای x_0 منفی

زیرا $x(t_f)=e^{-a(t_f-t)}x(t)+e^{-at_f}\int_t^{t_f}e^{a\tau}u(\tau)d\tau=0$

$$\Rightarrow -e^{at}x(t)=\int_t^{t_f}e^{a\tau}u(\tau)d\tau$$

چون t_f آزاد یا غیرمعین است و همیلتونین به طور صریح به t وابسته نیست $\mathcal{H}=0$ $\quad t\in[t_0,t_f]$

اگر کنترل در $t=t_1$ به مقدار ±1 اشباع شود آنگاه $p^*(t_1)=2$, $u^*(t_1)=1$ ⇐

$$\mathcal{H}(x(t_1),u(t_1),p(t_1))=\lambda+1-2ax^*(t_1)-2=0 \Rightarrow x^*(t_1)=\frac{\lambda-1}{2a}$$

$$\forall t>t_1 \quad u^*(t)=-1 \Rightarrow 0<x^*(t)<\frac{\lambda-1}{2a}$$

∴ اگر $\lambda<1$ ⇐ t_1 نخواهیم داشت یعنی u^* به اشباع نمی‌رود به همین ترتیب اگر کنترل در t_1' به اشباع ±1 برود داریم

$$x^*(t_1')=\frac{\lambda-1}{-2a} \qquad \frac{\lambda-1}{-2a}<x^*(t)<0 \quad \forall t\in[t_1',t_f]$$

در ناحیه غیر اشباع داریم:

$$u^*=-\tfrac{1}{2}p^*(t) \Rightarrow \mathcal{H}=\lambda+\tfrac{1}{4}p^{*2}-p^*ax-\tfrac{1}{2}p^{*2}=0 \Rightarrow p^*=2\left[-ax^*\pm\sqrt{(ax(t))^2+\lambda}\right]$$

$$\Rightarrow u^*(t)=\left[ax^*\pm\sqrt{(ax(t))^2+\lambda}\right]$$

$$\Rightarrow \quad u^*(t) = \begin{cases} [a x(t) - \sqrt{[a x(t)]^2 + \lambda} & 0 < \frac{\lambda - 1}{2a} < x(t) \\ -1 & 0 < x(t) \leq \frac{\lambda - 1}{2a} \\ +1 & -\frac{\lambda - 1}{2a} \leq x(t) < 0 \\ [a x(t) + \sqrt{[a x(t)]^2 + \lambda} & x(t) < -\frac{\lambda - 1}{2a} < 0 \\ 0 & x(t) = 0 \end{cases}$$