دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی

## پاسخ سری اول تمرینات درس ریاضی عمومی۱

---

۱- معادلات زیر را در دستگاه اعداد مختلط حل کنید.

الف) $z^4 = \dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$ ب) $1+z^2+z^4+z^6=0$

ج) $(z+i)^4+1=0$ د) $iz^3+8=0$

الف) $$z^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}} \;\rightarrow\; z^4 = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{-\pi}{4}i}}{2e^{\frac{\pi}{3}i}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{-7\pi}{12}i} \;\rightarrow\; z_k = \frac{1}{\sqrt[8]{2}}e^{(\frac{k\pi}{2}-\frac{7\pi}{48})i},\ k=0,1,2,3$$

ب) $$1+z^2+z^4+z^6=0 \;\rightarrow\; (z^2+1)(z^4+1)=0$$

$$z^2+1=0 \;\rightarrow\; z=\pm i_1 \quad , \quad z^4+1=0 \;\rightarrow\; z=\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm i_1)$$

ج) $$(z+i)^4+1=0 \;\rightarrow\; (z+i)^4=-1$$

$$z+i=\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1\pm i) \;\rightarrow\; z=\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1\pm i)-i$$

د) $$iz^3+8=0 \;\rightarrow\; z^3=8i=8e^{\frac{\pi}{2}i} \;\rightarrow\; z_k=2e^{(\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6})i},\ k=0,1,2$$

۲- دامنه و برد توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=1+\sqrt{-x^2+2x}$ ب) $g(x)=\sqrt{[x]-|x|}$

الف) $$f(x)=1+\sqrt{-x^2+2x} \;\rightarrow\; -x^2+2x\ge 0 \;\rightarrow\; x(2-x)\ge 0 \;\rightarrow\; D_f=[0,2]$$

ب) $$g(x)=\sqrt{[x]-|x|} \;\rightarrow\; [x]-|x|\ge 0 \;\rightarrow\; [x]\ge |x| \ge 0$$

بنابر این $x\ge 0$ و $x=|x|$ و چون همواره داریم $[x]\le x$ نتیجه می گیریم که $x=[x]$

یعنی $x$ باید عددی صحیح و نامنفی باشد. بنابر این : $D_g=\{0,1,2,\cdots\}$

۳- فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ به صورت زیر تعریف شده باشند. مطلوب است محاسبه ضابطه $f\circ g(x)$ .

$$f(x)=\begin{cases}1-2x & x<1\\ 1+x & x\ge 1\end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ 1-x & x\ge 0\end{cases}$$

**پاسخ سری اول تمرینات درس ریاضی عمومی۱**

---

$$f\circ g(x)=\begin{cases}1-2g(x) & g(x)<1\\ 1+g(x) & g(x)\geq 1\end{cases}=\begin{cases}1-2g(x) & x\in(-1,0)\cup(0,\infty)\\ 1+g(x) & x\in(-\infty,-1]\cup\{0\}\end{cases}$$

$$f\circ g(x)=\begin{cases}1+x^2 & x\leq -1\\ 1-2x^2 & -1<x<0\\ 2 & x=0\\ 2x-1 & 0<x\end{cases}$$

۴- نشان دهید تابع $f(x)=(2x^{\frac{1}{3}}+1)^3-4$ معکوس پذیر است و ضابطه تابع معکوس آن را بیابید.

روش اول : $$f'(x)=\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}(2x^{\frac{1}{3}}+1)^2\geq 0$$

تابع $f$ پیوسته است و مشتق آن نامنفی است پس همواره صعودی اکید و در نتیجه یک به یک است.

روش دوم : $$a>b\to a^{\frac{1}{3}}>b^{\frac{1}{3}}\to 2a^{\frac{1}{3}}+1>2b^{\frac{1}{3}}+1\to(2a^{\frac{1}{3}}+1)^3>(2b^{\frac{1}{3}}+1)^3$$

$$\to(2a^{\frac{1}{3}}+1)^3-4>(2b^{\frac{1}{3}}+1)^3-4\quad\to\quad f(a)>f(b)$$

پس $f$ صعودی اکید و یک به یک است.

روش سوم : تابع $f$ ترکیب ۴ تابع یک به یک است. پس $f$ هم یک تابع یک به یک است.

$$f_1(x)=x^{\frac{1}{3}}\ ,\ f_2(x)=2x+1\ ,\ f_3(x)=x^3\ ,\ f_4(x)=x-4\quad\to f(x)=f_4\circ f_3\circ f_2\circ f_1(x)$$

چون $D_f=R_f=\mathbf{R}$ پس پوشا هم هست یعنی وارون پذیر است.

$$f(x)=(2x^{\frac{1}{3}}+1)^3-4\ \to x=(2y^{\frac{1}{3}}+1)^3-4\ \to y=f^{-1}(x)=\frac{1}{8}((x+4)^{\frac{1}{3}}-1)^3$$

۵- فرض کنید $f(x)$ یک تابع معکوس پذیر باشد و $g(x)=3f(x+1)-2$ .

مطلوب است محاسبه معکوس تابع $g(x)$.

$$g(x)=3f(x+1)-2\ \to\ x=3f(y+1)-2\ \to\ y=g^{-1}(x)=f^{-1}(\frac{x+2}{3})-1$$