فصل اول: سری فوریه و انتگرال آن

تابع $f(x)$ متناوب است اگر برای تمام مقادیر حقیقی x معین بوده و عدد مثبتی مانند T وجود داشته باشد

به طوری که برای تمام مقادیر x داشته باشیم

$$f(x+T)=f(x)$$

T: نوسان تابع (دوره تناوب)

مثال ۱: دوره تناوب تابع $y=\sin x$ را بیابید:

$$\sin(x+T)=\sin x \Rightarrow T=2\pi \quad \text{or} \quad \sin(x+2\pi)=\sin x$$

پس نوسان تابع $y=\sin x$ ∴ $T=2\pi$ است.

مثال ۲: دوره تناوب تابع $y=\cos 2x$ را بیابید:

$$f(x+T)=f(x) \Rightarrow \cos 2(x+T)=\cos 2x \quad \text{or} \quad \cos(2x+2T)=\cos 2x$$

$$\Rightarrow 2T=2\pi \longrightarrow T=\pi$$

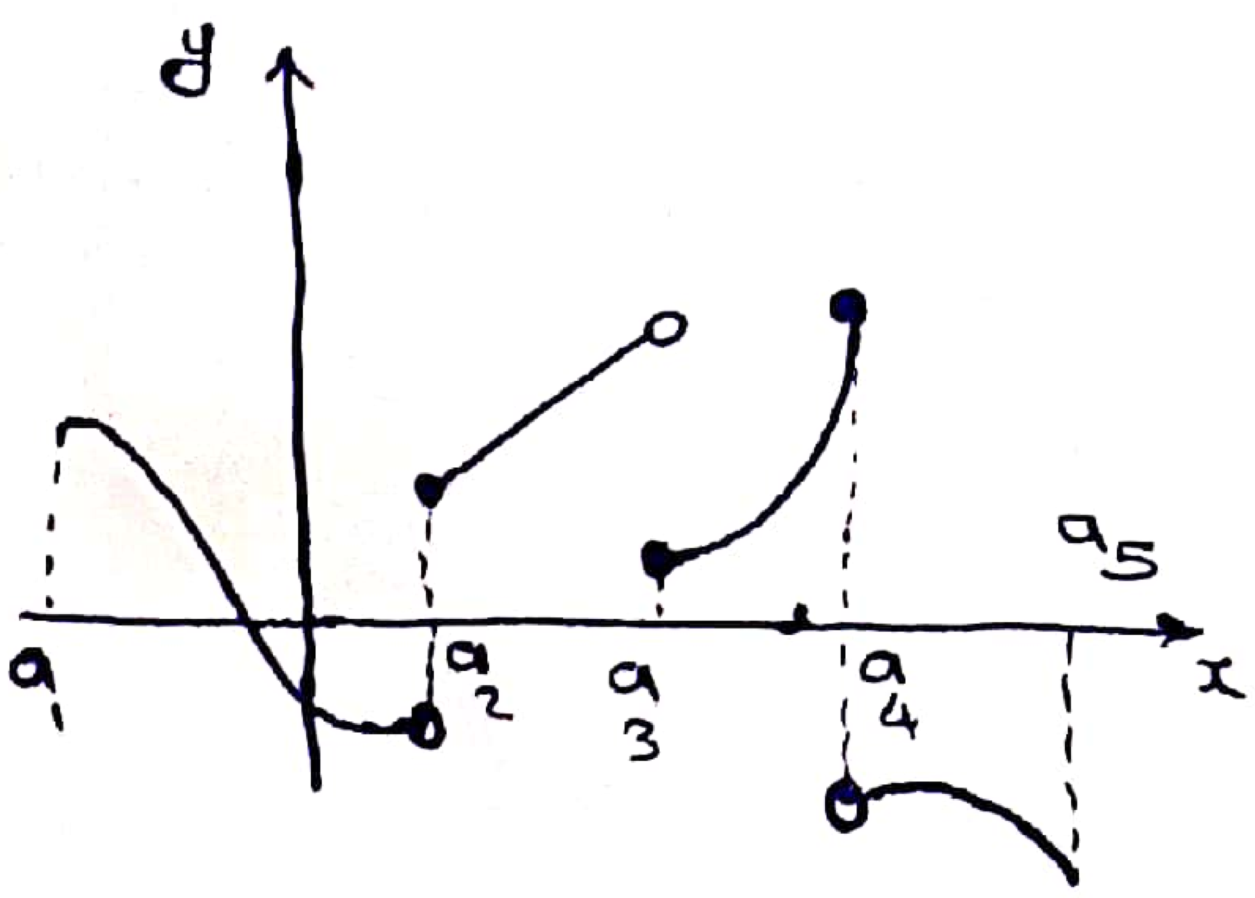
$$\sin nx \,,\, \cos nx \longrightarrow T=\frac{2\pi}{n}$$

مثال ۳: دوره تناوب تابع $y=\cos^2 x$ را بیابید:

$$T=\pi$$

توجه: اگر $f_1(x)$ و $f_2(x)$ توابع متناوب با دوره تناوب T باشند، آنگاه $f(x)=af_1(x)+bf_2(x)$ که در آن a و b ثابتند نیز تابعی متناوب با دوره تناوب T هستند.

تعریف تابع با پیوستگی قطعه‌ای:



$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

f(x) یک تابع نوسانی با نوسان 2π است .

a_0 ، a_n ، b_n ضرایب ثابتی هستند .

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx + \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx = 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx \right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{b_n}{n} \cos n\pi + \frac{b_n}{n} \cos n\pi + 0 + 0 \right) = 2\pi a_0$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

در سری فوریه انتگرال های زیر صفر اند :

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \, dx = \int_0^{2\pi} \cos nx \, dx = \int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx \, dx = \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx \, dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 nx\,dx = \pi \quad , \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 nx\,dx = \pi .$$

n عدد صحیح است: $\sin n\pi = 0 \;,\; \cos n\pi = (-1)^n$

برای محاسبه a_n، رابطه (1-2-1) را در $\cos mx$ ضرب کرده و سپس از طرفین آن از $-\pi$ تا π انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos mx\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,dx \cos mx$$

$$= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\,dx \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n}{2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x\,dx \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x\,dx \right] + \frac{b_n}{2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n-m)x\,dx \right] \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[0 + \left(\frac{\sin(n-m)x}{n-m} \right)_{-\pi}^{\pi} \right] \frac{a_n}{2} \right.$$

$$\left. + \frac{b_n}{2} \left[0 + \left(-\frac{\cos(n-m)x}{n-m} \right)_{-\pi}^{\pi} \right] \right\}$$

روابط فوق بجز برای وقتی که $m=n$ است همواره صفر می‌شود بنابراین با بررسی حالت $n=m$ و استفاده از قاعده هوپیتال:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \frac{a_n}{2} \left[\frac{x\cos(n-m)x}{1} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{b_n}{2} \left[\cancel{\frac{x\sin(n-m)x}{1}} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{a_n}{2} \left[\pi\cos(n-m)\pi \right.$$

$$\left. - (-\pi)\cos(n-m)\pi \right] = \frac{2\pi a_n}{2} \cos(n-m)\pi = \frac{a_n}{2}(2\pi) = \pi a_n \Longrightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx \quad m=n$$

در بقیه حالت‌ها $n \neq m$ حاصل صفر می‌شود.

برای محاسبه ضرایب b_n، رابطه (۱-۲-۱) را در $\sin mx$ ضرب کرده و از $-\pi$ تا π انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi} a_0\sin mx\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\sin mx\,dx=a_0\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,dx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin mx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,dx\right]=a_0\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{2}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m+n)x\,dx\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{-\pi}^{\pi}\sin(m-n)x\right\}+\frac{b_n}{2}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-m)x\,dx-\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+m)x\,dx\right\}\right]$$

$$=\cancelto{0}{\left[\frac{a_0}{m}\cos mx\right]_{-\pi}^{\pi}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{2}\left\{\underbrace{\left(-\frac{\cos(n+m)x}{n+m}\right)_{-\pi}^{\pi}}_{0}+\left(\frac{-\cos(n-m)x}{n-m}\right)_{-\pi}^{\pi}\right\}+\right.$$

$$\left.\frac{b_n}{2}\left\{\left(\frac{\sin(n-m)x}{n-m}\right)_{-\pi}^{\pi}-\underbrace{\left(\frac{\sin(n+m)\pi}{n+m}\right)_{-\pi}^{\pi}}_{0}\right\}\right]=$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} \left[\left(-\frac{\cos(n-m)x}{n-m} \right)_{-\pi}^{\pi} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2} \left[\frac{\sin(n-m)x}{n-m} \right]_{-\pi}^{\pi} = I$$

به ازای تمامی مقادیر $n \neq m$ حاصل فوق صفر می‌شود مگر برای $n=m$ که اگر تغییر متغیر:

$$n-m=t \quad \xrightarrow[n \to m]{n=m} \quad t \to 0$$

$$I = \frac{a_n}{2} \left(\frac{-\cos(tx)}{t} \right)_{-\pi}^{\pi} + \frac{b_n}{2} \left(\frac{\sin tx}{t} \right)_{-\pi}^{\pi} \xrightarrow[\text{حد (هوپیتال)}]{t \to 0}$$

$$I = \frac{a_n}{2} \left(x \sin tx \right)_{-\pi}^{\pi} + \frac{b_n}{2} \left(\frac{x \cos tx}{1} \right)_{-\pi}^{\pi} = 0 + \frac{b_n}{2} (\pi + \pi) = b_n \pi$$

$$\rightarrow b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx \qquad m=n$$