قضیه: فرض کنید تابع g در $x=a$ و تابع f در $g(a)$ پیوسته باشد، در این صورت تابع fog در $x=a$ پیوسته است.

مثال: مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع زیر در $x=2$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{6b\sqrt{x^2-4x+4}}{x^3-8} & , x>2 \\ 3 & , x=2 \\ 2[-x]+a & , x<2 \end{cases} \qquad |x-2|=\begin{cases} x-2 & x\geq 2 \\ -(x-2) & x<2 \end{cases}$$

حل: چون تابع در $x=2$ پیوسته است لذا شرط پیوستگی در $x=2$ برقرار است یعنی:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2) \Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=f(2) \quad (☆)$$

$$\lim_{\substack{x\to 2^+ \\ x>2}} f(x)=\lim_{x\to 2^+} \frac{6b\sqrt{x^2-4x+4}}{x^3-8}=\lim_{x\to 2^+} \frac{6b\sqrt{(x-2)^2}}{x^3-8}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 2^+ \\ x>2}} \frac{6b\,|x-2|}{x^3-8}=\lim_{x\to 2^+} \frac{6b\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}$$

$$=\lim_{x\to 2^+} \frac{6b}{x^2+2x+4}=\frac{6b}{4+4+4}=\frac{6b}{12}=\frac{b}{2} \quad (1)$$

$$\lim_{\substack{x\to 2^- \\ x<2}} f(x)=\lim_{x\to 2^-} 2\overbrace{[-x]}^{-2}+a=-4+a \quad (2)$$

$$x\to 2^- \Rightarrow x<2 \Rightarrow x=1{,}9 \Rightarrow -x=-1{,}9 \Rightarrow [-x]=[-1{,}9]=-2$$

$$f(2)=3 \quad (3)$$

۱ و ۲ و ۳ را در (*) جایگذاری می نمائیم:

$\frac{b}{2} = -4 + a = 3 \Rightarrow \frac{b}{2} = 3 \Rightarrow b = 6$

$-4 + a = 3 \Rightarrow a = 3 + 4 \Rightarrow a = 7$

مثال: پیوستگی تابع $f(x) = [\frac{x+1}{2}] + [\frac{x-1}{2}]$ را در $x=1$ بررسی کنید.

حل: باید شرط پیوستگی این تابع را در $x=1$ بررسی کنیم یعنی

$\lim_{x \to 1} f(x) \overset{?}{=} f(1) \Rightarrow \lim_{x \to 1^+} f(x) \overset{?}{=} \lim_{x \to 1^-} f(x) \overset{?}{=} f(1)$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \overbrace{[\frac{x+1}{2}]}^{1} + \overbrace{[\frac{x-1}{2}]}^{0} = 1$

$x \to 1^+ \Rightarrow x > 1 \Rightarrow 1 < x < 2 \xRightarrow{+1} 2 < x+1 < 3 \xRightarrow{\div 2} 1 < \frac{x+1}{2} < \frac{3}{2}$

$\Rightarrow [\frac{x+1}{2}] = 1$

$x \to 1^+ \Rightarrow x > 1 \Rightarrow 1 < x < 2 \xRightarrow{-1} 0 < x-1 < 1 \xRightarrow{\div 2} 0 < \frac{x-1}{2} < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow [\frac{x-1}{2}] = 0$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \overbrace{[\frac{x+1}{2}]}^{0} + \overbrace{[\frac{x-1}{2}]}^{-1} = -1$

$x \to 1^- \Rightarrow x < 1 \Rightarrow 0 < x < 1 \xRightarrow{+1} 1 < x+1 < 2 \xRightarrow{\div 2} \frac{1}{2} < \frac{x+1}{2} < 1$

$\Rightarrow 0 < \frac{x+1}{2} < 1 \Rightarrow [\frac{x+1}{2}] = 0$

$x \to 1^- \Rightarrow x < 1 \Rightarrow 0 < x < 1 \xRightarrow{-1} -1 < x-1 < 0 \xRightarrow{\div 2} -\frac{1}{2} < \frac{x-1}{2} < 0$

$$\Rightarrow -1 < \frac{x-1}{2} < 0 \Rightarrow \left[\frac{x-1}{2}\right] = -1$$

$$f(1) = \left[\frac{\overbrace{1+1}^{2}}{2}\right] + \left[\frac{\overbrace{1-1}^{0}}{2}\right] = [1] + [0] = 1 + 0 = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) \neq f(1)$$

درنتیجه تابع f در $x=1$ از راست پیوسته است و در $x=1$ پیوسته نمی باشد و ناپیوستگی آن از نوع رفع نشدنی یا اساسی است

زیرا مقدار حد چپ و حد راست با هم برابر نیست و $\lim_{x \to 1} f(x)$ وجود ندارد.

تعریف پیوستگی روی (a,b): می گوییم تابع $y=f(x)$ روی بازه‌ی (a,b) پیوسته است هرگاه تابع در هر نقطه $x=c \in (a,b)$ پیوسته باشد یعنی $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

تعریف پیوستگی روی $(a,b]$: می گوییم تابع $y=f(x)$ روی بازه‌ی $(a,b]$ پیوسته است هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

۱) تابع f روی (a,b) پیوسته باشد.

۲) تابع f در $x=b$ از چپ پیوسته باشد.

تعریف پیوستگی روی $[a,b)$: می گوییم تابع $y=f(x)$ روی بازه‌ی $[a,b)$ پیوسته است هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

۱) تابع f روی (a,b) پیوسته باشد.
۲) تابع f در $x=a$ از راست پیوسته باشد.

تعریف پیوستگی روی $[a,b]$: می‌گوییم تابع $y=f(x)$ روی بازهٔ $[a,b]$ پیوسته است هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

۱) تابع f روی (a,b) پیوسته باشد.
۲) تابع f در $x=a$ از راست پیوسته باشد.
۳) تابع f در $x=b$ از چپ پیوسته باشد.

مثال: فرض کنید $f(x)=(a^2-4a)[x]+\frac{1}{x^2+1}$. مقدار a را طوری بیابید که این تابع در بازهٔ $(0,4)$ پیوسته باشد.

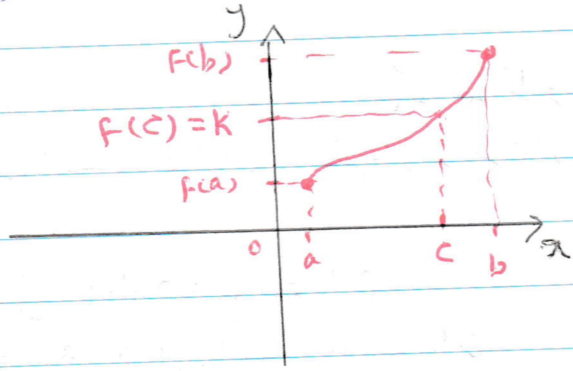
حل: تابع $[x]$ در نقاط ۳ و ۲ و $x=1$ از بازهٔ $(0,4)$ ناپیوسته است. علاوه $\frac{1}{x^2+1}$ در هر نقطه‌ای از بازهٔ $(0,4)$ پیوسته است. بنابراین اینکه تابع f روی $(0,4)$ پیوسته باشد باید ضریب $[x]$ برابر صفر باشد

$$a^2-4a=0 \Rightarrow a(a-4)=0 \begin{cases} a=0 \\ a-4=0 \Rightarrow a=4 \end{cases}$$

قضایای مهم پیوستگی:

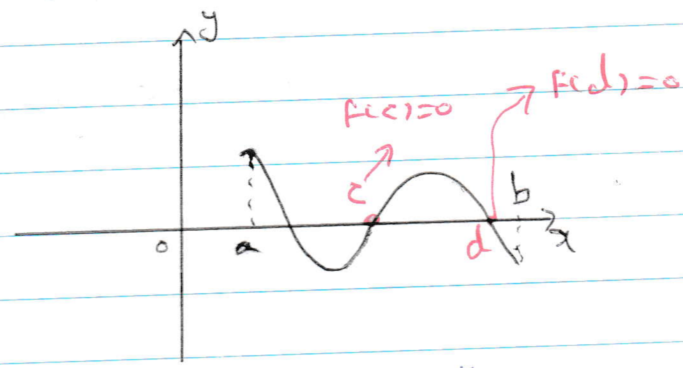
قضیهٔ مقدار میانی: فرض کنید تابع f بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته بوده و $f(a)\neq f(b)$ در این صورت برای هر عدد دلخواه K بین $f(a)$ و

$f(b)$ نقطه ای مانند c بین a و b موجود است به طوری که $f(c)=k$.
یعنی f همه ی مقادیر بین $f(a)$ و $f(b)$ را اختیار می کند (شکل زیر)



قضیه بولتزانو (نتیجه قضیه مقدار میانی): اگر تابع f در بازه ی $[a,b]$ پیوسته باشد و دو عدد $f(a)$ و $f(b)$ مختلف العلامه باشند یعنی

$f(a)f(b)<0$ آنگاه حداقل یک $c\in(a,b)$ وجود دارد به طوری که $f(c)=0$
(یعنی f حداقل یک ریشه در بازهٔ (a,b) وجود دارد)



مثال: تابع $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+x^2$ مفروض است.
الف) نشان دهید که معادله ی $f(x)=0$ در بازه ی $[0,1]$ دارای ریشه است.
ب) نشان دهید که خط $y=\sqrt{17}$ نمودار تابع f را در بازه ی $[2,3]$ قطع می کند.

حل: الف)

$$\left.\begin{aligned} f(0)&=-6=(-1)(-2)(-3)+0 \\ f(1)&=(0)(-1)(-2)+1^2=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(0)\times f(1)=-6\times 1=-6<0$$

در نتیجه بنابر قضیه بولتزانو تابع f در بازه‌ی [۰و۱] حداقل یک ریشه دارد.

ب) تابع f یک تابع چندجمله‌ای است و بنابراین بر $[\overset{a}{2},\overset{b}{3}]$ پیوسته است و همچنین داریم:

$$\begin{cases} f(a)=f(2)=(1)(0)(-1)+2^2=4 \\ f(b)=f(3)=(2)(1)(0)+3^2=9 \end{cases} \Rightarrow 4<\sqrt{17}<9 \Rightarrow f(2)<\sqrt{17}<f(3)$$

لذا بنابر قضیه مقدار میانی عدد $c\in[2,3]$ وجود دارد به طوری که $f(c)=\sqrt{17}$ یعنی خط $y=\sqrt{17}$ نمودار تابع f را قطع می‌کند.

مثال: نشان دهید که تابع $f(x)=\cos(2\pi x)-3x^2$ محور xها را حداقل در یک نقطه از بازه‌ی [۰و۱] قطع می‌کند.

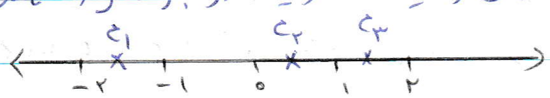
حل: تابع f بر بازه [۰و۱] پیوسته است و همچنین داریم:

$$\begin{cases} f(0)=\cos(0)-0=1 \\ f(1)=\cos 2\pi-3=1-3=-2 \end{cases} \Rightarrow f(0)\times f(1)=1\times(-2)=-2<0$$

در نتیجه بنابر قضیه بولتزانو عدد $c\in(0,1)$ وجود دارد به طوری که $f(c)=0$ یعنی نمودار f محور xها را در $x=c$ قطع می‌کند.

مثال: نشان دهید که هر سه جواب معادله $f(x)=x^3-3x+1=0$ در بازه‌ی [۲و۲−] قرار دارد. (یعنی f دارای دقیقاً سه ریشه در بازه‌ی [۲و۲−] می‌باشد)

حل:



$$\begin{cases} f(-2)=(-2)^3-3(-2)+1=-8+6+1=-1<0 \\ f(-1)=(-1)^3-3(-1)+1=-1+3+1=3>0 \end{cases} \Rightarrow \exists c_1\in(-2,-1)\ ;\ f(c_1)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0^3 - 3(0) + 1 = 1 > 0 \\ f(1) = 1^3 - 3(1) + 1 = -1 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c_2 \in (0,1) \;؛\; f(c_2) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1^3 - 3(1) + 1 = -1 < 0 \\ f(2) = 2^3 - 3(2) + 1 = 3 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c_3 \in (1,2) \;؛\; f(c_3) = 0$$

چون بازه‌های $(-2,-1)$ و $(0,1)$ و $(1,2)$ اشتراکی ندارند پس ریشه‌های c_1، c_2 و c_3 متمایزند.

مثال: نشان دهید که تابع زیر در $\mathbb{R}$ ریشه دارد.

$$f(x) = x^5 - (\sin x)x^4 + x^3 - \cos x \sin x$$

حل: توابع $\sin x$ ، $\cos x$ ، x^3 ، x^4 و x^5 روی $\mathbb{R}$ پیوسته است
و چون f مجموع چند تابع پیوسته است درنتیجه خود تابع f پیوسته است.

همچنین داریم:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^5 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^5 = -\infty$$

درنتیجه اعداد $a, b \in \mathbb{R}$ وجود دارد طوری که $f(a) > 0$ و $f(b) < 0$. بنابراین $f(a)f(b) < 0$. لذا بنابر قضیه بولتزانو حداقل یک c در بازه (a,b) وجود دارد به طوری که $f(c) = 0$ یعنی f در $\mathbb{R}$ حداقل یک ریشه دارد.