



امتحان پایان ترم درس : معادلات دیفرانسیل (۱۵ گروه هماهنگ)

نیمسال (اول / دوم) ۱۳۹۸ - ۱۳۹۷

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

۱۵ نمره

سوال ۱ - معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$xy'' + y^2 + y' = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

۱۵ نمره

سوال ۲ - جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x}$ را بیابید.

۱۵ نمره

سوال ۳ - جواب عمومی معادله اویلر $x^2 y'' - 2y = x$ را بیابید.

۲۰ نمره

سوال ۴ - دستگاه معادلات زیر را با کمک عملگر D حل کنید:

$$\begin{cases} (D-2)x + y = 0 \\ -x + Dy = e^{-t} \end{cases}$$

۲۰ نمره

سوال ۵ - جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را حول نقطه $x_0 = 0$ بیابید.

$$y'' + xy' - y = 0$$

۱۵ نمره

سوال ۶ - با استفاده از تبدیلات لاپلاس مساله مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 2e^{-t}, \quad x(0) = 3, \quad x'(0) = -3$$

۲۰ نمره

سوال ۷ - تبدیلات لاپلاس و لاپلاس معکوس زیر را بیابید.

$$L(t \sin 3t + e^t \cos 5t)$$

الف -

$$L^{-1}\left(\frac{2}{(s+1)(s^2+1)}\right)$$

ب -

موفق باشید

$$1: xy'' + y'^2 + y' = 0, \quad y(1) = y'(1) = 0 \rightarrow y' = u \rightarrow y'' = u'$$

$$\rightarrow xu' + u^2 + u = 0 \Rightarrow \frac{du}{u^2 + u} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du = -\frac{dx}{x}$$

$$\rightarrow \ln \frac{u}{u+1} = -\ln x + \ln C \Rightarrow \frac{x \cdot u}{u+1} = C \rightarrow \frac{x \cdot y'}{y'+1} = C$$

$$\xrightarrow{y'(1)=0} C=0 \rightarrow x \cdot y' = 0 \rightarrow y' = 0 \rightarrow y = C_1$$

$$\xrightarrow{y(1)=0} C_1 = 0 \rightarrow y(x) = 0$$

$$2: y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x} \rightarrow y_g: \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \rightarrow \lambda = 2$$

$$\rightarrow y_g = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}, \quad y_s = V_1 y_1 + V_2 y_2$$

$$V_1 = -\int \frac{y_2 \cdot R(x)}{W(y_1, y_2)} dx = -\int \frac{x \cdot e^{2x} \cdot \frac{e^{2x}}{x}}{\begin{vmatrix} e^{2x} & x e^{2x} \\ 2e^{2x} & 2x e^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix}} dx = \int dx = x$$

$$V_2 = \int \frac{y_1 \cdot R(x)}{W} dx = \int \frac{e^{2x} \cdot \frac{e^{2x}}{x}}{e^{4x}} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| \rightarrow y_s = x \cdot e^{2x} + \ln|x| \cdot x e^{2x}$$

$$\rightarrow y_p = y_g + y_s$$

$$3: x^2 y'' - 2y = u \xrightarrow{x=e^t} D(D-1)y - 2y = e^t \rightarrow (D^2 - D - 2)y = e^t$$

$$y_g: D^2 - D - 2 = 0 \rightarrow D = \frac{1}{2} \rightarrow y_g = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} = \frac{C_1}{x} + C_2 x^2$$

$$y_s = \frac{e^t}{D^2 - D - 2} = \frac{e^t}{-2} = -\frac{x}{2} \Rightarrow y_p = y_g + y_s = \frac{C_1}{x} + C_2 x^2 - \frac{x}{2}$$

$$4: \begin{cases} (D-2)x + y = 0 \\ -x + Dy = e^{2t} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (D^2 - 2D)x + Dy = 0 \\ x - Dy = -e^{2t} \end{cases}$$

$$\rightarrow (D^2 - 2D + 1)x = -e^{2t} \rightarrow x_g: D^2 - 2D + 1 = 0 \rightarrow D = 1$$

$$\rightarrow x_g = C_1 e^t + C_2 t \cdot e^t$$

ادام در صفت بعبر

$$(D^2 - 2D + 1)x = -e^{2t} \Rightarrow x_s = \frac{-e^{2t}}{D^2 - 2D + 1} = \frac{-e^{2t}}{4 - 4 + 1} = -e^{2t}$$

$$\Rightarrow x_p = x_g + x_s = c_1 e^t + c_2 t e^t - e^{2t}$$

$$(D-2)x + y = 0 \Rightarrow y = -x' + 2x \Rightarrow$$

$$y_p = -(c_1 e^t + c_2 t e^t - e^{2t}) + 2(c_1 e^t + c_2 t e^t - e^{2t}) = (c_1 - c_2)e^t + c_2 t e^t$$

بدا کردیم: y

$$5: y'' + ay' - y = 0, x_0 = 0 \rightarrow y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\rightarrow y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \quad \xrightarrow{y'' + ay' - y = 0} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + a \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n-1) a_n] x^n = 0 \Rightarrow a_{n+2} = \frac{-(n-1)}{(n+1)(n+2)} a_n \quad \forall n \geq 0$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} a_0, a_3 = 0, a_4 = \frac{-1}{12} a_2 = \frac{-1}{24} a_0, a_5 = 0, \dots$$

$$\rightarrow a_2 = \frac{1}{2} a_0, a_3 = 0, a_4 = \frac{-1}{12} a_2 = \frac{-1}{24} a_0, a_5 = 0, \dots$$

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots = a_0 + a_1 x + \frac{a_0}{2} x^2 - \frac{1}{24} a_0 x^4 + \dots$$

$$6: x'' + 2x' + x = 2e^{-t}, x(0) = 3, x'(0) = -3 \quad \underline{L\{x(t)\} = X}$$

$$s^2 X - s x(0) - x'(0) + 2(sX - x(0)) + X = \frac{2}{s+1} \Rightarrow$$

$$(s^2 + 2s + 1)X - 3s + 3 - 6 = \frac{2}{s+1} \rightarrow (s^2 + 2s + 1)X = \frac{2}{s+1} + 3(s+1)$$

$$\Rightarrow X = \frac{2}{(s+1)^3} + \frac{3}{s+1} \Rightarrow x(t) = t^2 e^{-t} + 3e^{-t}$$

$$7. \text{الف: } L\{t \cdot \sin 3t + e^t \cdot \cos 5t\} = -\left(\frac{3}{s^2+9}\right)' + \left(\frac{s-1}{(s-1)^2+25}\right) = \frac{6s}{(s^2+9)^2} + \frac{s-1}{(s-1)^2+25}$$

$$8. \text{ب: } L^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)(s^2+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} + \left(\frac{-s+1}{s^2+1}\right)\right\} = e^{-t} - \cos t + \sin t$$