سیستم کنترل

سیستم‌های کنترل بهینه Naidu

فصل اول: مقدمه

- فرق کنترل کلاسیک و مدرن ← فضای حالت ← متغیرهای حالت
← تابع انتقال ← متغیرهای ورودی

بهینه سازی: ۱- استاتیکی: در مورد کنترل پروسه‌ای که شرایط دائم یا ماندگار دارند. متغیرهای سیستم با زمان تغییر نمی‌کنند.
۲- دینامیکی: متغیرهای سیستم با زمان تغییر می‌کنند.

کنترل بهینه: هدف کنترل بهینه تعیین سیگنال کنترلی است که باعث شود سیستم فرآیند با وجود محدودیت‌ها و قیودات معیار عملکرد را بهینه کند.

شاخص عملکرد:

- کنترل بهینه زمان

$$J=\int_{t_0}^{t_f} 1\,dt = t_f - t_0$$

- ~ ~ سوخت

$$J=\int_{t_0}^{t_f} |u(t)|\,dt \quad \text{یا} \quad \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{m} R_i |u_i|\,dt \qquad \text{معمولاً}\ |u|<M$$

- ~ ~ انرژی

$$J=\int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{m} R_i u_i^2(t)\,dt$$

- سیستم تعقیب (حالت)

$$J=\int_{t_0}^{t_f} x^T(t) Q x(t)\,dt$$

$$x(t)=\underbrace{x_a(t)}_{\text{واقعی}}-\underbrace{x_d(t)}_{\text{مطلوب}}$$

(مسائل لاگرانژ) قطعاً انتگرال مهم است $J=\int V\,dt$

- کنترل انتهایی

$$J=x^T(t_f) F x(t_f)$$

وقتی که نقطه انتهایی مهم است. (مسئله مایر) (نقطه انتهایی مهم است) $J=S$

- کنترل بهینه جامع یا متعارف

$$J=x^T(t_f) F x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [x^T Q x + u^T R u]\,dt$$

$$F, Q \geq 0,\ R>0$$

$$J=\underbrace{\underbrace{S(x(t_f),t_f)}_{\text{مایر}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_f} V(x,u,t)\,dt}_{\text{لاگرانژ}}}_{\text{بولزا}}$$

محدودیت‌ها و قیود:

$$U_- \leq u(t) \leq U_+ \quad , \quad X_- \leq x(t) \leq X_+$$

مثال: سریع‌ترین نزول

h

بدون

فصل دوم : حساب تغییرات و کنترل بهینه

حساب تغییرات ، مقدار یک تابعی را بهینه (اکسترمم) می‌کند. (ماکزیمم یا مینیمم). (شروع ۱۶۹۶)

مفاهیم پایه: - تابع $x(t)=2t^2+1$

- تابعی $J(x(t))=\int_0^1 x(t)\,dt$

- نمو ← تابع $\Delta x(t) \triangleq x(t+\Delta t)-x(t)$

← تابعی $\Delta J \triangleq J(x(t)+\delta x(t))-J(x(t))$

مثال $J=\int_{t_0}^{t_f}[2x^2(t)+1]\,dt \rightarrow \Delta J=\int_{t_0}^{t_f}[4x(t)\,\delta x(t)+2(\delta x(t))^2]\,dt$

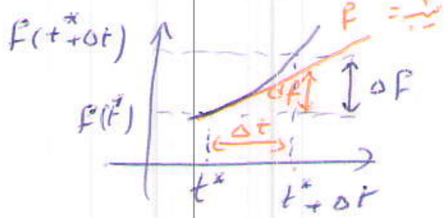
- دیفرانسیل و تغییرات

$\Delta f(t)=f(t^*+\Delta t)-f(t^*)$ نمو تابع

بسط تیلور $=f(t^*)+\left[\frac{df}{dt}\right]_{t^*}\Delta t+\frac{1}{2!}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right]_{t^*}\Delta t^2+\dots-f(t^*)$

$\approx \left(\frac{df}{dt}\right)_{t^*}\Delta t=\dot f(t^*)\,\Delta t=df$ دیفرانسیل

اگر از مرتبه بالاتر صرف‌نظر کنیم نمو برابر دیفرانسیل است.



- تغییرات تابعی

$\Delta J=J(x^*(t)+\delta x(t))-J(x^*(t))$

تیلور $=\frac{\partial J}{\partial x}\delta x+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 J}{\partial x^2}(\delta x)^2+\dots=\delta J+\delta^2 J+\dots$

مرتبه اول ، مرتبه دوم

مثال $J(x(t))=\int_{t_0}^{t_f}[2x^2+3x+4]\,dt$

$\Delta J=\int_{t_0}^{t_f}[4x\,\delta x+2\delta x^2+3\delta x]\,dt \rightarrow \delta J=\int_{t_0}^{t_f}[4x+3]\,\delta x\,dt$

مقدار بهینه یک تابع: تابع در t^* ← ماکزیمم محلی $\Delta f=f(t)-f(t^*)\le 0$

← مینیمم محلی $\Delta f=f(t)-f(t^*)\ge 0$

[illegible]

شرط لازم $df|_{t^*}=0$ در نقطه اکسترمم

شرط کافی $\begin{cases} d^2f<0 & \text{ماکزیمم} \\ d^2f>0 & \text{مینیمم} \end{cases}$ اگر $d^2f=0$ → نقطه عطف

مقدار بهینه تابعی

تابعی J روی $x^*(t)$ اکسترمم (بهینه) است اگر $|x - x^*| < \varepsilon$ (نرم)

$$\begin{cases} \text{مینیمم} & \Delta J = J(x) - J(x^*) \geq 0 \\ \text{ماکزیمم} & \Delta J \leq 0 \end{cases}$$

شرط لازم $\delta J \big|_{x^*} = 0$

شرط کافی $\begin{cases} \text{مینیمم} & \delta^2 J > 0 \\ \text{ماکزیمم} & \delta^2 J < 0 \end{cases}$

مسئله پایه حساب تغییرات

- مسئله با زمان و حالت انتهایی ثابت (هم اولیه و هم نهایی ثابت) $x(t)$ تابعی است که با مشتق پیوسته را طوری بیابید که J را بهینه کند. (کمینه)

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_f} V\,(x(t), \dot{x}(t), t)\, dt \qquad x(t_0) = x_0 , \quad x(t_f) = x_f$$

گام ۱: فرض کنید بهینه $x^*(t)$

$\delta x(t_0) = \delta x(t_f) = 0$ با توجه به شرط مرزی

$x(t) = x^*(t) + \delta x(t)$ یک مسیر حول مسیر بهینه

گام ۲: محاسبه نمو تغییرات

$$\Delta J(x^*, \delta x) \triangleq J(x^* + \delta x \cancel{- J(x^*}, \dot{x}^* + \delta \dot{x}, t) - J(x^*, \dot{x}^*, t)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} , \quad \delta \dot{x} = \frac{d}{dt} \delta x(t)$$

$$\rightarrow \Delta J(x^*, \delta x) = \int_{t_0}^{t_f} [V(x^* + \delta x, \dot{x}^* + \delta \dot{x}, t) - V(x^*, \dot{x}^*, t)]\, dt$$

$$\xrightarrow{\text{بسط تیلور}} \Delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_* \delta x + \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right)_* \delta \dot{x} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_* \delta x^2 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{x}^2}\right)_* \delta \dot{x}^2 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \dot{x}}\right)_* \delta x \delta \dot{x} + \dots \right] dt$$

گام ۳: تغییرات اول

$$\delta J(x^*, \delta x) = \int \left[\frac{\partial V(x^*, \dot{x}^*, t)}{\partial x} \delta x + \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right)_* \delta \dot{x} \right] dt$$

انتگرال گیری جزء به جزء

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right)_* \delta \dot{x} = \cancel{\int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right)_* \delta x + \dots}$$

$$= \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right)_* \frac{d}{dt}(\delta x(t))\, dt = \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right)_* \delta x(t) \right]_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \delta x \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right)_* dt$$

$$\Rightarrow \delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right)_* \right] \delta x(t)\, dt + \underbrace{\left[\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \delta x(t) \right]_{t_0}^{t_f}}_{=\,0}$$

با توجه به شرایط مرزی 0

گام ۴: قضیه اساسی (مهم)

$$\delta J_* = 0$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right)_* \right] \delta x(t)\, dt = 0$$

گام ۵: لم اساسی (مهم)

اگر برای هر تابع $g(t)$ پیوسته داشته باشیم $\int_{t_0}^{t_f} g(t)\,\delta x(t)\,dt = 0$ و δx در بازه $[t_0, t_f]$ پیوسته باشد آنگاه $g(t)$ در بازه $[t_0, t_f]$ صفر است.

$\therefore\ g(t) = 0$

گام ۶: معادله اویلر ـ لاگرانژ

$$\frac{\partial V(x^*, \dot{x}^*, t)}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial V(x^*, \dot{x}^*, t)}{\partial \dot{x}} \right] = 0$$

عبارت ساده‌تر $\longrightarrow \quad V_x - \frac{d}{dt} V_{\dot{x}} = 0$

× با توجه به اینکه V تابعی است از x، $\dot{x}$ و t است و خود x و $\dot{x}$ نیز توابعی از t هستند لذا:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}\right)_* = V_{x\dot{x}}\, \dot{x}^*(t) + V_{\dot{x}\dot{x}}\, \ddot{x}^*(t) + V_{t\dot{x}}$$

صورت دیگر معادله اویلر لاگرانژ $\Leftarrow \quad V_x - V_{t\dot{x}} - V_{x\dot{x}}\, \dot{x}^*(t) - V_{\dot{x}\dot{x}}\, \ddot{x}^*(t) = 0$

× حالت‌های مختلف معادله اویلر ـ لاگرانژ

۱- V فقط به $\dot{x}$ و t وابسته است. $V = V(\dot{x}, t)$

$$\Rightarrow V_x = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} V_{\dot{x}} = 0 \rightarrow V_{\dot{x}} = C$$

۲- V فقط وابسته به $\dot{x}$

$$\rightarrow V_{\dot{x}} = C$$

$\dot{x}^*(t) = C_1 \rightarrow x^*(t) = C_1 t + C_2$ خط راست

۳- V تابعی از x و $\dot{x}$

$$V_x - V_{x\dot{x}}\, \dot{x}^* - V_{\dot{x}\dot{x}}\, \ddot{x} = 0 \xrightarrow[\dot{x}]{\text{با ضرب}} \frac{d}{dt}\left[V - \dot{x} V_{\dot{x}}\right] = 0 \rightarrow V - \dot{x}^* V_{\dot{x}} = C$$

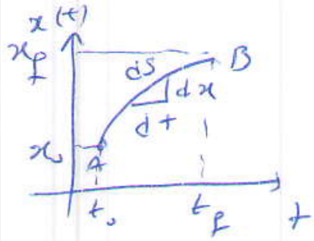
با استفاده از تکنیک تغییر متغیر قابل حل است (دیفرانسیلی)

۴- V وابسته به x و t

$$V_{\dot{x}} = 0 \Downarrow \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

در حالت کلی جواب ندارد زیرا در شرط مرزی صدق نمی‌کند

مثال: کوتاهترین فاصله بین دو نقطه را بیابید.



$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dt)^2 \quad \text{(تقریبی)}$$

$$ds = \sqrt{1+\dot{x}}\; dt \qquad \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

$$S = J = \int ds = \int_{t_0}^{t_f} \underbrace{\sqrt{1+\dot{x}^2}}_{V(\dot{x})}\, dt$$

$$\to \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} = c \to \frac{\dot{x}^*}{\sqrt{1+\dot{x}^{*2}}} = c \xrightarrow{\text{حل معادله}} x^* = c_1 t + c_2 \xrightarrow[\text{با اعمال شرط مرزی}]{} c_2 , c_1 \text{ معلوم}$$

تغییرات دوم: شرط کافی برای حداقل بودن آن است که $\delta^2 J > 0$ با بدست آوردن $\delta^2 J$ و استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء شرط $\delta^2 J > 0$ به دو شرط زیر تبدیل می‌شود:

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right] - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \dot{x}}\right]_* > 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{x}^2}\right)_* > 0 \to \text{شرط اصلی}$$

(زیرا δx آزاد است) پس این دو تا تعیین کننده است

یا

$$\delta^2 J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} [\delta x \quad \delta \dot{x}]\, \Pi \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta \dot{x} \end{bmatrix} dt \qquad \Pi = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \dot{x}} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \dot{x}} & \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{x}^2} \end{bmatrix}$$

اگر Π مثبت معین باشد $\Leftarrow \delta^2 J > 0 \Leftarrow$ منحنی بهینه یک حداقل است.

مثال

$\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}$ در مثال قبل

$\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{x}^2} = \frac{1}{(1+\dot{x}^2)^{3/2}} > 0$

بهینه‌سازی توابع تحت شروط و محدودیت

مثال: حداکثر حجم مخزن استوانه‌ای با سطح ثابت ورق

d: قطر

h: ارتفاع

$V(d,h) = \pi d^2 h/4$ مسئله: حداکثرسازی V

$A(d,h) = 2\pi d^2/4 + \pi d h = A_0$ ثابت (شرط)

دو متغیره

دو روش برای حل وجود دارد ۱- روش مستقیم ۲- روش ضرب کننده‌ی لاگرانژ

۱- روش مستقیم

ابتدا یک متغیر را از رابطه‌ی سطح برحسب دیگری بدست آورده و در رابطه‌ی حجم می‌گذاریم سپس آن را ماکزیمم می‌کنیم.

$$h = \frac{A_0 - \pi d^2/2}{\pi d} \to V(d) = A_0\, d/4 - \pi d^3/8 \xrightarrow{\text{مشتق‌گیری}} \frac{dV(d)}{dd} = \frac{A_0}{4} - \frac{3}{8}\pi d^2 = 0$$

$$\Rightarrow d^* = \sqrt{\frac{2A_0}{3\pi}} \to h^* = \sqrt{\frac{2A_0}{3\pi}}$$ یعنی قطر و ارتفاع برابر

۲- روش ضرب کننده‌های لاگرانژ

ابتدا با توجه به قید یک تابع جدید به نام تابع افزوده، تشکیل می‌دهیم

$$\mathcal{L}(d,h,\lambda) = V(d,h) + \lambda(A - A_0)$$

$$= \pi d^2 h/4 + \lambda(2\pi d^2/4 + \pi d h - A_0)$$

$\mathcal{L}$: لاگرانژین

λ: ضرب‌کننده لاگرانژ

$$\rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d} = \pi dh/2 + \lambda(\pi d + \pi h) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} = \pi d^2/4 + \lambda(\pi d) = 0 \qquad \rightarrow \lambda^* = -\sqrt{\frac{A_0}{24\pi}}, \quad h^* = \sqrt{\frac{2A_0}{3\pi}}, \quad d^* = \sqrt{\frac{2A_0}{3\pi}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 2\pi d^2/4 + \pi d h - A_0 = 0$$

تعمیم روش ضرب کننده‌های لاگرانژ

هدف: بهینه‌سازی $f(x_1,x_2)$ با قید $g(x_1,x_2)=0$

ابتدا لاگرانژین را تشکیل می‌دهیم:

$$\mathcal{L}(x_1,x_2,\lambda) = f(x_1,x_2) + \lambda g(x_1,x_2)$$

اگر شرط $g=0$ برقرار باشد $f=\mathcal{L}$ ⇐ شرط بهینه بودن $df = d\mathcal{L} = 0$

$$d\mathcal{L} = df + \lambda dg = 0 \rightarrow \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}\right] dx_1 + \left[\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}\right] dx_2 = 0$$

اگر قید $g=0$ را نداشتیم dx_1 و dx_2 مستقل از هم بوده و ضرایب آنها را صفر قرار می‌داشتیم. حال با این وضع، می‌توانیم یکی را مستقل بگیریم و دیگری وابسته خواهد بود. فرض کنید dx_1 متغیر مستقل آزاد باشد. لذا طرف دیگر λ یک ضرب کننده دلخواه است. بنابراین می‌توان گذاشت:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0 \rightarrow \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x_1}\right] dx_1 = 0$$

$$\xrightarrow{dx_1 \text{ آزاد}} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = g(x_1,x_2) = 0 \end{cases}$$

اگر تعداد متغیرها و تعداد قیود بیشتر هم باشد می‌توان از روش ضرب کننده لاگرانژ استفاده نمود

$$\mathcal{L}(X,\lambda) = f(X) + \lambda^T g(X) \qquad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

n متغیر

m قید

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = \dfrac{\partial f}{\partial X} + \lambda^T \dfrac{\partial g}{\partial X} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = g(X) = 0 \end{cases}$$

بهینه‌سازی تابعی‌های مقید

این مسئله هم مانند بهینه‌سازی توابع مقید با استفاده از ضرایب لاگرانژ قابل حل است. فرض کنید تابعی J را با قید g می‌خواهیم بهینه کنیم.

(فرض: سیستم دو بعدی)

$$J(x_1, x_2) = J = \int_{t_0}^{t_f} V(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, t)\, dt$$

باشد

$$g(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = 0$$

با شرایط انتهایی ثابت: $x_1(t_0) = x_{10},\ x_2(t_0) = x_{20}$

$x_1(t_f) = x_{1f},\ x_2(t_f) = x_{2f}$

گام ۱: لاگرانژین

$$J_a = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \lambda, t)\, dt$$

$$\mathcal{L} = V + \lambda g$$

گام ۲: نمو و تغییرات

$$x_i = x_i^* + \delta x_i \qquad \dot{x}_i = \dot{x}_i^* + \delta \dot{x}_i$$

$$\Delta J_a = J_a(x_i^* + \delta x_i,\ \dot{x}_i^* + \delta \dot{x}_i, t) - J_a(x_i^*, \dot{x}_i^*, t)$$

گام ۳: تغییرات اول

$$\delta J_a \overset{\text{تیلور}}{=} \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}\right)_* \delta x_1 + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}\right)_* \delta x_2 + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}\right)_* \delta \dot{x}_1 + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2}\right)_* \delta \dot{x}_2 \right\} dt$$

با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء $\int u\,dv = uv - \int v\,du$، $\delta \dot{x}_1$ و $\delta \dot{x}_2$ را برحسب δx_1، δx_2 بدست می‌دهیم

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}\right)_* \delta \dot{x}_1\, dt = \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}\right)_* \delta x_1 \right]_{t_0}^{t_f} - \int \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}\right)_* \delta x_1\, dt$$

$= 0 \Leftarrow$ انتها ثابت

$$\therefore\ \delta J_a = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}\right)_* \right\} \delta x_1\, dt + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}\right)_* - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} \right\} \delta x_2\, dt = 0$$

گام ۴: قضیه اساسی

حل مسئله بهینه‌سازی تابع مقید:

گام ۵: لم اساسی

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}\right)_* = 0 \\ &\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2}\right)_* = 0 \end{aligned}\right\}$$

معادلات اویلر-لاگرانژ

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\right)_* = g = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt}\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}}}_{0} = 0$$

حل:

$$J=\int_0^1 (x^2+u^2)\,dt \qquad x(0)=1,\ x(1)=0$$

قید $\dot{x}(t)=-x(t)+u(t)$

در روش مستقیم معادله $u(t)$ را برحسب x و $\dot{x}$ بدست آورده در J قرار دهیم.

$$J=\int_0^1 \left(x^2+(\dot{x}+x)^2\right)dt \to \frac{\partial V}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{x}}=0 \to 4x+2\dot{x}-\frac{d}{dt}(2\dot{x}+2x)$$

$$-2\ddot{x}+4x=0 \to \ddot{x}-2x=0$$

$$\to x^*(t)=c_1e^{-\sqrt{2}t}+c_2e^{\sqrt{2}t} \quad : c_1=1/1-e^{-2\sqrt{2}t} \qquad c_2=1/1-e^{2\sqrt{2}t}$$

$$u(t)=\dot{x}^*+x^*(t)=c_1(1-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t}+c_2(1+\sqrt{2})e^{\sqrt{2}t}$$

اما همیشه به این راحتی نمی‌توانیم هر متغیر را حذف کنیم. بنابراین از روش ضرب کننده‌های لاگرانژ استفاده می‌کنیم.

$$g(x,\dot{x},u)=\dot{x}+x-u=0$$

$$J=\int_0^1 \{\underbrace{x^2+u^2+\lambda(\dot{x}+x-u)}_{\mathcal{L}}\}\,dt \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}=0 \to 2x^*+\lambda^*-\dot{\lambda}^*=0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}-\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}}=0 \to 2u^*-\lambda^*=0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}-\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}}=0 \to \dot{x}^*+x^*-u^*=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda^*=2u^*=2(\dot{x}^*+x^*) \to \ddot{x}^*-2x=0 \Rightarrow x^*(t)=c_1e^{-\sqrt{2}t}+c_2e^{\sqrt{2}t} \to u(t)=\dot{x}^*+x^*$$

ص ۶ کتاب ترجمه شده برای مثال 2 حل شود

حل مسئله کنترل بهینه با استفاده از روش تغییرات

مسئله کنترل را برای حالت با هزینه انتهایی در نظر می‌گیریم.

حالت بولزا

$$J(u(t))=S(x(t_f),t_f)+\int_{t_0}^{t_f} V(x(t),u(t),t)\,dt$$

$$\dot{x}(t)=f(x,u,t)$$

شرایط مرزی $x(t_0)=x_0$ معلوم

t_f آزاد، $x(t_f)$ آزاد

$x(t)$: n بعدی ، $u(t)$: r بعدی

$$\int_{t_0}^{t_f}\frac{dS(x(t),t)}{dt}\,dt=S(x(t),t)\Big|_{t_0}^{t_f}=S(x(t_f),t_f)-S(x(t_0),t_0)$$

$$\Rightarrow J=\int_{t_0}^{t_f}\left(V+\frac{dS}{dt}\right)dt+S(x(t_0),t_0)$$

معلوم و ثابت است بنابراین در بهینه‌سازی تأثیری ندارد

$$\Rightarrow J=\int_{t_0}^{t_f}\left(V(x^*,u^*,t)+\frac{dS(x^*,t)}{dt}\right)dt$$

$$\dot{x}^*=f(x^*,u^*,t)$$

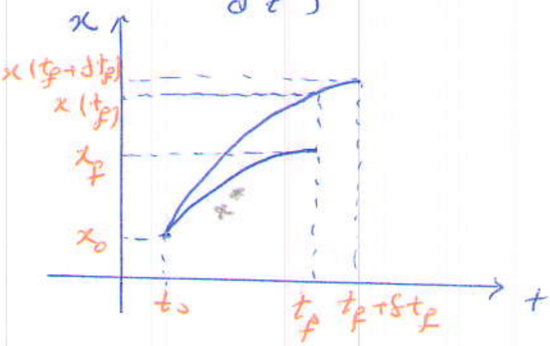
تغییرات بردار حالت و کنترل

$$x = x^* + \delta x \qquad u = u^* + \delta u$$

$$\dot{x}^* + \delta \dot{x} = f(x^* + \delta x, u^* + \delta u, t)$$

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f + \delta t_f} \left[V(x^* + \delta x, u^* + \delta u, t) + \frac{dS}{dt} \right] dt$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x}^T \dot{x} + \frac{\partial S}{\partial t}$$



$$J_a(u^*(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \left[V(x^*, u^*, t) + \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_*^T \dot{x}^* + \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_* + \lambda^T \{ f(x^*, u^*(t), t) - \dot{x}^*(t) \} \right] dt$$

$$J_a(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f + \delta t_f} \left[V(x^* + \delta x, u^* + \delta u, t) + \left(\frac{\partial S}{\partial x}^T\right)_* [\dot{x}^* + \delta \dot{x}] + \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_* + \lambda^T [f(x^* + \delta x, u^* + \delta u, t) - \{ \dot{x}^*(t) + \delta \dot{x} \}] \right] dt$$

$$\mathcal{L}^* = V^* + \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_*^T \dot{x}^* + \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_* + \lambda^T [f^* - \dot{x}^*]$$

$$\mathcal{L}^\delta = V + \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_*^T (\dot{x}^* + \delta \dot{x}) + \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_* + \lambda^T [f - \dot{x}^* - \delta \dot{x}]$$

$$\Rightarrow J_a(u^*) = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}^* \, dt$$

$$J_a(u) = \int_{t_0}^{t_f + \delta t_f} \mathcal{L}^\delta \, dt = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}^\delta \, dt + \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} \mathcal{L}^\delta \, dt$$

با استفاده از تقریب مقدار میانگین و سری تیلور و حفظ ترم خطی داریم:

$$\int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} \mathcal{L}^\delta \, dt = \mathcal{L}^\delta \Big|_{t_f} \delta t_f \approx \left\{ \mathcal{L}^* + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\right)_*^T \delta x + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right)_*^T \delta \dot{x} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}\right)_*^T \delta u \right\}_{t_f} \delta t_f$$

$$\approx \mathcal{L}^* \Big|_{t_f} \delta t_f$$

$$\Delta J = J_a(u) - J_a(u^*) = \int_{t_0}^{t_f} (\mathcal{L}^\delta - \mathcal{L}^*) \, dt + \mathcal{L}^\delta \Big|_{t_f} \delta t_f$$

تغییرات اول

$$\Rightarrow \delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\right)_*^T \delta x + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right)_*^T \delta \dot{x} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}\right)_*^T \delta u \right\} dt + \mathcal{L} \Big|_{t_f} \delta t_f$$

با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء داریم:

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right)_*^T \delta \dot{x} \, dt = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right)_*^T \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right)_*^T \delta x \, dt$$

از آنجا که $x(t_0)$ ثابت و معلوم فرض شده است بنابراین $\delta x(t_0)=0$

$$\Rightarrow \delta J = \int_{t_0}^{t_f}\left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\right)_* - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right)_*\right]^T \delta x(t)\,dt + \int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}\right)_*^T \delta u\,dt + \mathcal{L}^*\Big|_{t_f}\delta t_f$$
$$+\left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right)_*^T \delta x(t)\right]_{t_f}$$

شرط بهینه بودن: $\delta J = 0$

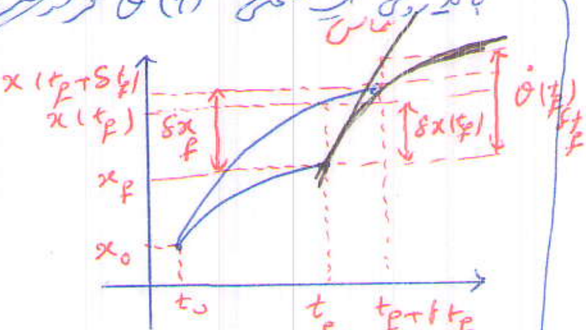
مانند قبل $\Rightarrow \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\right)_* - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 0$ معادلات اویلر لاگرانژ

$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}\right)_* = 0$ δu آزاد

$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\right)_* = 0$ قید است

$\mathcal{L}^*\Big|_{t_f}\delta t_f + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right)^T \delta x\Big|_{t_f} = 0$ شرط مرزی

(اگر t_f و $\delta x(t_f)$ مستقل از هم آزاد باشند ضریب هر دو جمله بالا را مساوی صفر قرار می‌دهیم. ولی اگر انتهای مسیر باید روی یک منحنی $\theta(t)$ قرار گیرد آنگاه δt_f و δx_f مستقل از هم نخواهند بود.)



با توجه به شکل ~~$\delta x(t_f)$~~

شیب در t_f: $\dot{x}^*(t_f) + \delta\dot{x}(t_f) = \dot{x}(t_f) \approx \dfrac{\delta x_f - \delta x(t_f)}{\delta t_f}$

$\Rightarrow \delta x_f = \delta x(t_f) + \{\dot{x}^*(t_f) + \delta\dot{x}(t_f)\}\delta t_f$

$\xrightarrow{\text{با حفظ بخش خطی}} \delta x(t_f) = \delta x_f - \dot{x}^*(t_f)\,\delta t_f$

$\xrightarrow{\text{شرط مرزی}} \left[\mathcal{L}^* - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right)_*^T \dot{x}\right]_{t_f}\delta t_f + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right)_*^T\Big|_{t_f}\delta x_f = 0$

ب فرض کنید t_f و $x(t_f)$ (یا x_f) به گونه‌ای مرتبط باشند که $x(t_f)$ روی یک منحنی متحرک $\theta(t)$ قرار گیرد

$\Rightarrow x(t_f) = \theta(t_f)$

$\Rightarrow \delta x_f \simeq \dot{\theta}(t_f)\,\delta t_f$

$\Rightarrow \left[\mathcal{L}^* - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\Big|_*^T \dot{x}\right]_{t_f} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right)_*^T\Big|_{t_f}\dot{\theta}(t)\Big|_{t_f} = 0$

روش هامیلتونی: (یا روش پونتریاگین)

$$\mathcal{H}^* = V^* + \lambda^{*T} f^*$$ $H^* = H(x^*, u^*, \lambda^*, t)$ حل بهینه

$$\mathcal{L}^* = \mathcal{H}^* + \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_*^T \dot{x}^* + \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_* - \lambda^{*T} \dot{x}^*$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}\right)_* = 0 & \text{معادله ورودی} \\ \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\right)_* = -\dot{\lambda}^* & \text{معادلات کمکی} \\ \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}\right)_* = +\dot{x} & \text{معادله حالت} \end{cases}$$

شرایط مرزی $\left[\mathcal{H}^* + \frac{\partial S}{\partial t}\right]_{t_f} \delta t_f + \left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_* - \lambda^*\right)_{t_f}^T \delta x_f = 0$

شرط کافی:

$$\delta^2 J = \int_{t_0}^{t_f} [\delta x^T \quad \delta u^T] \, \Pi \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta u \end{bmatrix} dt$$

برای مقدار بهینه حداقل باید $\delta^2 J > 0$

$$\Pi = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x \partial u} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} & \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^2} \end{bmatrix}$$ شرط کافی $\Pi > 0 \xrightarrow[\text{لازم}]{\text{شرط}} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^2} > 0$

مثال: انتگرال‌گیر دوبل (۱۱-۲)

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} u^2(t)\, dt$$
$$\dot{x}_2 = u$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad x(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حل: $V = \frac{1}{2}u^2 \qquad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix}$

گام ۱ $\mathcal{H} = V + \lambda^T f = \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$

گام ۲ $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0 \rightarrow u^* + \lambda_2^* = 0 \rightarrow u^* = -\lambda_2^*$ $\xrightarrow{\text{گام ۳}} \mathcal{H} = \frac{1}{2}\lambda_2^{*2} + \lambda_1^* x_2^* - \lambda_2^{*2}$

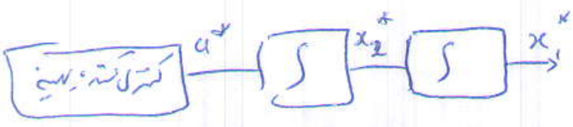
$$= \lambda_1^* x_2^* - \frac{1}{2}\lambda_2^{*2}$$

گام ۴ $\dot{x}_1^* = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_1} = x_2^* \qquad \dot{\lambda}_1^* = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1} = 0$

$\dot{x}_2^* = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_2} = -\lambda_2^* \qquad \dot{\lambda}_2^* = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_2} = -\lambda_1^*$

$$\rightarrow \begin{aligned} x_1^* &= \frac{c_3}{6}t^3 - \frac{c_4}{2}t^2 + c_2 t + c_1 \\ x_2^* &= \frac{c_3}{2}t^2 - c_4 t + c_2 \\ \lambda_1^* &= c_3 \\ \lambda_2^* &= -c_3 t + c_4 \end{aligned}$$

$\xrightarrow[\text{کنترل بهینه}]{\text{گام ۵}} u^* = -\lambda_2^* = c_3 t - c_4$



$\xrightarrow{\text{شرایط مرزی}} c_1 = 1,\ c_2 = 2,\ c_3 = 3,\ c_4 = 4$

حل ۲_۱۳: همان حل ۲_۱۲ با شرایط مرزی زیر

$x(0) = [1 \quad 2]^T \qquad x_1(2) = 0$

$x_2(2)$: آزاد $\qquad t_f = 2$

با حل معادلات حالت و کمک حالت روابط مشابه قبل بدست می‌آید. تنها تفاوت در بدست آوردن c ها است

با توجه به اینکه $S = 0 \,,\, t_f = 2 \Leftarrow \delta t_f = 0$

شرط مرزی $\quad \left[\mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t}\right]_{t_f} \delta t_f + \left[\frac{\partial S}{\partial x} - \lambda\right]_{t_f}^T \delta x_f = 0$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_2} - \lambda_2\right)\underbrace{\delta x_{2f}}_{\neq 0 \text{ آزاد}} = 0 \Rightarrow \lambda_2(t_f) = \left.\frac{\partial S}{\partial x_2}\right|_{t_f} = 0$$

چهار ثابت بدست می‌آیند ⇐ چهار شرط مرزی $x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 2,\ x_1(2) = 0,\ \lambda_2(2) = 0 \Rightarrow$

$c_1 = 1,\ c_2 = 2,\ c_3 = \frac{15}{8},\ c_4 = \frac{15}{4}$

حل ۲_۱۴: همان حل قبل با شرایط مرزی $\quad x(0) = [1 \quad 2]^T,\ x_1(t_f) = 3$

$x_2(t_f)$ آزاد

$\Rightarrow \delta t_f$ آزاد $,\ \delta x_{2f}$ آزاد $\longrightarrow \lambda_2(t_f) = \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0$

$\hookrightarrow \left[\mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t}\right]_{t_f} = 0 \rightarrow \lambda_1(t_f)\, x_2(t_f) - 0.5\, \lambda_2^2(t_f) = 0 \rightarrow c_3\, x_2(t_f) = 0$

$\rightarrow c_1 = 1,\ c_2 = 2,\ c_3 = \frac{4}{9},\ c_4 = \frac{4}{3},\ t_f = 3$

حل ۲_۱۵: ردیابی

$$J = \frac{1}{2}[x_1(2) - 4]^2 + \frac{1}{2}[x_2(2) - 2]^2 + \frac{1}{2}\int_0^2 u^2\, dt$$

$x(0) = [1 \quad 2]^T \qquad x(2)$: آزاد

معادلات اویلر_لاگرانژ تغییری نمی‌کند بنابراین جواب عمومی یکسان است.

$t_f = 2 \rightarrow \delta t_f = 0$

$\Rightarrow \lambda^*(t_f) = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{t_f} \qquad S(x(t_f)) = \frac{1}{2}[x_1(2) - 4]^2 + \frac{1}{2}(x_2(2) - 2)^2$

$\Rightarrow \lambda_1(t_f) = \left.\frac{\partial S}{\partial x_1}\right|_{t_f} \rightarrow \lambda_1(2) = x_1(2) - 4$

دو شرط و
دو نقطه

$\lambda_2(t_f) = \left.\frac{\partial S}{\partial x_2}\right|_{t_f} \rightarrow \lambda_2(2) = x_2(2) - 2$

$\rightarrow c_1 = 1,\ c_2 = 2,\ c_3 = \frac{3}{7},\ c_4 = \frac{4}{7}$