بسم الله الرحمن الرحیم

تعریف معادله دیفرانسیل: فرض کنید $F$ تابعی $n+2$ متغیره باشد در این صورت معادله‌ای به فرم $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ را یک معادله دیفرانسیل مرتبه $n$ گویند که رابطه بین متغیر مستقل $x$ و متغیر وابسته $y$ و مشتقات آن یعنی $y', y'', \dots, y^{(n)}$ را بیان می‌کند.

مثال:

۱- معادله دیفرانسیل $y'' - 2y' + 3y = 0$، معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با متغیر مستقل $x$ و وابسته $y$ است.

۲- $\frac{dv}{dt} + t.v = v^3$. معادله دیفرانسیل مرتبه اول با متغیر مستقل $t$ و وابسته $v$ است.

۳- $(y^{(3)})^2 + (y'')^5 + (\sin x)\, y = \cos x$، معادله دیفرانسیل مرتبه سوم با متغیر مستقل $x$ و وابسته $y$ است.

تعریف درجه: به بزرگترین توان مرتبه یک معادله دیفرانسیل، درجه آن معادله گویند.

$\sin y' + 2y = 0$. معادله دیفرانسیل مرتبه اول که درجه ندارد.

$y'' - 2y' + 3y = 0$: درجه 1 ، $y^{(3)} + (y'')^2 = x$: مرتبه 3، درجه 1

$\frac{dv}{dt} + t.v = v^3$: درجه 1 ، $(y')^3 + y^4 = x^5$: مرتبه اول، درجه سوم

$(y^{(3)})^2 + (y'')^5 + (\sin x)\, y = \cos x$. دارای درجه 2 می‌باشد

## جواب یک معادله دیفرانسیل :

تابع $y=\varphi(x)$ که در آن $\alpha<x<\beta$ ، را یک جواب معادله دیفرانسیل $F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0$ گویند هرگاه $\varphi(x),\varphi'(x),\varphi''(x),\dots,\varphi^{(n)}(x)$ موجود باشند و داشته باشیم:

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\dots,\varphi^{(n)}(x))=0$$

مثال :

$y=\sin x$ ، جوابی از معادله $y'=\cos x$ است .

$y=e^{2x}+e^{3x}$ ، جوابی از معادله $y''-5y'+6y=0$ است .

## جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل :

جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه $n$ ، $F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$ جوابی است که شامل $n$ ثابت دلخواه باشد و به ازای هر مقداری از این ثابت‌ها در معادله دیفرانسیل صدق کند .

جواب عمومی معادله فوق یا به فرم صریح $y=\varphi(x,c_1,c_2,\dots,c_n)$ یا به فرم ضمنی $g(x,y,c_1,c_2,\dots,c_n)=0$ می‌باشد.

مثال :

$y_g=c+\sin x$ ، جواب عمومی معادله $y'=\cos x$ است .

* جواب عمومی را با $y_g$ نشان می‌دهیم.

جواب خصوصی یک معادله دیفرانسیل:

اگر در جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل به $c_i$ ها $\forall i=1,\dots,n$ مقادیر دلخواهی نسبت دهیم به یک جواب خصوصی می‌رسیم. جواب خصوصی را با $y_s$ نشان می‌دهیم.

مثال:

معادله دیفرانسیل $y''-5y'+6y=0$ را در نظر بگیرید.

$y_g=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$ جواب عمومی معادله می‌باشد و $y_s=3e^{3x}$ یک جواب خصوصی می‌باشد. همچنین $y_s=5e^{2x}-3e^{3x}$ و $y_s=e^{2x}$ و ... جواب‌های خصوصی هستند.

جواب غیرعادی یک معادله دیفرانسیل:

جوابی است که از جواب عمومی حاصل نشود.

مثال:

معادله دیفرانسیل $y'=2\sqrt{y}$ دارای جواب عمومی $y_g=(x+c)^2$ است اما این معادله دارای جواب غیرعادی $y=0$ نیز می‌باشد که از جواب عمومی بدست نمی‌آید.

روش بدست آوردن جواب غیرعادی :

کافیست در جواب عمومی نسبت به ثابت $c$ مشتق بگیریم و سعی کنیم $c$ را برحسب $x$ پیدا کرده و در جواب عمومی قرار دهیم.

مثال :

در مثال قبلی در جواب عمومی $y=(x+c)^2$ نسبت به $c$ مشتق می گیریم

$$y=(x+c)^2 \xrightarrow[c]{\text{مشتق نسبت به}} 0=2(x+c) \longrightarrow c=-x$$

حال با جایگذاری $c=-x$ در جواب عمومی $y=(x+c)^2$ داریم

$$y=(x+c)^2=(x+(-x))^2=0 \longrightarrow \underline{y=0}$$

جواب غیرعادی

مثال : اگر $(x-c)^2+y^2=4$ جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل باشد جواب غیرعادی آن را بیابید :

$$(x-c)^2+y^2=4 \xrightarrow[c\ \text{؟}]{\text{مشتق نسبت}} -2(x-c)+0=0 \longrightarrow c=x$$

$$(x-c)^2+y^2=4 \xrightarrow[c=x]{} (x-x)^2+y^2=4 \longrightarrow y=\pm 2$$

جواب غیرعادی

خانواده منحنی ها :

دسته منحنی $g(x,y,c)=0$ (I) را در نظر بگیرید. اگر از این رابطه نسبت به $x$ مشتق بگیریم داریم :

$$\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=0$$

$$\longrightarrow g_x+g_y\cdot y'=0 \quad (II)$$

حال اگر از روابط (I) و (II) بتوانیم ثابت $c$ را حذف کنیم به یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول مربوط به دسته منحنی $g(x,y,c)=0$ می رسیم که آن را با $F(x,y,y')=0$ نشان می دهیم.

مثال : معادله دیفرانسیل $y=cx^2$ را بیابید.

$$y=cx^2 \xrightarrow[x \text{ به}]{\text{مشتق نسبت}} y'=2cx$$

حال با کمک $y$ و $y'$، ثابت $c$ را حذف می کنیم

$$\frac{y}{y'}=\frac{cx^2}{2cx} \longrightarrow \boxed{y'=\frac{2y}{x}}$$ معادله دیفرانسیل متمم

مثال ، معادله دیفرانسیل $y=\cos(cx)$ را بیابید.

$$y=\cos(cx) \xrightarrow[x \text{ نسبت به}]{\text{مشتق}} y'=-c\sin(cx)=-c\sqrt{1-\cos^2(cx)}=$$

$$-c\sqrt{1-y^2} \longrightarrow y'=-c\sqrt{1-y^2} \longrightarrow c=\frac{-y'}{\sqrt{1-y^2}} \quad *$$

حال با جایگذاری * در $y=\cos(cx)$ داریم

$$y=\cos\left(\frac{-y'}{\sqrt{1-y^2}}\cdot x\right)$$

مثال :

معادله دیفرانسیل دسته منحنی $y=c_1\sin x+c_2\cos x$ را بیابید.

چون این دسته منحنی دو ثابت $c_1$ و $c_2$ دارد پس دوبار مشتق می‌گیریم.

$$\left.\begin{aligned} y&=c_1\sin x+c_2\cos x\\ y'&=c_1\cos x-c_2\sin x\\ y''&=-c_1\sin x-c_2\cos x\end{aligned}\right\}\longrightarrow y''=-y \rightsquigarrow \boxed{y''+y=0}$$

معادله دیفرانسیل مرتبه ۲

* معادله دیفرانسیل حاصل از حذف ثابت‌های $c_1, c_2, \dots, c_n$ در دسته منحنی $y=c_1y_1+c_2y_2+\dots+c_ny_n$ به صورت زیر است:

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' & \cdots & y^{(n)}\\ y_1 & y_1' & y_1'' & \cdots & y_1^{(n)}\\ \vdots & & & & \\ y_n & y_n' & y_n'' & \cdots & y_n^{(n)}\end{vmatrix}=0$$

مثال بالا را می‌توان با کمک این روش حل کرد.

$$y=c_1\sin x+c_2\cos x$$

$$\begin{vmatrix} y & y' & y''\\ \sin x & \cos x & -\sin x\\ \cos x & -\sin x & -\cos x\end{vmatrix}=0 \longrightarrow$$

$$y(-\cos^2 x-\sin^2 x)-y'(-\sin x\cos x+\sin x\cos x)+y''(-\sin^2 x-\cos^2 x)=0$$

$$\longrightarrow -y-y''=0 \rightsquigarrow \boxed{y+y''=0}$$

مثال : معادله دیفرانسیل دسته منحنی $y=ax^2+be^{-x}$ را بیابید.

روش اول :

$y=ax^2+be^{-x}$ (I)

$y'=2ax-be^{-x}$ (II)

$y''=2a+be^{-x} \longrightarrow \underset{*}{\underline{be^{-x}=y''-2a}}$

حال با جایگذاری * در (II) $y'=2ax-be^{-x}$ داریم :

$y'=2ax-y''+2a \rightarrow y'=-y''+2a(x+1) \longrightarrow$

$$\underset{**}{\underline{a=\frac{y'+y''}{2(x+1)}}}$$

حال با جایگذاری * و ** در (I) داریم

$$y=ax^2+be^{-x} \rightarrow y=\frac{y'+y''}{2(x+1)}x^2+y''-2\frac{y'+y''}{2(x+1)}$$

$$\Rightarrow 2(x+1)y=(x^2+2x)y''+(x^2-2)y' \longrightarrow$$

$$\boxed{(x^2+2x)y''+(x^2-2)y'-2(x+1)y=0}$$

روش دوم :

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ x^2 & 2x & 2 \\ e^{-x} & -e^{-x} & e^{-x} \end{vmatrix}=0 \longrightarrow$$

$$y(2xe^{-x}+2e^{-x})-y'(x^2e^{-x}-2e^{-x})+y''(-x^2e^{-x}-2xe^{-x})=0$$

$$\Rightarrow \boxed{(x^2+2x)y''+(x^2-2)y'-2(x+1)y=0}$$

✓

مثال: معادله دیفرانسیل تمام دوایر در صفحه که مرکز آن ها روی محور x ها قرار دارد را بیابید.

معادله دایره در حالت کلی: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

معادله دایره به مرکز $(a,b)$ و شعاع $r$

در این مثال چون گفته شده که مرکز آنها روی محور x ها است پس داریم

$(x-a)^2+(y-0)^2=r^2$

یعنی $\boxed{b=0}$

دارای ۲ ثابت $r, a$ است پس

دو بار مشتق می گیریم (نسبت به x)

مشتق اول: $2(x-a)+2yy'=0$

مشتق دوم: $2+2y'^2+2yy''=0$

تمرین:

جواب غیرعادی دسته منحنی $y = x^2 + c$ را بیابید

$c$ مشتق نسبت به $c$ $\quad 0 = 1 \quad \times$

جواب غیرعادی ندارد.

جواب غیرعادی $y = \dfrac{2x^2 + 2mx + m^2}{x-1}$ را بیابید

$$\text{I} \qquad 2x^2 + 2mx + m^2 = xy - y \xrightarrow[m]{\text{مشتق نسبت به}} 0 + 2x + 2m = 0$$

$$\to m = -x$$

حال با جایگذاری $m = -x$ در I داریم

$$2x^2 + 2(-x)x + (-x)^2 = xy - y$$

$$x^2 = y(x-1) \to y = \frac{x^2}{x-1} \longrightarrow$$

جواب غیرعادی (پوش دسته منحنی)

مثال: معادله دیفرانسیل تمام دوایر در صفحه که مرکز آن‌ها روی محور $y$ها قرار دارد را بیابید.

$$x^2+(y-b)^2=r^2 \xrightarrow[\text{بر } x]{\text{مشتق نسبت}} 2x+2y'(y-b)=0 \quad \text{(I)}$$

$$\xrightarrow[\text{بر } x]{\text{مشتق دوم نسبت}} 2+2\left(y''(y-b)+y'^2\right)=0 \quad \text{(II)}$$

با کمک رابطه (I) داریم:

$$y-b=\frac{-x}{y'} \quad (*)$$

حال با جایگذاری $(*)$ در (II) داریم:

$$2+2\left(y''\left(\frac{-x}{y'}\right)+y'^2\right)=0$$

$$\Rightarrow \underline{y'-xy''+y'^3=0}$$

مثال: معادله دیفرانسیل دسته منحنی $y=\ln\cos(x-c_1)+c_2$ را بیابید.

$$\begin{cases} y=\ln\cos(x-c_1)+c_2 \\ y'=\dfrac{-\sin(x-c_1)}{\cos(x-c_1)}=-\tan(x-c_1) \\ y''=-\left(1+\tan^2(x-c_1)\right) \end{cases}$$

حال با جایگذاری $y'$ در $y''$ داریم:

$$y''=-(1+y'^2) \rightsquigarrow \underline{y''+y'^2+1=0}$$

مثال: معادله دیفرانسیل دسته منحنی $x\sin\alpha+y\cos\alpha=1$ ($\alpha$ ثابت) را بیابید.

$$\begin{cases} x\sin\alpha+y\cos\alpha=1 \\ \sin\alpha+y'\cos\alpha=0 \end{cases}$$

با استفاده از دستور کرامر، حل دستگاه فوق نتیجه می‌دهد:

$$\sin\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 1 & y \\ 0 & y' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & y' \end{vmatrix}} = \frac{y'}{xy'-y}$$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & y' \end{vmatrix}} = \frac{-1}{xy'-y}$$

برای حذف ثابت $\alpha$ می‌توانیم بنویسیم

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\left(\frac{y'}{xy'-y}\right)^2 + \left(\frac{-1}{xy'-y}\right)^2 = 1 \sim\!\!> \frac{y'^2+1}{(xy'-y)^2} = 1 \sim$$

$$\boxed{y'^2+1 = (xy'-y)^2}$$

مثال: معادله دیفرانسیل دسته منحنی $r = c(1+\sin\theta)$ را بدست آورید.

نسبت به $\theta$ مشتق می‌گیریم. برای راحتی کار داریم

$$c = \frac{r}{1+\sin\theta} \xrightarrow[\text{نسبت به } \theta]{\text{مشتق}} 0 = \frac{\frac{dr}{d\theta}(1+\sin\theta) - \cos\theta\,(r)}{(1+\sin\theta)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{dr}{d\theta}}{1+\sin\theta} = \frac{r\cos\theta}{(1+\sin\theta)^2} \Rightarrow (1+\sin\theta)\frac{dr}{d\theta} = r\cos\theta$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول:

فرم کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول بصورت $y' = f(x,y)$ است یا

بصورت $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ نشان داده می‌شوند

به عنوان مثال $y' = \sqrt{x^2+y^2}$ یا $(\sin y)dx + (\cos x + e^y)dy = 0$

معادلات مرتبه اول هستند.

قضیه وجود جواب معادله دیفرانسیل مرتبه اول:

اگر تابع دو متغیره $f(x,y)$ در یک ناحیه از صفحه پیوسته باشد و مشتقات مرتبه اول آن نیز پیوسته باشد در این صورت $y' = f(x,y)$ دارای حداقل یک جواب است.

نکته: اگر معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y' = f(x,y)$ دارای شرایط اولیه باشد آنگاه دقیقاً یک جواب دارد. (یعنی $y(x_0) = y_0$)

روش‌های حل معادله دیفرانسیل مرتبه اول:

روش اول: معادله جدایی پذیر (تفکیک پذیر)

فرم کلی $M(x)dx + N(y)dy = 0$ است. این معادله دارای جواب زیر می‌باشد

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

مثال: معادلات زیر را حل کنید

1) $y' = e^{x+y}$ $\quad y(0) = 0$

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^y \longrightarrow \frac{dy}{e^y} = e^x dx \longrightarrow -e^{-y} = e^x + C$$

$$\longrightarrow e^x + e^{-y} = C \longrightarrow$$

برای $y(0)=0 \rightsquigarrow e^0+e^0=C \rightsquigarrow \boxed{C=2} \rightsquigarrow$

$$\boxed{e^x+e^{-y}=2}$$

جواب خصوصی معادله

2) $y'=1+x^2+y^2+x^2y^2$

$$y'=(1+x^2)(1+y^2) \longrightarrow \frac{dy}{dx}=(1+x^2)(1+y^2) \rightsquigarrow$$

$$\frac{dy}{1+y^2}=(1+x^2)\,dx \xrightarrow{\text{انتگرال}} \tan^{-1}y=x+\frac{x^3}{3}+C$$

جواب عمومی معادله

3) $xy'+x^2=4 \longrightarrow xy'=4-x^2 \rightsquigarrow y'=\frac{4-x^2}{x} \rightsquigarrow \frac{dy}{dx}=\frac{4-x^2}{x}$

$$\rightsquigarrow dy=\frac{4-x^2}{x}\,dx \longrightarrow dy=\left(\frac{4}{x}-x\right)dx \xrightarrow{\text{انتگرال}}$$

$$y=4\ln|x|-\frac{x^2}{2}+C$$

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$$

4) $y'=\sqrt{1+x+y+xy}$

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{(1+x)(1+y)} \longrightarrow \frac{dy}{dx}=\sqrt{1+x}\,\sqrt{1+y} \longrightarrow$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1+y}}=\sqrt{1+x}\,dx \longrightarrow (1+y)^{-\frac{1}{2}}dy=(1+x)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال}} 2(1+y)^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}+C$$

5) $xy' + y^2 = 4 \rightsquigarrow xy' = 4 - y^2 \rightsquigarrow$ ~~جداسازی~~ $x\dfrac{dy}{dx} = 4 - y^2$

$$\frac{dy}{4-y^2} = \frac{dx}{x} \xrightarrow{\text{انتگرال}} \int \frac{dy}{(2-y)(2+y)} = \int \frac{dx}{x} \longrightarrow$$

$$\int \left( \frac{\frac{1}{4}}{2-y} + \frac{\frac{1}{4}}{2+y} \right) dy = \int \frac{dx}{x} \rightsquigarrow -\frac{1}{4}\ln(2-y) + \frac{1}{4}\ln(2+y) =$$

$$\ln x + \ln c \rightsquigarrow \ln(2-y)^{-\frac{1}{4}} + \ln(2+y)^{\frac{1}{4}} = \ln xc$$

$$\ln (2-y)^{-\frac{1}{4}}(2+y)^{\frac{1}{4}} = \ln cx \rightsquigarrow \sqrt[4]{\frac{2+y}{2-y}} = cx$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\frac{2+y}{2-y} = c'x^4}$$

توجه $\displaystyle\int \frac{dy}{(2-y)(2+y)} = ?$

$$\frac{A}{2-y} + \frac{B}{2+y} = \frac{1}{(2-y)(2+y)} \Rightarrow 2A + Ay + 2B - By = 1$$

$$\Rightarrow (A-B)y + 2A + 2B = 1 \rightsquigarrow \begin{matrix} A = B \\ 4A = 1 \end{matrix} \longrightarrow \boxed{A = B = \frac{1}{4}}$$

تمرین : معادلات زیر را حل کنید

1) $(y+1)dx - \tan x \, dy = 0$

2) $(1+x^3)dy - x^2 y \, dx = 0$

3) $(4x + xy^2)dx + (y + x^2 y)dy = 0$

4) $y' = e^{3x-2y} + x^2 e^{-2y}$

5) $y' = \frac{y \ln y}{x}$

6) $y' = y$

7) $y' = x$

8) $y \ln y \, dx + (1 + x^2) \, dy = 0$

9) $e^x dy + y e^x dx + x^2 dy + 2xy \, dx = 0 \qquad y(0) = 1$

~~10)~~

روش دوم: معادلات همگن:

تعریف: $f(x,y)$ را همگن از درجه $n$ گویند هرگاه:

$$\forall \lambda \in R \Rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$$

مثال: $f(x,y)=x^2+y^2$ همگن از درجه 2 است

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 = \lambda^2 (x^2+y^2) = \lambda^2 f(x,y) \checkmark$$

مثال: $f(x,y) = xy^2 \ln\left(\frac{y}{x}\right) + x^3 \sin\left(\frac{x}{y}\right)$ همگن از درجه 3 است

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)(\lambda y)^2 \ln\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) + (\lambda x)^3 \sin\left(\frac{\lambda x}{\lambda y}\right)$$

$$= \lambda^3 xy^2 \ln\left(\frac{y}{x}\right) + \lambda^3 x^3 \sin\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$= \lambda^3 \left( xy^2 \ln\frac{y}{x} + x^3 \sin\frac{x}{y} \right) = \lambda^3 f(x,y) \checkmark$$

در واقع برای اینکه یک تابع همگن باشد باید تمام جمله‌های آن از درجه یکسان باشند.

معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ را همگن گویند هرگاه $M$, $N$ توابعی همگن از درجه یکسان باشند.

در حالت کلی $y' = f(x,y)$ زمانی همگن است که $f(x,y)$ همگن از درجه صفر باشد.

مثال

$$(x^2+y^2)dx+(2xy)dy=0$$

$x^2$: درجه 2 — $y^2$: درجه 2

توان $x$ + توان $y$

$1+1=2$

درجه

معادله دیفرانسیل همگن از درجه 2

چون هم $x^2+y^2$ از درجه 2 و هم $2xy$ از درجه 2 هست
معادله دیفرانسیل همگن از درجه 2 میباشد.

$$(x^2+y)dx+2xy\,dy=0$$

$x^2$: درجه 2 — $y$: درجه 1 — $2xy$: درجه 2

همگن نیست

$$(x^2+y^2)dx+2x^2y\,dy=0$$

$x^2$: 2 — $y^2$: 2 — $2x^2y$: درجه 3

همگن نیست

$$x\sin\left(\frac{y}{x}\right)y'=y\sin\left(\frac{y}{x}\right)+x$$

$x$: 1, $\sin(y/x)$: 0 → 1 ; $y$: 1, $\sin(y/x)$: 0 → 1 ; $x$: 1

همگن از درجه 1

$$\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-x\,dy=0$$

$y$: 1 ; $\sqrt{x^2+y^2}$: 1 ; $x$: 1

$$\sqrt{\lambda^2x^2+\lambda^2y^2}=\sqrt{\lambda^2(x^2+y^2)}=\lambda\sqrt{x^2+y^2}=\lambda f(x,y)$$

پس درجه 1

$$y'=\frac{x^2+y^2}{x-y}$$ همگن نیست

$$y' = \frac{-3x^2y + y^3}{x^3 + 3xy^2}$$

پس همگن از درجه صفر می باشد.

حل معادلات دیفرانسیل همگن :

برای حل این نوع معادلات از تغییر متغیر $y = xv$ استفاده می کنیم در این صورت

$\underset{\text{I}}{y' = v + xv'}$ یا $\underset{\text{II}}{dy = x\,dv + v\,dx}$ . با جایگذاری I یا II در معادله اصلی

به یک معادله جدایی پذیر می رسیم و آن را حل می کنیم.

مثال : معادله زیر را حل کنید. $y(1) = -1$

$$(x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$$

$$y = xv \longrightarrow (x^2 + x^2v^2)\,dx + 2x(xv)(x\,dv + v\,dx) = 0$$

$$\Rightarrow x^2(1+v^2)\,dx + 2x^2v(x\,dv + v\,dx) = 0$$

$$\Rightarrow x^2(1+v^2)\,dx + 2x^3v\,dv + 2x^2v^2\,dx = 0$$

$$\Rightarrow x^2(1+3v^2)\,dx + 2vx^3\,dv = 0$$

$$\Rightarrow (1+3v^2)\,dx + 2xv\,dv = 0$$

$$\Rightarrow (1+3v^2)\,dx = -2xv\,dv$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{-2v\,dv}{1+3v^2} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{-2v\,dv}{1+3v^2}$$

$$\Rightarrow \ln|x| = -\frac{1}{3}\ln|1+3v^2| + \ln c$$

$$\Rightarrow 3\ln|x| = \ln \frac{c}{1+3v^2} \Rightarrow \ln|x^3| = \ln\left|\frac{c}{1+3v^2}\right|$$

$$\Rightarrow x^3(1+3v^2) = c \Rightarrow x^3\left(1+3\frac{y^2}{x^2}\right) = c \Rightarrow x^3 + 3xy^2 = c$$

$$\underset{y(1)=-1}{\Longrightarrow} \quad 1+3(1)(-1)^2=c \Rightarrow \boxed{c=4}$$

$$\Rightarrow \boxed{x^3+3xy^2=4}$$

جواب خصوصی

مثال : معادله زیر را حل کنید.

$$x\cdot\sin\left(\frac{y}{x}\right)y'=y\sin\left(\frac{y}{x}\right)+x$$

$$y=xv,\quad y'=v+v'x$$

$$x\cdot\sin\left(\frac{vx}{x}\right)(v+v'x)=xv\sin\left(\frac{vx}{x}\right)+x \Rightarrow$$

$$x\sin v\,(v+v'x)=xv\sin v+x \Rightarrow$$

$$\cancel{xv\sin v}+x^2v'\sin v=\cancel{xv\sin v}+x \Rightarrow$$

$$x^2v'\sin v=x \Rightarrow xv'\sin v=1 \Rightarrow$$

$$x\frac{dv}{dx}\sin v=1 \Rightarrow \sin v\,dv=\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\int \sin v\,dv=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow -\cos v=\ln x+c$$

$$\Rightarrow \boxed{-\cos\frac{y}{x}=\ln x+c}$$

مثال : معادله زیر را حل کنید

$$y'=\frac{y+x}{y-x}$$

$$y=vx \longrightarrow y'=v+v'x$$

$$v+v'x=\frac{vx+x}{vx-x} \Rightarrow v+v'x=\frac{v+1}{v-1} \Rightarrow v'x=\frac{v+1}{v-1}-v$$

$$\Rightarrow v'x=\frac{v+1-v^2+v}{v-1} \Rightarrow v'x=\frac{-v^2+2v+1}{v-1} \Rightarrow \frac{dv}{dx}x=\frac{-v^2+2v+1}{v-1}$$

$$\Rightarrow \frac{v-1}{-v^2+2v+1}dv=\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{v-1}{-v^2+2v+1}dv=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$-v^2+2v+1=u \xrightarrow{\text{مشتق}} (-2v+2)\,dv = du \Rightarrow -2(v-1)\,dv = du$$

$$(v-1)\,dv = \frac{du}{-2}$$

$$\int \frac{v-1}{-v^2+2v+1}\,dv = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{-2u} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}\ln u = \ln x + \ln c \Rightarrow \ln u^{-\frac{1}{2}} = \ln cx \Rightarrow$$

$$u^{-\frac{1}{2}} = cx \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{-v^2+2v+1}} = cx \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{-\frac{y^2}{x^2}+\frac{2y}{x}+1}} = cx$$

---

با استفاده از تغییر متغیر $y = z^{\alpha}$ معادله زیر را به یک معادله همگن تبدیل کرده و آن را حل کنید.

$$(y^4-3x^2)\,dy + xy\,dx = 0$$

$$y = z^{\alpha} \rightarrow y' = \alpha z' z^{\alpha-1}$$

و $dy = \alpha z^{\alpha-1}\,dz$

$$(z^{4\alpha}-3x^2)(\alpha z^{\alpha-1}\,dz) + x z^{\alpha}\,dx = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha z^{5\alpha-1} - 3\alpha x^2 z^{\alpha-1})\,dz + x z^{\alpha}\,dx = 0 \quad (*)$$

برای همگن بودن باید $M$، $N$ درجه یکسانی داشته باشند.

$$5\alpha-1 = \alpha+1 \Rightarrow 4\alpha = 2 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$$

حال با جایگذاری $\alpha = \frac{1}{2}$ در * داریم:

$$\left(\frac{1}{2} z^{\frac{5}{2}-1} - 3\frac{1}{2} x^2 z^{\frac{1}{2}-1}\right) dz + x z^{\frac{1}{2}}\,dx = 0$$

$$\xrightarrow{\times 2} \left(z^{\frac{3}{2}} - 3x^2 z^{-\frac{1}{2}}\right) dz + 2x z^{\frac{1}{2}} dx = 0$$

$$\xrightarrow{\times z^{\frac{1}{2}}} \left(z^2 - 3x^2\right) dz + 2xz\, dx = 0 \quad (*)$$

معادله همگن

$$z = xv \rightsquigarrow dz = v\,dx + x\,dv$$

با جایگذاری در * داریم

$$\left((xv)^2 - 3x^2\right)(v\,dx + x\,dv) + 2x^2 v\, dx = 0$$

$$\Rightarrow (x^2v^3 - 3x^2 v)\,dx + (x^3v^2 - 3x^3)\,dv + 2x^2 v\,dx = 0$$

$$\Rightarrow (x^2v^3 - x^2 v)\,dx + (x^3v^2 - 3x^3)\,dv = 0 \Rightarrow$$

$$x^2(v^3 - v)\,dx + x^3(v^2 - 3)\,dv = 0 \Rightarrow$$

$$(v^3 - v)\,dx + x(v^2 - 3)\,dv = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{x}dx = \frac{v^2-3}{-v+v^3}\,dv \Rightarrow$$ از طرفین انتگرال می‌گیریم

$$\int -\frac{1}{x}dx = \int \frac{v^2-3}{v^3-v}\,dv \Rightarrow$$

$$-\int \frac{1}{x}dx = \int \left(\frac{3}{v} - \frac{2v}{v^2-1}\right)dv \Rightarrow -\ln x = 3\ln v - \ln(v^2-1) + \ln c$$

$$\Rightarrow \ln\frac{1}{x} = \ln\left(\frac{cv^3}{v^2-1}\right) \Rightarrow v^2 - 1 = cxv^3 \xRightarrow{v = \frac{z}{x}}$$

$$\left(\frac{z}{x}\right)^2 - 1 = cx\left(\frac{z}{x}\right)^3 \Longrightarrow \frac{z^2 - x^2}{x^2} = \frac{cz^3}{x^2} \Rightarrow$$

$$z^2 - x^2 = cz^3$$

$$\int \frac{v^2-3}{v^3-v}\,dv \overset{?}{=} \int \left(\frac{3}{v} - \frac{2v}{v^2-1}\right) dv$$

$$v(v^2-1)$$

$$\frac{A}{v} + \frac{Bv+C}{v^2-1} = \frac{v^2-3}{v(v^2-1)} \Rightarrow Av^2 - A + Bv^2 + Cv = v^2-3$$

$$\Rightarrow (A+B)v^2 + Cv - A = v^2 - 3$$

$$\Rightarrow A+B=1 \;,\; C=0 \;,\; \underline{A=3} \Rightarrow \underline{B=-2}$$

$$\int \frac{v^2-3}{v^3-v}\,dv = \int \left(\frac{3}{v} + \frac{-2v}{v^2-1}\right) dv$$

مثال. معادله زیر را حل کنید

$$\left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right) dx - x\,dy = 0$$

$$y = xv \longrightarrow dy = x\,dv + v\,dx$$

$$\left(xv + \sqrt{x^2 + x^2v^2}\right) dx - x\,(x\,dv + v\,dx) = 0$$

$$\Rightarrow \left(xv + \sqrt{x^2(1+v^2)} - xv\right) dx - x^2\,dv = 0$$

$$\Rightarrow \left(x\left(\cancel{v} + \sqrt{1+v^2} - \cancel{v}\right)\right) dx - x^2\,dv = 0$$

انتگرال

$$\Rightarrow \sqrt{1+v^2}\,dx - x\,dv = 0 \Rightarrow \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\,dv \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\,dv \Rightarrow \ln x = \ln\left|\sqrt{1+v^2} + v\right| + \ln c$$

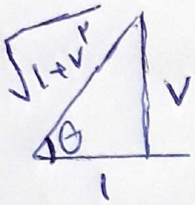
$$\Rightarrow x = c\left(\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}\right)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\,dv \overset{?}{=} \ln\left|\sqrt{1+v^2}+v\right|+C$$

$$v=\tan\theta \Rightarrow dv=\sec^2\theta\, d\theta$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\,dv=\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\int \frac{\sec^2\theta}{\sec\theta}\,d\theta=\int \sec\theta\, d\theta=$$

$$\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C=\ln\left|\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}}+v\right|+C$$




$$=\ln\left|\sqrt{1+v^2}+v\right|+C \checkmark$$

تمرین :

1) $y'-\frac{y}{x}+\csc\frac{y}{x}=0$

2) $(x\tan\frac{y}{x}+y)\,dx-x\,dy=0$

3) $(\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x})\,dx-(\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}+\cos\frac{y}{x})\,dy=0$

4) $y'=\frac{-3x^2y+y^3}{x^3+3xy^2}$

5) $(x^2+y^2)\,dx-(x^2+xy)\,dy=0$

6) $(x+y)\,dx-(x-y)\,dy=0$

## روش سوم: معادلات کامل

تعریف: معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ ① را یک معادله دیفرانسیل کامل گویند

هرگاه تابع دو متغیره ای مانند $f(x,y)$ موجود باشد بطوریکه

$$df(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy$$

یعنی
$$\begin{cases} f_x(x,y)=M(x,y) \\ f_y(x,y)=N(x,y) \end{cases}$$

در نتیجه اگر بتوانیم تابعی مانند $f(x,y)$ پیدا کنیم که

$$df(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

در این صورت معادله دیفرانسیل ① دارای جواب عمومی به صورت $f(x,y)=C$ می باشد.

قضیه: معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ را در نظر بگیرید، فرض کنید $M(x,y)$ و $N(x,y)$ و مشتقات آنها در ناحیه ای از صفحه مشتق پذیر و پیوسته باشند

در این صورت این معادله دیفرانسیل کامل است اگر به ازای هر $x$ و $y$ ای

$$M_y(x,y)=N_x(x,y)$$

مثال ۱: جواب عمومی معادله زیر را بیابید.

$$\underbrace{3x^2}_{M(x,y)}dx+\underbrace{2y}_{N(x,y)}dy=0$$

$M_y(x,y)=0$
$N_x(x,y)=0$
$\longrightarrow M_y=N_x \longrightarrow$ معادله کامل است

وجود دارد $f(x,y)$ ای به طوریکه

$$df(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy \Rightarrow$$

$$f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy = 3x^2 dx + 2y\,dy$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_x = 3x^2 \xrightarrow[\text{x به}]{\text{انتگرال نت}} f(x,y) = \int 3x^2 dx = x^3 \\ f_y = 2y \xrightarrow[\text{y به}]{\text{انتگرال نت}} f(x,y) = \int 2y\,dy = y^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x,y) = x^3 + y^2 \Rightarrow x^3 + y^2 = C$$

جواب عمومی معادله

مثال 2)

$$\underbrace{(2y^2 - 4x + 5)}_{M}dx + (\underbrace{4 - 2y + 4xy}_{N})dy = 0$$

$M_y = 4y$ , $N_x = 4y \Rightarrow M_y = N_x \Rightarrow$ معادله کامل است $\Rightarrow$

وجود دارد $f(x,y)$ به طوریکه

$$df(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy \Rightarrow$$

$$f_x\,dx + f_y\,dy = (2y^2 - 4x + 5)dx + (4 - 2y + 4xy)dy$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_x = 2y^2 - 4x + 5 \xrightarrow[\text{x به}]{\text{انتگرال نت}} f(x,y) = \int (2y^2 - 4x + 5)dx = \underbrace{2xy^2 - 2x^2 + 5x}_{\text{I}} \\ f_y = 4 - 2y + 4xy \end{cases}$$

انتگرال نت y به

$$f(x,y) = \int (4 - 2y + 4xy)dy = \underbrace{4y - y^2 + 2xy^2}_{\text{II}}$$

$$\text{I}, \text{II} \Rightarrow f(x,y) = 2xy^2 - 2x^2 + 5x + 4y - y^2 \Rightarrow$$

$$2xy^2 - 2x^2 + 5x + 4y - y^2 = C$$

جواب عمومی

مثال 3) معادله دیفرانسیل $y' = \dfrac{2+ye^{xy}}{2y-xe^{xy}}$ را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2+ye^{xy}}{2y-xe^{xy}} \Rightarrow (2+ye^{xy})\,dx - (2y-xe^{xy})\,dy = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M(x,y) = 2+ye^{xy} \\ N(x,y) = -(2y-xe^{xy}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_y = e^{xy} + xye^{xy} \\ N_x = e^{xy} + xye^{xy} \end{cases} \Rightarrow$$

$M_y = N_x \Longrightarrow$ معادله کامل است $\Longrightarrow \exists\, f(x,y)$ s.t.

$$df(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy \Rightarrow$$

$$f_x\,dx + f_y\,dy = (2+ye^{xy})\,dx - (2y-xe^{xy})\,dy \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f_x = 2+ye^{xy} \xrightarrow{\text{انتگرال نسبت به } x} f(x,y) = 2x + e^{xy} \\ \Rightarrow \\ f_y = -(2y-xe^{xy}) \xrightarrow[\text{به } y]{\text{انتگرال نسبت}} f(x,y) = -y^2 + e^{xy} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$f(x,y) = e^{xy} + 2x - y^2 \Longrightarrow \underbrace{e^{xy} + 2x - y^2 = c}_{\text{جواب عمومی}}$$

$$* \int (2+ye^{xy})\,dx = 2x + \underbrace{\int ye^{xy}\,dx}_{\text{متغیر } x \text{، } y \text{ ثابت}} = 2x + e^{xy} + c$$

$$\downarrow$$

$$y\int e^{xy}\,dx$$

$$\downarrow$$

$$y \cdot \frac{1}{y} e^{xy} + c$$

$$* \int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + c$$

مثال 4) معادله زیر را حل کنید

$$(4x^3\sin^3 y - 2x\sin y)dx + (3x^4\sin^2 y - x^2)\cos y\,dy = 0$$

$$\sin y = u \to \cos y\,dy = du \quad *$$

با جایگذاری * در معادله داریم:

$$(4x^3u^3 - 2xu)dx + (3x^4u^2 - x^2)du = 0$$

$$M_u = 12x^3u^2 - 2x$$

$$N_x = 12x^3u^2 - 2x$$

$$\Rightarrow M_u = N_x \Longrightarrow$$ معادله کامل است

پس وجود دارد $f(x,y)$ ای به طوریکه

$$df(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy \Rightarrow$$

$$f_x dx + f_y dy = (4x^3u^3 - 2xu)dx + (3x^4u^2 - x^2)du \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f_x = 4x^3u^3 - 2xu \xrightarrow[\text{به } x]{\text{انتگرال نسبت}} f(x,y) = x^4u^3 - x^2u \\ f_u = 3x^4u^2 - x^2 \xrightarrow[u]{\text{انتگرال نسبت به}} f(x,y) = x^4u^3 - x^2u \end{cases} \Longrightarrow$$

$$f(x,y) = x^4u^3 - x^2u \xRightarrow[u=\sin y]{} f(x,y) = x^4\sin^3 y - x^2\sin y$$

$$\Rightarrow x^4\sin^3 y - x^2\sin y = C$$ جواب عمومی

روش چهارم: عامل انتگرال ساز (فاکتور انتگرال ساز)

برخی مواقع معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ (I) یک معادله کامل نیست (یعنی $M_y \neq N_x$) اما با ضرب کردن این معادله در تابعی مانند $\mu(x,y)$ می‌توان به معادله دیفرانسیل زیر رسید که ممکن است کامل باشد.

$$\mu(x,y)M(x,y)\,dx+\mu(x,y)N(x,y)\,dy=0 \quad \text{(II)}$$

واضح است که جواب عمومی معادله (I) با جواب عمومی معادله (II) یکسان است.

فرض کنید معادله دیفرانسیل (II) کامل باشد در این صورت داریم:

$$(\mu\cdot M)_y=(\mu\cdot N)_x \Rightarrow \mu_y\cdot M+M_y\cdot\mu=\mu_x\cdot N+N_x\cdot\mu$$

$$\Rightarrow \mu_y\cdot M-\mu_x\cdot N=\mu(N_x-M_y) \quad *$$

فرض کنید $\mu$ تابعی برحسب $z$ باشد که خود تابعی برحسب $x$ و $y$ است در این صورت داریم:

$$\mu_y\cdot M-\mu_x\cdot N=\mu'(z)\cdot z_y\cdot M-\mu'(z)\cdot z_x\cdot N \quad **$$

با کمک * و ** داریم:

$$\mu'(z)\cdot z_y\cdot M-\mu'(z)\cdot z_x\cdot N=\mu(N_x-M_y) \Rightarrow$$

$$\mu'(z)(z_y\cdot M-z_x\cdot N)=\mu(N_x-M_y) \Rightarrow$$

$$\frac{\mu'(z)}{\mu(z)}=\frac{N_x-M_y}{Mz_y-Nz_x} \Rightarrow \frac{\frac{d\mu}{dz}}{\mu(z)}=\frac{N_x-M_y}{Mz_y-Nz_x}$$

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{\mu(z)}=\frac{N_x-M_y}{Mz_y-Nz_x}dz \xrightarrow[\text{طرفین}]{\text{انتگرال از}}$$

$$\mu(z)=e^{\int\frac{N_x-M_y}{Mz_y-Nz_x}dz}$$

عامل انتگرال ساز

حالت های خاص :

* اگر $z = x$ . در این حالت داریم :

$$dz = dx \;\&\; z_y = 0 \;\&\; z_x = 1 \Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M z_y - N z_x} dx} = e^{\int \frac{N_x - M_y}{-N} dx}$$

$$\Longrightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{-N} dx}$$

* اگر $z = y$ . در این حالت داریم :

$$dz = dy \;,\; z_x = 0 \;,\; z_y = 1 \Rightarrow \mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}$$

* مثال ۱۱: برای معادله دیفرانسیل زیر عامل انتگرال ساز برحسب $z = xy$ پیدا کنید و سپس جواب عمومی را بیابید .

$$(y - xy^2)dx - (x + x^2 y)dy = 0$$

* $z_y = x \;,\; z_x = y \;,\; M_y = 1 - 2xy \;,\; N_x = -(1 + 2xy)$

* $N_x - M_y = -(1 + 2xy) - (1 - 2xy) = -2$

* $M z_y - N z_x = (y - xy^2)x - (-(x + x^2 y))y = xy - x^2y^2 + xy + x^2y^2 = 2xy$

$$\mu(z) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M z_y - N z_x} dz} = e^{\int \frac{-2}{2(xy)_z} dz} = e^{\int \frac{-dz}{z}} = e^{-\ln|z|} = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{|xy|}$$

حال با ضرب $\frac{1}{xy}$ در طرفین معادله به معادله دیفرانسیل کامل می رسیم .

$$\frac{1}{xy}(y - xy^2)dx - \frac{1}{xy}(x + x^2 y)dy = 0 \Longrightarrow$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{x}-y\right)}_{M}dx-\underbrace{\left(\frac{1}{y}+x\right)}_{N}dy=0$$

$M_y=-1\ ,\ N_x=-1 \Rightarrow M_y=N_x \Rightarrow$ ✓ کامل $\Rightarrow$ وجود دارد $f(x,y)$ را به طوریکه

$$df(x,y)=M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy \Rightarrow$$

$$f_x\,dx+f_y\,dy=\left(\frac{1}{x}-y\right)dx-\left(\frac{1}{y}+x\right)dy \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f_x=\frac{1}{x}-y \xrightarrow[x]{\text{انتگرال نسبت به}} f(x,y)=\int\left(\frac{1}{x}-y\right)dx=\ln|x|-xy \\ f_y=-\left(\frac{1}{y}+x\right) \xrightarrow[y\ \text{به}]{\text{انتگرال نسبت}} f(x,y)=\int-\left(\frac{1}{y}+x\right)dy=-\ln|y|-xy \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x,y)=\ln|x|-\ln|y|-xy \Rightarrow \ln|x|-\ln|y|-xy=C$$

جواب عمومی

مثال 2) معادله زیر را حل کنید

$$\underbrace{(x-y\ln y+y\ln x)}_{M}dx+\underbrace{x(\ln y-\ln x)}_{N}dy=0$$

$$\begin{aligned} M_y&=-\ln y-1+\ln x \\ N_x&=\ln y-\ln x-1 \end{aligned} \Rightarrow N_x-M_y=\ln y-\ln x-1-(-\ln y-1+\ln x)$$

$$=-2\ln x+2\ln y=2(\ln y-\ln x).$$

$$\frac{N_x-M_y}{-N}=\frac{2(\ln y-\ln x)}{-x(\ln y-\ln x)}=\frac{-2}{x} \Rightarrow \mu(x)=e^{\int\frac{-2}{x}dx}=\frac{1}{x^2}$$

حال با ضرب $\frac{1}{x^2}$ در طرفین معادله داریم :

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{y\ln y}{x^2}+\frac{y\ln x}{x^2}\right)dx+\left(\frac{\ln y}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)dy=0$$

$\exists f(x,y)$ s.t. $df(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy \Rightarrow$

$$f_x\,dx+f_y\,dy=\left(\frac{1}{x}-\frac{y\ln y}{x^2}+\frac{y\ln x}{x^2}\right)dx+\left(\frac{\ln y}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)dy$$

$$\Rightarrow f_x=\frac{1}{x}-\frac{y\ln y}{x^2}+\frac{y\ln x}{x^2}\xrightarrow[x]{\text{انتگرال نسبت به}} f(x,y)=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{y\ln y}{x^2}+\frac{y\ln x}{x^2}\right)dx$$

$$=\ln x+\frac{y\ln y}{x}-y\cdot\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\right)$$

$$f_y=\frac{\ln y}{x}-\frac{\ln x}{x}\xrightarrow[y\ \text{به}]{\text{انتگرال نسبت}} f(x,y)=\int\left(\frac{\ln y}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{x}(y\ln y-y)-y\frac{\ln x}{x}$$

$$\Rightarrow f(x,y)=\ln x+\frac{y\ln y}{x}-\frac{y\ln x}{x}-\frac{y}{x}\Rightarrow$$

$$\ln x+\frac{y}{x}(\ln y-\ln x-1)=c$$ جواب عمومی

مثال 3) معادله زیر را حل کنید

$$\underbrace{(xy+y^2+y)}_{M}dx+\underbrace{(x^2+3xy+2x)}_{N}dy=0$$

$M_y=x+2y+1 \Rightarrow N_x-M_y=x+y+1$

$N_x=2x+3y+2$

$$\frac{N_x-M_y}{M}=\frac{x+y+1}{y(x+y+1)}=\frac{1}{y}\Rightarrow$$

$$\mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy} = e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{\ln y} = y.$$

با ضرب $\mu$ در طرفین معادله، به معادله کامل زیر می‌رسیم:

$$\underbrace{(xy^2 + y^3 + y^2)}_{M} dx + \underbrace{(x^2 y + 3xy^2 + 2xy)}_{N} dy = 0$$

$$f_x = xy^2 + y^3 + y^2 \xrightarrow[x]{\text{انتگرال نسبت به}} f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 y^2 + xy^3 + xy^2$$

$$f_y = x^2 y + 3xy^2 + 2xy \xrightarrow[y \text{ به}]{\text{انتگرال نسبت}} f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 y^2 + xy^3 + xy^2$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 y^2 + xy^3 + xy^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}x^2 y^2 + xy^3 + xy^2 = C$$ جواب عمومی

مثال ۴) معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\underbrace{(1 + 3x\sin y)}_{M} dx \underbrace{- x^2 \cos y}_{N} dy = 0$$

$$M_y = 3x\cos y$$
$$N_x = -2x\cos y$$
$$\Rightarrow N_x - M_y = -5x\cos y$$

$$\frac{N_x - M_y}{-N} = \frac{-5x\cos y}{-(-x^2\cos y)} = \frac{-5}{x} \Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{-N} dx}$$

$$= e^{\int \frac{-5}{x}} = e^{-5\ln x} = \frac{1}{x^5}.$$

حال با ضرب $\frac{1}{x^5}$ در طرفین معادله به معادله کامل می‌رسیم:

$$\Rightarrow \frac{1}{x^5}(1+3x\sin y)\,dx - \frac{1}{x^5}(x^2\cos y)\,dy = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x^5}+\frac{3}{x^4}\sin y\right)dx - \frac{1}{x^3}\cos y\,dy = 0$$

$$f_x = \frac{1}{x^5}+\frac{3}{x^4}\sin y \xrightarrow[x\ \text{؟}]{\text{انتگرال نب}} f(x,y) = \int (x^{-5}+3x^{-4}\sin y)\,dx$$

$$= \frac{-1}{4}x^{-4} - x^{-3}\sin y.$$

$$f_y = -\frac{1}{x^3}\cos y \xrightarrow[y\ \text{؟}]{\text{انتگرال نب}} f(x,y) = \int -\frac{1}{x^3}\cos y\,dy = -x^{-3}\sin y$$

$$\Rightarrow f(x,y) = -\frac{1}{4x^4} - \frac{1}{x^3}\sin y \Rightarrow$$

$$-\left(\frac{1}{4x^4}+\frac{\sin y}{x^3}\right) = C$$ جواب عمومی

مثال ۵) برای معادله دیفرانسیل زیر عامل انتگرال‌ساز به صورت $\mu = x^m \cdot y^n$ بیابید

$$(3y+4xy^2)\,dx + (2x+3x^2y)\,dy = 0$$

با ضرب $x^m \cdot y^n$ در طرفین معادله به معادله کامل زیر می‌رسیم:

$$x^m y^n(3y+4xy^2)\,dx + x^m y^n(2x+3x^2y)\,dy = 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{(3x^m y^{n+1}+4x^{m+1}y^{n+2})}_{M}\,dx + \underbrace{(2x^{m+1}y^n+3x^{m+2}y^{n+1})}_{N}\,dy = 0$$

چون معادله (۲) کامل است باید $M_y = N_x$ پس داریم:

$$\begin{cases} M_y = 3(n+1)x^m y^n + 4(n+2)x^{m+1}y^{n+1} \\ N_x = 2(m+1)x^m y^n + 3(m+2)x^{m+1}y^{n+1} \end{cases} \xRightarrow{M_y = N_x}$$

$$\begin{cases} 3(n+1) = 2(m+1) \\ 4(n+2) = 3(m+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3n-2m = -1 \\ 4n-3m = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mu = x^2 \cdot y$$

سرسم

Scanned by CamScanner

درس ششم: معادلات خطی مرتبه اول

فرم کلی یک معادله خطی مرتبه اول بصورت $y' + p(x) \cdot y = q(x)$ (I) است

$p(x) \neq 0$

برای حل معادله (I) داریم:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \rightarrow \frac{dy}{dx} + p(x) \cdot y = q(x) \rightarrow \frac{dy}{dx} = q(x) - p(x) \cdot y$$

$$\rightarrow \underbrace{(q(x) - p(x) \cdot y)}_{M} dx \underbrace{- dy}_{N} = 0 \Rightarrow \begin{cases} M_y = -p(x) \\ N_x = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$N_x - M_y = p(x) \longrightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{-N} dx} = e^{\int \frac{p(x)}{-(-1)} dx} = e^{\int p(x) dx}$$

یعنی عامل انتگرالساز برای معادله خطی مرتبه اول (I) ؛ $\mu(x) = e^{\int p(x) dx}$ است

حال $\mu(x)$ را در طرفین معادله (I) ضرب می‌کنیم. داریم:

$$e^{\int p(x) dx} (y' + p(x) \cdot y) = q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} \longrightarrow$$

$$y' \cdot e^{\int p(x) dx} + p(x) \cdot y \cdot e^{\int p(x) dx} = q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} \longrightarrow$$

$$\left(y \cdot e^{\int p(x) dx}\right)' = q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} \xrightarrow[x]{\text{انتگرال نسبت به}}$$

$$y e^{\int p(x) dx} = \int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx + c \longrightarrow$$

$$y_g = e^{-\int p(x) dx} \left\{ \int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx + c \right\}$$ جواب عمومی معادله خطی مرتبه اول (I)

مثال ۱: معادله زیر را حل کنید

$$y' - 2xy = 4xe^{x^2}$$

$$\begin{cases} p(x) = -2x \\ q(x) = 4xe^{x^2} \end{cases} \longrightarrow y_g = e^{-\int p(x)dx}\left\{\int q(x)\, e^{\int p(x)dx}\, dx + c\right\} =$$

$$e^{-\int(-2x)dx}\left\{\int 4xe^{x^2}\cdot e^{\int -2x\,dx}\, dx + c\right\} =$$

$$e^{x^2}\left\{\int 4xe^{x^2}\cdot e^{-x^2}\, dx + c\right\} =$$

$$e^{x^2}(2x^2 + c) = 2x^2 \cdot e^{x^2} + c\cdot e^{x^2}$$

مثال 2)

$$y\,dx + \left(x\ln y + ye^{-\frac{\ln^2 y}{2}}\right)dy = 0$$

$$y\,dx = -\left(x\ln y + ye^{-\frac{\ln^2 y}{2}}\right)dy \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{-\left(x\ln y + ye^{-\frac{\ln^2 y}{2}}\right)}$$

$$\longrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{-\left(x\ln y + ye^{-\frac{\ln^2 y}{2}}\right)}{y} \longrightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{\ln y}{y}x - e^{-\frac{\ln^2 y}{2}}$$

$$\to x' + \frac{\ln y}{y}x = -\cancel{y}\,e^{-\frac{\ln^2 y}{2}}$$

$$x_g = e^{-\int \frac{\ln y}{y}dy}\left\{\int -e^{-\frac{\ln^2 y}{2}}\cdot e^{\int \frac{\ln y}{y}dy}\, dy + c\right\}$$

$$= e^{-\frac{\ln^2 y}{2}}\left\{\int -e^{-\frac{\ln^2 y}{2}}\cdot e^{\frac{\ln^2 y}{2}}\, dy + c\right\}$$

$$= e^{-\frac{\ln^2 y}{2}}\{-y + c\} = -ye^{-\frac{\ln^2 y}{2}} + ce^{-\frac{\ln^2 y}{2}}.$$

*

$$y' + p(x)\cdot y = q(x)$$

$$x' + p(y)\cdot x = q(y)$$

$$x_g = e^{-\int p(y)dy}\left\{\int q(y)\, e^{\int p(y)dy}\, dy + c\right\}$$

مثال 13) معادله زیر را حل کنید

$$y' = \frac{1}{x+\cos y} \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+\cos y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = x + \cos y \Rightarrow x' - x = \cos y \rightarrow \begin{cases} p(y) = -1 \\ q(y) = \cos y \end{cases}$$

$$x_g = e^{-\int -1\,dy}\left\{\int \cos y \, e^{\int -dy}\, dy + c\right\} =$$

$$e^{y}\left\{\int \cos y \cdot e^{-y}\, dy + c\right\} = e^{y}\left(\frac{e^{-y}\sin y - e^{-y}\cos y}{2} + c\right)$$

$$= \frac{\sin y - \cos y}{2} + ce^{y}$$

$$\mathrm{I} = \int \cos y \cdot e^{-y}\, dy \overset{*}{=} e^{-y}\cdot \sin y - \int \sin y \cdot (-e^{-y})\, dy =$$

$$* \int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

$$u = e^{-y} \longrightarrow du = -e^{-y}\,dy$$

$$dv = \cos y \longrightarrow v = \sin y$$

$$e^{-y}\cdot \sin y + \int e^{-y}\cdot \sin y\, dy \overset{\mathrm{II}}{=}$$

$$= e^{-y}\sin y - \cos y \, e^{-y} - \mathrm{I}$$

$$\mathrm{II} \quad \int e^{-y}\cdot \sin y\, dy \overset{*}{=} -\cos y \cdot e^{-y} - \underbrace{\int (-\cos y)(-e^{-y})\, dy}_{\mathrm{I}}$$

$$* \begin{cases} u = e^{-y} \longrightarrow du = -e^{-y} \\ dv = \sin y \longrightarrow v = -\cos y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{I} = e^{-y}\sin y - \cos y \cdot e^{-y} - \mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{I} = \frac{e^{-y}\sin y - e^{-y}\cos y}{2}$$

سؤال 4)

$$x^2 dy - xy\,dx = (x-2)e^x dx$$

$$x^2 dy = \left((x-2)e^x + xy\right)dx \longrightarrow y' = \frac{(x-2)}{x^2}e^x + \frac{1}{x}y \longrightarrow$$

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{x-2}{x^2}e^x \Longrightarrow \begin{cases} p(x) = \frac{-1}{x} \\ q(x) = \frac{x-2}{x^2}e^x \end{cases} \longrightarrow$$

$$y_g = e^{-\int -\frac{1}{x}dx}\left\{\int \frac{x-2}{x^2}e^x \cdot e^{\int -\frac{1}{x}dx}dx + c\right\} =$$

$$e^{\ln x}\left\{\int \frac{x-2}{x^2}e^x \cdot \overset{\frac{1}{x}}{e^{-\ln x}}dx + c\right\} = x\left(\int \frac{(x-2)e^x}{x^3}dx + c\right)$$

$$= x\left(\int\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)e^x dx = x\left(\int \frac{1}{x^2}e^x dx + \int \frac{-2}{x^3}e^x dx\right)\right.$$

$$= x\left(\frac{e^x}{x^2} + c\right) = \boxed{\frac{e^x}{x} + cx}$$

$$*\int x^{-2}\cdot e^x dx = x^{-2}e^x - \int e^x\cdot(-2)x^{-3}dx$$

$$u = x^{-2} \longrightarrow du = -2x^{-3}dx$$

$$dv = e^x dx \longrightarrow v = e^x$$

$$\int\left(x^{-2}e^x - 2x^{-3}e^x\right)dx = \int x^{-2}e^x dx + \int -2x^{-3}e^x dx$$

$$\overset{*}{=} x^{-2}e^x + \int 2x^{-3}e^x dx - \int 2x^{-3}e^x dx = \frac{1}{x^2}e^x$$

روش ششم. معادلات برنولی

فرم کلی معادلات برنولی بصورت

$$y' + p(x)\cdot y = q(x)\cdot y^n \quad \text{(I)}$$

است $(n \neq 0,1)$

if $n=0 \longrightarrow y' + p(x)\cdot y = q(x)$ خطی مرتبه اول

if $n=1 \longrightarrow y' + p(x)\cdot y = q(x)\cdot y \rightsquigarrow y' + (p(x) - q(x))\,y = 0$

معادله جدائی پذیر.

طرفین رابطه (I) را بر $y^n$ تقسیم می‌کنیم. داریم:

$$y' y^{-n} + p(x)\cdot y^{1-n} = q(x) \quad \text{(II)}$$

حال تغییر می‌دهیم:

$$u = y^{1-n} \longrightarrow u' = (1-n) y' y^{-n} \quad \text{یعنی} \quad y' y^{-n} = \frac{u'}{1-n}$$

با جایگذاری این روابط در (II) داریم:

$$\frac{u'}{1-n} + p(x)\cdot u = q(x) \xrightarrow{\times(1-n)} u' + (1-n)p(x)\,u = (1-n)q(x)$$

معادله خطی مرتبه اول

یعنی در واقع با تغییر متغیر $u = y^{1-n}$ معادله برنولی به معادله خطی مرتبه اول تبدیل می‌شود.

مثال ۱)

$$xy' - \frac{y}{2\ln x} = y^2$$

$$y' - \frac{y}{2x\ln x} = \frac{1}{x}y^2 \xrightarrow[y^{-2}]{\text{طرفین ضرب در}} y^{-2}\cdot y' - \frac{1}{2x\ln x}y^{-1} = \frac{1}{x} \quad *$$

let $u = y^{-1} \longrightarrow u' = -y' y^{-2} \quad **$

حال با جایگذاری ** در * داریم:

$$-u' - \frac{1}{2x\ln x}u = \frac{1}{x} \longrightarrow u' + \frac{1}{2x\ln x}u = -\frac{1}{x}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} p(x) = \dfrac{1}{2x\ln x} \\ q(x) = -\dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow u_g(x) = e^{-\int \frac{1}{2x\ln x}dx}\left\{\int -\frac{1}{x} e^{\int \frac{1}{2x\ln x}dx} dx + c\right\}$$

$$\Rightarrow u_g(x) = e^{-\frac{1}{2}\ln(\ln x)} \left\{ \int -\frac{1}{x} e^{\frac{1}{2}\ln(\ln x)} dx + c \right\}$$

$$= (\ln x)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \int \frac{(\ln x)^{\frac{1}{2}}}{-x} dx + c \right\}$$

$$= (\ln x)^{-\frac{1}{2}} \left\{ -\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}} + c \right\} = -\frac{2}{3}\ln x + c(\ln x)^{-\frac{1}{2}}$$

$u = y^{-1}$

$$\Rightarrow \quad y^{-1} = -\frac{2}{3}\ln x + c(\ln x)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{-\frac{2}{3}\ln x + c(\ln x)^{-\frac{1}{2}}}$$

مثال 12)

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{2x^3\cos x^2}{y}$$

$$y' - \frac{1}{x}y = 2x^3\cos x^2 \cdot y^{-1} \xrightarrow{\text{طرفین} \times y} yy' - \frac{1}{x}y^2 = 2x^3\cos x^2 \quad *$$

$$\Rightarrow \text{let } u = y^2 \longrightarrow u' = 2yy' \quad **$$

با جایگذاری ** در * داریم

$$\frac{u'}{2} - \frac{1}{x}u = 2x^3\cos x^2 \longrightarrow u' - \frac{2}{x}u = 4x^3\cos x^2$$

معادله خطی مرتبه اول

$$u(x) = e^{-\int -\frac{2}{x}dx} \left\{ \int 4x^3\cos x^2 \cdot e^{\int -\frac{2}{x}dx} dx + c \right\}$$

$$= e^{2\ln x} \left\{ \int 4x^3\cos x^2 \cdot e^{-2\ln x} dx + c \right\}$$

$$= x^2 \left\{ \int 4x^3\cos x^2 \cdot \frac{1}{x^2} dx + c \right\} = x^2 \left\{ \int 4x \cdot \cos x^2 dx + c \right\}$$

$$x^2(2\sin x^2 + c) = 2x^2\sin x^2 + cx^2 \xrightarrow{u=y^2}$$

$$\boxed{y^2(x) = 2x^2\sin x^2 + cx^2}$$

$$* \int x\cos x^2\,dx = \int \frac{1}{2}\cos u\,du = \frac{1}{2}\sin u + c$$

$x^2 = u$

$2x\,dx = du$

$$= \frac{1}{2}\sin x^2 + c$$

3) مثال

$$x' + p(y)x = q(y)\,x^n$$

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - 4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - 4} \longrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x^2 - y^2 - 4}{2xy} \longrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x^2}{2xy} - \left(\frac{y^2 - 4}{2xy}\right)$$

$$\longrightarrow x' - \frac{1}{2y}x = -\left(\frac{y^2 - 4}{2y}\right)x^{-1}$$

$$\xrightarrow{x \times \text{طرفین}} xx' - \frac{1}{2y}x^2 = -\frac{y}{2} - \frac{2}{y}$$

$x^2 = u$

$2xx' = u'$

$$\frac{u'}{2} - \frac{1}{2y}u = -\frac{y}{2} - \frac{2}{y} \longrightarrow u' - \frac{1}{y}u = -y - \frac{4}{y}$$

$$u(y) = e^{-\int -\frac{1}{y}dy}\left\{\int \left(-y - \frac{4}{y}\right) e^{\int -\frac{1}{y}dy}\,dy + c\right\}$$

$$= e^{\ln y}\left\{\int \left(-y - \frac{4}{y}\right) e^{-\ln y}\,dy + c\right\}$$

$$= y\left\{\int \left(-1 - \frac{4}{y^2}\right) dy + c\right\} = y\left(-y + \frac{4}{y} + c\right)$$

$$\xrightarrow{u=x^2} \boxed{x^2(y) = -y^2 + 4 + cy}$$

م.

روش هفتم: معادلات ریکاتی (I)

فرم کلی یک معادله ریکاتی به صورت $y'+p(x)\cdot y+q(x)y^2=R(x)$ است که در آن $R(x), q(x)\neq 0$ . برای حل معادله (I) فرض می‌کنیم $y_1$ یک جواب داده شده از معادله فوق باشد در این صورت جواب عمومی معادله به صورت (II) $y(x)=y_1(x)+\frac{1}{v(x)}$ است که در آن $v(x)$ تابعی مجهول برحسب $x$ است که با جایگذاری (II) در (I) بدست می‌آید.

مثال ۱) معادله زیر را حل کنید.

$$y'=2\sec x\cdot\tan x-y^2\sin x \quad , \quad y_1=\sec x$$

جواب عمومی $y_g(x)=\sec x+\frac{1}{v(x)}$ و ~~$y_g(x)$~~

$$y_g'(x)=\sec x\cdot\tan x-\frac{v'(x)}{v^2(x)} \quad *$$

حال با جایگذاری * در معادله داریم:

$$\sec x\cdot\tan x-\frac{v'(x)}{v^2(x)}=2\sec x\cdot\tan x-\left(\sec x+\frac{1}{v(x)}\right)^2\sin x \longrightarrow$$

$$-\frac{v'(x)}{v^2(x)}=\sec x\cdot\tan x-\left(\sec^2x+2\sec x\cdot\frac{1}{v(x)}+\frac{1}{v^2(x)}\right)\sin x$$

$$\rightarrow -\frac{v'}{v^2}=\sec x\cdot\tan x-\sec^2x\cdot\sin x-2\sec x\cdot\frac{\sin x}{v(x)}-\frac{\sin x}{v^2}$$

$$\rightarrow -\frac{v'}{v^2}=-2\tan x\cdot\frac{1}{v}-\frac{\sin x}{v^2} \longrightarrow v'=-2\tan x\cdot v-\sin x$$

$$\rightarrow v'-2\tan x\cdot v=\sin x \qquad \begin{cases} p(x)=-2\tan x \\ q(x)=\sin x \end{cases}$$

معادله خطی مرتبه اول

$$v(x)=e^{-\int -2\tan x\,dx}\left\{\int \sin x\cdot e^{\int 2\tan x\,dx}dx+c\right\}$$

$$=e^{-2\ln|\cos x|}\left\{\int \sin x\cdot e^{2\ln|\cos x|}dx+c\right\}$$

$$= e^{\ln \cos^{-2} x}\left\{\int \sin x \cdot e^{\ln \cos^2 x}\, dx + c\right\}$$

$$= \sec^2 x \left\{\int \sin x \cdot \cos^2 x\, dx + c\right\}$$

$$= \sec^2 x \left(-\frac{\cos^3 x}{3} + c\right) = -\frac{\cos x}{3} + c\sec^2 x$$

$$\Rightarrow V(x) = -\frac{\cos x}{3} + c\sec^2 x \;\circledast \Longrightarrow$$

حال با جایگذاری $\circledast$ $\Rightarrow$ داریم ، $y_g = \sec x + \dfrac{1}{V(x)}$

$$\boxed{y_g(x) = \sec x + \frac{1}{-\frac{\cos x}{3} + c\sec^2 x}}$$

مثال 2)

$$y' = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} - y^2 \qquad y_1(x) = \frac{1}{x} \qquad \begin{cases} P(x) = \frac{1}{x} \\ q(x) = 1 \end{cases}, \; R(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow y_g(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{V(x)}, \quad y_g'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{V'(x)}{V^2(x)} \qquad \boxed{y_g' = -\frac{1}{x^2} - \frac{V'}{V^2}}$$

با جایگذاری در معادله داریم ،

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{V'}{V^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{V}}{x} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{V}\right)^2 \longrightarrow$$

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{V'}{V^2} = \cancel{\frac{1}{x^2}} - \cancel{\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{Vx} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{xV} - \frac{1}{V^2} \longrightarrow$$

$$-\frac{V'}{V^2} = \frac{-3}{xV} - \frac{1}{V^2} \longrightarrow V' = \frac{3V}{x} + 1 \leadsto V' - \frac{3}{x}V = 1$$

$$V(x) = e^{-\int -\frac{3}{x}dx}\left\{\int \cancel{\tan} 1 \cdot e^{\int -\frac{3}{x}dx}\, dx + c\right\}$$

مثال 13) اگر $y_1 = e^x$ یک جواب معادله دیفرانسیل ریکاتی $y' = e^{-x}y^2 + y - e^x$ باشد
جواب عمومی آن را بیابید.

$$y' - y - e^{-x}y^2 = -e^x$$

$$y_g = e^x + \frac{1}{v} \Rightarrow y_g' = e^x - \frac{v'}{v^2}$$

با جایگذاری $y_g$ و $y_g'$ در معادله داریم:

$$e^x - \frac{v'}{v^2} = e^{-x}\left(e^x + \frac{1}{v}\right)^2 + \left(e^x + \frac{1}{v}\right) - e^x \Rightarrow$$

$$e^x - \frac{v'}{v^2} = e^{-x}\left(e^{2x} + \frac{1}{v^2} + 2\frac{e^x}{v}\right) + \left(e^x + \frac{1}{v}\right) - e^x \Rightarrow$$

$$e^x - \frac{v'}{v^2} = e^x + \frac{e^{-x}}{v^2} + \frac{2}{v} + e^x + \frac{1}{v} - e^x \Rightarrow$$

$$-\frac{v'}{v^2} = \frac{e^{-x}}{v^2} + \frac{3}{v} \xrightarrow{\times v^2} -v' = e^{-x} + 3v \Rightarrow v' + 3v = -e^{-x}$$

معادله خطی مرتبه اول

$$v(x) = e^{-\int 3dx}\left\{\int -e^{-x} \cdot e^{\int 3dx}\,dx + c\right\} = e^{-3x}\left\{\int -e^{-x} \cdot e^{3x}\,dx + c\right\}$$

$$= e^{-3x}\left(-\frac{1}{2}e^{2x} + c\right) = -\frac{1}{2}e^{-x} + ce^{-3x} \qquad -e^{2x}$$

$$\Rightarrow \quad y_g = e^x + \frac{1}{v} \Rightarrow y_g = e^x + \frac{1}{-\frac{1}{2}e^{-x} + ce^{-3x}}$$

جواب عمومی

تمرین 14) تابع $y_1 = x$ یک جواب معادله ریکاتی $y' = 1 - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$ است تمام جوابها را
آنها را بیابید

$$y' + \frac{1}{x}y - \frac{1}{x^2}y^2 = 1 \qquad , y_1(x) = x \quad \Rightarrow y_g = x + \frac{1}{v}$$

$$\Rightarrow y_g' = 1 - \frac{v'}{v^2}$$

حال با جایگذاری $y$ و $y'$ در معادله دیفرانسیل داریم :

$$\left(1-\frac{v'}{v^2}\right) = 1-\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{v}\right)+\frac{1}{x^2}\left(x+\frac{1}{v}\right)^2 \Longrightarrow$$

$$1-\frac{v'}{v^2} = 1-1-\frac{1}{xv}+\frac{1}{x^2}\left(x^2+\frac{2x}{v}+\frac{1}{v^2}\right) \Longrightarrow$$

$$1-\frac{v'}{v^2} = -\frac{1}{xv}+1+\frac{2}{xv}+\frac{1}{x^2v^2} \Longrightarrow -\frac{v'}{v^2} = \frac{1}{xv}+\frac{1}{x^2v^2} \xrightarrow{\text{ضربش}\ \times v^2}$$

$$-v' = \frac{1}{x}v+\frac{1}{x^2} \Longrightarrow v' = -\frac{1}{x}v-\frac{1}{x^2} \Longrightarrow v'+\frac{1}{x}v = \frac{-1}{x^2}$$

$$v(x) = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left\{\int \frac{-1}{x^2}e^{\int \frac{1}{x}dx}dx+c\right\} = e^{-\ln x}\left\{\int \frac{-1}{x^2}\underbrace{e^{\ln x}}_{x}dx+c\right\}$$

$$= \frac{1}{x}\left(-\ln x+c\right) = \frac{-\ln x}{x}+\frac{c}{x} \Longrightarrow y_g = x+\frac{1}{-\frac{\ln x}{x}+\frac{c}{x}}$$

روش هشتم: معادلاتی که قابل تبدیل به معادلات همگن یا تفکیک پذیرند

فرم کلی این معادلات به صورت ⊛ $y' = \dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$ است. برای حل این معادله

دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

1) اگر $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ در این صورت دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر را حل می‌کنیم

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$

فرض کنید $\begin{cases} x=h \\ y=K \end{cases}$ جواب‌های این دستگاه باشد. در معادله ⊛ به جای $x$، قرار می‌دهیم $x+h$ و به جای $y$ قرار می‌دهیم $y+K$. در این صورت معادله ⊛ به یک معادله همگن تبدیل می‌شود که بعد از حل آن و به دست آوردن جواب برحسب $x$ و $y$ در انتها به جای $x$ قرار می‌دهیم $x-h$ و به جای $y$ قرار می‌دهیم $y-K$.

2) اگر $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$. در این حالت از تغییر متغیر $u=a_1x+b_1y$ استفاده می‌کنیم لذا داریم $u'=a_1+b_1y'$ در این صورت $y'=\dfrac{u'-a_1}{b_1}$ ، با این تغییر متغیر معادله ⊛ به یک معادله جدایی پذیر تبدیل می‌شود.

مثال 1) معادله زیر را حل کنید. $y' = \dfrac{x+y+2}{x-y-4}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x+y+2=0 \\ x-y-4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$$

در معادله به جای $x$، $x+1$ و به جای $y$، $y-3$ قرار می‌دهیم

$$y' = \frac{x+1+y-3+2}{x+1-y+3-4} \Rightarrow y' = \frac{x+y}{x-y}$$ معادله همگن

1e) $y = xv \rightarrow y' = v + v'x$

با جایگذاری $y$ و $y'$ در معادله $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$ داریم:

$$v + v'x = \frac{x + xv}{x - xv} \Rightarrow v + v'x = \frac{x(1+v)}{x(1-v)} \Rightarrow v'x = \frac{1+v}{1-v} - v$$

$$\Rightarrow v'x = \frac{1+v^2}{1-v} \Rightarrow \frac{dv}{dx}x = \frac{1+v^2}{1-v} \Rightarrow \frac{1-v}{1+v^2}dv = \frac{1}{x}dx$$

$$\xRightarrow{\text{انتگرال گرفتن}} \int \frac{1}{1+v^2}dv - \int \frac{v\,dv}{1+v^2} = \int \frac{1}{x}dx \Rightarrow$$

$$\tan^{-1}v - \frac{1}{2}\ln(1+v^2) = \ln x + C \xRightarrow{\text{چون } y = xv}$$

$$\tan^{-1}\frac{y}{x} - \ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \ln x + C \quad (I)$$

حال در (I) به جای $x$، $x-1$ قرار می‌دهیم و به جای $y$، $y+3$. پس داریم:

$$\tan^{-1}\frac{y+3}{x-1} - \ln\left(1+\left(\frac{y+3}{x-1}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \ln(x-1) + C$$

مثال 2)

$$y' = (9x + 4y + 1)^2 \qquad \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$0x + 0y + 1$

$$u = 9x + 4y \Rightarrow u' = 9 + 4y' \Rightarrow y' = \frac{u' - 9}{4}$$

حال جایگذاری می‌کنیم در معادله

$$\frac{u' - 9}{4} = (u+1)^2 \Rightarrow u' = 4(u+1)^2 + 9$$

معادله تفکیک پذیر

$$\frac{du}{dx} = 4(u+1)^2 + 9 \Rightarrow \frac{du}{4(u+1)^2 + 9} = dx \xRightarrow{\text{انتگرال}}$$

$$\int \frac{du}{4(u+1)^2+9} = \int dx \Longrightarrow \frac{1}{4}\int \frac{du}{(u+1)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \int dx$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{u+1}{\frac{3}{2}}\right)\right) = x + C \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{6}\left(\tan^{-1}\left(\frac{2(u+1)}{3}\right)\right) = x + C \Longrightarrow \frac{1}{6}\left(\tan^{-1}\left(\frac{2(2x+4y+1)}{3}\right)\right) = x + C$$

نکته: $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$

مثال 3) با تغییر متغیر مناسب معادله زیر را حل کنید

$$(x - 2\sin y + 3)\,dx + (2x - 4\sin y - 3)\cos y\,dy = 0$$

$$\begin{cases} \sin y = u \\ \cos y\,dy = du \end{cases}$$

$$(x - 2u + 3)\,dx + (2x - 4u - 3)\,du = 0 \Rightarrow$$

$$u' = \frac{x - 2u + 3}{-(2x - 4u - 3)} \qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

$$t = x - 2u \Rightarrow t' = 1 - 2u' \Longrightarrow u' = \frac{1 - t'}{2}$$

با جایگذاری $u'$ در معادله داریم،

$$\frac{1 - t'}{2} = \frac{t + 3}{-2t + 3} \Rightarrow 1 - t' = \frac{2t + 6}{-2t + 3} \Longrightarrow t' = \frac{-4t - 3}{-2t + 3}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{-4t - 3}{-2t + 3} \Longrightarrow \frac{-2t + 3}{-4t - 3}\,dt = dx \xRightarrow{\text{انتگرال}}$$

$$\int \frac{-2t + 3}{-4t - 3}\,dt = \int dx \Longrightarrow \int \frac{-2t - \frac{3}{2} + \frac{9}{2}}{-4t - 3}\,dt = \int dx$$

$$\Rightarrow \int \left( \frac{-2t-\frac{3}{2}}{-4t-3} + \frac{\frac{9}{2}}{-(4t+3)} \right) dt = \int dx \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}t - \frac{9}{2} \times \frac{1}{4} \ln(4t+3) = x + C$$

$$* \int \frac{\frac{9}{2}}{4t+3}\, dt = \frac{9}{2} \times \frac{1}{4} \int \frac{ds}{s} = \frac{9}{8} \ln s + C$$

$+4t+3 = s$

$+4\,dt = ds$

$dt = \frac{ds}{+4}$

$t = x - 2u$

$u = \sin y \quad \Rightarrow t = x - 2\sin y$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(x - 2\sin y) - \frac{9}{8} \ln\left(4(x - 2\sin y) + 3\right) = x + C$$

جواب عمومی معادله

$$\cos(x+y)\,dx = x\sin(x+y)\,dx + x\sin(x+y)\,dy$$ تمرین ۴)

$x + y = u \longrightarrow 1 + y' = u' \;\; \sqsubseteq \;\; dx + dy = du$

$$\Rightarrow \cos u\, dx = x \sin u\, dx + x \sin u\,(du - dx) \quad \Rightarrow$$

$$\cos u\, dx - x\sin u\, dx + x \sin u\, dx = x \sin u\, du \quad \Rightarrow$$

$$\cos u\, dx = x \sin u\, du \Longrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{\sin u\, du}{\cos u} \Rightarrow$$ انتگرال

جداسازی

$$\ln x = -\ln \cos u + \ln C \Rightarrow \ln x = \ln \frac{C}{\cos u} \Rightarrow$$

$$x = \frac{C}{\cos u} \quad \underbrace{\qquad}_{u = x+y} \quad x = \frac{C}{\cos(x+y)} \Rightarrow x\cos(x+y) = C$$

جواب عمومی