

آزمون نهایی ریاضی فیزیک ۳

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده فیزیک

مدت: دو ساعت

۱۳۹۹/۴/۲۱

توجه - دانشجویان عزیز لطفاً پس از اتمام امتحان بلافاصله پاسخ های خود را به ایمیل من به نشانی زیر ارسال دارید:

mrsarkardei@yahoo.com

۱ - الف - معادله اشتورم - لیوویل به صورت زیر نوشته می شود:

$$Lu(x) + \lambda w(x)u(x) = 0$$

که در آن $w(x)$ تابع چگالی و $L(x)$ اپراتوری هرمیتی است. یک مثال فیزیکی بیاورید که با این معادله سازگار باشد. اجزاء معادله را مشخص و نام ببرید.

ب - چند کاربرد مهم توابع بسل را در ریاضی - فیزیک بنویسید.

۲ - الف - از رابطه $\Gamma(n+1) = n! = \int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx$ استفاده کنید و نشان دهید که $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ است.

ب - از ویژگی $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ کمک بگیرید و رابطه دوتایی زیر را اثبات کنید:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2n) = 2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

۳ - از تعریف انتگرالی تابع بسل کمک بگیرید و نشان دهید که

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos xt}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

راهنمایی - تعریف انتگرالی تابع بسل چنین است :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta$$

۴- تابع مولد چند جمله ای های لژاندر به صورت زیر تعریف می شود:

$$g(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

از این رابطه کمک بگیرید و نتایج زیر را به دست آورید:

$$P_n(1) = 1; \quad P_n(-1) = (-1)^n; \quad P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

**

از پرسش های زیر به دو پرسش پاسخ دهید:

**

۵- تابع $\delta(x)$ دیراک را بر حسب چند جمله ای های لژاندر در بازه $(-1, 1)$ بسط دهید.

۶- معادله دیفرانسیل هرمیت را از راه سری حل کنید:

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0$$

نشان دهید که با انتخاب مناسب α یکی از دو جواب به چند جمله ای تبدیل می شود.

۷- از تبدیلات انتگرالی مهم، تبدیل فوریه به صورت زیر تعریف می شود:

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx} dx$$

به کمک این رابطه و بر اساس شیوه استقراء، رابطه زیر را به دست آورید:

$$g_n(k) = (-ik)^n g(k)$$

منظور از $g_n(k)$ تبدیل فوریه مشتق n ام تابع $g(k)$ است.

۸- تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ که با $L(f(t))$ نمایش می دهیم از رابطه زیر تعریف می شود:

$$F(p) = L(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

اکنون درستی روابط زیر را تحقیق کنید:

$$L\{\cos \omega t\} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}; \quad L\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

