بسمه تعالی

عناوین یادداشتهای ارائه Lecture notes

Lecture 1 : مقدمه‌ای بر سیستم‌های کنترل خطی ← تاریخچه
- مزایای سیستم کنترل ..

2 : مدل‌سازی سیستم‌های کنترل - مدل‌های ریاضی
- مدل‌سازی
- سیستم‌های تأخیردار

3 : نمایش‌های مختلف سیستم‌های کنترل
- HODE
- SS
- TF
- SD

4 : تبدیل نمایش‌های مختلف
- تشکیل سیگنال
- تحقق TF → SS
- HODE → TF

5 : سیستم‌های غیرخطی
- خطی‌سازی

6 : نمایش فضای حالت
- ماتریس انتقال حالت

7 : کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری
- مقادیر ویژه و قطب‌های سیستم
- ...

8 :

9 : جایابی قطب Pole placement

10 : تحلیل پایداری
- BIBO
- Zero Input stability
- راث

11 : تحلیل در حوزه زمان سیستم‌های کنترل
- سیگنال‌های آزمون
- ضریب خطای حالت ماندگار

12 : "
- سری خطا
- معیارهای ISE، ITSE، IAE و ITAE

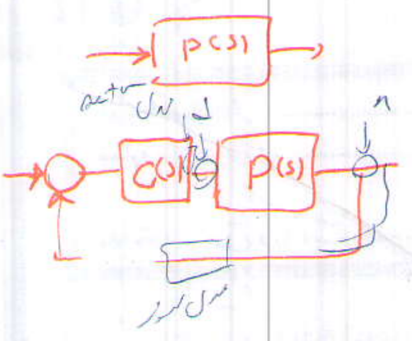
13 : "
- سیستم درجه 2 کلاسیک و مشخصه‌های آن
- نمودارهای مشخصه ...

14 : "
- انواع کنترل‌کننده‌ها سیستم کنترل موقعیت

15	:	تحلیل حوزه زمان سیستم کنترل	- اثرات اضافه کردن قطب و صفر - حلقه باز - حلقه بسته - قطبهای غالب و تقریب	P.P. 1
16	:	مکان هندسی ریشه‌ها	- RL	1
17	:	روش‌های "	- اثرات اضافه شدن قطب و صفر با حرکت آنها (RL)	
18	:	طراحی کنترلر در حوزه زمان	- پیکربندی‌های مختلف - کنترلرهای مختلف - تحقق کنترلر - تأثیر PID	1
19	:	کنترلر	- PID - PD - PI	1
20	:	"	- Lead و Lag	1
21	:	تحلیل در حوزه فرکانس	- مشخصه‌های حوزه فرکانس - پیک - پهنای باند - اثرات اضافه کردن قطب و صفر به حلقه باز / به حلقه بسته	P.P. 1
24	:	معیار پایداری نایکوئیست		1
25	:	"	- ارائه - حداقل فاز - نایکوئیست ساده شده	1
26	:	چارت حوزه فرکانس	- حاشیه بهره و فاز حداقل فاز - چارت نایکوئیست	P.P. 1
27	:	"	- بود - تأثیر M و N ثابت - آیدنتیفای سیستم و فاز ثابت	1
28	:	طراحی کنترلر در حوزه فرکانس	- Lag	1
29	:	"	- Lead	

کنترل

هدف: اعمال ورودی به پلانت برای رسیدن به عملکرد مطلوب



تعاریف: ۱- پلانت: دستگاهی (یا فرایندی) که باید کنترل شود

۲- اهداف: ۱- چه چیزی می‌خواهیم برسیم ۲- چه متغیرهایی را باید کنترل کنیم ۳- دقت، سرعت ...

۳- سنسورها: برای ...

۴- actuators: محرک‌ها

۵- ارتباطات

۶- محاسبات

۷- معماری کنترل

۸- لحاظ کردن اغتشاشات و نامعینی‌ها

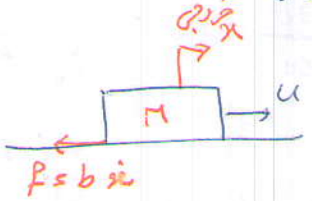
تعریف مسأله کنترل: یافتن یک راه عملی برای اعمال به فرایند (پروسه) طوری که پروسه رفتار دلخواه را با حضور نویز، اغتشاش، نامعینی تا حد امکان داشته باشد.

مدل‌سازی

اولین کار برای کنترل یک پروسه، مدل‌سازی (طراحی) پروسه می‌باشد.

مثال ۱:

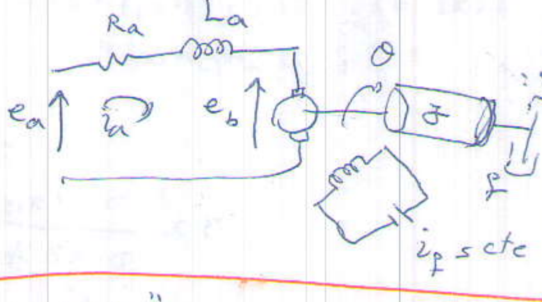
$$u - b\dot{x} = M\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{b}{M}\dot{x} = \frac{1}{M}u$$



مثال ۲:

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + f\frac{d\theta}{dt} = \overset{\text{گشتاور}}{T} = k i_a$$

$$L_a\frac{di_a}{dt} + R_a i_a + \underbrace{e_b}_{k_b\frac{d\theta}{dt}} = e_a$$

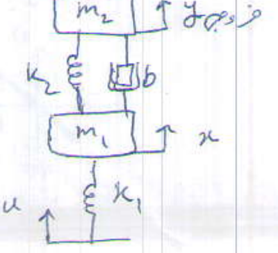


مثال ۳:

$$k_1(u-x) - k_2(x-y) - b(\dot{x}-\dot{y}) = m_1\ddot{x}$$

$$k_2(x-y) - b(\dot{y}-\dot{x}) = m_2\ddot{y}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1\ddot{x} + b\dot{x} + (k_1+k_2)x = b\dot{y} + k_2 y + k_1 u \\ m_2\ddot{y} + b\dot{y} + k_2 y = b\dot{x} + k_2 x \end{cases}$$



سیستم

معادل الکتریکی سیستم های مکانیکی

معادل ولتاژی

ولتاژ ⟵ نیرو $F \sim v$

جریان ⟵ سرعت $\dot{x} \sim i$

جرم ⟵ سلف $F = L\frac{di}{dt} = M\ddot{x}$, $L = M$

فنر ⟵ $C \sim \frac{1}{k}$ $F = kx$, $v = k\int i\,dt$

دمپر ⟵ مقاومت $B \sim R$ $F = B\dot{x}$, $v = Bi$

معادل جریانی

جریان ⟵ نیرو $F \sim i$

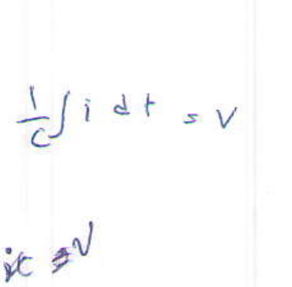
ولتاژ ⟵ سرعت $v \sim \dot{x}$

جرم ⟵ خازن $M \sim C$ $F = M\ddot{x}$, $i = C\dot{v}$

فنر ⟵ ~~سلف~~ سلف $k \sim \frac{1}{C}$ $F = kx$, $i = \frac{1}{L}\int v\,dt$

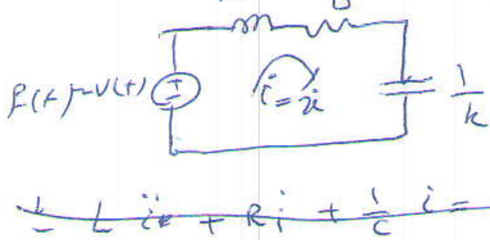
دمپر ⟵ هدایت (ادمیتانس) $B \sim \frac{1}{R}$ $i = \frac{1}{R}v$, $F = B\dot{x}$

حل:



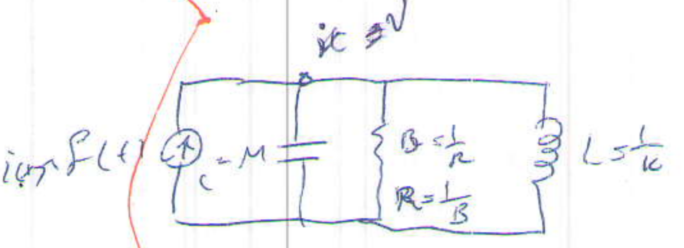
$$M\ddot{x}(t) + B\dot{x} + kx = f(t)$$

الف- معادل ولتاژ نیرو



$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = v$$

$$\cancel{L\,\ddot{i} + R\dot{i} + \frac{1}{C}i = \dot{v}}$$



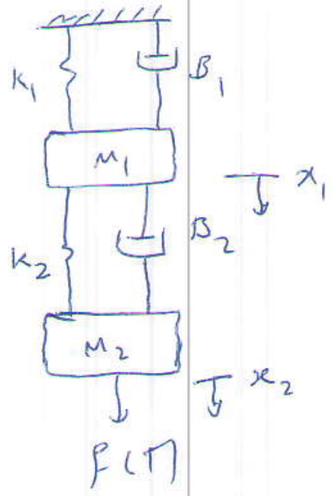
ب- معادل جریان نیرو

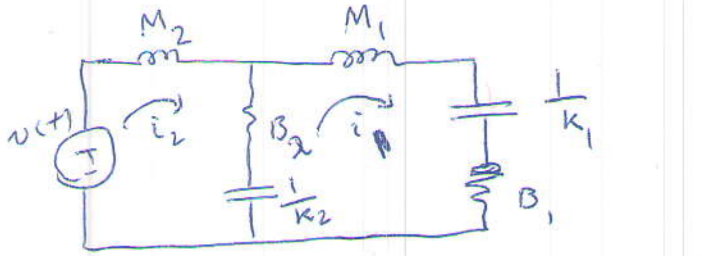
$$\cancel{C\ddot{v}(t) + \frac{1}{R}\dot{v} + \frac{1}{L}v = \dot{i}(t)}$$

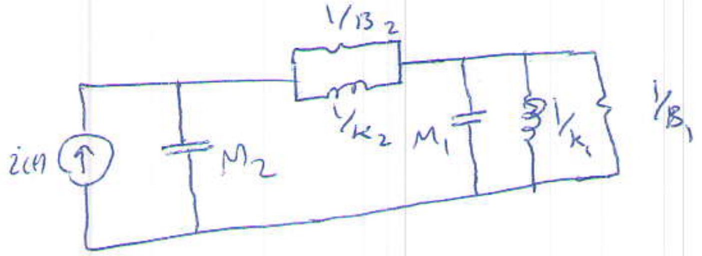
$$C\dot{v} + \frac{v}{R} + k\int v\,dt = i(t) = f(t)$$

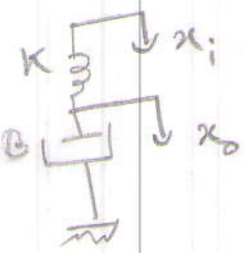
$$M\ddot{x} + B\dot{x} + kx = f(t)$$

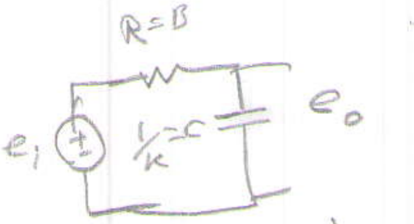
:cJ2







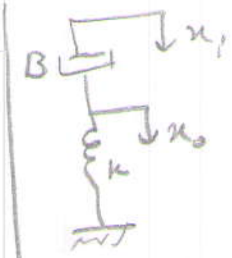




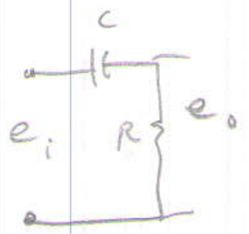
$$\frac{E_o}{E_i} = \frac{1}{RCs+1}$$

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{1}{\frac{B}{K}s+1}$$

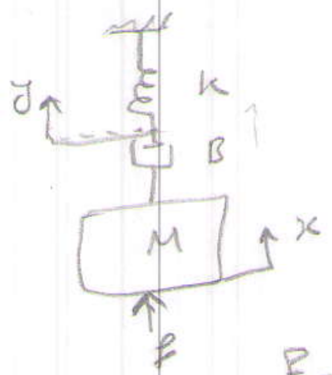
$$B\dot{x}_o = K(x_i - x_o)$$



$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{\frac{B}{K}s}{\frac{B}{K}s+1}$$

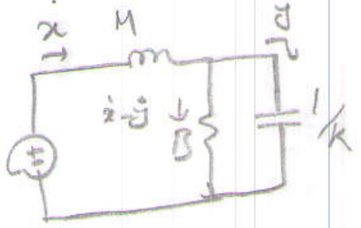


$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{RCs}{RCs+1}$$



$\cancel{f - B\dot{x} = M\ddot{x}}$

$\cancel{B\dot{x}}$ $\cancel{Kx}$



$$F - B(\dot{x} - \dot{y}) = M\ddot{x}$$

$$Ky = B(\dot{x} - \dot{y})$$

نمایش‌های مختلف سیستم

۱- HODE ~~معادله~~ معادله دیفرانسیل درجه n ام بر حسب یک متغیر

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1\frac{du}{dt} + b_0 u$$

y خروجی ، u ورودی

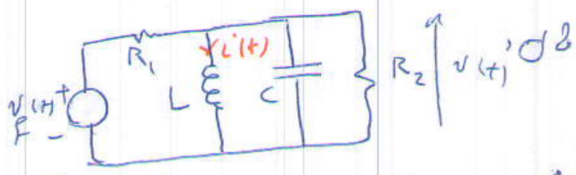
۲- SS ، معادلات فضای حالت.

حالت کلی $\frac{dx}{dt} = f(x,u,t)$

$y(t) = g(x,u,t)$ $\xrightarrow[LTI]{\text{خطی}}$ $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$

$y(t) = Cx + Du(t)$

$v(t) = L\frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{1}{L}v$



$$\frac{v_F - v}{R_1} = i(t) + C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R_2}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{-1}{C}i + \frac{1}{C}\left(-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)v + \frac{1}{R_1C}v_F$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{i} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{R_1C} \end{bmatrix} v_F$$

خروجی $y(t) = v(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix} + 0\, v_F$

۳- تابع انتقال ← استفاده از تبدیل لاپلاس بین ورودی و خروجی

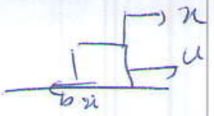
HODE → TF

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)\,Y(s) = \cdots$$

فرض با شرایط اولیه صفر $\Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \text{———}$ عکس آن نیز به همین ترتیب است.

خواص مدل تابع انتقال

۱-



$$\ddot{x} + \frac{b}{M}\dot{x} = \frac{1}{M}u$$

$x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $y = x = x_1$ $\Rightarrow$ $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -\frac{b}{M}x_2 + \frac{1}{M}u$

تبدیل HODE → SS

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_0 u$$

$\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

با شرط $M \leq n-1$

تبدیل $SS \to G^{TF}$

$\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$

$$sX - X(0) = AX + BU \Rightarrow (sI - A)X = X(0) + BU$$

$$X = (sI-A)^{-1}X(0) + (sI-A)^{-1}BU$$

$$Y \underset{X(0)=0}{=} \left(C(sI-A)^{-1}B + D\right)U \Rightarrow G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$$

نکته: $G(s) = \dfrac{Q(s)}{|sI-A|} \Rightarrow |sI - A| = 0$ → مقادیر ویژه A → قطب‌های $G(S)$

تبدیل $G^{TF} \to SS$

تبدیل $G_{TF} \to$ HODE → صورت و مخرج

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = 2\dot{u} + u$$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

$x_1 = y$

$x_2 = \dot{x}_1 - 2u \rightarrow \dot{x}_1 = x_2 + 2u$

$\ddot{x}_1 = \ddot{y} = \dot{x}_2 + 2\dot{u} = 2\dot{u} + u - 2\dot{y} - 3y$

$\Rightarrow \dot{x}_2 = -3x_1 - 2x_2 - 3u$

عیب لاپلاس

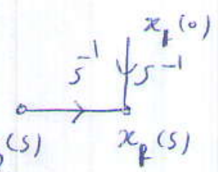
۱- خطی ۲- مقدار اولیه صفر ۳- رابطه ورودی خروجی ۴- منحصر به فرد نیست

مزیت

تأخیر را می‌توان نشان داد ولی در سیستم SS نمی‌توان. $H(s) = \dfrac{e^{-T_s s}}{s+1}$

نمایش سوم: دیاگرام حالت state diagram

$$x_2 = \frac{dx_1}{dt} \Rightarrow x_2(s) = s x_1(s) - x_1(0) \quad \text{یا} \quad x_1(s) = s^{-1}x_2(s) + s^{-1}x_1(0)$$



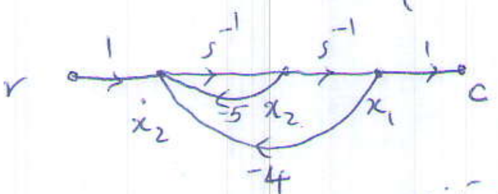
مثال

$\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = -4x_1 - 5x_2 + r$

$c = x_1$

فرض: شرایط اولیه صفر



SD → TF

تبدیل SD به TF ⇐ قانون میسون

HODE → SD

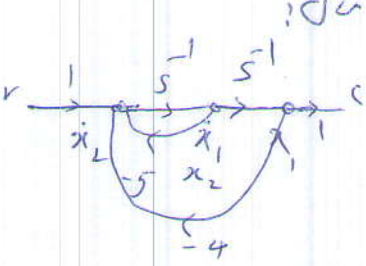
$$\frac{d^2c}{dt^2}+5\frac{dc}{dt}+4c=r$$

$x_1 = c$

$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{c}$

$\dot{x}_2 = r - 5x_2 - 4x_1$

مثال:

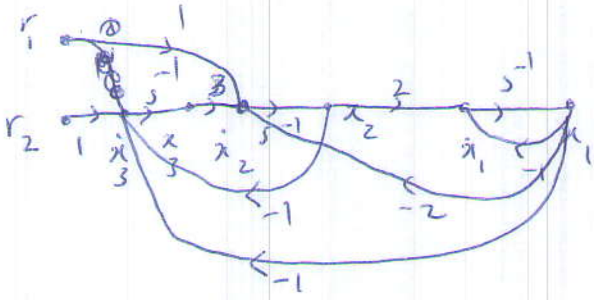


مثال

$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2$

$\dot{x}_2 = -2x_1 + 3x_3 + r_1$

$\dot{x}_3 = -x_1 - x_2 + r_2$



قانون گین میسون

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \left(\frac{c(s)}{r(s)}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{m} M_i \Delta_i}{\Delta}$$

m: تعداد مسیر از ورودی تا خروجی

M_i: گین (بهره) i امین مسیر

Δ: گین حلقه سیستم

Δ_i: گین حلقه سیستم پس از حذف مسیر i ام

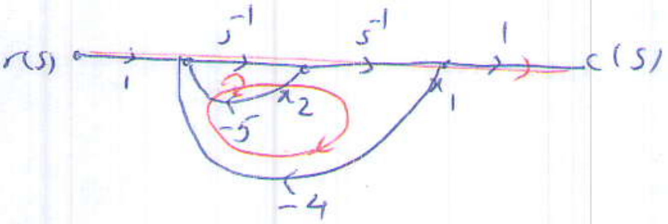
دو حلقه‌ای بی‌ربط‌ها

سه حلقه‌ای بی‌ربط‌ها

$$\Delta = 1 - \sum_{m_1} P_{m_1} + \sum_{m_2} P_{m_2} - \sum_{m_3} P_{m_3} + \dots$$

تک حلقه‌ای

مثال/



یک مسیر از ورودی تا خروجی m=1

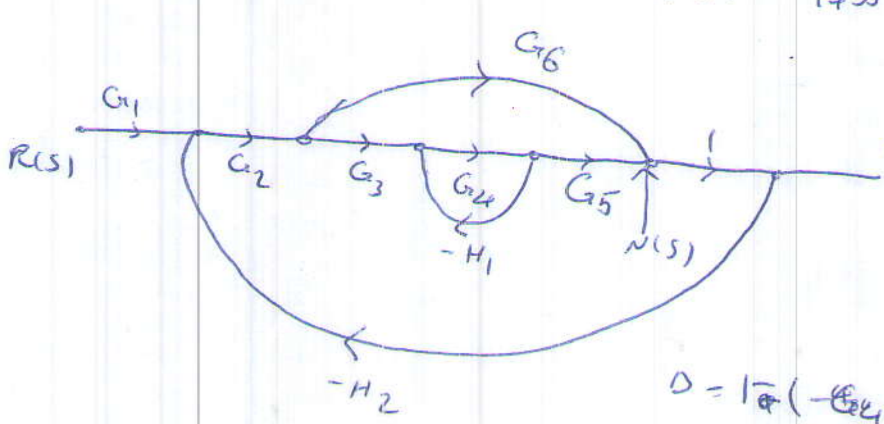
گین مسیر $M_1 = s^{-2}$

$\Delta_1 = 1$

$\Delta = 1 - (-5s^{-1} - 4s^{-2}) + 0 - 0 \dots$

$= 1 + 5s^{-1} + 4s^{-2}$

$$\frac{C(s)}{r(s)} = \frac{s^{-2}\cdot 1}{1+5s^{-1}+4s^{-2}} = \frac{1}{s^2+5s+4}$$



مثال: $\frac{C(s)}{N(s)} = ?$

$m=1$

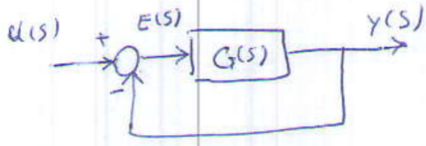
$M_1 = 1$

$\Delta_1 = 1 + G_4H_1$

$\Delta = 1 - (-G_4H_1 - G_2G_3G_4G_5H_2 - G_2G_6H_2) + (-G_4H_1)(-G_2G_6H_2)$

نمایش ارتباط این سیستم ها با بلوک دیاگرام

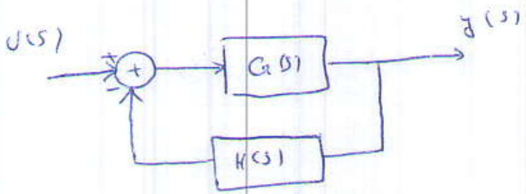
دیاگرام بلوکی را ساده سازی



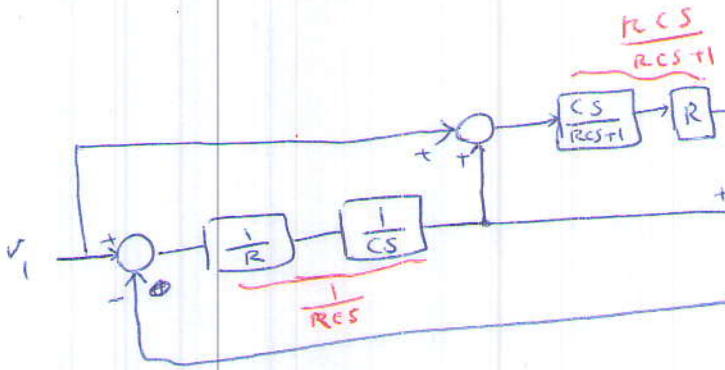
$$E(S) = U(S) - Y(S)$$

$$Y(S) = E(S)\,G(S) = U(S)\,G(S) - Y(S)\,G(S)$$

$$\Rightarrow U(S)\,G(S) = (1 + G(S))\,Y(S) \Rightarrow \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{G(S)}{1+G(S)}$$

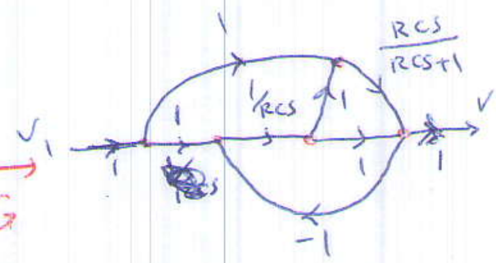


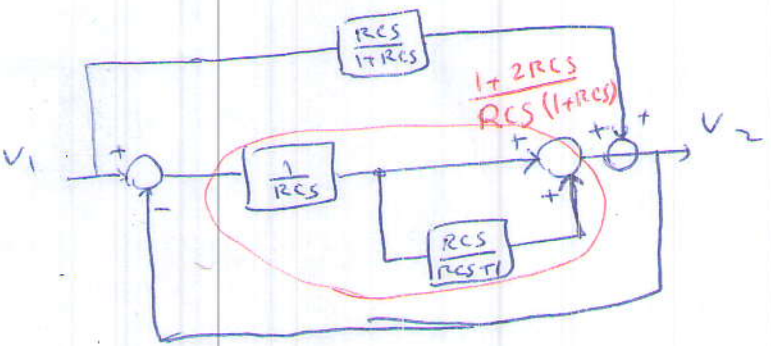
$$\frac{Y(S)}{U(S)} = T(S) = \frac{G(S)}{1 + G(S)\,H(S)}$$



محل انشعاب و پس از جمع کننده سوم قرار دهید.

SFG





$$M_1 = \frac{1}{RCS} \qquad \Delta_1 = 1$$

$$M_2 = \frac{RCS}{RCS+1} \qquad \Delta_2 = 1$$

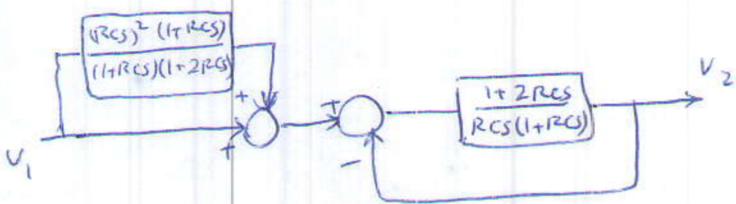
$$M_3 = \frac{1}{RCS+1} \qquad \Delta_3 = 1$$

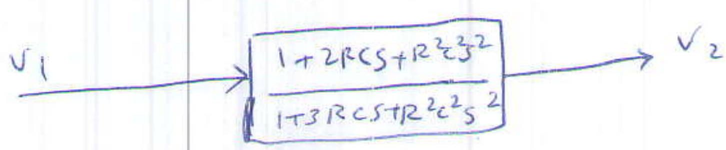
$$\Delta = 1 + \frac{1}{RCS} + \frac{1}{RCS}\,\frac{RCS}{1+RCS}$$

$$= 1 + \frac{1}{RCS} + \frac{1}{1+RCS}$$

$$G(S) = \frac{M_1\Delta_1 + M_2\Delta_2 + M_3\Delta_3}{\Delta}$$

$$= \frac{1 + 2RCS + R^2C^2S^2}{1 + 3RCS + R^2C^2S^2}$$





Realization پیاده سازی

$G(s) \rightarrow SD$

توضیح:

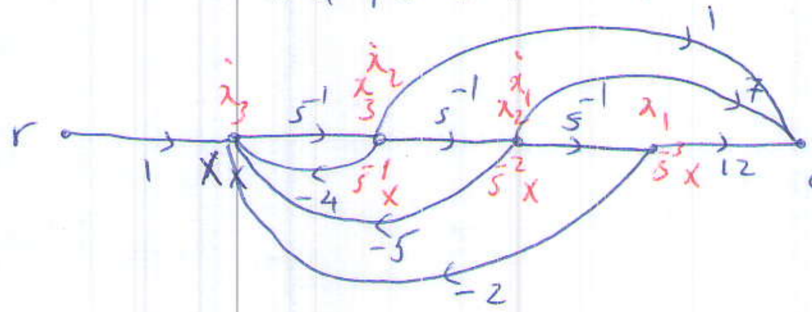
۲)

$$G(s)=\frac{C(s)}{r(s)}=\frac{s^2+7s+12}{s^3+4s^2+5s+2}\times\frac{s^{-3}}{s^{-3}}\quad\frac{X}{X}$$

روش مستقیم
Direct method
Realization

$$\Rightarrow X(1+4s^{-1}+5s^{-2}+2s^{-3})=r(s)\Rightarrow X(s)=r(s)-4s^{-1}X-5s^{-2}X-2s^{-3}X$$

$$C(s)=s^{-1}X+7s^{-2}X+12s^{-3}X$$

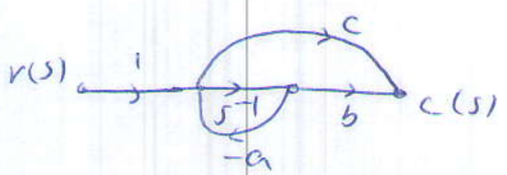


$$\dot{x}_1=x_2$$
$$\dot{x}_2=x_3$$
$$\dot{x}_3=-2x_1-5x_2-4x_3+r$$
$$C=12x_1+7x_2+x_3$$

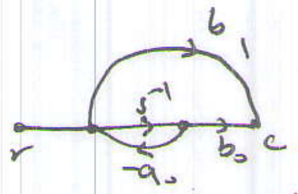
$$G(s)=\frac{s^2+7s+12}{s^3+4s^2+5s+2}=\frac{s+3}{s+1}\;\frac{s+4}{s+1}\;\frac{1}{s+2}$$

پیاده سازی سری

حالت یک تابع انتقال مرتبه ۱

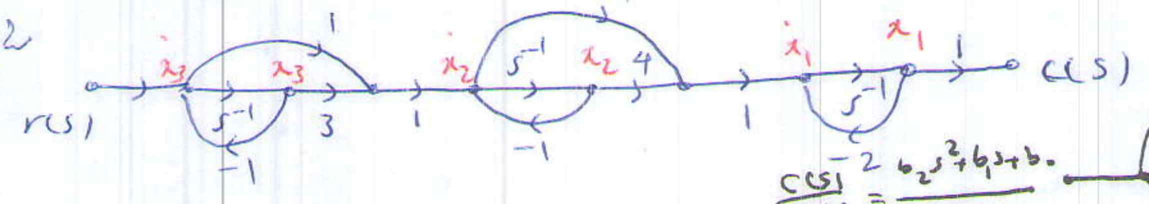


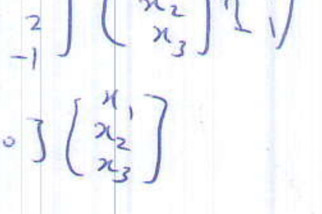
$$\frac{C(s)}{r(s)}=\frac{cs+b}{s+a}$$



$$\frac{c}{r}=\frac{b_1s+b_0}{s+a_0}$$

۲)





$$\frac{C(s)}{r(s)}=\frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{s^2+a_1s+a_0}$$

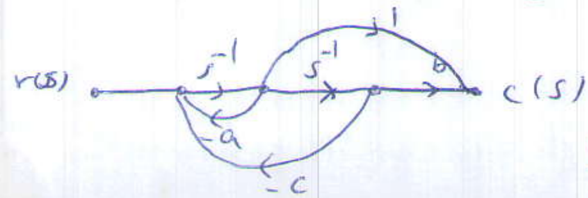
$$\dot{x}_1=-2x_1+4x_2+\dot{x}_2=-2x_1+3x_2+2x_3+r$$
$$\dot{x}_2=-x_2+3x_3+\dot{x}_3=-x_2+2x_3+r$$
$$\dot{x}_3=-x_3+r$$
$$c=x_1$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&3&2\\0&-1&2\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}r$$

$$c=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

اگر ریشه ها مزدوج داشته باشیم؛ (بصورت مستقیم پیاده سازی می‌کنیم) (درجه دوم)

$$G(s)=\frac{s+b}{s^2+as+c}$$

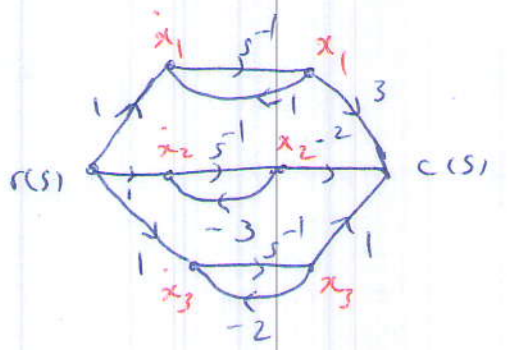


حالت یک تابع انتقال درجه ۲

پیاده سازی موازی

کنترل کرد؟

$$G(s) = \frac{2s^2+13s+17}{s^3+6s^2+11s+6} = \frac{3}{s+1} + \frac{1}{s+2} + \frac{-2}{s+3}$$



$$\dot{x}_1 = -x_1 + r$$

تکراری

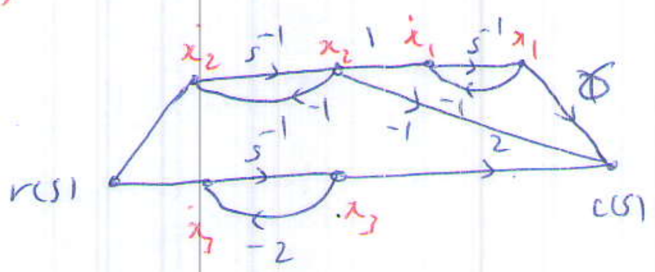
$$\dot{x}_2 = -3x_2 + r$$

$$\dot{x}_3 = -2x_3 + r$$

$$c = 3x_1 - 2x_2 + x_3$$

حل
(جردن)

$$G(s) = \frac{c(s)}{r(s)} = \frac{s^2+7s+12}{s^3+4s^2+5s+2} = \frac{s^2+7s+12}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{6}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2}$$



$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + r$$

$$c = [6 \ \ -1 \ \ 2]\, x$$

$$\dot{x}_3 = -2x_3 + r$$

$$c = 6x_1 - x_2 + 2x_3$$

خطی سازی (ابزار تحلیل)

$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$

$y(t) = g(x(t), u(t))$

فرض

نقطه کار ! x_Q, y_Q

$$\dot{x}(t) \simeq f(x_Q, u_Q) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_Q \\ u=u_Q}} (x(t) - x_Q) + \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{\substack{x=x_Q \\ u=u_Q}} (u(t) - u_Q)$$

$$y(t) \simeq g(x_Q, u_Q) + \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_Q \\ u=u_Q}} (x(t) - x_Q) + \frac{\partial g}{\partial u}\Big|_{-} (u(t) - u_Q)$$

$x(t) = x_Q(t) + \delta x(t)$

$\delta \dot{x} = A \delta x + B \delta u$

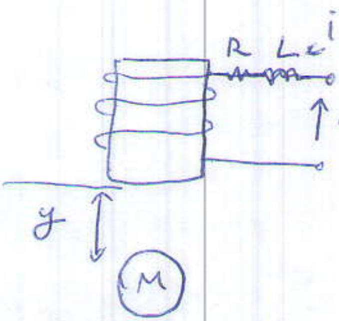
$\delta y = C \delta x + D \delta u$

$y(t) = y_Q(t) + \delta y(t)$

$A = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{x=x_Q \\ u=u_Q}}$ $\quad C = \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{-}$

$B = \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{-}$ $\quad D = \frac{\partial g}{\partial u}\Big|_{-}$

مثال: گوی معلق:



$$M \frac{d^2 y}{dt^2} = Mg - \frac{i^2(t)}{y}$$

$$e(t) = L \frac{di}{dt} + Ri$$

$x_1 = y$

$x_2 = \dot{y}$

$x_3 = i$

معادلات حالت

$\dot{x}_1 = x_2$

$\dot{x}_2 = g - \frac{1}{M} \frac{x_3^2}{x_1}$

$\dot{x}_3 = -\frac{R}{L} x_3 + \frac{e(t)}{L}$

$y = x_1$

نقطه کار

$x_{1_0} = y_0$ ارتفاع ثابت

$x_{2_0} = 0$

$x_{3_0} = i_0 = \sqrt{M g y_0}$

$e_0(t) = R \sqrt{M g y_0}$

$\delta \dot{x}_1 = \delta x_2$

$\delta \dot{x}_2 = \frac{g}{y_0} \delta x_1 - 2\sqrt{\frac{g}{M y_0}} \delta x_3$ صورت ماتریسی $\rightarrow$

$\delta \dot{x}_3 = -\frac{R}{L} \delta x_3 + \frac{\delta e(t)}{L}$

مدل خطی تأخیر زمانی

$$e^{-\tau s} = \frac{1}{e^{\tau s}} = \frac{1}{1+\tau s+\frac{\tau^2}{2!}s^2+\cdots} \simeq \frac{1}{1+\tau s+\frac{\tau^2}{2!}s^2}$$

تقریب پاده pade

$$e^{-\tau s} = \frac{e^{-\frac{\tau}{2}s}}{e^{\frac{\tau}{2}s}} \simeq \frac{1-\frac{\tau}{2}s}{1+\frac{\tau}{2}s} \quad \text{non minimum phase}$$

قطب های تابع انتقال:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \qquad D(s)=0 \rightarrow s=P$$

قطب رفتار سیستم را نشان می‌دهد.

فرض: تابع انتقال سیستم $G(s) = \frac{s+6}{s^2+5s+6}$ → پاسخ پله آن را بدست آورید.

$$C(s) = \frac{1}{s}\,\frac{s+6}{(s^2+5s+6)} = \frac{1}{s} + \frac{-2}{s+2} + \frac{1}{s+3}$$

$$c(t) = 1u(t) - 2e^{-2t}u(t) + 1e^{-3t}u(t) \qquad P=-2,-3$$

پاسخ گذرا (کنترل)

صفرهای تابع انتقال:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \qquad N(s)=0 \rightarrow s=Z$$

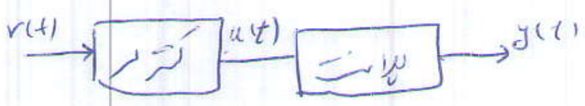
$G_1(s) =$ بالا $\quad Z=-6$ $\qquad G_2(s) = \frac{10s+6}{s^2+5s+6} \quad Z=-.6$

$$c_2(t) = (1+7e^{-2t}-8e^{-3t})u(t)$$

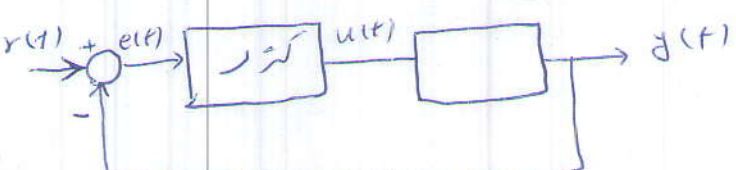
حالت گذرا ← قطب و صفر سهم دارد

حالت ماندگار ← قطب

سیستم کنترل حلقه بسته و حلقه باز:



حلقه باز



closed loop

شرایط استفاده از کنترل حلقه باز:

۱- مدل باید پایدار باشد

۲- اغتشاش سیستم و اثر پارامترها قابل صرف‌نظر کردن باشد.

حساسیت : Sensitivity

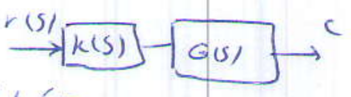
$$S = \frac{\partial M / M}{\partial G / G} = \frac{\partial M}{\partial G}\,\frac{G}{M} = \frac{\text{تغییرات نسبی } T}{\text{تغییرات نسبی } G}$$

M تابع انتقال کل سیستم از ورودی به خروجی

G تابع انتقال پلانت

حساسیت به تغییرات پارامتر

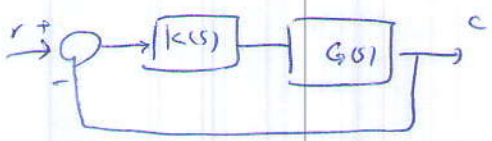
$$S = \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{\partial M}{\partial G}\,\frac{\partial G}{\partial P}$$



حلقه باز

$$M = k(s)\,G(s)$$

$$S = \frac{\partial M}{\partial G}\,\frac{G}{M} = k(s)\,\frac{G(s)}{k(s)G(s)} = 1$$



$$M(s) = \frac{kG}{1+kG} \qquad S = \frac{\partial M}{\partial G}\,\frac{G}{M} = \frac{1}{1+kG}$$

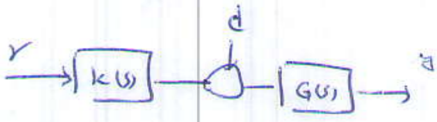
ویژگی‌های فیدبک :

1- بهره سیستم (کاهش - افزایش)

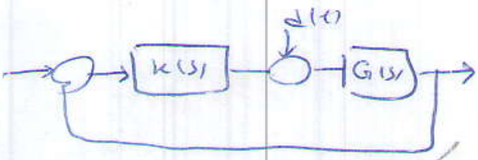
2- پایداری (افزایش یا کاهش)

3- حساسیت (کاهش افزایش)

4- نویز و اغتشاش

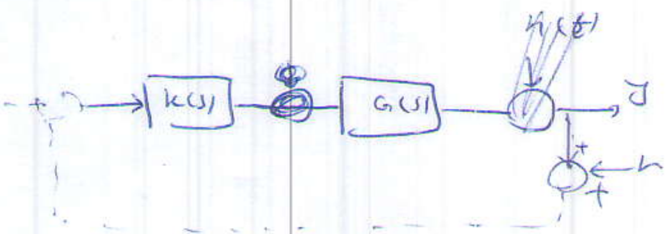


$$y = Gk\,r(s) + Gd$$



$$y = \frac{Gk}{1+Gk}\,r + \frac{G}{1+Gk}\,d$$

سیگنال قابل کنترل توسط کنترل کننده



O.L. $\quad y = Gkr + r$

C.L $\quad y = \frac{Gk}{1+Gk}\,r - \frac{Gk}{1+Gk}\,n$

قطب های زیر مجموعه مقادیر ویژه هستند

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

$|\lambda I - A| = 0$

$\lambda_1 = -3 \quad \lambda_2 = -2 \,, \lambda_3 = -1$

$P_1 = -2 \,, P_2 = -3$

کنترل پذیری: یک u وجود داشته باشد که در زمان محدود x را به x_1 ببرد

$$\rho \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$

رویت پذیری: با داشتن u و y در فاصله $[0 \; T]$ بتوانیم x را بدست آوریم.

$$\rho \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

استفاده از فیدبک حالت برای کنترل سیستم

$\dot{x} = Ax + bu$

$y = cx + du$

let $u = -kx \Rightarrow \dot{x} = (A - bk)x + br$

$y = \underbrace{\cancel{cx}}_{(c-dk)x} + dr$

مقادیر ویژه جدید

$|\lambda I - A + bk| = 0$

با تعیین k مقادیر ویژه مطلوب بدست می آید. (باید سیستم کنترل پذیر باشد)

$|sI - A + bk|$ معادله مشخصه مطلوب $\Rightarrow$ مجهول k

حل $\quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad$ معادله موجود $\Delta_s = s^2 - 1$

قطب های مطلوب $\quad -2 \pm j \rightarrow \Delta_{\text{مطلوب}} = s^2 + 4s + 5 = |sI - A + bk| \Rightarrow k = \begin{bmatrix} 10 & -6 \end{bmatrix}$

سه‌شنبه

L.10 : پایداری

- BIBO
- پایداری ورودی صفر
- روش راث

در سیستم SISO اگر $\int_0^\infty |g(t)|\, dt \le M < \infty$ اگر و فقط اگر هر قطب $g(s)$ دارای قسمت حقیقی منفی باشد

پایداری داخلی (ص.ب) ← مقادیر ویژه A دارای قسمت حقیقی منفی

LHP | RHP

Stable | Unstable

اگر قطبها را نتوانیم بدست آوریم (درجه بالا)

الگوریتم راث - هرویتز

$$p(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

s^n	1	a_{n-2}	$\cdots$	
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	$\cdots$	
s^{n-2}	$\gamma_{2,1}$	$\gamma_{2,2}$	$\gamma_{2,3}$	$\cdots$
$\vdots$	$\gamma_{3,1}$	$\gamma_{3,2}$	$\cdots$	
s^1	$\gamma_{n-1,1}$	$\gamma_{n-1,2}$		
s^0	$\gamma_{n,1}$			

$$\gamma_{2,1} = \frac{a_{n-2}a_{n-1} - a_{n-3}\times 1}{a_{n-1}}$$

$$\gamma_{2,2} = \frac{a_{n-4}a_{n-1} - a_{n-5}\times 1}{a_{n-1}}$$

$$\gamma_{2,3} = \frac{a_{n-6}a_{n-1} - a_{n-7}\times 1}{a_{n-1}}$$

$$\gamma_{31} = \frac{a_{n-3}\gamma_{21} - a_{n-1}\gamma_{22}}{\gamma_{21}}$$

$\vdots$

تعداد ریشه‌های واقع در RHP برابر تعداد تغییر علامت در ستون ۱ جدول راث است.

نکته: شرط لازم: تمام ضرایب مثبت (هم علامت)
- (هیچ ضریبی صفر نباشد)

مثال: $p(s) = 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0$

s^4	2	3	10
s^3	1	5	0
s^2	$\frac{1\times 3 - 5\times 2}{1} = -7$	$\frac{10}{1} = 10$	
s^1	$\frac{45}{7} = \frac{-35-10}{-7}$	0	
s^0	10		

دو تغییر علامت $\Rightarrow$ 2 RHP

- اگر یکی از درایه‌ها صفر باشد یا تغییر علامت داشته باشیم سیستم ناپایدار است

حالت‌های خاص

۱- اگر اولین عنصر یک سطر صفر باشد

۲- تمام عناصر یک سطر صفر باشد.

مثال ۲) $s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3$

s^4	1	2	3
s^3	1	2	
s^2	$\cancel{0}\ \varepsilon$	3	
s^1	$\frac{2\varepsilon - 3}{\varepsilon} < 0$		
s^0	3		

2 RHP for any ε

حل

$P(s) = s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 7s + 4 = 0$

s^5	1	8	7
s^4	4	8	4
s^3	6	6	0
s^2	4	4	0
s^1	~~0~~ 8	~~0~~ 0	~~0~~
s^0	4		

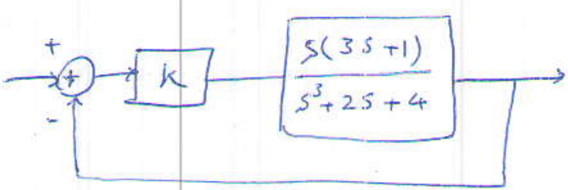
$\rightarrow q(s) = 4s^2 + 4 = 0$ ← دو ریشه مزدوج موهومی خالص

$q'(s) = 8s$

↓ NO RHP root + 2 roots on Imaginary axis

حل با رسم

حل: پایداری سیستم زیر را برحسب مقادیر k بررسی کنید.



$$M(s) = \frac{ks(3s+1)}{s^3 + 2s + 4 + ks(3s+1)}$$

$\Delta(s) = s^3 + 3ks^2 + (2+k)s + 4 = 0$

$k > 0$

$2 + k > 0 \rightarrow k > -2$

s^3	1	$2+k$
s^2	$3k$	4
s^1	$\frac{3k(2+k)-4}{3k}$	
s^0	4	

$3k(2+k) - 4 > 0 \rightarrow 3k^2 + 6k - 4 > 0$

$\rightarrow \boxed{k > .528}$

اگر ε در ابتدا لازم باشد با تبدیل $s \to \frac{1}{s}$ ، ε در اینجا ظاهر نشود

نکته: تمام ضرایب یک سطر را می‌توان در یک عدد مثبت ضرب کرد

$1 + 4s^2 + s^3 + 5s^4 + s^5$

$s^5 + 4s^3 + s^2 + 5s + 1$

s^5	1	1	0
s^4	5	4	1
s^3	$\frac{1}{5}$ 1	$\frac{1}{5}$	0
s^2	9	1	
s^1	$\frac{1}{9}$	0	
s^0	1		

$4s^2 = 0 \rightarrow s = 0$

هر دو حالت صفر را دارد.

$s \rightarrow s - a$

$s' = s + a$

$\dddot{c} + 6\ddot{c} + 11\dot{c} + kc = \dot{r} - r$

k را طوری تعیین کنید

$1C < k < 66$

دو قطب نیز ۵ دارد

$\Delta(s-1) = s^3 + 3s^2 + 2s + k - 6$

سیستم کنترلی

تحلیل حوزه زمانی سیستم‌های کنترل : Lecture 11

- سیگنال‌های آزمون

- خطای حالت ماندگار و ضرایب خطا

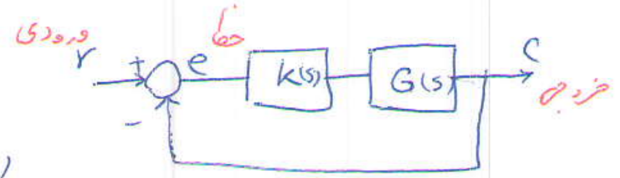
سیگنال‌های آزمون:

$R(s) = \frac{R}{s}$ ، $r(t) = R\,u(t)$ پله step

$R(s) = \frac{R}{s^2}$ ← $r(t) = R\,t\,u(t)$ (Ramp / velocity) شیب / سرعت

$R(s) = \frac{R}{s^3}$ ← $r(t) = \frac{Rt^2}{2}u(t)$ Acceleration شتاب (پارابولیک)

خطا در سیستم‌های کنترل



$e(t) = r(t) - c(t)$

$E(s) = R(s) - C(s)$

$$K(s)G(s) = \frac{k(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)\cdots(1+\tau_m s)\,e^{-T_d s}}{s^j(1+\tau_{d1}s)(1+\tau_{d2}s)\cdots(1+\tau_{dn}s)}$$

j نوع سیستم

- مرتبه بالاترین درجه مخرج است، نوع فرق دارد

- نوع تعداد قطب در مبدأ

$T(s) = \frac{GK}{1+GK}$ $\quad E(s) = R(s) - T(s)R(s) = \frac{1}{1+GK}R(s)$

اگر سیستم پایدار باشد:

قضیه مقدار نهایی

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0}\frac{s}{1+GK}R(s)$$

برای ورودی پله $R(s) = \frac{R}{s}$ ⇐ $e_{ss} = \frac{R}{1+k_p}$ ، $k_p = \lim_{s\to 0} G(s)k(s)$ ثابت موقعیت

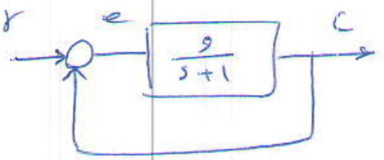
Position Constant

ورودی شیب $R(s) = \frac{R}{s^2}$ $\quad e_{ss} = \frac{R}{k_v}$ $\quad k_v = \lim_{s\to 0} sG(s)k(s)$ ثابت سرعت

ورودی شتاب $R(s) = \frac{R}{s^3}$ $\quad e_{ss} = \frac{R}{k_a}$ $\quad k_a = \lim_{s\to 0} s^2G(s)k(s)$ ثابت شتاب

نوع Type	k_p	k_v	k_a	موقعیت e_{ss}	سرعت e_{ss}	شتاب e_{ss}
0	k	0	0	$\frac{R}{1+k}$	∞	∞
1	∞	k	0	0	$\frac{R}{k}$	∞
2	∞	∞	k	0	0	$\frac{R}{k}$
3	∞	∞	∞	0	0	0

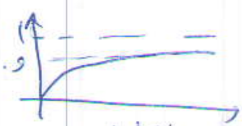
مثال :



$$G(s)k(s)=\frac{9}{s+1} \qquad T(s)=\frac{9}{s+10}$$

$$k_p=\lim_{s\to 0} GK = 9 \qquad e_{ss}=\frac{1}{1+9}=.1 \quad \text{خطای پله}$$

$$k_v=k_a=0 \to e_{ss}=\infty$$



پاسخ پله

step(9,[1 10])

سؤال : آیا ممکن است که نوع سیستم صفر باشد ولی خطای پله صفر باشد؟

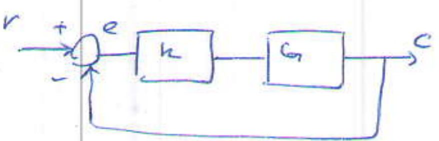
تابع انتقال سیستم حلقه بسته

$$T(s)=\frac{a}{s^3+12s^2+6s+23} \qquad a=?\ \text{تا}\ e_{ss}=0 \quad \to a=23$$

$$e_{ss}=R(1-\lim_{s\to 0}T(s))=0$$

پایدار → روش راث → اتفاقا باید پایداری بررسی شود

Lecture 12 : سری خطا



$$E(s)=W_e(s)R(s)$$

$$e(t)=\int_0^t w_e(\tau)r(t-\tau)d\tau$$

بسط $r(t-\tau)$ حول t

$$r(t-\tau)=r(t)-r'(t)\tau+\frac{r''(t)}{2!}\tau^2-\frac{r'''(t)}{3!}\tau^3+\dots$$

$$e(t)=r(t)\int_0^t w_e(\tau)d\tau-r'(t)\int_0^t \tau w_e(\tau)d\tau+\dots$$

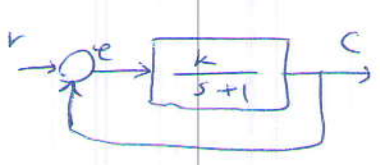
فرض $r(t)=r_s(t)$

$$e_s(t)=\underbrace{r_s(t)\int_0^\infty w_e(\tau)\tau}_{C_0}+r_s'(t)\underbrace{(-1)\int_0^\infty \tau w_e(\tau)d\tau}_{C_1}+\frac{r_s''(t)}{2!}\underbrace{\int_0^\infty \tau^2 w_e(\tau)d\tau}_{C_2}-\dots+\dots$$

$$e_s(t)=C_0r_s(t)+C_1r_s'(t)+\frac{C_2}{2!}r''(t)+\dots$$

$$W_e(s)=\int_0^\infty w_e(\tau)e^{-s\tau}d\tau \to C_0=\lim_{s\to 0}W_e(s) \qquad C_1=\lim_{s\to 0}\frac{dW_e(s)}{ds}\ \dots\ C_n=\lim\frac{d^nW_e(s)}{ds^n}$$

مثال :



$$E(s)=\underbrace{\frac{s+1}{s+1+k}}_{W_e(s)}R(s)$$

$$C_0=\lim_{s\to 0}W_e(s)=\frac{1}{1+k}$$

$$C_1=\lim_{s\to 0}\frac{dW_e(s)}{ds}\quad \frac{k}{(1+k)^2}$$

سری خطا برای پله

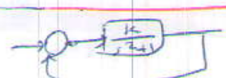
$$r_s(t)=1,\ r'=r''=\dots=0 \to e_s(t)=\frac{1}{1+k} \qquad C_0r_s(t)+C_1r'+\frac{C_2}{2!}r''$$

سری خطا برای شیب

$$r_s(t)=t,\ r'(t)=1,\ r''=r'''=\dots=0 \Rightarrow e_s(t)=\frac{t}{1+k}+\frac{k}{(1+k)^2}$$

تمرین

k چند باشد که خطای دردر sin 2t صفر شود؟



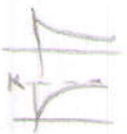
$H(s) = \frac{K}{1+Ts}$ ادامه سیستم مرتبه اول

$h(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T}$

پاسخ پله $s(t) = K(1-e^{-t/T})$

$s(0) = 0$

$\lim_{t \to \infty} s(t) = K$



Lec 13

معرفی سیستم نمونه درجه ۲ و مشخصه‌های پاسخ گذرا و ماندگار

قطب‌ها : $P_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

اگر $\xi > 1$ ← فوق میرا ← قطب‌ها حقیقی ← نوسان نداریم

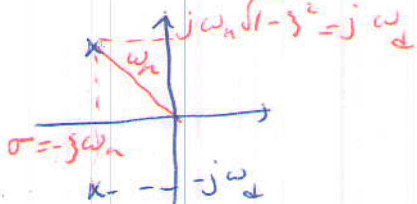
$\xi = 1$ ← میرا بحرانی

$0 \le \xi \le 1$;

پاسخ پله واحد ؟ $C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$ تبدیل معکوس

$$c(t) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\, t + \theta)\right) u(t)$$

$\theta = \cos^{-1}\xi$

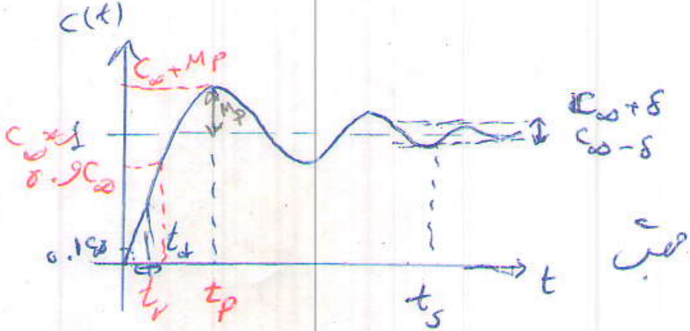


ξ : نسبت میرایی
Damp. ratio

$\xi\omega_n$: ضریب میرایی (α)
Damping factor

ω_n : فرکانس طبیعی

ω_d : فرکانس طبیعی میرا شده
natural damped frequency



$$P.O. = \frac{M_P}{C_\infty} \times 100\%$$ درصد فراجهش

برای یافتن فراجهش اول باید $\frac{\partial c}{\partial t} = 0$ قرار داد

t_p را یافته سپس در $c(t_p)$ ، P.O. را بیابیم.

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{\omega_d} \Rightarrow P.O. = 100\, e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \%$$

$\uparrow\xi\downarrow \to P.O.\uparrow\downarrow$

$$t_r \cong \frac{0.8 + 2.5\xi}{\omega_n} \qquad t_r \cong \frac{1 - 0.416\xi + 2.917\xi^2}{\omega_n} \quad 0 < \xi < 1$$

دقیق‌تر

زمان نشست: $C_\infty - \delta < |c(t)| < C_\infty + \delta$

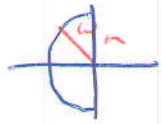
$$t_s = \frac{3.2}{\xi\omega_n} \text{ for } \delta = 5\%$$

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \text{ for } \delta = 2\% \qquad 0 < \xi < 0.7$$

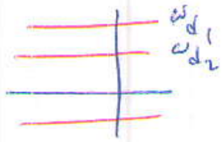
$$t_d \cong \frac{1 + 0.7\xi}{\omega_n} \qquad t_d \cong \frac{1.1 + 0.125\xi + 0.469\xi^2}{\omega_n}$$

مکان هندسی مشخصه ثابت در صفحه s

ω_n ثابت



ω_d ثابت

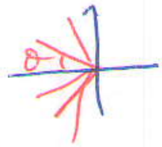


ضریب میرایی ثابت

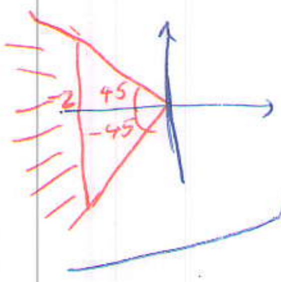
α

ζ ثابت (نسبت میرایی)

$\zeta = \cos\theta$



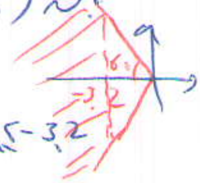
حل: مکان هندسی سیستمی که نسبت میرایی (حداقل) برابر 707. و ضریب میرایی (حداقل) برابر 2 را بیابید.



مکان هندسی نقاط در صفحه s را بیابید که P.O ≤ 16% و $t_s \leq 1$ باشد ($\delta = 5\%$)

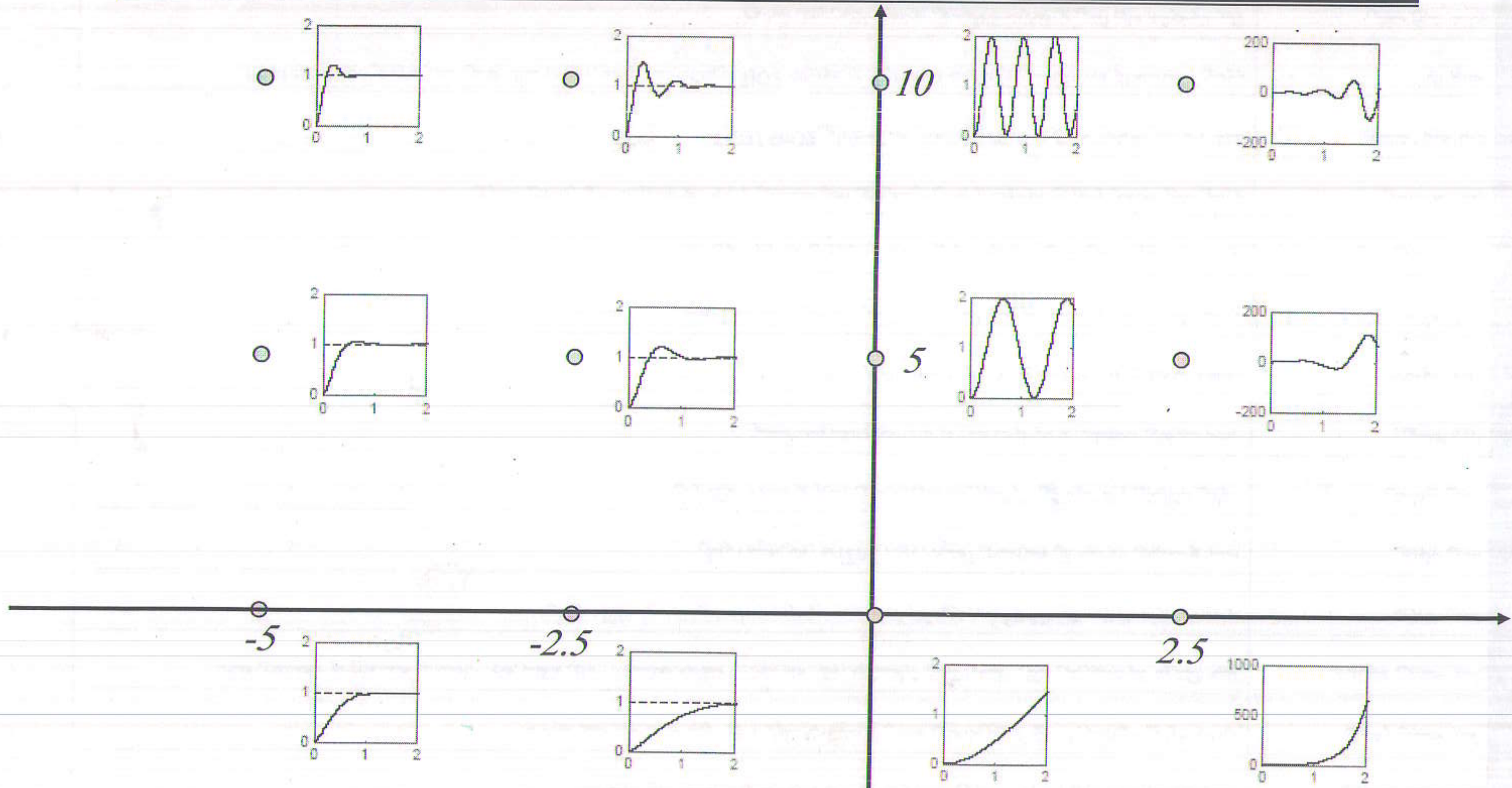
$P.O. \leq 16\% \Rightarrow \zeta \geq .5 \Rightarrow \theta \leq 60^\circ$

$t_s = \frac{3.2}{\zeta\omega_n} \leq 1 \Rightarrow \zeta\omega_n \geq 3.2 \Rightarrow -\zeta\omega_n \leq -3.2$



Effect of roots loci on step response

تاثیر مکان ریشه ها بر پاسخ پله



Conjugate root is not shown

ریشه مزدوج نشان داده نشده است

سیستم‌های کنترل

۳. اثر افزودن قطب و صفر به تابع تبدیل

۱. افزودن قطب به تابع تبدیل حلقه باز

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)(1+T_p s)}$$

دقت سنسور کنترلر DC است

$$M(s)=\frac{G}{1+G}=\frac{\omega_n^2}{T_p s^3+(1+2\zeta\omega_n T_p)s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

کلاً $P.O.\uparrow$

هر قدر $T_p\uparrow$ ← قطب جدید به محور $j\omega$ نزدیک‌تر

و $P.O\uparrow$

$t_r\uparrow$ زیرا پهنای باند را کم می‌کند

حتی می‌تواند باعث ناپایداری شود

۲. افزودن قطب به تابع تبدیل حلقه بسته

بر پاسخ کنترل مستقیماً اثر دارند.

$$M(s)=\frac{\omega_n^2}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)(1+T_p s)}$$

$T_p\uparrow \Rightarrow P.O.\downarrow$ و $T_r\uparrow$ یعنی مثل فیلتر فرکانس پایین عمل می‌کند ولی باعث کند شدن سیستم می‌شود.

۳. افزودن صفر به تابع تبدیل حلقه بسته

$$M(s)=\frac{\omega_n^2(1+T_z s)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}+\frac{\omega_n^2 T_z s}{\quad}$$

پاسخ کنترل شامل پاسخ قبلی + مشتق آن است

$$c(t)=c_1(t)+T_z\frac{dc_1}{dt}$$

$T_z\uparrow \Rightarrow P.O.\uparrow$ و $T_r\downarrow$

پایداری را عوض نمی‌کند. ($\zeta>0$ سیستم پایدار)

$$G(s)=\frac{\omega_n^2(1+T_z s)}{s(s+2\zeta\omega_n)}\rightarrow T(s)=\frac{\omega_n^2(1+T_z s)}{s^2+(2\zeta\omega_n+\omega_n^2 T_z)s+\omega_n^2}$$

۴. افزودن صفر به تابع تبدیل حلقه باز

مثال

$$G(s)=\frac{6(1+T_z s)}{s(s+1)(s+2)}$$

سیستم مرتبه ۳

$$M(s)=\frac{6(1+T_z s)}{s^3+3s^2+(2+6T_z)s+6}$$

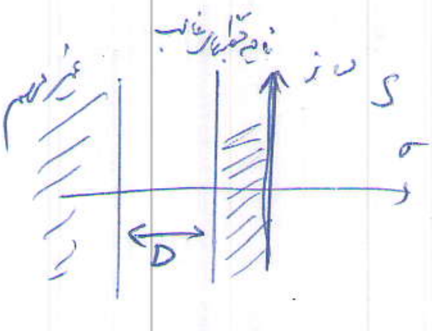
صفر هم در صورت و هم در مخرج اثر دارد

عبارت $(1+T_z s)$ در صورت باعث افزایش $P.O.$ می‌شود و T_z در مخرج باعث کاهش آن (جذب به پایداری)

برای T_z کوچک مخرج تاثیر بیشتری دارد و برای T_z بزرگ‌تر صورت پس با افزایش T_z ابتدا $P.O.\downarrow$ سپس $P.O\uparrow$

قطب‌های غالب (مسلط) توابع تبدیل

(نکته‌های اساسی)



قطب هر چه به محور $j\omega$ نزدیک‌تر باشد اثرش بیشتر است.

زیرا پاسخ کنترل کندی دارند.

$$D\geq(5-10)\ \mathrm{Real}(s)$$

نسبت میرایی

وقتی درجه سیستم را به ۲ کاهش می‌دهیم ζ و ω_n دقیقاً شبیه سیستم مرتبه ۲ نیستند ولی به اندازه کافی ζ را نسبت میرایی می‌گویند

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10}{\underset{0.1s+1}{(s+10)}(s^2+2s+2)} \cong \frac{1}{s^2+2s+2}$$

قطب‌های غالب $s=-1\pm j1 \rightarrow \zeta = .707$ نسبت میرایی نسبی

- گاهی که صفر نزدیک قطب است، صفر نزدیک قطب اثر هم را خنثی می‌کند. بنابراین می‌توان اثر صفر و قطب را در نظر نگیریم.

$$M_G(s) = \frac{15.24\,(s+2.1)}{(s+16)\,(s+2)} \approx \frac{15.24 \times \frac{1}{2.1}}{s+16 \times \frac{1}{2}} = \frac{14.51}{s+16}$$

سیستم کنترل

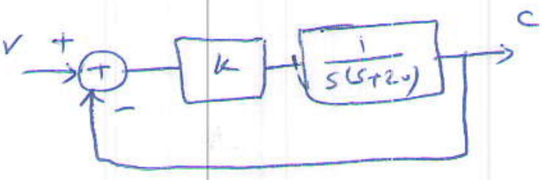
Lec 10

مکان هندسی ریشه‌ها

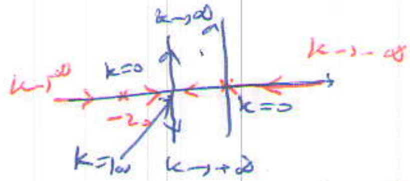
مکان ریشه‌ها، محل تغییرات ریشه‌های معادله $1+kF(s)=0$ را بر حسب مقادیر مختلف k نشان می‌دهد.

RL (Root loci) : $k \in R^+$ ، CRL : $k \in R^-$ ، $k \in R$ مکان کامل

مثال 1:



$$1+k\frac{1}{s(s+20)}=0 \Rightarrow s^2+20s+k=0 \Rightarrow s=-10\pm\sqrt{100-k}$$



چند شاخه در مکان ریشه؟ $max(m,n)$

$1+k\frac{N(s)}{D(s)}=0 \to D(s)+kN(s)=0$

$k\to 0 \to D(s)=0$ قطب‌های حلقه بسته در محل قطب‌های حلقه باز

$k\to\pm\infty \to N(s)=0 \to$ صفرهای حلقه باز، قطب‌های حلقه بسته در محل صفر

قاعده اول: سیستم متناظر باید به صورت $1+kF(s)=0$ نوشته شود.

- هر نقطه‌ای که روی مکان ریشه قرار دارد: $F(s)=-\frac{1}{k}$

شرط زاویه: $\angle F(s)=(2k+1)\pi \quad k\geq 0$

$\angle F(s)=2k\pi \quad k\leq 0$

شرط اندازه: $F(s)=-\frac{1}{k} \Rightarrow |F(s)|=\frac{1}{|k|}=\frac{\text{حاصلضرب فاصله صفرها از نقطه } s}{\text{حاصلضرب فاصله قطب‌ها از نقطه } s}$

قاعده دوم: قطب‌ها و صفرهای $F(s)$ (حلقه باز) را در صفحه s مشخص کنید.

$k=0$ قطب‌ها

$k\to\pm\infty$ صفرها

قاعده سوم: محور حقیقی را برای مقادیر مثبت و منفی k مشخص کنید.

اگر تعداد قطب‌ها و صفرها در سمت راست فرد باشد $k>0$ و گرنه $k<0$

قاعده چهارم: مجانب‌ها و محل تلاقی مجانب‌ها را با زاویه رسم کنید (برای kهای مثبت و منفی)

$$\begin{cases} k>0 & \theta=\frac{(2m+1)\pi}{|n_p-n_z|} \quad m=0,1,2,\dots \\ k<0 & \theta=\frac{2m\pi}{|n_p-n_z|} \end{cases}$$

محل تلاقی: $\sigma=\frac{\sum p_i-\sum z_i}{n_p-n_z}$

قاعده پنجم: نقاط شکست را بیابید.

$k=-\frac{1}{F(s)} \qquad \frac{\partial k}{\partial s}=0 \to s$ محل شکست

مثال: $k=-s(s+20) \qquad \frac{\partial k}{\partial s}=0 \to -2s-20=0 \to s=-10 \to \boxed{k=100}$

قاعده ششم: نقاط تلاقی با محور موهومی را توسط روش راث هورویتز تعیین کنید.

مثال: $1+k\frac{1}{s(s+5)(s+10)}=0$

قانون ۶

$s(s+5)(s+10)+k=0$

s^3	1	50
s^2	15	k
s	$\frac{750-k}{15}$	
s^0	k	

$15s^2+750=0 \rightarrow s=\mp j7.07$

$\rightarrow 750-k=0 \rightarrow k=750$

مثال

قانون ۱: ✓

قانون ۲: $s=0,-5,-10$

۳ ، ✓

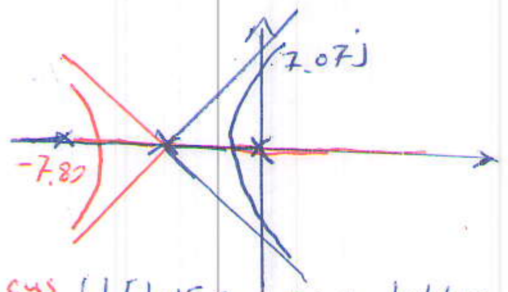
۴: $\theta=\frac{(2m+1)\pi}{3}=\begin{cases}\pi/3\\ \pi\\ 5\pi/3\end{cases}$ $k>0$

$\theta=\frac{2m\pi}{3}=\begin{cases}0\\ 2\pi/3\\ 4\pi/3\end{cases}$ $\sigma=\frac{-5-10}{3}=-5$

قانون پنجم: $k=-\frac{1}{f(s)}=-s(s+5)(s+10)$

$\frac{\partial k}{\partial s}=0 \rightarrow s=-7.89 ,\ -2.11$

$\underbrace{-7.89}_{k<0}$ $\underbrace{-2.11}_{k>0}$

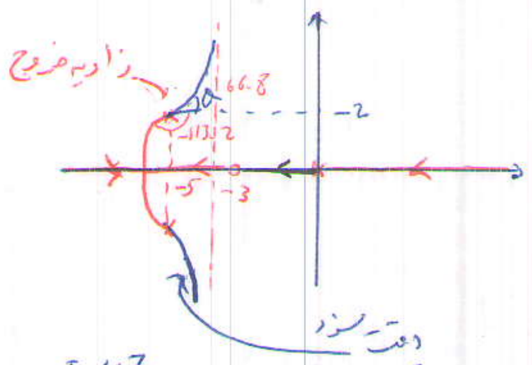


rlocus(1,[1,15,50,0]); holdon; rlocus(-1,[1 15 50 0])

مثال ۲:

$1+10\frac{(s+k)(s+3)}{s(s^2-1)}$ $\xrightarrow{\text{تابع معادل}}$ $s(s^2-1)+10(s+k)(s+3)=0$

$\Rightarrow 1+k\frac{10(s+3)}{s(s^2+10s+29)}=0$



قانون ۴

$\sigma=\frac{\sum p_i-\sum z_i}{n_p-n_z}=-3.5$

مجانب

$k>0$; $\theta=\frac{(2m+1)\pi}{n_p-n_z}=\pi/2 , 5\pi/2$

$k<0$; $\theta=0,\pi$

نقطه شکست

$0: k=\frac{1}{f(s)}$

$\frac{\partial k}{\partial s}=0 \Rightarrow s=-5.47$

بین دو قطب و صفر بالا رفته هستیم باید شکست شود

$\Rightarrow K>0$

قانون ۶: تقاطع با محور موهومی

$s^3+10s^2+(29+10k)s+30k=0$

s^3	1	$29+10k$
s^2	10	$30k$
s^1	$29+7k$	0
s^0	$30k$	

برای هیچ K تقاطع با محور نداریم

قانون هفتم: زاویه خروج از قطب و ورود به صفر

$135-\theta-90-(180-\tan^{-1}\frac{2}{5})=-\theta-113.2=\cancel{\pi}\ -180$ $k>0 \rightarrow \theta=66.8$

زاویه قطب ـ زاویه صفر $=(2k+1)\pi$

$k<0 \quad 2k\pi$

$135-\theta-90-(180-\tan^{-1}\frac{2}{5})=-\theta-113.2=0$ $\rightarrow k<0 \quad \theta=-113.2$

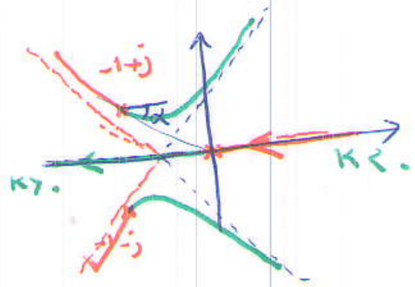
محاسبه K روی مکان ریشه

$1+kf(s)=0 \rightarrow |f(s)|=\frac{1}{|k|} \rightarrow |k|=\frac{\prod_{j=1}^{n}|s_1+p_j|}{\prod_{i=1}^{m}|s_1+z_i|}$

حاصلضرب فاصله قطب‌ها / فاصله صفرها

مثال: مکان کامل ریشه‌های معادله $s(s^2+2s+2)+k=0$ را رسم کنید

$$1+k\frac{1}{s(s^2+2s+2)}=0$$



$$\theta=\begin{cases}\pi/3\\ \pi\\ 5\pi/3\end{cases}\quad k>0 \qquad \theta=\begin{cases}0\\ 2\pi/3\\ 4\pi/3\end{cases}\quad k<0$$

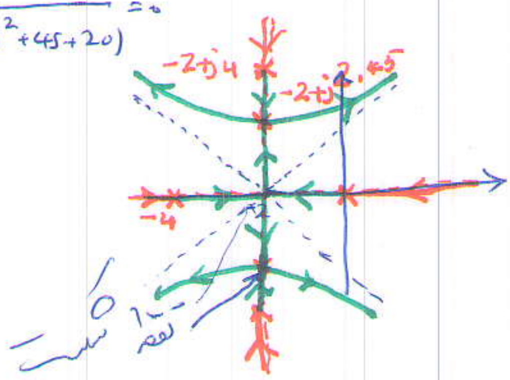
$$\sigma=\frac{-2}{3} \qquad \frac{dk}{ds}=0 \Rightarrow 3s^2+4s+2=0$$

$$\Rightarrow s=-0.667\pm j0.471$$ ورود به نقطه شکست

$$-(\alpha+90+135)=-180 \Rightarrow \alpha=-45^\circ$$ زاویه خروج از قطب

مثال: (نقاط شکست خارج محور حقیقی)

$$1+k\frac{s+2}{s^2+2s+2}\ne \quad 1+k\frac{1}{s(s+4)(s^2+4s+20)}=0$$



$$\theta=\begin{cases}\pi/4\\ 3\pi/4\\ 5\pi/4\\ 7\pi/4\end{cases}\quad k>0 \qquad \theta=\begin{cases}0\\ \pi/2\\ \pi\\ 3\pi/2\end{cases}\quad k<0$$

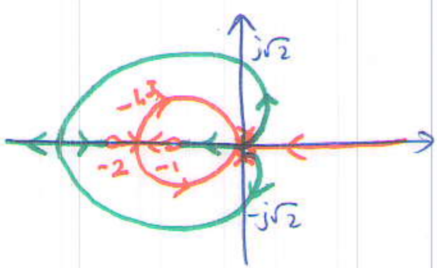
$$\sigma=\frac{-4-4}{4}=-2$$

$$\frac{dk}{ds}=0 \Rightarrow s^3+6s^2+18s+20=0$$ محل برخورد با محور

$$\Rightarrow s=-2,\quad s=-2\pm j2.45$$ نقاط شکست

مثال:

$$1+k\frac{(s+1)(s+2)}{s^3}=0$$



$$\frac{dk}{ds}=0 \Rightarrow s^2(s^2+6s+6)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}s=0 & \text{مکرر}\\ s=-3\pm\sqrt{3}\end{cases}$$

محل برخورد با محور

$$s^3+ks^2+3ks+2k=0$$

1	3k
k	2k
$\frac{2k-3k^2}{k}$	
2k	

$2-3k=0 \rightarrow k=\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}s^2+\frac{4}{3}=0 \Rightarrow s=\pm j\sqrt{2}$

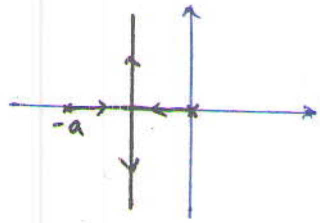
$0<k<\frac{2}{3}$ 2RHP

$\frac{2}{3}<k$ 0 RHP

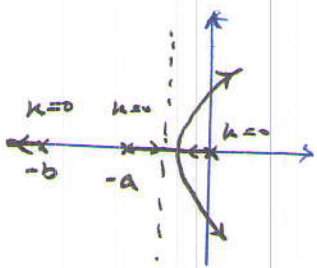
$k<0$ 1RHP

اثرات اضافه کردن قطب و صفر جدید در مساله رسم (حلقه باز)

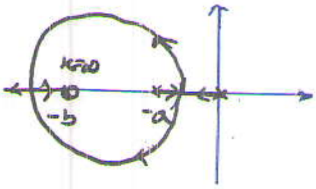
$$1 + k\frac{1}{s(s+a)} = 0$$



$$1 + k\frac{1}{s(s+a)(s+b)} = 0$$



$$1 + k\frac{(s+b)}{s(s+a)} = 0$$

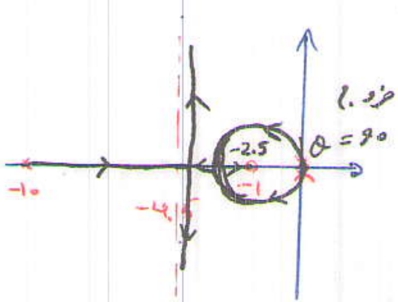


اثرات حرکت قطب‌ها و صفرها

$$1 + \frac{k(s+b)}{s^2(s+a)} = 0$$

فرض : $b=1$

$a = 10, \cancel{8}, 3, 1$

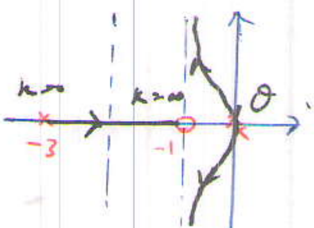


$$a=10 \rightarrow \sigma = \frac{-10-(-1)}{2} = -4.5 \qquad \theta = \pi/2,\ 3\pi/2$$

$$k = -\frac{s^2(s+a)}{s+1} \qquad \frac{\partial k}{\partial s} = 0 \rightarrow s = -\frac{(a+3)}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{a^2-10a+9}$$

$$a=10 \rightarrow s_1 = -4,\ s_2 = -2.5$$

$$a=3 \rightarrow \sigma = \frac{-3-(-1)}{2} = -1 \qquad \theta = \pi/2,\ 3\pi/2$$



$\frac{\partial k}{\partial s} = 0 \rightarrow$ 0 ریشه حقیقی روی محور

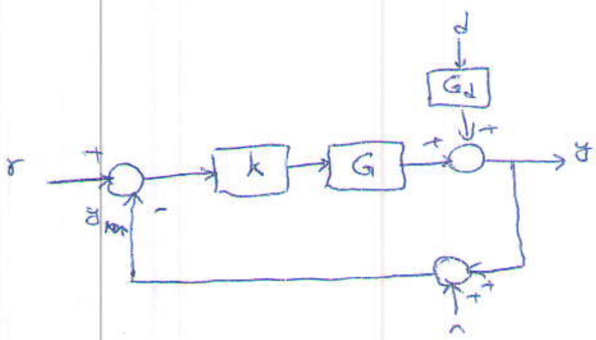
نقطه شکست ندارد

$a=1 \rightarrow$ حذف صفر و قطب

سیمولینک

L.21 : تحلیل در حوزهٔ فرکانس

پیکربندی کنترل سیستم آزادی



$$y(s) = \underbrace{\frac{G(s)k(s)}{1+G(s)k(s)}}_{T(s)} r(s) + \underbrace{\frac{1}{1+G(s)k(s)}}_{S(s)} G_d(s)\, d(s) - \underbrace{\frac{G(s)k(s)}{1+G(s)k(s)}}_{T(s)} n(s)$$

$S(s)$: Sensitivity Function

$T(s)$: Complementary 〃 〃

$$S(s) + T(s) = 1$$

$$y(s) = T(s)\, r(s) + S(s)\, G_d(s)\, d(s) - T(s)\, n(s)$$

Command Tracking $\quad T \to 1 \quad$ or $\quad S \to 0$ ✓

dist. rej. $\quad S \to 0 \quad$ or $\quad T \to 1$ ✓

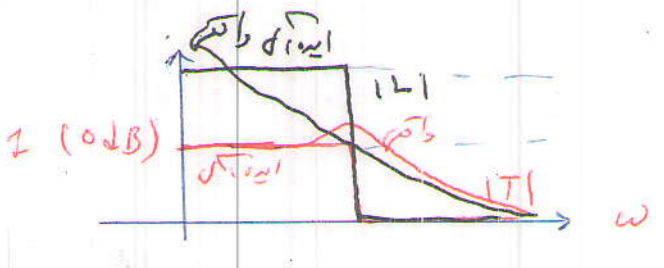
noise attenuation $\quad T \to 0 \quad$ or $\quad S \to 1$ ✗

تابع انتقال حلقه $\quad L(s) = G(s)\, k(s) \qquad T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} \qquad S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$

com. Tr. $\to T \to 1 \quad$ or $\quad S \to 0 \quad$ or $\quad L \to \infty$

dist. r. ↗ ~~$T \to 1$ or $S \to 0$~~

noise at. $\quad T \to 0 \quad$ or $\quad S \to 1 \quad$ or $\quad L \to 0$



$s = j\omega$

رسم نمودار بود

$$g(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \qquad g(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1}$$

$\omega \ll \frac{1}{\tau} \to |g(j\omega)| \simeq 1 \to 20\log|g(j\omega)| = 0$

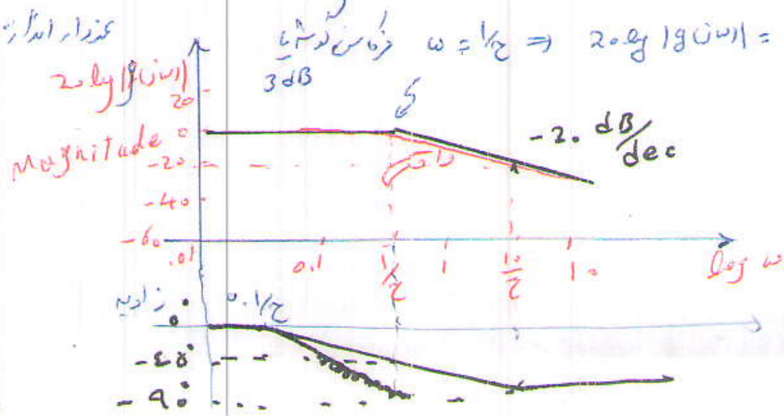
$\omega \gg \frac{1}{\tau} \to |g(j\omega)| = \downarrow 20\ \mathrm{dB/dec}$

فرکانس گوشه $\quad \omega = 1/\tau \Rightarrow 20\log|g(j\omega)| = 20\log\frac{1}{\sqrt{2}} = -3\ \mathrm{dB}$

$\simeq -20\log\omega\tau$

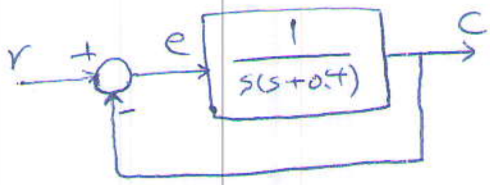
$= -20\log\tau - 20\log\omega$

هر بار ω ۱۰ برابر شود اندازهٔ $|g(j\omega)|$ به اندازهٔ 20 dB افت می‌کند.



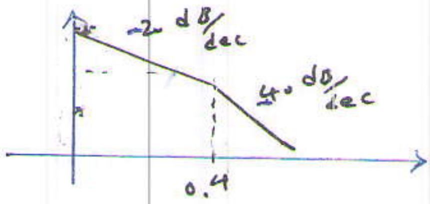
$$\angle g(j\omega) = -\tan^{-1}\omega\tau = \begin{cases} 0 & \omega \le 0.1/\tau \\ -\frac{\pi}{4}[\log_{10}(\omega\tau)+1] & \frac{0.1}{\tau} \le \omega \le \frac{10}{\tau} \\ -\pi/2 & \omega \ge \frac{10}{\tau} \end{cases}$$

مثال

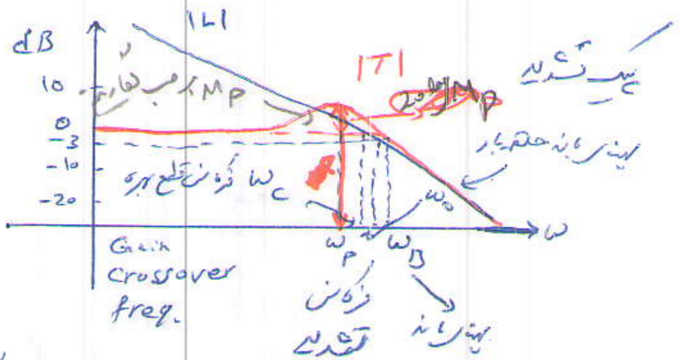


$$L(s) = \frac{1}{s(s+.4)}$$

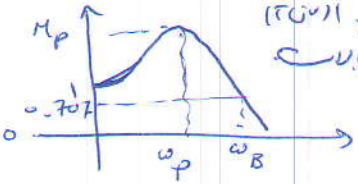
$$L(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+.4)} = \frac{2.5}{j\omega\left(\frac{j\omega}{.4}+1\right)}$$



مشخصه‌های حوزهٔ فرکانس



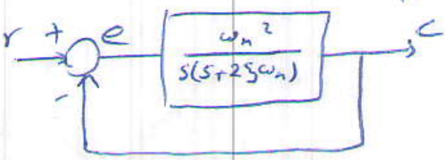
فرکانسی که |T(jω)| به ۰/۷۰۷ مقدار خود در فرکانس صفر برسد (سرعت سیستم را مشخص می‌کند (حالت گذرا))



آهنگ تغییر شیب |T(jω)| در نقطه بسیار بالاست

M_p مطلوب و پذیرفته شده حدود ۱/۱ تا ۱/۵ است

مشخصه‌ها در حوزهٔ فرکانس سیستم نمونه درجهٔ دوم



$$|T(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} = \frac{1}{\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + 1}$$

$$\omega_p: \frac{\partial |T(j\omega)|}{\partial \omega} = 0 \Rightarrow \omega_p = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} \qquad \zeta < .707$$

$$|T(j\omega_p)| \to M_p = \begin{cases} \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \xrightarrow{20\log} & \zeta < .707 \\ 1 \text{ or } 0\,dB & \zeta > .707 \end{cases}$$

$$\omega_B: \quad |T(j\omega)| = 0.707 \quad \text{or} \quad 20\log|T(j\omega)| = -3\,dB$$

$$\Rightarrow \omega_B = \omega_n\left((1-2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}\right)^{1/2}$$

$\zeta \downarrow \Rightarrow M_p \uparrow$

اضافه کردن قطب به تابع انتقال حلقه بسته

~ ~ صفر ~

قطب ~ حلقه باز ~

~ ~ صفر ~

$P.O. \downarrow \to t_r \uparrow \quad BW \downarrow$

$P.O. \uparrow \to t_r \downarrow \quad BW \uparrow$

$P.O. \uparrow \quad t_r \uparrow \quad BW \downarrow$ → پایداری سیستم کمتر می‌شود

$P.O. \uparrow\downarrow \quad t_r \downarrow \quad BW \uparrow$ →

$(1+Ts)\,G(s)$

اگر T خیلی کوچک باشد پهنای باند را کم افزایش دهد

سیستم کنترل

معیار پایداری نایکویست

معیار نایکویست بر اساس اصل آرگومان بنا شده است.

اصل آرگومان: فرض کنید (s)Δ تابعی گویا است که تعداد معینی قطب و صفر دارد. فرض کنید مسیر بسته دلخواه Γ_s در صفحه s طوری انتخاب شود که مسیر از هیچ یک از قطبها یا صفرهای (s)Δ نگذرد. در این صورت نگاشت متناظر آن در صفحه (s)Δ به اندازه تفاضل تعداد صفرها و تعداد قطبهای (s)Δ که توسط منحنی Γ_s در بر گرفته می‌شود، مبدأ را دور می‌زند.

(~~جهت عقربه‌های ساعت را مثبت در نظر می‌گیریم~~)

جهت مثبت هم جهت Γ_s است.

$$N = Z - P$$

$$M(s) = \frac{GH(s)}{1+GH(s)}$$

$GH(s): \rightarrow$ Z_0 صفرهای سمت راست حلقه باز ؛ P_0 قطبهای ~ ~

$N_0 = Z_0 - P_0$ تعداد دور زدنهای مبدأ

$1+GH(s)$: Z_{-1} قطبهای سمت راست حلقه بسته

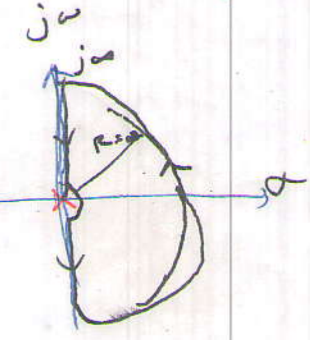
$P_{-1} = P_0$ قطبهای سمت راست حلقه باز

$N_{-1} = Z_{-1} - P_{-1}$ تعداد دور زدنهای $(-1,0)$

شرط پایداری $Z_{-1} = 0$

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+a)}$$

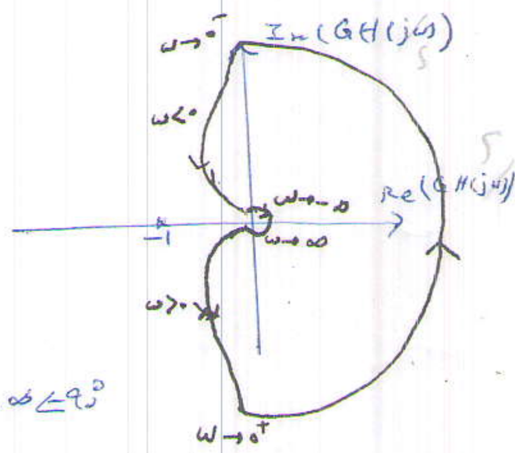
حل :



$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+a)} = \frac{K(-\omega^2 - ja\omega)}{\omega^4 + a^2\omega^2}$$

$S = R\angle\frac{\pi}{2} \rightarrow G(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{s^2} = 0\angle -180°$

$S = \varepsilon\angle\frac{\pi}{2} \rightarrow G(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{\varepsilon\angle\frac{\pi}{2} a} = \infty\angle -90°$



$P_0 = 0 = P_{-1}$

$Z_0 = 0$ $\Rightarrow Z_{-1} = 0 \rightarrow$ سیستم پایدار است

$N_0 = 0$ $Z_{-1} = 0$

مثال: پایداری سیستم زیر را بر اساس نایکویست بررسی کنید.

ω	0	5	7.07	10
F(jω)	∞∠-90	.05∠-162	.5∠-180	.24∠-19..

$$1 + \frac{375K}{\underbrace{s(s+5)(s+10)}_{F(s)}} = 0$$

$$F(s) = \frac{375}{s(s+5)(s+10)}$$

① $s = \varepsilon\angle 0 \rightarrow F(s) = \frac{375}{\varepsilon\times 5\times 10} = \infty\angle 0$

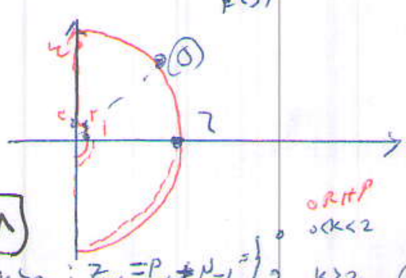
② $F(s) = \infty\angle -45$ $\quad s = \varepsilon\angle 45$

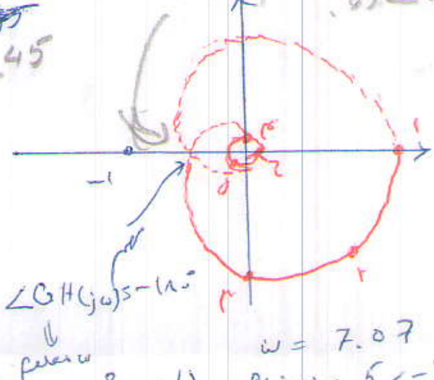
③ $s = \varepsilon\angle 90 \rightarrow F(s) = \infty\angle -90$

④ $s = \infty\angle 90 \rightarrow F(s) = \frac{375}{(\infty\angle 90)^3} = \varepsilon\angle -270$

⑤ $F(s) = \frac{375}{(\infty\angle 45)^3} = \varepsilon\angle -135$

⑥ $F(s) = \frac{375}{(\infty\angle 0)^3} = \varepsilon\angle 0$





$\angle GH(j\omega) = -180°$

(از روی رابطه می‌توان ω معلوم را بدست آورد)

$\omega = 7.07$

$F(j\omega) = .5\angle -180$

$\rightarrow K > 0$; $Z_{-1} = P_{-1} + N_{-1} = \begin{cases} 0 & 0 < K < 2 \quad 0\,RHP \\ 2 & K > 2 \quad 2\,RHP \end{cases}$

$K < 0$; $Z_{-1} - P_{-1} = N_1 \Rightarrow Z_{-1} = N_1 + P_{-1} = 1 + 0 = 1$ $\quad 1\,RHP$

تابع حداقل فاز

اگر تابع انتقال سیستم هیچ قطب و صفری سمت راست یا روی محور موهومی نداشته باشد.

$$f(s)=\frac{\prod_{i=1}^{n_z}(s+z_i)}{s^{T_y}\prod_{j=1}^{n_p}(s+p_j)}$$

$z_i, p_i > 0$

T_y : system's type

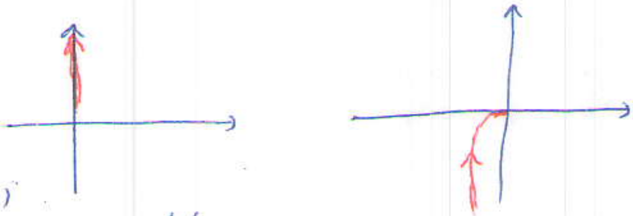
$f(s)$: minimum phase $\Rightarrow Z_0=P_0=P_{-1}=0$

$k>0,\quad Z_{-1}=N_{-1}=\frac{2(90T_y+\varphi_{-1})}{360}$

$k<0,\quad Z_{-1}=N_1=\frac{2(90T_y+\varphi_1)}{360}$

φ_{-1} : زاویه عکس ساعتگرد حول ۱-

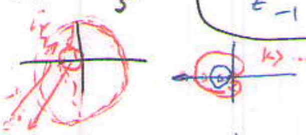
مثال $f(s)=\frac{40}{s(s+25)}$



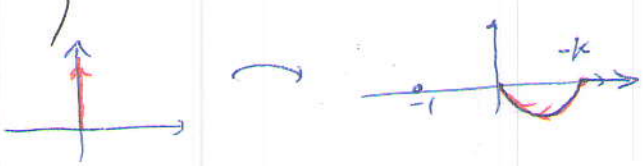
برای $k>0$: $Z_{-1}=\frac{2(90-90)}{360}=0$

$Z_{-1}=N_1=\frac{2(90+90)}{360}=1$ 1 RHP $\Rightarrow$ unstable $k<0$

$f(s)=\frac{(s+a)(s+b)}{s^3}$



$f(s)=\frac{1}{1+\tau s}$

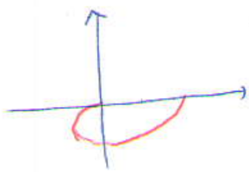


$k>0 \to Z_{-1}=\frac{2(0+0)}{360}=0$ NO RHP ROOT

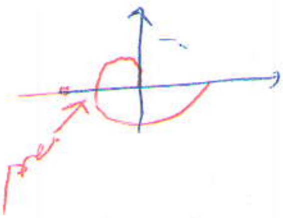
$k<0 \quad Z_{-1}=\frac{\varphi_1}{180}=\begin{cases}\frac{180}{180}=1 & 1\text{ RHP } k<-1\\ \frac{0}{180}=0 & -1<k<0 \text{ NO RHP}\end{cases}$

اضافه کردن قطب غیر صفر سیستم

$f(s)=\frac{1}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$

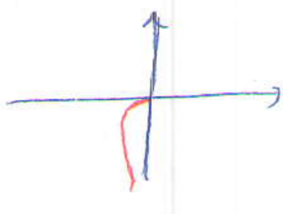


$f(s)=\frac{1}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)(1+\tau_3 s)}$

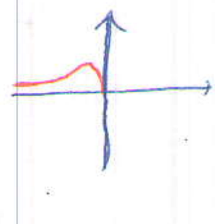


اضافه کردن نوع سیستم (قطب در مبدا)

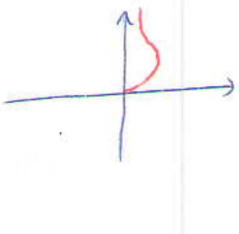
$f(s)=\frac{1}{s(1+\tau s)}$



$f(s)=\frac{1}{s^2(1+\tau s)}$

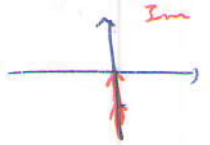


$f(s)=\frac{1}{s^3(1+\tau s)}$



$f(s)\,e^{-T_d s}$ تاخیر زمانی

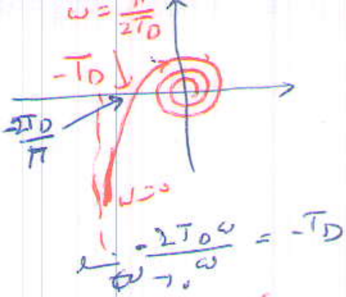
$GH(s) = \frac{1}{s} \rightarrow$



$\rightarrow GH(s) = \frac{e^{-T_D s}}{s}$

در هر فرکانس یک تأخیر فاز ایجاد می‌کند

$\angle GH(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - \omega T_D \quad \omega > 0$

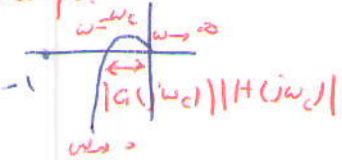


پایداری نسبی

حاشیه بهره

Gain margin

$\angle GH(j\omega_c) = -180^\circ \leftarrow$ برحم انتقال فاز



برای سیستم‌های مینیمم فاز تعریف می‌شود.

تعریف: حاشیه بهره مقداری از بهره برحسب dB است که می‌تواند تا قبل از رسیدن سیستم حلقه بسته به حالت ناپایداری افزایش یابد.

$$G.M. = 20\log_{10} \frac{1}{|GH(j\omega_c)|} \ dB$$

حالت‌های مختلف

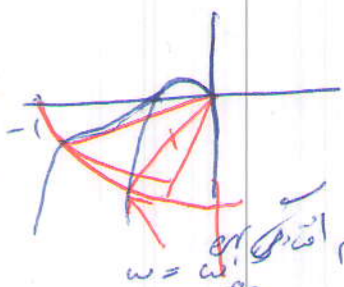
۱- منحنی $GH(j\omega)$ محور حقیقی منفی را قطع نکند $\leftarrow G.M. = \infty$

۲- " " " را بین ۰ و ۱- قطع کند $G.M > 0 \ dB$

۳- " " " را در نقطه (۰ و ۱-) قطع کند. $G.M = 0$

۴- " " نقطه (۰ و ۱-) را قطع کند. $G.M < 0 \ dB \ , \ |GH(j\omega_c)| > 1$

حاشیه فاز: زاویه‌ای برحسب درجه است که منحنی $G(j\omega)H(j\omega)$ باید به اندازه آن حول مبدأ دوران کند تا نقطه برحم فاز واحد بهره حاصل بر روی از نقطه (۰ و ۱-) بگذرد.



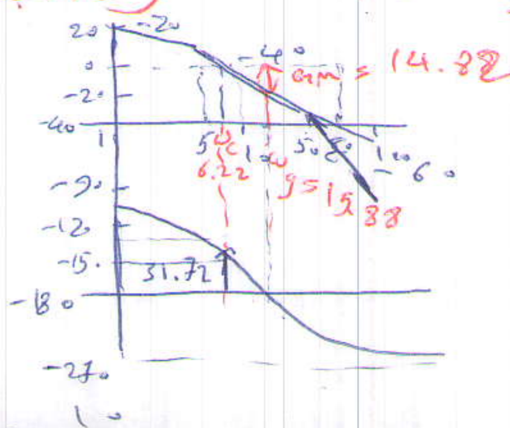
$|GH(j\omega_g)| = 1$ برحم انتقال بهره $\omega = \omega_g$

$$P.M. = \angle GH(j\omega_g) + 180^\circ$$

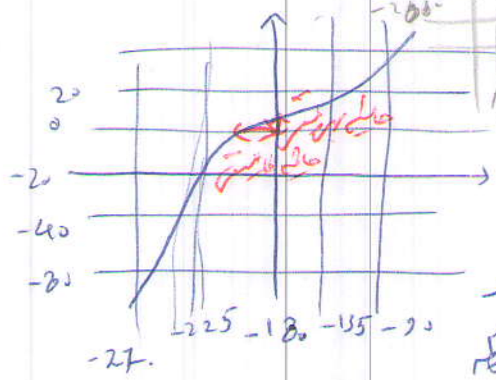
تعیین حاشیه بهره و فاز از روی نمودار بود.

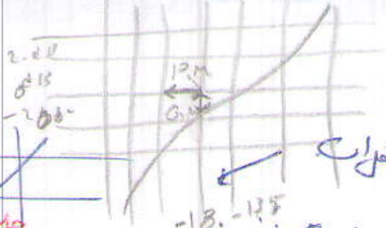
$$G.M. = -|GH(j\omega_c)| \ dB$$

$$P.M. = +180^\circ + \angle GH(j\omega_g)$$



$$G(s) = \frac{10}{s(1+0.2s)(1+0.02s)}$$





نمودار نیکولز

مشخص M_p، ω_p و BW از روی نمودار بود مشکل است

رسم با تغییر بهره بالا و پایین منحنی را جابجا می کنیم

مکان هندسی M ثابت

فرض کنید

$$M(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}$$

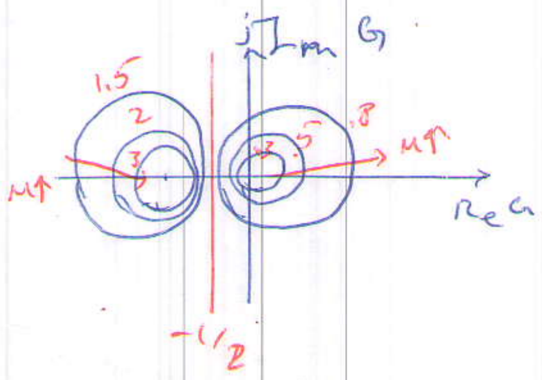
$$G(j\omega)=Re\,G+j\,Im\,G=x+jy$$

$$|M(j\omega)|=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(1+x)^2+y^2}}$$

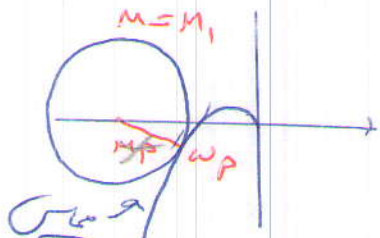
$$\Rightarrow M^2[(1+x)^2+y^2]=x^2+y^2 \Rightarrow x^2+y^2-\frac{2M^2}{1-M^2}x+\left(\frac{M^2}{1-M^2}\right)^2=\frac{M^2}{1-M^2}+\left(\frac{M^2}{1-M^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{M}{1-M^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{M}{1-M^2}\right)^2$$

دایره به مرکز $x=\frac{M^2}{1-M^2}$، $y=0$ و شعاع $r=\left|\frac{M}{1-M^2}\right|$



به ازای $M=1$ رابطه یک خط است $x=-\frac{1}{2}$



M_p از روی دایره مماس بدست می آید.

پهنای باند سیستم حلقه بسته از روی محل تقاطع منحنی $G(j\omega)$ و دایره $M=.707$ بدست می آید

مکان هندسی فاز ثابت

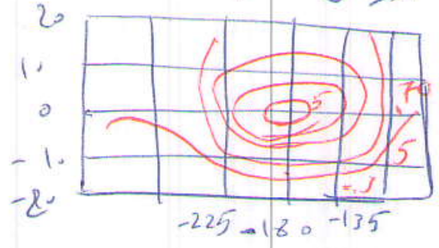
$$\phi_m(j\omega)=\angle M(j\omega)=tg^{-1}\frac{x}{y}-tg^{-1}\frac{y}{1+x}$$

$$N=tg\,\phi_m=\frac{y}{x^2+x+y}\Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2N}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4N^2}$$

دایره به مرکز $(x,y)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2N}\right)$ و شعاع $r=\left(\frac{N^2+1}{4N^2}\right)^{1/2}$

نمودار نیکولز - مکانهای M ثابت و N ثابت

عیب عمده نمودار مختصات قطبی آن است که اصلاح سیستم که هر تغییر، نمودار تغییر شکل می دهد.



M دایره ای شکل

MP حداکثر مماس بر M ثابت و فرکانس تشدید

$M = .707 \rightarrow$ پهنای باند محاسبه

— اگر فیدبک واحد نباشد

$$M(s) = \frac{G}{1+GH}$$

$$P(s) = \frac{GH}{1+GH} \qquad |M(j\omega)| = \frac{|P(j\omega)|}{|H(j\omega)|}$$

$$\Phi_m(j\omega) = \angle M(j\omega) = \angle P(j\omega) - \angle H(j\omega)$$

بررسی حساسیت در حوزه فرکانس

$$M(s) = \frac{G}{1+G(s)} \qquad S_G^M(s) = \frac{dM/M}{dG/G} = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{G^{-1}(s)}{1+G^{-1}(s)}$$

(برای طراحی جبران ساز مفید است)

کافیست که نمودار G^{-1} در صفحه نیکولز رسم شود

اندازه و فاز G قرینه می شوند در نمودار نیکولز

dB

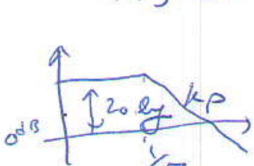
یافتن K_p و K_v و K_a از روی نمودار بد

در نمودار بد بیش بخش فرکانس پایین نوع سیستم را بیان وجود دارد

۱- نوع صفر

$$G_0(j\omega) = \frac{K_p}{1+j\omega\tau}$$

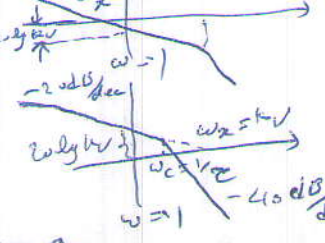
$\omega_c = \frac{1}{\tau}$ فرکانس گوشه (شکست)



$K_p > 1$

۲- نوع یک

$$G_1(j\omega) = \frac{K_v}{j\omega(1+j\omega\tau)}$$



$\frac{1}{\tau} > K_v$

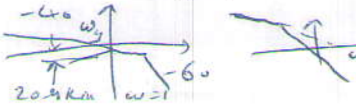
$\omega_c = \frac{1}{\tau}$ فرکانس گوشه

در $K_v = \omega$ بهره یک می شود ($\frac{1}{\tau}$ خیلی بزرگ)

$\downarrow$ dB = 0

۳- نوع ۲

$$G(j\omega) = \frac{K_a}{(j\omega)^2(1+j\omega\tau)}$$

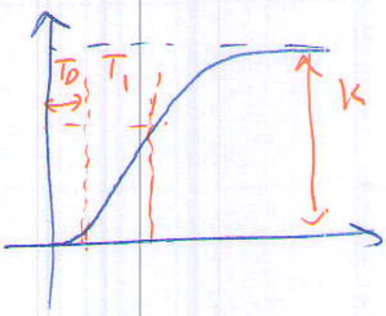


$$A_{dB} \cong 20\log\frac{K_a}{\omega^2} = 20\log K_a - 20\log\omega^2$$

$$K_a = \omega_y^2$$

(از نقطه برخورد) پایین

طراحی زیگلر نیکولز از حالت حلقه باز



$$G(S) = \frac{k e^{-ST_D}}{1 + ST_1}$$

	k_p	k_I	k_D
P	$\frac{T_1}{kT_D}$		
PI	$\frac{0.9\,T_1}{kT_D}$	$\frac{0.27\,T_1}{kT_D^2}$	
PID	$\frac{1.2\,T_1}{kT_D}$	$\frac{0.6\,T_1}{kT_D^2}$	$\frac{0.6\,T_1}{k}$

طراحی زیگلر-نیکولز از روش نوسانی (حلقه بسته)

- سیستم را با کنترل تناسبی بهره کم ببندید
- بهره را به تدریج زیاد کنید تا سیستم شروع به نوسان کند.
- بهره بحرانی K_c و پریود نوسانات T را یادداشت کنید
- مقادیر k_p ، k_I و k_D را از جدول زیر استخراج کنید.

	k_p	k_p	k_D
P	$0.5\,K_c$		
PI	$0.45\,K_c$	$0.54\,\frac{K_c}{T}$	
PID	$0.6\,K_c$	$1.2\,\frac{K_c}{T}$	$0.075\,K_c T$