دانشگاه صنعتی شاهرود **دانشکده علوم ریاضی**

سری اول تمرینات درس ریاضی عمومی ۲ **تاریخ تحویل: ۹۹/۲/۱۷**

---

(۱) فرض کنید خطوط $d_1 : \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-2}{3}$ و $d_2 : \frac{x-4}{3} = \frac{y-7}{5} = \frac{z-1}{2}$ داده شده باشند. ابتدا نشان دهید که خطوط d_1 و d_2 متقاطع می باشند و نقطه تقاطع آنها را بیابید. سپس معادله صفحه ای که شامل خطوط d_1 و d_2 می باشد را بنویسید.

(۲) معادله خطی را بنویسید که از نقطه $A(1,-1,1)$ گذشته و بر خط d به معادله $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z+1$ عمود بوده و خط d' به معادله $d' : x = -y = \frac{z+2}{2}$ را قطع کند.

(۳) خط $d : \frac{x-3}{2} = \frac{y}{2} = z$ صفحه $E : x+3y-z = -4$ را در نقطه ای مانند p قطع می کند. معادله خطی را بنویسید که از نقطه p عبور کرده و بر خط d عمود باشد.

(۴) ابتدا بررسی کنید که خطوط $d_1 : \frac{x}{-2} = y-2 = z-4$ و $d_2 : x-2 = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-3}$ متنافر می باشند و سپس معادله خط عمود مشترک این دو خط را بنویسید.

موفق باشید.

پاسخ سوال ۱ :

ابتدا توجه داریم که چون بردار هادی خط d_1 به صورت $\vec{u}_1 = (2,3,3)$

و بردار هادی خط d_2 به صورت $\vec{u}_2 = (3,5,2)$ می‌باشد و $u_2 \nparallel u_1$ لذا

دو خط d_1 و d_2 موازی نمی‌باشند. حال معادلات پارامتری خط d_1 را در معادلات متقارن خط d_2 با جایگذاری کنیم، داریم:

$$d_1: \begin{cases} x = 2t+3 \\ y = 3t+5 \\ z = 3t+2 \end{cases} \xrightarrow[\text{معادلات متقارن خط } d_2]{\text{با جایگذاری در}} \frac{2t-1}{3} = \frac{3t-2}{5} = \frac{3t+1}{2}$$

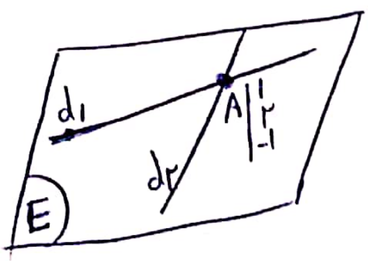
$$\frac{2t-1}{3} = \frac{3t-2}{5} \longrightarrow 10t-5 = 9t-6 \longrightarrow t=-1$$

$$\frac{2t-1}{3} = \frac{3t+1}{2} \longrightarrow 4t-2 = 9t+3 \longrightarrow t=-1$$

لذا دو خط d_1 و d_2 متقاطع می‌باشند و نقطه‌ی تقاطع آن‌ها $A\left|\begin{matrix}1\\2\\-1\end{matrix}\right.$ می‌باشد.

حال برای نوشتن معادله‌ی صفحه‌ی شامل خطوط d_1 و d_2 که می‌توان از نقطه‌ی A به عنوان نقطه‌ای از صفحه و از حاصلضرب خارجی بردارهای هادی d_1 و d_2 به عنوان بردار نرمال صفحه استفاده کرد:

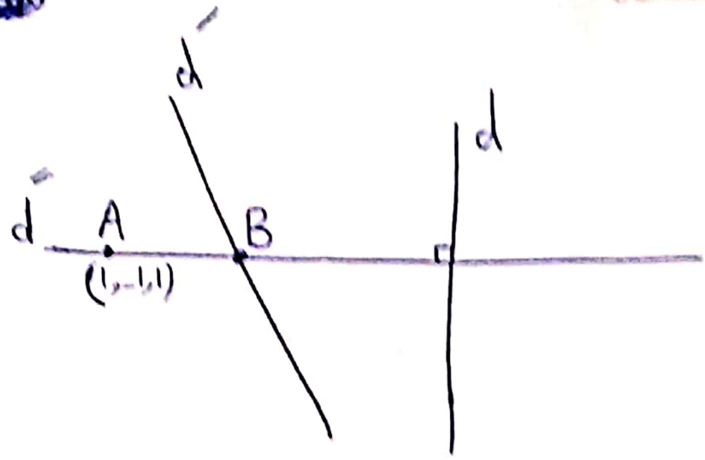
$$\vec{n} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + 5\vec{j} + 1\vec{k}$$



$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

$$-9(x-1) + 5(y-2) + 1(z+1) = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{-9x + 5y + z = 0}$$



پاسخ سوال ۲:

فرض کنیم خط مورد نظر d'' باشد که خط d' را مطابق شکل در نقطه‌ای B قطع کند. لذا $\overrightarrow{AB}$ می‌تواند بردار هادی خط d'' باشد. برای بدست آوردن $\overrightarrow{AB}$، ابتدا با استفاده از معادله پارامتری خط d'، نقطه B را برحسب پارامتری نوشته و سپس از شرط تعامد $\overrightarrow{AB}$ بر خط d (که بردار هادی خط d به صورت $\vec{u}=(2,3,1)$ می‌باشد) استفاده می‌کنیم و مقدار پارامتر و در نهایت $\overrightarrow{AB}$ را تعیین می‌کنیم.

$$d': \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t-2 \end{cases} \xrightarrow[\exists t \in \mathbb{R}]{B \in d'} B \left| \begin{array}{l} t \\ -t \\ 2t-2 \end{array} \right. \xrightarrow{A \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}} \overrightarrow{AB} = (t-1, -t+1, 2t-3)$$

$$\overrightarrow{AB} = (t-1, -t+1, 2t-3)$$
$$\vec{u} = (2, 3, 1)$$

$$\xrightarrow[\text{شرط تعامد}]{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=0} (2t-2)+(-3t+3)+(2t-3)=0$$
$$\longrightarrow \boxed{t=2}$$
$$\longrightarrow \overrightarrow{AB} = (1, -1, 1)$$

لذا با استفاده از $\overrightarrow{AB}$ به عنوان بردار هادی و $A\begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$ به عنوان نقطه‌ای از خط d''، داریم:

$$d'': \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1} \Longrightarrow d'': \begin{cases} x = t+1 \\ y = -t-1 \\ z = t+1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{پاسخ سوال ۳ :}}$

برای بدست آوردن نقطه‌ی تقاطع خط d و صفحه‌ی E ، کافی است که معادله پارامتری خط d را در معادله صفحه E جایگذاری نماییم. داریم:

$$d:\begin{cases} x = 2t+3 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \xrightarrow[\text{صفحه‌ی } E]{\text{با جایگذاری در معادله}} (2t+3)+3(2t)-t=-4$$

$$\longrightarrow 7t=-7 \longrightarrow \boxed{t=-1}$$

$$\xrightarrow[\text{پارامتری خط } d \text{ جایگذاری کنیم}]{t=-1 \text{ را در معادله}} P\begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{vmatrix}$$

برای بدست آوردن بردار هادی خط خواسته شده d' کافیست بردار هادی خط d یعنی $\vec{u}=(2,2,1)$ را بر بردار نرمال صفحه‌ی E که یعنی $\vec{n}=(1,3,-1)$ ، ضرب خارجی نماییم. داریم:

$$\vec{u'}=\vec{u}\times\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -5\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$$

لذا خط مورد نظر d' دارای بردار هادی $\vec{u'}=(-5,3,4)$ بوده و از نقطه‌ی $P\begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{vmatrix}$ عبور می‌کند. داریم:

$$d': \frac{x-1}{-5}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+1}{4} \Longrightarrow d':\begin{cases} x=-5t+1 \\ y=3t-2 \\ z=4t-1 \end{cases}$$

[redacted]

پاسخ سوال ۴:

بردار هادی خط d_1 به صورت $(-2,1,1)=\vec{u_1}$ و

بردار هادی خط d_2 به صورت $(1,2,-3)=\vec{u_2}$ می باشد. به وضوح $\vec{u_1} \not\parallel \vec{u_2}$

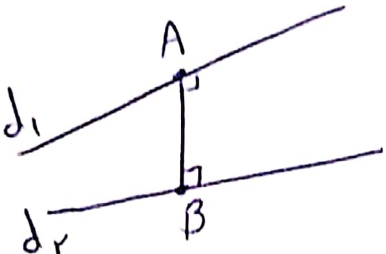
ولذا خطوط d_1 و d_2 موازی نمی باشند. حال معادلات پارامتری خط d_1 را در معادلات متقارن خط d_2 جای گذاری می کنیم داریم:

$$d_1: \begin{cases} x=-2t \\ y=t+2 \\ z=t+4 \end{cases} \xrightarrow[d_2]{\text{جای گذاری در خط}} -2t-2=\frac{t}{2}=\frac{t+5}{-3}$$

$$\begin{cases} -2t-2=\frac{t}{2} \longrightarrow -4t-4=t \longrightarrow 5t=-4 \longrightarrow \boxed{t=-\frac{4}{5}} \\ \frac{t}{2}=\frac{t+5}{-3} \longrightarrow -3t=2t+10 \longrightarrow -5t=10 \longrightarrow \boxed{t=-2} \end{cases}$$

از آنجایی که مقادیر t باهم تفاوت دارند، لذا خطوط d_1 و d_2 (در فضای $\mathbb{R}^3$) متنافرند.

حال برای نوشتن معادله ی خط عمود مشترک این دو خط متنافر، فرض کنیم A و B به ترتیب پای عمود مشترک بر روی خطوط d_1 و d_2 باشند و لذا می توان از $\vec{AB}$ به عنوان بردار هادی خط عمود مشترک (این دو خط متنافر) استفاده کرده، داریم:



$$d_1: \begin{cases} x=-2t \\ y=t+2 \\ z=t+4 \end{cases} \xrightarrow[\exists t\in\mathbb{R}]{A\in d_1} A \left| \begin{matrix} -2t \\ t+2 \\ t+4 \end{matrix} \right.$$

[redacted]

$$d_2: \begin{cases} x=t'+2 \\ y=2t'+2 \\ z=-3t'-1 \end{cases} \xrightarrow[\exists t'\in\mathbb{R}]{B\in d_2} B \left| \begin{matrix} t'+2 \\ 2t'+2 \\ -3t'-1 \end{matrix} \right.$$

بنابراین داریم:

$$\vec{AB} = \left(t^2 + 2t + 2 \,,\; 2t^2 - t \,,\; -3t^2 - t - 5 \right)$$

حال از این واقعیت که $AB \perp d_1$ و $AB \perp d_2$ استفاده کرده و داریم:

$$\vec{u_1} = (-2, 1, 1) \quad \text{و} \quad \vec{u_2} = (1, 2, -3)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{u_1} = 0 \longrightarrow (-2t^2 - 4t - 4) + (2t^2 - t) + (-3t^2 - t - 5) = 0 \longrightarrow \boxed{-3t^2 - 6t = 9}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{u_2} = 0 \longrightarrow (t^2 + 2t + 2) + (4t^2 - 2t) + (9t^2 + 3t + 15) = 0 \longrightarrow \boxed{14t^2 + 3t = -17}$$

لذا داریم:

$$\begin{cases} -3t^2 - 6t = 9 \\ 14t^2 + 3t = -17 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} t^2 = -1 \\ t = -1 \end{cases}$$

بنابراین $\vec{AB} = (-1, -1, -1)$ که بردار هادی خط عمود مشترک

می‌باشد و از نقطه‌ی $A \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix}$ نیز به عنوان نقطه‌ای از خط استفاده کرده و داریم:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$\frac{x - 2}{-1} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - 3}{-1}$$