دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی

پاسخ سری اول تمرینات درس معادلات دیفرانسیل

۱- معادله دیفرانسیل خانواده دو پارامتری $y=\ln\cos(x-c_۱)+c_۲$ را بیابید.

$$y=\ln\cos(x-c_۱)+c_۲ \quad\to\quad y'=-\tan(x-c_۱)$$

$$\to\quad \tan y'=-x+c_۱ \quad\to\quad y''(۱+\tan^۲ y')=-۱$$

۲- معادله دیفرانسیل همه دوایر در صفحه به شعاع ۱ را بیابید.

$$(x-c_۱)^۲+(y-c_۲)^۲=۱ \quad\to\quad ۲(x-c_۱)+۲y'(y-c_۲)=۰$$

$$\to\quad y'=-\frac{x-c_۱}{y-c_۲} \quad,\quad ۱+(y')^۲=\frac{۱}{(y-c_۲)^۲}$$

$$\to\quad y''=\frac{-۱}{y-c_۲}+\frac{x-c_۱}{(y-c_۲)^۲}y' \to\quad y''=\pm(۱+(y')^۲)\sqrt{۱+(y')^۲}$$

$$\to\quad (y'')^۲=(۱+(y')^۲)^۳$$

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

۳- $$(x^۲y+xy-y)dx+(x^۲y-۲x^۲)dy=۰$$

این معادله یک معادله جدایی پذیر است. $$\frac{x^۲+x-۱}{x^۲}dx=-\frac{y-۱}{y}dy$$

$$(۱+\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۲})dx=(-۱+\frac{۱}{y})dy \quad\to\quad \int(۱+\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۲})dx=\int(-۱+\frac{۱}{y})dy$$

$$\to\quad x+\ln x+\frac{۱}{x}=-y+\ln y+c$$

۴- $$y'=\frac{y-\sqrt{x^۲+y^۲}}{x}$$

این معادله یک معادله همگن است. $$\xrightarrow{y=xu}\quad u+xu'=u-\sqrt{۱+u^۲}$$

$$x\frac{du}{dx}=-\sqrt{۱+u^۲} \quad\to\quad \frac{du}{\sqrt{۱+u^۲}}=\frac{-dx}{x} \quad\to\quad \int\frac{du}{\sqrt{۱+u^۲}}=\int\frac{-dx}{x}$$

پاسخ سری اول تمرینات درس معادلات دیفرانسیل

$$\rightarrow \quad \ln(u+\sqrt{1+u^2})=\ln\frac{c}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{y}{x}+\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}=\frac{c}{x}$$

$$\rightarrow \quad y+\sqrt{x^2+y^2}=c$$

-۵ $$y(x+y+1)dx+x(x+3y+2)dy=0$$

$$M=y(x+y+1) \quad , \quad N=x(x+3y+2)$$
$$M_y=x+2y+1 \quad , N_x=2x+3y+2$$

$$\frac{N_x-M_y}{M}=\frac{x+y+1}{y(x+y+1)}=\frac{1}{y} \quad \rightarrow \quad \mu=e^{\int\frac{1}{y}dy}=y$$

$$y^2(x+y+1)dx+xy(x+3y+2)dy=0$$

$$f(x,y)=\int y^2(x+y+1)dx=\frac{1}{2}x^2y^2+xy^3+xy^2+h(y)$$

$$f_y=N \quad \rightarrow \quad x^2y+3xy^2+2xy+h'(y)=xy(x+3y+2)$$

$$h'(y)=0 \quad \rightarrow \quad h(y)=0 \quad \rightarrow \quad f(x,y)=\frac{1}{2}x^2y^2+xy^3+xy^2$$

$$\rightarrow \qquad xy^2(x+2y+2)=c$$

-۶ $$(x-y\ln y+y\ln x)dx+x(\ln y-\ln x)dy=0$$

$$M=x-y\ln y+y\ln x \quad , \quad N=x(\ln y-\ln x)$$
$$M_y=-\ln y-1+\ln x \quad , \quad N_x=\ln y-\ln x-1$$

$$\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{2(\ln x-\ln y)}{x(\ln y-\ln x)}=\frac{2}{x} \quad \rightarrow \quad \mu=e^{\int\frac{-2}{x}dx}=\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{x-y\ln y+y\ln x}{x^2}dx+\frac{\ln y-\ln x}{x}dy=0$$

$$f(x,y)=\int\frac{x-y\ln y+y\ln x}{x^2}dx=\ln x+\frac{y\ln y}{x}-\frac{y\ln x}{x}-\frac{y}{x}+h(y)$$

پاسخ سری اول تمرینات درس معادلات دیفرانسیل

$$f_y = N \;\to\; \frac{\ln y}{x} + \frac{۱}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{۱}{x} + h'(y) = \frac{\ln y - \ln x}{x}$$

$$h'(y) = ۰ \;\to\; h(y) = ۰ \;\to\; f(x,y) = \ln x + \frac{y}{x}(\ln y - \ln x - ۱)$$

$$\to \qquad \ln x + \frac{y}{x}(\ln y - \ln x - ۱) = c$$

۷- $$(\sin^{۲} x - y)dx - \tan x dy = ۰$$

$$M = \sin^{۲} x - y \quad , \quad N = -\tan x \;\to\; M_y = -۱ \quad , \quad N_x = -۱ - \tan^{۲} x$$

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{\tan^{۲} x}{-\tan x} = -\tan x \quad \to \quad \mu = e^{\int (-\tan x)dx} = e^{\ln\cos x} \cos x$$

$$\cos x(\sin^{۲} x - y)dx - \sin x dy = ۰$$

$$f(x,y) = \int \cos x(\sin^{۲} x - y)dx = \frac{۱}{۳}\sin^{۳} x - y\sin x + h(y)$$

$$f_y = N \;\to\; -\sin x + h'(y) = -\sin x$$

$$h'(y) = ۰ \;\to\; h(y) = ۰ \;\to\; f(x,y) = \frac{۱}{۳}\sin^{۳} x - y\sin x$$

$$\to \qquad \sin^{۳} x - ۳y\sin x = c$$

۸- $$xy' + ۲y + (\sin x)y^{\frac{۱}{۲}} = ۰$$

این معادله یک معادله برنولی است.

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} + \frac{۲}{x}\sqrt{y} = \frac{-\sin x}{x}$$

$$\xrightarrow{u=\sqrt{y}} ۲u' + \frac{۲}{x}u = \frac{-\sin x}{x} \;\to\; u' + \frac{۱}{x}u = \frac{-\sin x}{۲x}$$

$$u = e^{-\int \frac{۱}{x}dx}\left(c + \int \frac{-\sin x}{۲x} e^{\int \frac{۱}{x}dx} dx\right) = \frac{۱}{x}\left(c + \int \frac{-\sin x}{۲} dx\right)$$

$$u = \sqrt{y} = \frac{۱}{x}\left(c + \frac{۱}{۲}\cos x\right) \qquad \to \qquad y = \frac{۱}{x^{۲}}\left(c + \frac{۱}{۲}\cos x\right)^{۲}$$

پاسخ سری اول تمرینات درس معادلات دیفرانسیل

۹- $$x^{3}y'\sin y+2y=xy'$$

اگر x را تابعی از y در نظر بگیریم یک معادله خطی مرتبه اول است.

$$x^{3}\sin y+2yx'=x$$

$$\rightarrow\quad x'-\frac{1}{2y}x=-\frac{x^{3}\sin y}{2y}\quad\rightarrow\quad \frac{x'}{x^{3}}-\frac{1}{2y}\times\frac{1}{x^{2}}=-\frac{\sin y}{2y}$$

$$\xrightarrow{u=\frac{1}{x^{2}}}\quad -\frac{u'}{2}-\frac{1}{2y}u=-\frac{\sin y}{2y}\quad\rightarrow\quad u'+\frac{1}{y}u=\frac{\sin y}{y}$$

$$u=e^{-\int\frac{1}{y}dy}\left(c+\int\frac{\sin y}{y}e^{\int\frac{1}{y}dy}dy\right)=\frac{1}{y}\left(c+\int\sin y\,dy\right)$$

$$u=\frac{1}{x^{2}}=\frac{1}{y}(c-\cos y)\qquad\rightarrow\qquad y=x^{2}(c-\cos y)$$

۱۰- برای معادله دیفرانسیل زیر عامل انتگرالسازی به فرم $\mu=x^{m}y^{n}$ بیابید.

$$(4x^{3}y^{2}+\frac{1}{x})dx+(3x^{4}y+\frac{1}{y})dy=0$$

$$M=4x^{m+3}y^{n+2}+x^{m-1}y^{n}\qquad,\qquad N=3x^{m+4}y^{n+1}+x^{m}y^{n-1}$$

$$M_{y}=4(n+2)x^{m+3}y^{n+1}+nx^{m-1}y^{n-1}\quad,\quad N_{x}=3(m+4)x^{m+3}y^{n+1}+mx^{m-1}y^{n-1}$$

$$M_{y}=N_{x}\quad\rightarrow\quad 4(n+2)=3(m+4)\ ,\quad n=m\quad\rightarrow\quad m=n=4$$

$$(4x^{7}y^{6}+x^{3}y^{4})dx+(3x^{8}y^{5}+x^{4}y^{3})dy=0$$

$$f(x,y)=\int(4x^{7}y^{6}+x^{3}y^{4})dx=\frac{1}{2}x^{8}y^{6}+\frac{1}{4}x^{4}y^{4}+h(y)$$

$$f_{y}=N\quad\rightarrow\quad 3x^{8}y^{5}+x^{4}y^{3}+h'(y)=3x^{8}y^{5}+x^{4}y^{3}$$

$$\rightarrow\quad h'(y)=0\quad\rightarrow\quad h(y)=0$$

$$f(x,y)=\frac{1}{4}x^{4}y^{4}(2x^{4}y^{2}+1)\qquad\rightarrow\qquad x^{4}y^{4}(2x^{4}y^{2}+1)=C$$