فصل چهارم : حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سری ها

۴-۱- نقطه عادی (معمولی یا نامنفرد)، نقطه غیر عادی (تکین یا منفرد) :

تعریف : در معادله دیفرانسیل $y''+p(x)y'+q(x)y=R(x)$ ، نقطه a را نقطه عادی معادله گوییم اگر توابع $p(x)$، $q(x)$ و $r(x)$ در نقطه a تحلیلی باشند در غیر این صورت a را نقطه غیر عادی معادله دیفرانسیل می نامیم.

مثال (۱) در معادله $xy''+2y'-3x^3y=0$ نقطه $x=0$ نقطه غیر عادی معادله است، زیر تابع $p(x)=\dfrac{2}{x}$ در $x=0$ تحلیلی نیست، ولی نقاط دیگر، را نقطه عادی معادله می نامیم.

مثال (۲) برای معادله $(x+1)y''+3xy'-6y=0$ نقطه $x=-1$ یک نقطه غیر عادی برای معادله است، زیرا با نوشتن $y''+\dfrac{3x}{x+1}y'-\dfrac{6}{x+1}y=0$ ، توابع $p(x)=\dfrac{3x}{x+1}$ ، $q(x)=\dfrac{-6}{x+1}$ در $x=-1$ تحلیلی نیستند ولی نقاط دیگر را نقطه عادی می نامیم.

مثال (۳) معادله دیفرانسیل $(\sin x)y''+(x-1)y'+\cos x\, y=0$ دارای بی نهایت نقطه غیر عادی است چون $p(x)=\dfrac{x-1}{\sin x}$ و $q(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ در $x=k\pi$ $(k\in z)$ تحلیلی نیست.

۴-۱-۲- نقطه غیر عادی منظم

تعریف : نقطه x_0 را نقطه غیر عادی منظم معادله دیفرانسیل $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ نامیم، هرگاه نقطه x_0 یک نقطه غیر عادی معادله دیفرانسیل باشد و توابع $(x-x_0)p(x)$ و $(x-x_0)^2q(x)$ در x_0 تحلیلی باشند در غیر این صورت نقطه x_0 نقطه غیر عادی نامنظم معادله می باشد (یا به عبارتی حدهای زیر هر دو موجود باشند).

$$p_0=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)p(x)$$

$$q_0=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2q(x)$$

نکته : حتی اگر یکی از حدهای فوق موجود نباشند (بی نهایت شوند) نقطه X_0 را غیر عادی نامنظم می نامیم.

مثال (۴) در معادله $2xy''-y'+3x^2y=0$ ، نقطه x_0 نقطه غیرعادی منظم معادله است زیرا اولاً توابع $p(x)=\dfrac{-1}{2x}$ در $x=0$ غیر تحلیلی است و از طرفی $p_0=\lim\limits_{x\to 0}(x-0)\left(\dfrac{-1}{2x}\right)=-\dfrac{1}{2}$ و $q_0=\lim\limits_{x\to 0}(x-0)\dfrac{3x^2}{2x}=0$ موجودند.

مثال (۵) نقاط غیر عادی معادله زیر را بیابید و نوع آنها را تعیین کنید.

$$x^3(2x-1)y''+3xy'-(x-1)y=0 \quad\to\quad y''+\frac{3}{x^2(2x-1)}y'-\frac{(x-1)}{x^3(2x-1)}y=0$$

$p(x)$ و $q(x)$ در $x=0$ و $x=\dfrac{1}{2}$ غیر تحلیلی اند پس این نقاط، غیر عادی اند. از طرفی:

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$x=0 \text{ در } \begin{cases} p_0=\lim\limits_{x\to 0} x\dfrac{3}{x^2(2x-1)}=\infty \\[2ex] q_0=\lim\limits_{x\to 0} x^2\dfrac{-(x-1)}{x^3(2x-1)}=\infty \end{cases}$$

$x=0$ غیر عادی نامنظم است.

$$x=\frac{1}{2} \text{ در } \begin{cases} p_0=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{3}{x^2(2x-1)}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{3}{2x^2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}=6 \\[2ex] q_0=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\dfrac{-(x-1)}{x^3(2x-1)}=0 \end{cases}$$

$x=\frac{1}{2}$ غیر عادی منظم است.

مثال (۶) نقاط غیر عادی معادله زیر را بیابید و نوع آنها را مشخص کنید.

$$x^3(2x-1)y''+4xy'-(x+2)y=0$$

$$\div x^3(2x-1) \quad\rightarrow\quad y''+\frac{4}{x^2(2x-1)}y'-\frac{(x+2)}{x^3(2x-1)}y=0$$

$p(x)=\dfrac{4}{x^2(2x-1)}$ و $q(x)=-\dfrac{x+2}{x^3(2x-1)}$ در نقاط $x=0$ و $x=\dfrac{1}{2}$ غیر تحلیلی اند پس غیر عادی اند.

$$\text{در } x=0 \quad\rightarrow\quad p_0=\lim_{x\to 0}(x-0)\frac{4}{x^2(2x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{x(2x-1)}=\infty$$

نیازی به محاسبه q_0 نیست.

$$x=\frac{1}{2}\rightarrow \begin{cases} p_0=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{4}{x^2(2x-1)}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{4}{2x^2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}=8 \\[2ex] q_0=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\dfrac{-(x+2)}{x^3(2x-1)}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\dfrac{-(x+2)}{2x^3\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}=0 \end{cases}$$

پس $x=0$ نقطه غیر عادی نامنظم و $x=\dfrac{1}{2}$ نقطه غیر عادی منظم است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال (۷) نشان دهید $x = 0$ یک نقطه غیر عادی منظم معادله $2x^2 y'' + 3xy' - (1+x)y = 0$ است.

$$\div 2x^2 \quad \rightarrow \quad y'' + \frac{3}{2x}y' - \frac{(1+x)}{2x^2}y = 0$$

چون $p(x) = \frac{3}{2x}$ و $q(x) = -\frac{1+x}{2x^2}$ در $x = 0$ غیر تحلیلی اند پس $x = 0$ غیر عادی است.

$$x = 0 \rightarrow \begin{cases} p_0 = \lim\limits_{x\to 0}(x-0)\frac{3}{2x} = \frac{3}{2} \\ q_0 = \lim\limits_{x\to 0}(x-0)^2 \frac{2[-(1+x)]}{2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} -\frac{1+x}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

پس $x = 0$ نقطه غیر عادی از نوع منظم است.

مثال (۸) نوع نقطه $x = 0$ را در معادلات زیر تعیین کنید ؟

$$1)\ xy'' + (\sin x)y = 0 \xrightarrow{\div x} y'' + \frac{\sin x}{x}y = 0$$

$$p(x) = 0 \text{ و } q(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

پس هم $p(x)$ و $q(x)$ در $x = 0$ تحلیلی اند. پس $x = 0$ یک نقطه عادی معادله است.

روش دیگر :

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right] = 1 - -\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}$$

$x = 0$ به دلیل این که از مخرج حذف شد برای تابع $\frac{\sin x}{x}$ نقطه عادی محسوب می شود.

$$2)\ x^2 y'' + (\sin x)y = 0 \xrightarrow{\div x^2} y'' + \frac{\sin x}{x^2}y = 0$$

$$p(x) = 0 \text{ و } q(x) = \frac{\sin x}{x^2}$$

روش اول : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \infty \times 1 = \infty$ غیر عادی $x = 0$

دانلود از سایت ریاضی سرا　　www.riazisara.ir

روش دوم :
$$\frac{\sin x}{x^2}=\frac{1}{x^2}\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right]=\frac{1}{x}-\frac{x}{3!}+\frac{x^3}{5!}+\cdots$$

$x=0$ به دلیل این که از مخرج حذف نشد پس برای تابع $\frac{\sin x}{x^2}$ نقطه غیر عادی محسوب می شود.

$$\begin{cases} p_0=\lim\limits_{x\to 0}(x-0)p(x)\overset{p(x)=0}{=}0 \\ q_0=\lim\limits_{x\to 0}(x-0)^2q(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\frac{\sin x}{x^2}=0 \end{cases}$$

پس $x=0$ غیر عادی منظم است.

---

3) $x^3y''+(\sin x)y=0 \xrightarrow{\div x^3} y''+\left(\frac{\sin x}{x^3}\right)y=0$

$q(x)=\frac{\sin x}{x^3}$ و $p(x)=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\infty\times 1=\infty$$

$x=0$ غیر عادی است.

$$\begin{cases} p_0=\lim\limits_{x\to 0}(x-0)p(x)\overset{p(x)=0}{=}0 \\ q_0=\lim\limits_{x\to 0}(x-0)^2q(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\frac{\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \end{cases}$$

پس $x=0$ نقطه غیر عادی و منظم معادله است.

---

4) $x^4y''+(\sin x)y=0 \xrightarrow{\div x^4} y''+\left(\frac{\sin x}{x^4}\right)y=0$

$q(x)=\frac{\sin x}{x^4}$ و $p(x)=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\infty\times 1=\infty$$ $x=0$ غیر عادی است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\begin{cases} p_0=\lim\limits_{x\to 0}(x-0)p(x)\overset{p(x)=0}{=}0 \\ q_0=\lim\limits_{x\to 0}(x-0)^2q(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\dfrac{\sin x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2}= \\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\infty\times 1=\infty \end{cases}$$

پس $x=0$ نقطه غیر عادی و نامنظم معادله است.

۴-۲- حل معادلات دیفرانسیل حول نقاط عادی :

قضیه : اگر x_0 یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل $y''+p(x)y'+q(x)y=R(x)$ باشد، در این صورت این معادله دیفرانسیل دارای جوابی به فرم $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ حول نقطه x_0 می باشد.

طریقه حل : پس از معین کردن شکل کلی جواب معادله از قضیه بالا، از آن مشتق گرفته و در معادله جایگذاری می کنیم پس از هم توان کردن و هم شروع کردن جملات، فاکتورگیری کرده و ضرایب نظیر به نظیر در طرف معادله را برابر قرار می دهیم، تا ضرایب مجهول a_n بدست آیند.

مثال (۹) جواب عمومی معادله $y''-xy=0$ را در مجاورت $x=0$ بیابید (این معادله، معادله آیری است).

توابع $p(x)=0$ و $q(x)=-x$ در صفر تحلیلی اند پس $x=0$ یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل است.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \ \to\ y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1} \ \to\ y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

با جایگذاری در معادله داریم :

$$y''-xy=0 \ \to\ \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

با تغییر n به $n+3$ در سری اول توان ها یکی می شوند.

$$\to \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=0$$

اندیس ها را یکی می کنیم

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+3)(n+2)a_{n+3}x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=0$$

$$2a_2+\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)(n+2)a_{n+3}x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=0 \ \to\ 2a_2+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+3)(n+2)a_{n+3}-a_n\right]x^{n+1}=0$$

www.riazisara.ir	دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\begin{cases} 2a_2=0 \rightarrow a_2=0 \\ (n+3)(n+2)a_{n+3}-a_n=0 \rightarrow a_{n+3}=\dfrac{1}{(n+3)(n+2)}a_n \end{cases}$$ رابطه بازگشتی $n=0,1,2,\cdots$

$$n=0 \rightarrow a_3=\frac{1}{6}a_0$$

$$n=1 \rightarrow a_4=\frac{1}{12}a_1$$

$$n=2 \rightarrow a_5=\frac{1}{20}a_2 \xrightarrow{a_2=0} a_5=0$$

$$n=3 \rightarrow a_6=\frac{1}{30}a_3=\frac{1}{6\times 30}a_0$$

$$n=4 \rightarrow a_7=\frac{1}{42}a_4=\frac{1}{12\times 42}a_1$$

$$n=5 \rightarrow a_8=0$$

$$n=6 \rightarrow a_9=\frac{1}{72}a_6=\frac{1}{72\times 6\times 30}a_0$$

جواب عمومی $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots$

$$y=a_0+a_1x+\frac{1}{6}a_0x^3+\frac{1}{12}a_1x^4+\frac{1}{180}a_0x^6+\frac{1}{12\times 42}a_1x^7+\frac{1}{72\times 180}a_0x^9+\cdots$$

$$y=a_0\left(1+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{180}x^6+\frac{1}{72\times 180}x^9+\cdots\right)+a_1\left(x+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{12\times 42}x^7+\cdots\right)$$

مثال (۱۰) جواب عمومی معادله $(x-1)y''-xy'+y=0$ را حول نقطه $x=0$ بیابید.

چون توابع $p(x)=\dfrac{-x}{x-1}$ و $q(x)=\dfrac{1}{x-1}$ در $x=0$ تحلیلی اند لذا نقطه $x=0$ یک نقطه عادی است پس جوابی به فرم $y=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ دارد.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow y'=\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \rightarrow y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

با جایگذاری در معادله داریم :

$$(x-1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}-x\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=0$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

توان ها را یکی می کنیم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n)a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

اندیس ها را یکی می کنیم (از سری دوم و چهارم جمله $n = 0$ را می نویسیم).

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n)a_{n+1}x^n - 2a_2 - \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$-2a_2 + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1)(n)\,a_{n+1} - (n+2)(n+1)a_{n+2} - n a_n + a_n\right]x^n = 0$$

$$\begin{cases} -2a_2 + a_0 = 0 \quad \rightarrow \quad a_2 = \dfrac{a_0}{2} \\ n(n+1)\,a_{n+1} - (n+2)(n+1)a_{n+2} - n a_n + a_n = 0 \quad \rightarrow \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad a_{n+2} = \frac{n(n+1)a_{n+1} + (1-n)a_n}{(n+1)(n+2)}$$

$$n=1 \quad \rightarrow \quad a_3 = \frac{2a_2 - 0}{3\times 2} = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{3\times 2} = \frac{a_0}{3!}$$

$$n=2 \quad \rightarrow \quad a_4 = \frac{6a_3 - a_2}{12} = \frac{a_0 - \frac{a_0}{2}}{12} = \frac{a_0}{4\times 3\times 2} = \frac{a_0}{4!}$$

$$n=3 \quad \rightarrow \quad a_5 = \frac{12a_4 - 2a_3}{5\times 4} = \frac{\frac{a_0}{2} - 2\frac{a_0}{6}}{5\times 4} = \frac{a_0}{5!}$$

پس حالت کلی داریم $a_n = \dfrac{a_0}{n!}$ و جواب عمومی به فرم زیر است.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{a_0}{2!}x^2 + \frac{a_0}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4 + \frac{a_0}{5!}x^5 + \cdots$$

$$y = a_1 x + a_0\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) \quad \rightarrow \quad y = a_0 e^x + (a_1 - a_0)x$$

نکته : $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$

www.riazisara.ir　　دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال (۱۱) جواب عمومی معادله $y''-xy'-y=0$ را حول نقطه $x=0$ بیابید.

$x=0$ نقطه عادی معادله فوق است

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \rightarrow y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

با جایگذاری در معادله داریم :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}-\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=0$$

توان ها را یکی می کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=0$$

اندیس ها را یکی می کنیم برای این کار جمله اول سری اول و سری سوم را خارج می کنیم.

$$2a_2+\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n-a_0-\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n=0$$

$$2a_2-a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}-n a_n-a_n\right]x^n=0$$

$$\begin{cases} 2a_2-a_0=0 \rightarrow a_2=\dfrac{a_0}{2} \\ (n+2)(n+1)a_{n+2}-n a_n-a_n=0 \rightarrow a_{n+2}=\dfrac{a_n}{n+2} \quad n\geq 1 \end{cases}$$

$$n=1 \rightarrow a_3=\frac{a_1}{3}$$

$$n=2 \rightarrow a_4=\frac{a_2}{4}= \rightarrow a_4=\frac{a_0}{2\times 4}$$

$$n=3 \rightarrow a_5=\frac{a_3}{5}= \rightarrow a_5=\frac{a_1}{3\times 5}$$

$$n=4 \rightarrow a_6=\frac{a_4}{6}= \rightarrow a_6=\frac{a_0}{2\times 4\times 6}$$

$$n=5 \rightarrow a_7=\frac{a_5}{7} \rightarrow a_7=\frac{a_1}{3\times 5\times 7}$$

پس $a_{2n}=\dfrac{a_0}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n}$

$$a_{2n+1}=\frac{a_1}{3\times 5\times 7\times\cdots\times(2n+1)}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \rightarrow y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots$$

$$y=a_0+a_1x+\frac{a_0}{2}x^2+\frac{a_1}{3}x^3+\frac{a_0}{2\times4}x^4+\frac{a_1}{3\times5}x^5+\frac{a_0}{2\times4\times6}x^6+\frac{a_1}{3\times5\times7}x^7\cdots$$

$$y=a_0\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\times4}+\frac{x^6}{2\times4\times6}+\cdots\right)+a_1\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{3\times5}+\frac{x^7}{3\times5\times7}+\cdots\right).$$

مثال (۱۲) جواب عمومی معادله $y''+4y=0$ را حول $x=0$ حل کنید.

این معادله در $x=0$ نقطه عادی است.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \rightarrow y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1} \rightarrow y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

با جایگذاری در معادله داریم :

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}4a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}4a_nx^n=0$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}+4a_n]x^n=0$$

$$\rightarrow (n+2)(n+1)a_{n+2}+4a_n=0 \quad n=0,1,2,\cdots$$

$$a_{n+2}=\frac{-4}{(n+2)(n+1)}a_n$$

$$n=0 \rightarrow a_2=\frac{-4}{2\times1}a_0$$

$$n=1 \rightarrow a_3=\frac{-4}{3\times2}a_1$$

$$n=2 \rightarrow a_4=\frac{-4}{4\times3}a_2 \rightarrow a_4=\frac{16}{4\times3\times2\times1}a_0$$

$$n=3 \rightarrow a_5=\frac{-4}{5\times4}a_3 \rightarrow a_5=\frac{16}{5\times4\times3\times2}a_1$$

$$n=4 \rightarrow a_6=\frac{-4}{6\times5}a_4 \rightarrow a_6=\frac{-16\times4}{6\times5\times4\times3\times2\times1}a_0$$

$$n=5 \rightarrow a_7=\frac{-4}{7\times6}a_5 \rightarrow a_7=\frac{-4\times16}{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}a_1$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$a_{2n}=\frac{(-1)^n4^n}{(2n)!}a_0 \quad n\geq 1$$

$$a_{2n+1}=\frac{(-1)^n4^n}{(2n+1)!}a_1 \quad n\geq 1$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \;\rightarrow\; y=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{(2n)!}x^{2n}+a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$y=a_0\cos 2x+a_1\sin 2x$$

توجه کنید اگر معادله فوق را با روش معادله مشخصه هم حل می کردیم همین نتیجه حاصل می شد.

مثال (۱۳) جواب عمومی معادله $y''-x^2y'-y=0$ را حول $x=0$ حل کنید.

بدیهی است که $x=0$ برای این معادله نقطه عادی است

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \;\rightarrow\; y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1} \;\rightarrow\; y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

با جایگذاری در معادله داریم :

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

توان ها را یکی می کنیم.

$$\rightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

از سری اول و سوم، دو جمله اول را می نویسیم.

$$\rightarrow\; 2a_2-a_0+(6a_3-a_1)x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}-(n-1)a_{n-1}-a_n\right]x^n=0$$

$$2a_2-a_0=0 \;\rightarrow\; a_2=\frac{a_0}{2}$$

$$6a_3-a_1=0 \;\rightarrow\; a_3=\frac{a_1}{6}$$

$$\rightarrow\; (n+2)(n+1)a_{n+2}-(n-1)a_{n-1}-a_n=0 \;\rightarrow$$

$$a_{n+2}=\frac{(n-1)a_{n-1}+a_n}{(n+2)(n+1)} \quad n\geq 2$$

$$n=2 \;\rightarrow\; a_4=\frac{a_1+a_2}{12} \;\rightarrow\; a_4=\frac{a_1+\frac{a_0}{2}}{12}=\frac{2a_1+a_0}{24}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$n=3 \rightarrow a_5=\frac{2a_2+a_3}{20} \rightarrow a_5=\frac{2\left(\frac{a_0}{2}\right)+\frac{a_1}{6}}{20}=\frac{6a_0+a_0}{720}$$

$$n=4 \rightarrow a_6=\frac{3a_3+a_4}{30} \rightarrow a_6=\frac{3\left(\frac{a_1}{6}\right)+\frac{2a_1+a_0}{24}}{30}=\frac{14a_1+a_0}{720}$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

$$y=a_0\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{20}+\cdots\right)+a_1\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{120}+\cdots\right)$$

۴-۳- سری فروبینوس :

تعریف : هر سری بصورت $y=x^r\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ یا $y=(x-x_0)^r\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ را یک سری فروبینوس می نامیم.

قضیه : اگر x_0 یک نقطه غیر عادی منظم معادله دیفرانسیل $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ باشد، معادله دیفرانسیل دارای یک جواب (خصوصی) بصورت سری فروبنیوس می باشد.

$$y=x^r\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \rightarrow y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} \rightarrow y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

اگر $p_0=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)p(x)$ و $q_0=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2 q(x)$ باشند معادله $r(r-1)+p_0 r+q_0=0$ را معادله مشخصه معادله دیفرانسیل $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ می نامیم. اگر r_1 و r_2 ریشه های معادله مشخصه سری فروبنیوس باشند به طوری $r_1>r_2$ باشد در این صورت معادله دیفرانسیل دارای دو جواب مستقل خطی y_1 و y_2 می باشد.

نکته : در اغلب مثال ها $x_0=0$ است یا این که می توان با تغییر متغیر $t=x-x_0$ نقطه را تبدیل به $t=0$ کرد پس بعد از این $x_0=0$ قرار داده می شود.

قضیه : $(r_1>r_2)$ اگر نقطه $x=0$ نقطه غیر عادی منظم معادله باشد و r_1 و r_2 ریشه های معادله مشخصه نظیر باشند:

حالت اول : معادله مشخصه دارای دو ریشه متمایز است $(r_1\neq r_2)$ که تفاضل آنها عدد صحیح نیست $(r_1-r_2\notin Z)$ در این حالت می توان نشان داد معادله دارای ۲ جواب سری مستقل خطی بصورت سری فروبنیوس است :

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1} \quad , \quad y_2=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_2}$$

یعنی سری را یکبار به ازای r_1 و یکبار هم به ازای r_2 حل می کنیم.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

حالت دوم : اگر معادله مشخصه دارای دو ریشه متمایز باشد ولی تفاضل آنها عدد صحیح باشد $(r_1 - r_2 \in z)$ در این حالت جواب اول را متناظر با ریشه بزرگتر محاسبه می کنیم.

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1} \qquad a_0 \neq 0$$

و برای تعیین جواب دوم از روش تغییر پارامترها استفاده می کنیم و فرم جواب دوم بصورت زیر است :

$$y_2 = c\, y_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}$$

حالت سوم : اگر معادله مشخصه دارای ریشه مضاعف باشد $(r_1 = r_2 = r)$ در این حالت جواب اول به ازای r محاسبه می شود :

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

و برای جواب دوم بصورت زیر است :

$$y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r}$$

نکته : در حالت های دوم و سوم فقط y_1 را محاسبه می کنیم و محاسبه y_2 مورد بحث ما نیست.

نکته : در هر سه حالت فوق $y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل می باشد.

مثال (۱۴) جواب عمومی معادله دیفرانسیل $4xy'' + 3y' - 3y = 0$ را حول $x = 0$ بیابید.

$$\xrightarrow{\div 4x} \quad y'' + \frac{3}{4x} y' - \frac{3}{4x} y = 0$$

$x = 0$ نقطه غیر عادی است چون $p(x) = \frac{3}{4x}$ و $q(x) = \frac{-3}{4x}$ در $x = 0$ غیر تحلیلی اند.

$$p_0 = \lim_{x \to 0} x \frac{3}{4x} = \frac{3}{4}$$

$$q_0 = \lim_{x \to 0} x^2 \left(\frac{-3}{4x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{-3x}{4} = 0$$

پس $x = 0$ منظم است.

معادله مشخصه $r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0 \;\rightarrow\; r(r-1) + \frac{3}{4} r - 0 = 0 \;\rightarrow$

$$r^2 - \frac{1}{4} r = 0 \quad \begin{cases} r_1 = \dfrac{1}{4} \\ r_2 = 0 \end{cases}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

چون $r_1 - r_2 = \frac{1}{4}$ عدد صحیح نیست پس به ازای هر دو ریشه جواب را می یابیم.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \to y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} \to y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

با جایگذاری y و y' و y'' در معادله دیفرانسیل داریم :

$$4x\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + 3\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} - 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\to \quad 4\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + 3\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} - 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

توان ها را یکی می کنیم برای این کار در سری سوم به جای n ، $(n-1)$ قرار می دهیم

$$4\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + 3\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} - 3\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r-1} = 0$$

حال اندیس ها را یکی می کنیم برای این کار کافیست از سری اول و دوم جمله اول را بنویسیم.

$$4r(r-1)a_0 x^{r-1} + 4\sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1} + 3ra_0 x^{r-1} + 3\sum_{n=1}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} - 3\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r-1} = 0$$

$$ra_0(4r-1)x^{r-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[4(n+r)(n+r-1)a_n + 3(n+r)a_n - 3a_{n-1}\right]x^{n+r-1} = 0$$

از مساوی صفر قرار دادن بیرون سری داریم (همیشه معادله مشخصه حاصل می شود)

$$a_0 r(4r-1)x^{r-1} = 0 \xrightarrow{a_0 \neq 0} \begin{cases} r = 0 \\ r = \frac{1}{4} \end{cases}$$

(همیشه) همان ریشه های معادله مشخصه اند.

و از مساوی صفر قرار دادن داخل سری رابطه بازگشتی حاصل می شود.

$$4(n+r)(n+r-1)a_n + 3(n+r)a_n - 3a_{n-1} = 0 \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$a_n = \frac{3}{(n+r)[4n+4r-1]} a_{n-1} \qquad n \geq 1$$ رابطه بازگشتی

حال ریشه های معادله مشخصه را قرار می دهیم.

$$r_1 = 0 \quad \to \quad a_n = \frac{3}{n[4n-1]} a_{n-1} \qquad n \geq 1$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\begin{cases} n=1 \rightarrow a_1 = \frac{3}{3}a_0 = a_0 \\ n=2 \rightarrow a_2 = \frac{3}{14}a_1 = \frac{3}{14}a_0 \\ n=3 \rightarrow a_3 = \frac{3}{33}a_2 = \frac{3}{11\times 14}a_0 \end{cases}$$

پس $y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1} \rightarrow y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$

$$y_1 = a_0 + a_0 x + \frac{3}{14}a_0 x^2 + \frac{3}{11\times 14}a_0 x^3 + \cdots$$

$$r_2 = \frac{1}{4} \rightarrow a_n = \frac{3}{\left(n+\frac{1}{4}\right)(4n)}a_{n-1} \qquad n \geq 1$$

$$\begin{cases} n=1 \rightarrow a_1 = \frac{3}{5}a_0 \\ n=2 \rightarrow a_2 = \frac{3}{18}a_1 \rightarrow a_2 = \frac{1}{6}a_1 = \frac{1}{10}a_0 \\ n=3 \rightarrow a_3 = \frac{3}{3\times 13}a_2 \rightarrow a_3 = \frac{1}{130}a_0 \end{cases}$$

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_2} \rightarrow y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4}}\left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\right]$$

$$y_2 = x^{\frac{1}{4}}\left[a_0 + \frac{3}{5}a_0 x + \frac{1}{10}a_0 x^2 + \frac{1}{130}a_0 x^3 + \cdots\right] \rightarrow y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

مثال (۱۵) معادله $2xy'' + (1-2x^2)y' - 4xy = 0$ را حول نقطه $x=0$ را به کمک سری فروبنیوس حل کنید.

$$\xrightarrow{\div 2x} y'' + \frac{1-2x^2}{2x}y' - 2y = 0$$

$p(x) = \frac{1-2x^2}{2x}$ و $q(x) = -2$ که $p(x)$ در $x=0$ غیر تحلیلی است پس $x=0$ نقطه غیر عادی است.

$$p_0 = \lim_{x\to 0} x\frac{1-2x^2}{2x} = \frac{1}{2}$$

$q_0 = \lim_{x\to 0} x^2(-2) = 0$ پس $x=0$ نقطه منظم است.

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0 \rightarrow r(r-1) + \frac{1}{2}r = 0 \rightarrow \begin{cases} r_1 = \frac{1}{2} \\ r_2 = 0 \end{cases}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

چون $r_1 - r_2 \notin Z$ پس به ازای هر دو ریشه جواب را می یابیم.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \rightarrow y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} \rightarrow y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

با جایگذاری y و y' و y'' در معادله دیفرانسیل داریم :

$$2xy''+y'-2x^2y'-4xy=0$$

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}-2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r+1}-4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1}=0$$

توان ها را یکی می کنیم برای این کار در سری سوم و چهارم به جای n ، قرار می دهیم $(n-2)$

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}-2\sum_{n=2}^{\infty}(n+r-2)a_{n-2} x^{n+r-1}-4\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r-1}=0$$

حال اندیس ها را یکی می کنیم برای این کار کافیست از جمله های اول و دوم سری اول و دوم را بنویسیم.

$$2r(r-1)a_0x^{r-1}+2(r+1)(r)a_1x^r+ra_0x^{r-1}+(1+r)a_1x^r+$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[2(n+r)(n+r-1)a_n+(n+r)a_n-2(n+r-2)a_{n-2}-4a_{n-2}\right]x^{n+r-1}=0$$

ابتدا در بیرون سری ضریب x^r و x^{r-1} را برابر صفر قرار می دهیم.

$$ra_0x^{r-1}(2r-2+1)=0 \xrightarrow{a_0\neq 0} \begin{cases} r_1=\dfrac{1}{2} \\ r=0 \end{cases}$$ ریشه های معادله مشخصه

$$a_1x^r(1+r)(2r+1)=0 \rightarrow a_1=0$$

حال داخل سیگما را برابر صفر قرار می دهیم تا رابطه بازگشتی حاصل می شود.

$$a_n(n+r)[2(n+r-1)+1]-2a_{n-2}[(n+r-2+2)]=0$$

$$a_n=\frac{2}{2n+2r-1}a_{n-2} \qquad n\geq 2$$

حال ریشه های معادله مشخصه را قرار می دهیم.

$$r_1=\frac{1}{2} \rightarrow a_n=\frac{1}{n}a_{n-2} \qquad n\geq 2$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\begin{cases} n=2 \rightarrow a_2=\frac{1}{2}a_0 \\ n=3 \rightarrow a_3=\frac{1}{3}a_1 \xrightarrow{a_1=0} a_3=0 \\ n=4 \rightarrow a_4=\frac{1}{4}a_2=\frac{1}{8}a_0 \\ n=5 \rightarrow a_5=\frac{1}{5}a_3=0 \end{cases}$$

$$a_{2n}=\frac{a_{2n-2}}{2n}=\frac{a_0}{2^n n!}$$

$$a_{2n-1}=0$$

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1}=x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sqrt{x}\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\right)$$

$$y_1=\sqrt{x}\left[a_0+\frac{1}{2}a_0x^2+\frac{1}{8}a_0x^4+\cdots\right] \xrightarrow{a_0=1}$$

$$y_1=\sqrt{x}\left[1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+\cdots\right] y_1=\sqrt{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}x^{2n}=\sqrt{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}{n!}=\sqrt{x}\,e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$r_2=0 \rightarrow a_n=\frac{2}{2n-1}a_{n-2} \qquad n\ge 2$$

$$\begin{cases} n=2 \rightarrow a_2=\frac{2}{3}a_0 \\ n=3 \rightarrow a_3=\frac{2}{5}a_1 \xrightarrow{a_1=0} a_3=0 \\ n=4 \rightarrow a_4=\frac{2}{7}a_0=\frac{4}{21}a_0 \\ n=5 \rightarrow a_5=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow y_2=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_2}=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

$$\rightarrow y_2=a_0+\frac{2}{3}a_0x^2+\frac{4}{21}a_0x^4+\cdots \xrightarrow{a_0=1}$$

$$y_2=1+\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{21}x^4+\cdots \qquad \rightarrow y_g=c_1y_1+c_2y_2$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

مثال (۱۶) جواب از نوع سری فربنیوس $x^2y''+3xy'-(2x-1)y=0$ را حول نقطه $x=0$ بیابید.

$$\xrightarrow{\div x^2} \quad y''+\frac{3}{x}y'-\frac{(2x-1)}{x^2}y=0$$

$p(x)=\frac{3}{x}$ و $q(x)=-\frac{2x-1}{x^2}$ در $x=0$ غیر تحلیلی اند پس $x=0$ نقطه غیر عادی است.

$$p_0=\lim_{x\to 0}x\frac{3}{x}=3$$

$$q_0=\lim_{x\to 0}x^2\left(-\frac{2x-1}{x^2}\right)=1$$

پس $x=0$ نقطه غیر عادی از نوع منظم است.

$$r(r-1)+p_0r+q_0=0 \;\to\; r(r-1)+3r+1=0 \;\to\; r^2+2r+1=0$$

$r=r_1=r_2=-1$ ریشه مضاعف

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r} \;\to\; y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r-1} \;\to\; y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r-2}$$

با جایگذاری y و y' و y'' در معادله دیفرانسیل داریم :

$$x^2y''+3xy'-2xy+y=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}-2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r+1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$

توان ها را یکی می کنیم برای این کار در سری سوم به جای n ، $(n-1)$ قرار می دهیم

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^{n+r}+3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^{n+r}-2\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$

حال اندیس ها را یکی می کنیم برای این کار کافیست از سری های اول و دوم و چهارم جمله $n=0$ را بنویسیم.

$$r(r-1)a_0x^r+3ra_0x^r+a_0x^r+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1)a_n+3(n+r)a_n-2a_{n-1}+a_n\right]x^{n+r}=0$$

از مساوی صفر قرار دادن بیرون سیگما داریم :

$$a_0x^r\left(r^2+2r+1\right)=0 \xrightarrow{a_0\neq 0} r^2+2r+1=0 \;\to$$

$r=-1$ همان ریشه های معادله مشخصه است

حال داخل سیگما را برابر صفر قرار می دهیم تا رابطه بازگشتی حاصل می شود.

$$(n+r)(n+r-1)a_n+3(n+r)a_n-2a_{n-1}+a_n=0$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\rightarrow\ a_n=\frac{2}{(n+r)(n+r-1)+3(n+r)+1}a_{n-1}\qquad n\ge 1$$

حال برای یافتن y_1 کافیست $r=-1$ قرار می دهیم.

$$a_n=\frac{2}{(n-1)(n-2)+3n-2}a_{n-1}\qquad n\ge 1$$

$$a_n=\frac{2}{n^2-3n+2+3n-2}a_{n-1}\qquad n\ge 1$$

$$a_n=\frac{2}{n^2}a_{n-1}\qquad n\ge 1$$

$$\begin{cases} n=1 \rightarrow a_1=2a_0\\ n=2 \rightarrow a_2=\frac{1}{2}a_1=a_0\\ n=3 \rightarrow a_3=\frac{2}{3^2}a_2=\frac{2}{3^2}a_0\\ n=4 \rightarrow a_4=\frac{2}{4^2}a_3=\frac{2^2}{4^2\times 3^2}a_0=\frac{2^4}{(4!)^2}a_0\\ n=5 \rightarrow a_5=\frac{2}{5^2}a_4=\frac{2^3}{4^2\times 3^2\times 5^2}a_0=\frac{2^5}{(5!)^2}a_0 \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$a_n=\frac{2^n a_0}{(n!)^2}$$

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\frac{1}{x}\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)\ \rightarrow\ y_1=x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(n!)}x^n$$

مثال (۱۷) ابتدا نشان دهید $x=0$ یک نقطه غیر عادی و منظم معادله دیفرانسیل $x(x-1)y''+(3x-1)y'+y=0$ است پس یک جواب بصورت سری فروبنیوس برای آن بیابید.

$$\xrightarrow{\div x(x-1)}\ y''+\frac{3x-1}{x(x-1)}y'+\frac{1}{x(x-1)}y=0$$

$p(x)=\frac{3x-1}{x(x-1)}$ و $q(x)=\frac{1}{x(x-1)}$ در $x=0$ غیر تحلیلی اند پس $x=0$ نقطه غیر عادی معادله است.

$$p_0=\lim_{x\to 0}x\frac{3x-1}{x(x-1)}=1$$

$$q_0=\lim_{x\to 0}x^2\frac{1}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x-1}=0$$

پس $x=0$ نقطه غیر عادی از نوع منظم است.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$r(r-1)+r=0 \rightarrow r^2=0 \rightarrow r=r_1=r_2=0$ ریشه مضاعف

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \rightarrow y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} \rightarrow y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

با جایگذاری y و y' و y'' در معادله دیفرانسیل داریم :

$$x^2 y''-x y''+3x y'-y'+y=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1}+3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r}-$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r}=0$$

توان ها را یکی می کنیم برای این کار در سری سوم و پنجم به جای n ، قرار می دهیم $(n-1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)(n+r-2)a_{n-1}x^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-1}+$$

$$3\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)a_{n-1}x^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n+r-1}=0$$

حال اندیس ها را یکی می کنیم برای این کار کافیست از سری دوم و چهارم جمله $n=0$ را بنویسیم.

$$-r(r-1)a_0 x^{r-1}-r a_0 x^{r-1}+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+r-1)(n+r-2)a_{n-1}-(n+r)(n+r-1)a_n+3(n+r-1)a_{n-1}-(n+r)a_n+a_{n-1}\right]x^{n+r-1}=0$$

از مساوی صفر قرار دادن بیرون سیگما داریم :

$$-r^2a_0 x^{r-1}+r a_0 x^{r-1}-r a_0 x^{r-1}=0 \xrightarrow{a_0\neq 0} r^2=0 \rightarrow$$

$r_1=r_2=r=0$ همان ریشه های معادله مشخصه است

حال داخل سیگما را برابر صفر قرار می دهیم تا رابطه بازگشتی حاصل می شود.

$$(n+r-1)(n+r-2)a_{n-1}-(n+r)(n+r-1)a_n+3(n+r-1)a_{n-1}-(n+r)a_n+a_{n-1}=0$$

$$\rightarrow a_n=\frac{-(n+r-1)(n+r-2)-3(n+r-1)-1}{-(n+r)(n+r-1)-(n+r)}a_{n-1} \qquad n\geq 1$$

با جایگذاری $r=0$ جواب حاصل می شود.

$$a_n=\frac{-(n-1)(n-2)-3(n-1)-1}{-n(n-1)-n}a_{n-1} \rightarrow a_n=\frac{-n^2+3n-2-3n+3-1}{-n^2+n-n}a_{n-1}$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$a_n=\frac{-n^2}{-n^2}a_{n-1} \rightarrow a_n=a_{n-1} \qquad n\geq 1$$

$$\begin{cases} n=1 \rightarrow a_1=a_0 \\ n=2 \rightarrow a_2=a_1=a_0 \\ n=3 \rightarrow a_3=a_2=a_0 \end{cases}$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} \xrightarrow{r=0} y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

$$y=a_0+a_0x+a_0x^2+a_0x^3+\cdots \xrightarrow{a_0=1} 1+x+x^2+x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

مثال (۱۸) یک جواب بصورت سری فروبنیوس برای معادله زیر بیابید.

$$x^2y''+x(2x-1)y'+x(x-1)y=0 \xrightarrow{\div x^2} y''+\frac{2x-1}{x}y'+\frac{x-1}{x}y=0$$

$p(x)=\frac{2x-1}{x}$ و $q(x)=\frac{x-1}{x}$ در $x=0$ غیر تحلیلی است پس $x=0$ نقطه غیر عادی محسوب می شود.

$$p_0=\lim_{x\to 0}x\left(\frac{2x-1}{x}\right)=-1$$

$$q_0=\lim_{x\to 0}x^2\left(\frac{x-1}{x}\right)=0$$

$$r(r-1)-r+0=0 \rightarrow r^2-2r=0 \rightarrow \begin{cases} r_1=2 \\ r_2=0 \end{cases}$$

چون $(r_1-r_2=2)$ تفاضل r_1 و r_2 عددی صحیح است پس مسئله را به ازای ریشه بزرگتر حل می کنیم :

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r} \rightarrow y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} \rightarrow y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

با جایگذاری y و y' و y'' در معادله دیفرانسیل داریم :

$$x^2y''+2x^2y'-xy'+x^2y-xy=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r}+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r+1}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r+2}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+r+1}=0$$

توان ها را یکی می کنیم برای این کار در سری دوم و آخر به جای n ، قرار می دهیم $(n-1)$ و در سری چهارم به جای n قرار می دهیم $(n-2)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r}+2\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)a_{n-1}x^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r}+$$

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n+r} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n+r} = 0$$

حال اندیس ها را یکی می کنیم برای این کار کافیست از سری اول و سوم جمله $n=0$ و $n=1$ و از سری دوم و آخر جمله $n=1$ را بنویسیم.

$$r(r-1)a_0x^r + (1+r)ra_1x^{r+1} + 2(r)a_0x^{r+1} - ra_0x^r - (1+r)a_1x^{1+r} - a_0x^{1+r} +$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+r)(n+r-1)a_n + 2(n+r-1)a_{n-1} - (n+r)a_n + a_{n-2} - a_{n-1}\right]x^{n+r} = 0$$

با مساوی صفر قرار دادن ضریب x^r همیشه همان معادله مشخصه حاصل می شود.

ضریب x^r را مساوی صفر قرار می دهیم :

$$a_0(r^2 - r - r) = 0 \xrightarrow{a_0 \neq 0} r^2 - 2r = 0 \quad \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = 0 \end{cases}$$

ضریب x^{r+1} را مساوی صفر قرار می دهیم :

$$(1+r)ra_1 + 2ra_0 - (1+r)a_1 - a_0 = 0 \xrightarrow{r_1=2}$$

$$6a_1 + 4a_0 - 3a_1 - a_0 = 0 \rightarrow 3a_1 + 3a_0 = 0 \rightarrow a_1 = -a_0$$

حال داخل سری را برابر صفر قرار می دهیم.

$$(n+r)(n+r-1)a_n + 2(n+r-1)a_{n-1} - (n+r)a_n + a_{n-2} - a_{n-1} = 0$$

$$\rightarrow (n+r)(n+r-2)a_n = -(2n+2r-3)a_{n-1} - a_{n-2}$$

$$\rightarrow a_n = \frac{-(2n+2r-3)a_{n-1} - a_{n-2}}{(n+r)(n+r-2)} \qquad n \geq 2$$

ریشه بزرگتر $(r_1 = 2)$ را قرار می دهیم تا y_1 حاصل شود.

$$a_n = \frac{-(2n+1)a_{n-1} - a_{n-2}}{(n^2+2n)}$$

$$\begin{cases} n=2 \rightarrow a_2 = \dfrac{-5a_1 - a_0}{8} \xrightarrow{a_1=-a_0} a_2 = \dfrac{1}{2}a_0 \\ n=3 \rightarrow a_3 = \dfrac{-7a_2 - a_1}{15} \xrightarrow{\qquad} a_3 = -\dfrac{1}{6}a_0 \end{cases}$$

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1} \rightarrow y_1 = x^2(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots)$$

$$y_1 = x^2\left(a_0 - a_0x + \frac{1}{2}a_0x^2 - \frac{1}{6}a_0x^3 + \cdots\right)$$

نکته : جواب y_2 مورد بحث ما نیست.

www.riazisara.ir دانلود از سایت ریاضی سرا

۴-۴- تمرین :

(۱) نوع نقاط $x = 0$ را برای معادلات زیر تعیین کنید.

1) $2x^2 y'' - 3xy' + (1+x)y = 0$
2) $3x^2 y'' + 6xy' + (7-x)y = 0$
3) $x^2 y'' + 2xy' + (x^2 - 4)y = 0$
4) $x^2 y'' 2xy' + x^2 y = 0$
5) $(x - x^2)y'' - (3x-2)y' + 5y = 0$
6) $x^2(x+1)y'' + x(x-4)y' + 4y = 0$

(۲) نقاط غیر عادی معادلات زیر را با ذکر نوع معین کنید.

1) $x^2(x+1)y'' + x(x-4)y' + 4y = 0$
2) $x^2 y'' + x(x^2 - 1)y' + (1 - x^2)y = 0$
3) $(1 - x^2)y'' - xy' + 9y = 0$
4) $(x^3 - x)^3 y'' + (x+1)y' + y = 0$
5) $2x(x-2)^2 y'' + 3xy' + (x-2)y = 0$
6) $2x^2 y'' - xy' + (x-1)y = 0$

(۳) معادلات زیر را حول نقطه $x = 0$ به کمک سری های توانی حل کنید.

1) $y'' + 9y = 0$
2) $y'' + 2x^2 y = 0$
3) $2y'' - xy' - 2y = 0$
4) $y'' - x^2 y' - 2xy = 0$
5) $(2 + x^2)y'' + 5xy' + 4y = 0$
6) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$

(۴) در مسائل زیر نشان دهید که $x = 0$ یک نقطه غیر عادی و منظم معادله است پس جواب عمومی را بصورت سری بیابید.

1) $2x^2 y'' + xy' - (1+x)y = 0$
2) $xy'' + (x^2 + 1)y' - y = 0$
3) $x^2 y'' + x(x+1)y' - y = 0$
4) $(x - x^2)y'' - (3x-1)y' - y = 0$
5) $x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$
6) $2x^2 y'' - 5xy' + (6-x)y = 0$
7) $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$
8) $xy'' + y' + 2y = 0$
9) $xy'' + y' + 2xy = 0$
10) $x^2 y'' - 3xy' + 4(1+x)y = 0$

www.riazisara.ir
دانلود از سایت ریاضی سرا