

(۱) حاصل انتگرالهای زیر را بدست آورید.

$$\text{الف. } \int_0^1 \int_{\sqrt[4]{y}}^1 \frac{dx dy}{1+x^5}$$

$$\text{ب. } \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 \frac{3\sqrt{x^2+z^2}}{[1+(x^2+z^2)^{\frac{3}{2}}]^2} dx dz$$

(۲) اگر D ناحیه محدود به خطوط $x + y = 1$, $x = y = 0$, و $x + y = 2$ باشد، مقدار انتگرال $\iint_D (x - y)^2 e^{\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^3} dA$ را روی این ناحیه محاسبه کنید. (از تغییر متغیر $u = x + y$ و $v = x - y$ استفاده کنید).

(۳) جرم یک جسم سه بعدی در فضا با تابع چگالی $\Delta(x, y, z)$ محدود به ناحیه D ، به صورت $M = \iiint_D \Delta dV$ تعریف می شود. جرم جسمی با تابع چگالی $\Delta(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}$ محدود به رویه های $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ و $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ را محاسبه کنید.

(۴) از تابع $f(x, y, z) = xyz$ روی یک هشتم اول بیضیگون $x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{4} = 1$ انتگرال بگیرید. (راهنمایی: ابتدا بیضیگون را به کره تبدیل کرده سپس از دستگاه مختصات کروی یا استوانه ای استفاده کنید).

(۵) حجم حفره ایجاد شده توسط استوانه $y^2 + z^2 = 1$ درون کره $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ چقدر است؟