سیگنال‌های متناوب پیوسته زمان: سیگنال پیوسته زمان $x(t)$ متناوب با دوره تناوب T است اگر به ازای هر لحظه t ، $x(t)=x(t+T)$ باشد. به کوچکترین عدد مثبت T دوره تناوب اصلی سیگنال گفته می‌شود.

مثال: نشان دهید سیگنال $x(t)=3\cos(\frac{2}{3}t)$ متناوب است. دوره تناوب اصلی سیگنال را بدست آورید.

$$x(t)=x(t+T) \longrightarrow 3\cos\left(\tfrac{2}{3}(t+T)\right)=3\cos\left(\tfrac{2}{3}t\right)$$

$$3\cos\left(\tfrac{2}{3}t+\tfrac{2}{3}T\right)=3\cos\left(\tfrac{2}{3}t\right)$$

چون تابع مثلثاتی کسینوس متناوب با دوره $2\pi k$ است باید $\frac{2}{3}T=2\pi k$ باشد

$$\hookrightarrow T=3\pi k \qquad k\in\mathbb{Z}$$ (k هر عدد صحیحی می‌تواند باشد)

کوچکترین عدد مثبت T به ازای $k=1$ بدست می‌آید درنتیجه دوره تناوب اصلی سیگنال برابر است با:

$$\boxed{T_0=3\pi}$$

مثال: دوره تناوب اصلی سیگنال $x(t)=2\sin(\frac{3\pi t}{5})+3\cos(\frac{2t}{3})$ را بدست آورید.

$$x(t+T)=2\sin\left(\frac{3\pi}{5}t+\frac{3\pi}{5}T\right)+3\cos\left(\frac{2\pi}{3}t+\frac{2\pi}{3}T\right)$$

شرط متناوب بودن $x(t)$ این است که

$\frac{3\pi}{5}t$ مضرب 2π باشد $\leftarrow$ $\frac{3\pi}{5}T=2\pi k_1$

$\frac{2\pi}{3}t$ مضرب 2π باشد $\leftarrow$ $\frac{2\pi}{3}T=2\pi k_2$

$$T=\frac{10\pi k_1}{3}, \quad T=3\pi k_2 \Rightarrow T=\frac{10\pi k_1}{3}=3\pi k_2 \Rightarrow 10k_1=9k_2$$

k_1 و k_2 اعداد صحیح می‌باشند.

کوچکترین عدد مثبت T به ازای $k_2=10$ و $k_1=9$ بدست می‌آید.

$$\boxed{T_0=\frac{10\pi\times 9}{3}=30\pi}$$

نکته: برای بدست آوردن دوره تناوب یک سیگنال که از جمع چند جمله تشکیل شده است می‌توان دوره تناوب اصلی هریک از جملات را بدست آورد و کوچکترین مضرب مشترک دوره تناوب جملات، دوره تناوب سیگنال را نتیجه می‌دهد.

$$T_1=\frac{10\pi}{3} \text{ و } T_2=3\pi \rightarrow T=\text{k.m.m}\left(\frac{10\pi}{3}, 3\pi\right)=30\pi$$

سیگنال‌های متناوب گسسته زمان: سیگنال گسسته زمان $x[n]$ متناوب با دوره تناوب N است (N یک عدد صحیح است)

اگر برای هر لحظه n داشته باشیم $x[n] = x[n+N]$ به کوچکترین عدد صحیح مثبت N دوره تناوب اصلی سیگنال می‌گویند.

مثال: بررسی کنید اگر $x[n] = \sin(\frac{2}{5}n)$ متناوب است دوره تناوب اصلی آن را بدست آورید.

$$x[n] = x(n+N) \rightarrow \sin(\tfrac{2}{5}n + \tfrac{2}{5}N) = \sin(\tfrac{2}{5}n) \rightarrow \tfrac{2}{5}N = 2k\pi$$

$$N = 5k\pi$$

به ازای هیچ مقدار صحیح k عدد N صحیح نخواهد شد چون π یک عدد گنگ است.

لذا $x[n]$ متناوب نیست.

توان و انرژی سیگنال‌های پیوسته زمان: انرژی سیگنال پیوسته زمان $x(t)$ طبق تعریف از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

انرژی سیگنال در بازه $[t_1 \quad t_2]$ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$E_x[t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

مثال: انرژی سیگنال $x(t)$ را محاسبه کنید.

$$E_x = \int_{-2}^{-1} 2^2 dt + \int_{-1}^{1} (-t+1)^2 dt$$

$$E_x = 4\times 1 + \int_{-1}^{1} (t^2 - 2t + 1) dt = 4 + \left[\frac{t^3}{3} - t^2 + t\right]_{-1}^{1} = 4 + \left(\frac{1}{3} - 1 + 1 - \left(-\frac{1}{3} - 1 - 1\right)\right)$$

$$= 4 + 2/3 + 2 = 20/3$$

مثال: انرژی سیگنال $x(t) = 2e^{-3t}u(t)$ را محاسبه کنید:

$$E_x = \int_0^{\infty} (2e^{-3t})^2 dt = \int_0^{\infty} 4e^{-6t} dt = -\frac{4}{6} e^{-6t}\Big|_0^{\infty} = \frac{4}{6}$$

توان سیگنال‌های پیوسته زمان:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{E_x[-T,T]}{2T} = \lim_{T\to\infty} \frac{\int_{-T}^{T}|x(t)|^2dt}{2T}$$

مثال: توان سیگنال $sgn(t)$ (تابع علامت) را بدست آورید.

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{\int_{-T}^{T}|x(t)|^2dt}{2T} = \lim \frac{\int_{-T}^{T}1\,dt}{2T} = \frac{2T}{2T} = 1$$

نکته: توان در سیگنال‌هایی که انرژی آنها محدود است برابر صفر می‌باشد چون در تعریف توان مخرج کسر به سمت بی‌نهایت میل می‌کند در حالیکه صورت کسر که انرژی است محدود می‌باشد.

محاسبه توان در سیگنال‌های متناوب:

برای محاسبه توان در سیگنال‌های متناوب می‌توان انرژی را در یک دوره تناوب بدست آورد و به دوره تناوب تقسیم کرد.

مثال: توان را برای سیگنال $x(t) = 5\sin(\frac{3}{2}t)$ محاسبه کنید.

$$x(t+T) = 5\sin(3/2(t+T)) \longrightarrow 3/2\,T = 2k\pi \longrightarrow T = 4/3\,k\pi \rightarrow T_0 = \frac{4}{3}\pi$$

$$E_x[0,T_0] = \int_0^{\frac{4}{3}\pi}|x(t)|^2dt = \int_0^{4/3\pi} 25\sin^2(3/2\,t)\,dt = 25\int_0^{4/3\pi}\frac{1-\cos(3t)}{2}dt$$

$$E_x[0,T_0] = \frac{25}{2}\times\frac{4}{3}\pi - \frac{25}{2}\times\frac{1}{3}\underbrace{\cancel{\sin(3t)}}_{0}\Big|_0^{4/3\pi} = \frac{50}{3}\pi$$

$$P_x = \frac{E_x[0,T_0]}{T_0} = \frac{50\pi/3}{4\pi/3} = 12.5$$

تعریف سیگنال انرژی و توان:

چنانچه انرژی یک سیگنال محدود باشد آنرا یک سیگنال انرژی گویند.

چنانچه توان یک سیگنال غیرصفر و محدود باشد آنرا یک سیگنال توان گویند.

انرژی و توان در سیگنال‌های گسسته زمان: همسانه سیگنال‌های پیوسته زمان می‌توان انرژی و توان را محاسبه کرد.

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

انرژی

مثال: انرژی سیگنال $x[n]=3\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ را بدست آورید.

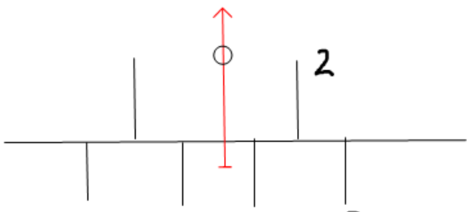
$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(3\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 9\left(\tfrac{1}{4}\right)^n = 9\times\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^0-\left(\frac{1}{4}\right)^{\infty+1}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{9}{3/4} = 12$$

نکته: $\sum_{n=n_1}^{n_2} a^n = \frac{a^{n_1}-a^{n_2+1}}{1-a}$

توان یک سیگنال گسسته:

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{E_x[-N,N]}{2N+1}$$

مثال: توان سیگنال $x[n]=2(-1)^n$ را بدست آورید.



$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{-N}^{N} 2(-1)^n}{2N+1} = \frac{4\times(2N+1)}{2N+1} = 4$$

✓ همانند حالت پیوسته زمان برای محاسبه توان سیگنال‌های متناوب گسسته می‌توان انرژی را در یک دوره تناوب سیگنال محاسبه کرد و بر دوره تناوب تقسیم کرد.

مثال: در مثال قبل $x[n]$ متناوب با دوره تناوب $N_0=2$ است.

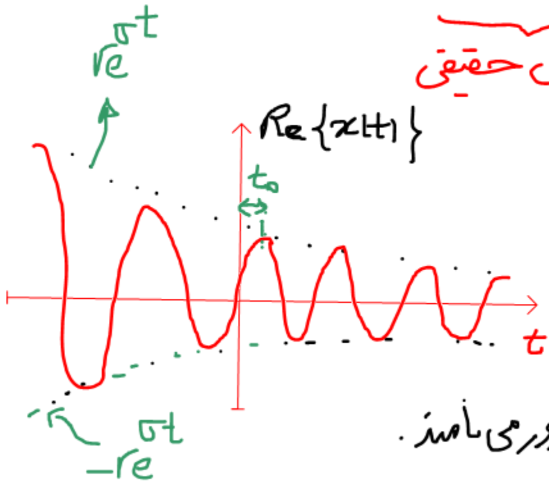
$$P_x = \frac{E_x(\text{یک دوره})}{N_0} = \frac{2^2+(-2)^2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

✓ تعریف سیگنال‌های انرژی و توان مشابه آنچه برای سیگنال‌های پیوسته زمان گفته شد برقرار است.

سیگنال‌های نمایی پیوسته زمان : $x(t) = Ae^{Bt}$ یک سیگنال نمایی است پارامترهای A و B در حالت کلی اعداد مختلط می‌توانند باشند.

$$A = re^{j\varphi}$$
$$B = \sigma + j\omega$$
$$\Rightarrow x(t) = re^{j\varphi} \cdot e^{(\sigma + j\omega)t} = re^{\sigma t} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$x(t) = \underbrace{re^{\sigma t}\cos(\omega t + \varphi)}_{\text{بخش حقیقی}} + j\underbrace{re^{\sigma t}\sin(\omega t + \varphi)}_{\text{بخش موهومی}}$$



$$t_0 = \frac{-\varphi}{\omega}$$

حالت خاص : اگر $A=1$ و $B=j\omega_0$ باشد سیگنال نمایی را فازور می‌نامند.

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

این سیگنال متناوب است.

$$x(t+T) = e^{j(\omega_0(t+T))}$$
$$= e^{j\omega_0 t} \cdot \underbrace{e^{j\omega_0 T}}_{1} \Rightarrow \omega_0 T = 2k\pi \rightarrow T = \frac{2k\pi}{\omega_0}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

هارمونی های فازور : سیگنال $\varphi_r(t) = e^{jr\omega_0 t}$ هارمونی r ام فازور نامیده می‌شود.

$\varphi_0(t) = e^{j0 \times t} = 1$ هارمونی صفرام

$\varphi_1(t) = e^{j\omega_0 t}$ هارمونی اصلی

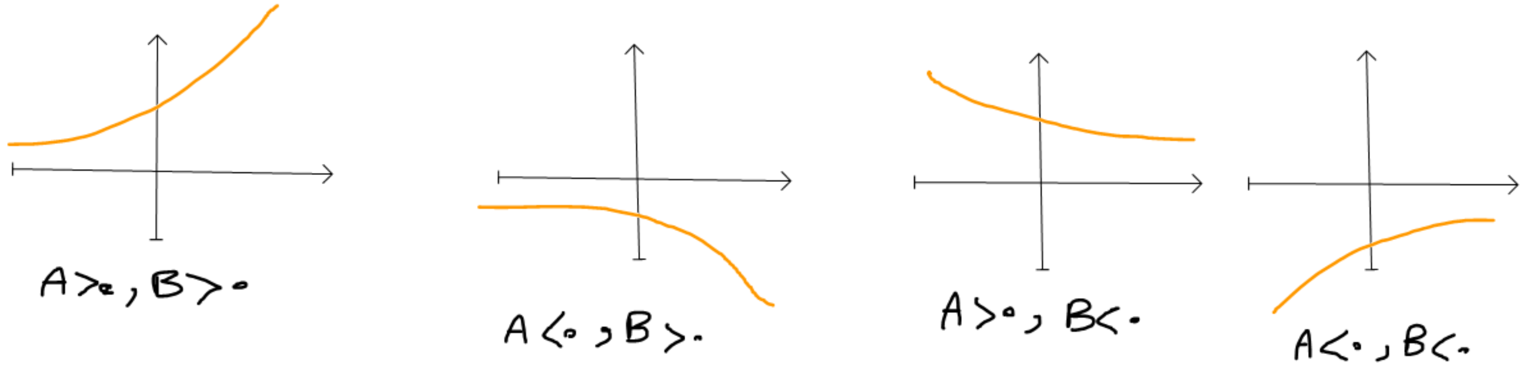
$\varphi_2(t) = e^{j2\omega_0 t}$ هارمونی دوم

$\varphi_3(t) = e^{j3\omega_0 t}$ هارمونی سوم

$\vdots$

$\varphi_r(t) = e^{jr\omega_0 t}$ هارمونی r ام

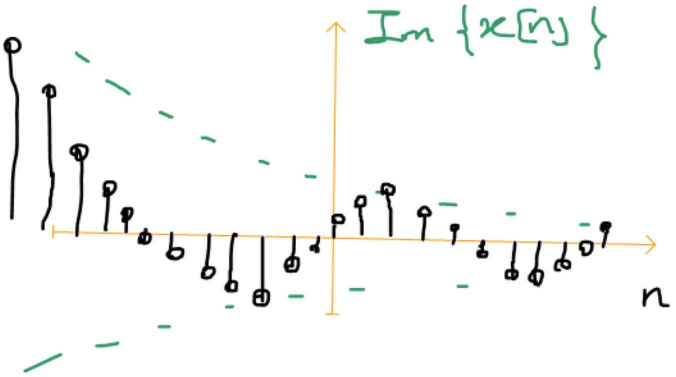
حالت خاص سیگنال نمایی حقیقی: اگر پارامترهای A و B هر دو حقیقی باشند $x(t)=Ae^{Bt}$ نمایی حقیقی است



سیگنال نمایی گسسته زمان: $x[n]=A\,B^{n}$ یک سیگنال نمایی خوانده می‌شود.

اگر A و B مختلط باشند.

$$A=ae^{j\varphi}$$
$$B=re^{j\omega}$$
$$\Rightarrow x[n]=ae^{j\varphi}(re^{j\omega})^{n}$$
$$x[n]=ar^{n}e^{j(\omega n+\varphi)}$$
$$x[n]=ar^{n}\cos(\omega n+\varphi)+j\,ar^{n}\sin(\omega n+\varphi)$$



حالت خاص: فازور گسسته

$$x[n]=e^{j\omega_0 n}$$

دو تفاوت اساسی بین فازور پیوسته و گسسته وجود دارد. ۱) فازور گسسته الزاماً متناوب نیست ۲) با افزایش اندیس هارمونی‌ها تغییرات سیگنال بطور مستمر افزایش نمی‌یابد (هارمونی‌های سیگنال تکراری می‌شوند)

$$x[n]=e^{j\omega_0 n}\rightarrow x[n+N]=e^{j\omega_0(n+N)}=e^{j\omega_0 n}\cdot\underbrace{e^{j\omega_0 N}}_{1}\rightarrow \omega_0 N=2k\pi$$

$$\downarrow$$

$$N=\frac{2k\pi}{\omega_0}$$

شرط متناوب بودن آن است که به ازای یک k، N صحیح شود برای برقرار بودن این شرط باید $\frac{2\pi}{\omega_0}$ یک کسر گویا باشد (نسبت دو عدد صحیح)

مثال: متناوب بودن $x[n]=e^{j\frac{2}{3}n}$ را بررسی کنید.

$$N=\frac{2k\pi}{\omega_0}=\frac{2k\pi}{2/3}=3k\pi$$

به ازای هیچ مقدار k ای N صحیح نخواهد شد

چون $\frac{2\pi}{\omega_0}=3\pi$ گویا نیست (گنگ است)

هارمونی های فازور گسسته:

نشان می دهیم که هارمونی های فازور گسسته تکراری با دوره تناوب N هستند.

$$\varphi_0[n]=e^{j\omega_0\times 0\,n}=1$$

$$\varphi_1[n]=e^{j\omega_0 n}$$

$$\varphi_2[n]=e^{j2\omega_0 n}$$

$$\vdots$$

$$\varphi_r[n]=e^{jr\omega_0 n}$$

اثبات:

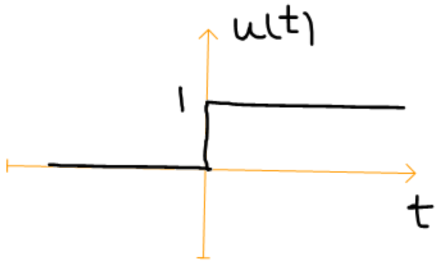
$$\varphi_{r+N}[n]=e^{j\omega_0(r+N)n}$$

$$=e^{j\omega_0 rn}\cdot e^{j\omega_0 Nn}$$

$$=e^{j\omega_0 rn}\cdot e^{j2\pi n} \xrightarrow{e^{j2\pi n}=1}$$

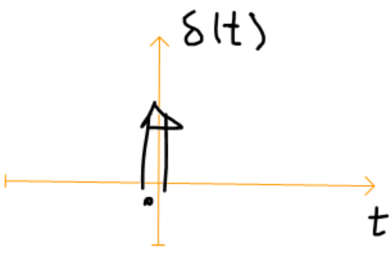
$$=e^{j\omega_0 rn}=\varphi_r[n]$$

سیگنال پیوسته پله واحد:



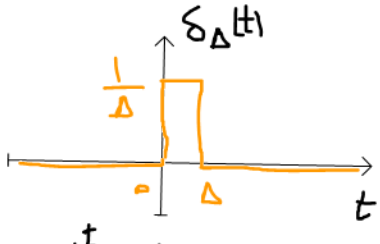
$$u(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

ضربه Dirac delta:



$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$$

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\lambda)\,d\lambda$$



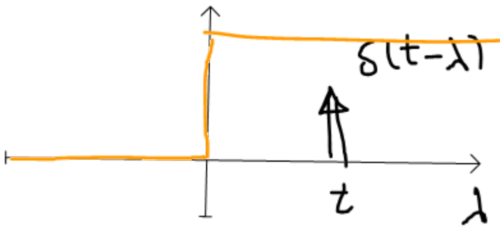
ضربه تقریبی

$$\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t)$$

$$u_\Delta(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta_\Delta(\lambda)\,d\lambda$$

رابطه گیری از ضربه و پله :

$$u(t)=\int_0^{\infty}\delta(t-\lambda)\,d\lambda$$

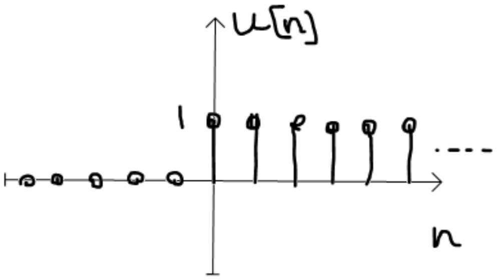


اگر $t<0$ باشد ضربه سمت چپ محور y افتد و حاصل انتگرال صفر است

اگر $t\geq 0$ باشد انتگرال از ضربه گرفته می‌شود، چون سطح زیر منحنی ضربه یک است حاصل انتگرال یک می‌شود

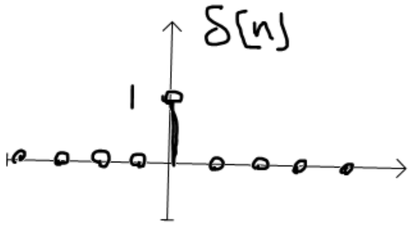
$$\int_0^{\infty}\delta(t-\lambda)\,d\lambda=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}=u(t)$$

پله واحد گسسته زمان :



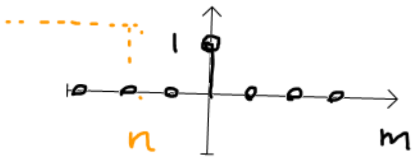
$$u[n]=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

ضربه واحد گسسته زمان :

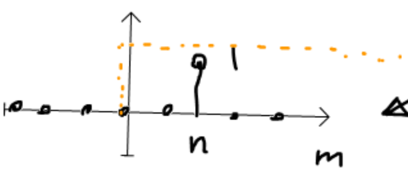


$$\delta[n]=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & \text{غیره}\end{cases}$$

رابطه ضربه و پله واحد :

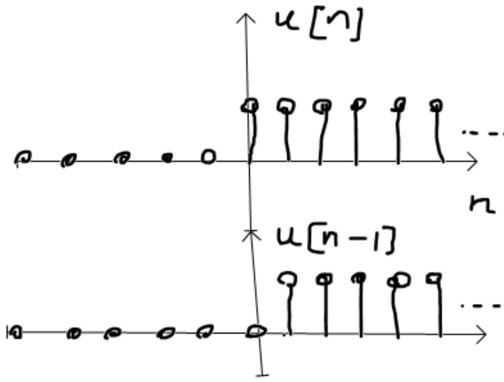


$$u[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}\delta[m]$$

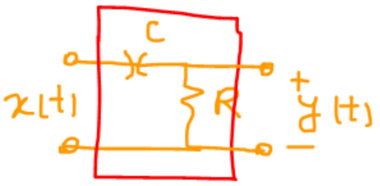


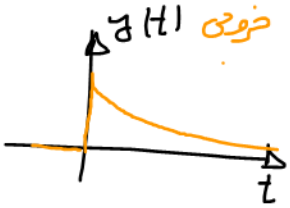
$$u[n]=\sum_{m=0}^{\infty}\delta[n-m]$$

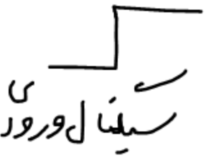
$$\delta[n]=u[n]-u[n-1]$$



سیستم ها: یک سیستم یک فرآیند است که متأثر از اعمال یک یا چند سیگنال ورودی می باشد و در خروجی یک یا چند سیگنال از خود نتیجه می دهد.







مثال: فرآیند سپرده گذاری در بانک به عنوان یک سیستم گسسته زمان می تواند در نظر گرفته شود.

ورودی سیستم مقدار پولی که در هر ماه وارد حساب می شود $x[n]$ و $y[n]$ موجودی حساب در ماه nام است.

$$y[n] = (1+\alpha)\, y[n-1] + x[n]$$

α نرخ بهره بانکی است که به موجودی ماه قبل اعمال می شود.

نحوه اتصال سیستم ها: ۱) سری cascade 2) موازی Parallel

3) پسخور Feed back