فصل اول : معادلات دیفرانسیل و مفاهیم اولیه

۱-۱- مفاهیم اصلی

تعریف معادله دیفرانسیل : معادله دیفرانسیل، معادله ای برحسب یک تابع مجهول و مشتقات آن است

$$\left(f\left(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)}\right)=0\right)$$

برای مثال :

$$y'=0 \qquad y'=x\sin x \qquad y''+y'=\sin x$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}-3\frac{dz}{dt}=t-1$$ (مشتق z نسبت به t)

$$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}-6y=x^2$$ (مشتق y نسبت به x)

تعریف : اگر در معادله دیفرانسیل مشتق گیری برحسب یک متغیر مستقل باشد آن را معادله دیفرانسیل معمولی (عادی) و اگر مشتق گیری برحسب دو یا چند متغیر مستقل باشد،آن را معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می نامیم. معادلات دیفرانسیل معمولی را ODE (Ordinary Differential Equation) و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را PDE (Partial Differential Equation) می نامیم.

$$y'+y=e^x \qquad (ODE)$$

$$u_{xx}+u_{yy}=x \qquad (PDE)$$

۱-۱-۱- مرتبه معادله دیفرانسیل :

بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله دیفرانسیل را گویند.

$y'+y=\sin x$ مرتبه اول

$yy'+\cos y=\sin x$ مرتبه اول

$(y'')^5+y''-y=\sin x$ معادله مرتبه دوم

$y^{(5)}-y''-x\sin y=0$ معادله مرتبه پنجم

۱-۱-۲- درجه معادله دیفرانسیل :

هرگاه معادله دیفرانسیل را بتوان برحسب مشتقات بصورت یک چند جمله ای نوشت، آنگاه بالاترین توان مشتق را در درجه معادله دیفرانسیل گویند.

$(y')^3+3xyy'=\sin x$ مرتبه ۱ – درجه ۳

$y''+3(y')^2+y=e^x$ مرتبه ۲ – درجه ۱

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$(y''')^2+(y'')^5+\frac{y}{x+1}=e^{-x}$$
مرتبه ۳ – درجه ۲

نکته : در صورتی که معادله دارای توان کسری باشد پس از آن که توان کسری متغیرهای موجود حذف شدند، درجه یک معادله دیفرانسیل تعیین می شود.

$$\sqrt[3]{(y'')^2}=\left[1+(y')^2\right]^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{توان } 6} (y'')^4=\left(1+(y')^2\right)^3$$

مرتبه ۲ ، درجه ۴

نکته : معادله دیفرانسیل می تواند بدون درجه نیز باشد مانند :

$$\sin\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dy}{dx}+x-2$$

تعریف : هر معادله بصورت

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x)$$

را معادله دیفرانسیل خطی می گوییم، در این نوع معادلات ضرایب متغیر وابسته و مشتقات تنها تابعی از x است و توان مشتقات و خود متغیر وابسته برابر یک است. معادله ای که خطی نباشد را غیر خطی می نامند.

$6y''+3y'=y$ (با ضرایب ثابت) معادله خطی

$(x-1)y'+2y=\sin x$ (با ضرایب غیر ثابت) معادله خطی

$yy''+y'=0$ معادله غیر خطی

$xy''+y^2=x$ معادله غیر خطی

۱-۱-۲-۱- تمرین : مرتبه و درجه معادلات دیفرانسیل زیر را بیان کنید.

1) $y^{(4)}-y=\tan x$
2) $y^{(3)}=\sqrt{y'}$
3) $y''+ty'-\sin\sqrt{y}=t-1$
4) $\sqrt{y''}=3y'+x$

۱-۱-۳- جواب معادله دیفرانسیل

تعریف : $y=f(x)$ را جواب معادله دیفرانسیل $f\left(x,y,y',\cdots,y^{(n)}\right)=0$ می گوییم، هرگاه در معادله صدق کند.

مثال (۱) آیا $y=e^{-2x}$ یک جواب معادله $y''+y'-2y=0$ است ؟

$$y=e^{-2x} \rightarrow y'=-2e^{-2x} \rightarrow y''=4e^{-2x}$$

جایگذاری در معادله $\rightarrow 4e^{-2x}-2e^{-2x}-2e^{-2x}=0 \rightarrow 0=0$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

صدق کرد پس جواب است.

مثال (۲) نشان دهید $y = x$ جوابی از معادله $x^2y'' + xy' - y = 0$ است.

$$y = x \quad \to \quad y' = 1 \quad \to \quad y'' = 0$$

صدق در معادله $\to \quad x^2(0) + x(1) - (x) = 0 \quad \to \quad 0 = 0$

۱-۱-۳-۱- تمرین : نشان دهید که جواب های داده شده در معادله دیفرانسیل صدق می کنند.

1) $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0 \qquad , \quad y = ax^2 + bx$

2) $y + y^3 + y^3y' = 0 \qquad , \quad x + y = \tan^{-1}(y)$

3) $x\,dx - y^2dy = 0 \qquad , \quad y^3 = \frac{3}{2}x^2 + 3c$

4) $(y\cos y - \sin y + x)y' = y \qquad , \quad y + \sin x = x$

از حساب دیفرانسیل و انتگرال می دانیم که هرگاه $y' = f(x)$ ، آنگاه هر یک از توابع $y = \int f(x)dx + 1$ و $y = \int f(x)dx + 2$ و ... به طور کلی $y = \int f(x)dx + c$ جواب معادله اند که به آن جواب عمومی می گوییم. پس یک معادله دیفرانسیل ممکن است بیش از یک جواب و حتی بی نهایت جواب داشته باشد. در حالت کلی جواب معادله دیفرانسیل را می توانیم به سه دسته جواب عمومی، جواب خصوصی، جواب غیر عادی تقسیم بندی کنیم.

جواب عمومی : هرگاه جواب معادله دیفرانسیل توسط رابطه ای با ثابت های دلخواه بیان شود، را گویند.

جواب خصوصی : جوابی را که از جواب عمومی با محاسبه پارامتر دلخواه تحت شرایط داده شده به دست می آید را گویند. (جواب خصوصی جوابی است بدون پارامتر c).

جواب غیر عادی (منفرد) : جوابی که تحت هیچ شرایط اولیه ای، از جواب عمومی حاصل نشود، و منحنی آن بر تمام منحنی های جواب عمومی مماس باشد را گوییم.

توجه : اگر معادله دیفرانسیل از مرتبه n باشد، جواب عمومی شامل n ثابت دلخواه خواهد بود.

مثال (۳) هر یک از توابع $y = x^2 + 3x + 1$ ، $y = x^2 + 3x + 6$ و $y = x^2 + 3x - 3$ جوابی از معادله دیفرانسیل $y' = 2x + 3$ می باشند.

به طورکلی $y = x^2 + 3x + c$ (c ثابت دلخواه) را جواب عمومی معادله دیفرانسیل می نامیم.

حال اگر جواب عمومی معادله از نقطه $(0,2)$ عبور کند یعنی $y(0) = 2$ خواهیم داشت :

$$2 = 0^2 + 3(0) + c \quad \to \quad c = 2$$

حال باجایگذاری $c = 2$ در جواب عمومی , جواب خصوصی حاصل می شود.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$y = x^2 + 3x + 2$ (جواب خصوصی)

مثال (۴) در معادله دیفرانسیل $y' = 2\sqrt{y}$ که جواب عمومی آن به فرم $\sqrt{y} = x + c$ است جواب $y = 0$ (که جوابی از معادله است) از جواب عمومی به دست نمی آید، لذا $y = 0$ جواب غیر عادی معادله می باشد.

۱-۲- تشکیل معادله دیفرانسیل

فرض می کنیم جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل داده شده باشد و بخواهیم معادله دیفرانسیل متناظر با آن را بیابیم. از آنجایی که تعداد پارامترهای جواب عمومی با مرتبه معادله برابر است، کافی است به تعداد پارامترهای آن از جواب عمومی مشتق بگیریم و سپس پارامترها را بین جواب داده شده و مشتقات آن حذف می کنیم.

مثال (۵) معادله دیفرانسیل دسته منحنی های زیر را تشکیل دهید.

1) $x^2 - y^2 = c^2 \rightarrow 2x - 2yy' = 0 \rightarrow x = yy'$

2) $y = \dfrac{1+cx}{1-cx} \rightarrow y - cxy = 1 + cx \rightarrow y - 1 = c(1+y)x \rightarrow c = \dfrac{y-1}{x(1+y)}$

$$y' = \frac{c(1-cx) + c(1+cx)}{(1-cx)^2}$$

$\rightarrow y' = \dfrac{2c}{(1-cx)^2} \rightarrow$ مقدار c را قرار می دهیم

$$\rightarrow y' = \frac{2\dfrac{y-1}{x(1+y)}}{\left(1 - \dfrac{y-1}{x(1+y)}x\right)^2} \rightarrow y' = \frac{\dfrac{2(y-1)}{x(1+y)}}{\left(\dfrac{1+y-y+1}{1+y}\right)^2}$$

$\rightarrow y' = \dfrac{\dfrac{2(y-1)}{x(1+y)}}{\dfrac{4}{(1+y)^2}} \rightarrow y' = \dfrac{y^2-1}{2x}$ معادله دیفرانسیل

3) $y = ce^{-x^2} \rightarrow c = \dfrac{y}{e^{-x^2}} \rightarrow y' = -2xce^{-x^2}$

مقدار c را قرار می دهیم $\rightarrow y' = -2x\dfrac{y}{e^{-x^2}}e^{-x^2} \rightarrow y' = -2xy$

4) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x} \rightarrow \begin{cases} y = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x} & (1) \\ y' = 2c_1e^{2x} - 3c_2e^{-3x} & (2) \\ y'' = 4c_1e^{2x} + 9c_2e^{-3x} & (3) \end{cases}$

ابتدا از رابطه (۲) و (۳) c_1 و c_2 را یافته و در رابطه (۱) قرار می دهیم تا معادله دیفرانسیل حاصل شود.

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

رابطه (۲) را در عدد ۳ ضرب کرده و با رابطه (۳) جمع می کنیم.

$$\begin{cases} 3y' = 6c_1e^{2x} - 9c_2e^{-3x} \\ y'' = 4c_1e^{2x} + 9c_2e^{-3x} \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می کنیم}} y'' + 3y' = 10c_1e^{2x}$$

$$c_1 = \frac{y'' + 3y'}{10e^{2x}} \xrightarrow{\text{قرار در رابطه 2}} y' = 2\left(\frac{y'' + 3y'}{10e^{2x}}\right)e^{2x} - 3c_2e^{-3x}$$

$$\rightarrow \quad y' = \frac{1}{5}y'' + \frac{3}{5}y' - 3c_2e^{-3x} \quad \rightarrow \quad c_2 = \frac{y'' - 2y'}{15e^{-3x}}$$

c_1 و c_2 را در رابطه (۱) قرار می دهیم :

$$y = \frac{y'' + 3y'}{10e^{2x}}e^{2x} + \frac{y'' - 2y'}{15e^{-3x}}e^{-3x}$$

$$y = \frac{y'' + 3y'}{10} + \frac{y'' - 2y'}{15} \quad \rightarrow \quad y = \frac{3y'' + 9y' + 2y'' - 4y'}{30}$$

$$5y'' + 5y' - 30y = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{y'' + y' - 6y = 0}}$$

5) $y = c_1 \sin bx + c_2 \cos bx \xrightarrow{(1)} y' = c_1 b \cos bx - c_2 b \sin bx$

$$\rightarrow \quad y'' = -c_1 b^2 \sin bx - c_2 b^2 \cos bx$$

$$\rightarrow \quad y'' = -b^2(c_1 \sin bx + c_2 \cos bx) \quad \rightarrow \quad \frac{y''}{-b^2} = c_1 \sin bx + c_2 \cos bx \qquad (2)$$

$$(1) = (2) \quad \rightarrow \quad y = \frac{y''}{-b^2} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{y'' + b^2 y = 0}}$$

6) $y = c_1 x + c_2 x^2 \quad (1) \quad \rightarrow \quad y' = c_1 + 2c_2 x \quad \rightarrow \quad y'' = 2c_2 \quad \rightarrow \quad c_2 = \frac{y''}{2} \quad (2)$

$$\begin{cases} y' = c_1 + 2c_2 x \\ c_2 = \frac{y''}{2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad c_1 = y' - xy'' \qquad (3)$$

رابطه (۲) و (۳) را در رابطه (۱) قرار می دهیم.

$$y = (y' - xy'')x + \left(\frac{y''}{2}\right)x^2 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{x^2y'' - 2xy' + 2y = 0}}$$

مثال (۶) معادله دیفرانسیلی را بیابید که جواب عمومی آن خانواده خطوط راستی باشد که بر دایره $x^2 + y^2 = c^2$ مماس باشد.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

حل : ابتدا از طریق دایره شیب خط های مماس را می یابیم.

$$x^2+y^2=c^2 \;\rightarrow\; 2x+2yy'=0 \;\rightarrow\; y'=\frac{-x}{y} \qquad \text{(شیب)}$$

$$\text{(خط راست)}\quad y=mx+b \;\rightarrow\; y=-\frac{x}{y}(x)+b \;\rightarrow\; y=\frac{-x^2}{y}+b$$

از معادله خط مماس مشتق می گیریم :

$$\rightarrow\; y'=\frac{-2xy+x^2y'}{y^2} \;\rightarrow\; y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$$

مثال (۷) معادله دیفرانسیلی را پیدا کنید که تحت این شرایط که جواب آن خانواده دوایری باشد که از مبدا عبور کنند و مرکز آنها روی خط $y=x$ قرار داشته باشد.

$$\text{مرکز دایره}=(c,c) \qquad \text{شعاع دایره}=\sqrt{2}\,c$$

$$(x-c)^2+(y-c)^2=2c^2 \;\longrightarrow\; x^2+y^2=2c(x+y) \quad (1)$$

$$\text{مشتق} \;\rightarrow\; 2x+2yy'=2c(1+y') \quad (2)$$

از رابطه (۱) c را یافته در رابطه (۲) قرار می دهیم.

$$\text{از رابطه (۱)} \;\rightarrow\; c=\frac{x^2+y^2}{2(x+y)}= \xrightarrow{\text{جای گذاری در 2}} 2x+2yy'=2\frac{x^2+y^2}{2(x+y)}(1+y')$$

$$\rightarrow\; 2x+2yy'=\frac{x^2+y^2}{x+y}(1+y')$$

۱-۲-۱- تمرین :

۱- معادله دیفرانسیل همه دوایری که مرکز آنها روی محور x ها باشد را بیابید.

۲- معادله دیفرانسیل همه دوایری در صفحه به شعاع ۱ (راهنمایی از فرمول کاپا استفاده کنید).

۳- معادله دیفرانسیل همه سهمی هایی که محور آنها محور x ها و فاصله راس تا کانون برابر a باشد.

۴- معادله دیفرانسیل دسته منحنی $y=\ln[\cos(x-c_1)]+c_2$ را بیابید.

۵- معادله دیفرانسیلی را بیابید که جواب عمومی آن خانواده دایره هایی به مرکز (c_1,c_2) و شعاع معین (r) باشد.

۶- معادله دیفرانسیل دسته منحنی های زیر را بیابید.

1) $y=\dfrac{c}{1+cx}$

2) $y=\ln(x^2+3c)$

3) $y=ce^{cx}$

4) $y=c_1e^x+c_2e^{-3x}$

5) $y=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا

۷- معادله دیفرانسیل دسته منحنی های زیر را بیابید.

1) $y=e^{x}(c_1 \sin x+c_2 \cos x)$

2) $y=c_1 e^{c_2 x}$

3) $y=c_1+c_2 x^2+c_3 x^3$

4) $(x-c)^2+(y-c)^2=2c^2$

۸- معادله دیفرانسیلی را بیابید که جواب آن خانواده خطوط راستی باشد که عرض از مبدا آنها تابعی از شیب آن خطوط باشند.

۹- معادله دیفرانسیلی را بیابید که جواب عمومی آن خطوط، خطوط راستی باشد که بر سهمی $y^2=2x$ مماس باشد.

۱۰- به ازای چه مقداری از a ، $y=e^{ax}$ جوابی از معادله زیر است.

$$y''-y'-2y=0$$

۱۱- به ازای چه مقداری از m ، $y=x^{m}$ جوابی از معادله زیر است :

$$x^2 y''-3xy'+3y=0$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

فصل ۲ : حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

در معادله $f\left(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)}\right)=0$ هرگاه $n=1$ باشد به آن معادله دیفرانسیل مرتبه اول گویند و با $y'=f(x,y)$ یا $f(x,y,y')=0$ یا $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ نمایش می دهند. در حالت کلی تمام معادلات مرتبه اول قابل حل نیستند اما برخی از آنها قابل حل اند که در این فصل به حل آنها می پردازیم.

۲-۱- معادلات دیفرانسیل جدا شدنی (تفکیک پذیر):

هر گاه بتوانیم معادله دیفرانسیل مرتبه اول را بصورت $f(x)dx=f(y)dy$ در آوریم به آن معادله دیفرانسیل جدا شدنی گوییم (یعنی xها یک طرف تساوی و y ها طرف دیگر تساوی)، برای حل این معادله کافیست از طرفین معادله انتگرال بگیریم تا جواب عمومی آن حاصل شود.

نکته : هر گاه بتوانیم به کمک فاکتورگیری، اتحادها، تجزیه و ... توابع برحسب x و توابع برحسب y را بصورت ضربی دربیاوریم و تفکیک کنیم معادله از نوع جدایی پذیر است.

مثال (۱) جواب خصوصی معادله $y(0)=e$ و $y'=2(x+1)y$ را بیابید.

$$\frac{dy}{dx}=2(x+1)y \rightarrow \frac{dy}{y}=2(x+1)dx \xrightarrow{\int}$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int 2(x+1)dx \rightarrow \ln|y|=x^2+2x+c \rightarrow \text{جواب عمومی}$$

$$\text{حال}\quad y(0)=e \rightarrow \ln e=0+2(0)+c \rightarrow c=1$$

$$\ln|y|=x^2+2x+1 \rightarrow \ln|y|=(x+1)^2 \rightarrow y=e^{(x+1)^2}$$

مثال (۲) جواب عمومی معادلات زیر را بیابید.

$$1)\ (1-x)dy+(2-y)dx=0 \rightarrow \text{جدایی پذیر}$$

$$(1-x)dy=-(2-y)dx \rightarrow \int\frac{dy}{2-y}=\int-\frac{dx}{1-x}$$

$$\rightarrow -\ln|2-y|=\ln|1-x|+\ln c \rightarrow \ln(2-y)^{-1}=\ln c(1-x) \rightarrow \frac{1}{2-y}=c(1-x)$$

$$2)\ (1-x^2)(1-y)dx=xy(1+y)dy \rightarrow \text{جدایی پذیر}$$

$$\rightarrow \int\frac{(1-x^2)dx}{x}=\int\frac{y(1+y)}{1-y}dy \xrightarrow{\text{تقسیم}} \int\frac{dx}{x}-\int x\,dx=\int(-y-2+\frac{2}{1-y})dy$$

$$\rightarrow \ln x-\frac{x^2}{2}+c=-\frac{y^2}{2}-2y-2\ln|1-y|$$

$$3)\ y'=1+x^2+y^2+y^2x^2 \rightarrow y'=(1+x^2)+y^2(1+x^2)$$

$$\rightarrow y'=(1+x^2)(1+y^2)$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا