تعیین مجانب مایل: برای به دست آوردن مجانب مایل تابع $y=f(x)$ سه راه وجود دارد که به صورت زیر می باشد:

۱) راه حل: اگر $y=ax+b$ معادله ی مجانب مایل تابع f باشد، داریم:

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$$ (شیب خط)

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax)$$

۲) راه تقسیم: صورت کسر را به مخرج کسر، تقسیم می کنیم. ((خارج قسمت تقسیم $=y$)) را معادله ی مجانب مایل گوییم.

۳) راه هم ارزی رادیکال ها: به کمک هم ارزی رادیکال ها مجانب افقی و مایل بسیاری از تابع ها به دست می آید.

مثال: مجانب های هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to1^+}\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{2\times1}{\sqrt{1-1}}=\frac{2}{0^+}=+\infty\\&\lim_{x\to-1^+}\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{2(-1)}{\sqrt{(-1)^2-1}}=\frac{-2}{0^+}=-\infty\end{aligned}\right\}\Rightarrow x=\pm1$$ مجانب قائم هستند

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ x>0}} \frac{2x}{|x|}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = 2 \Rightarrow y=2$$ مجانب افقی

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{|x|}$$

$$= \lim_{\substack{x\to-\infty \\ x<0}} \frac{2x}{|x|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2\cancel{x}}{-\cancel{x}} = -2 \Rightarrow y=-2$$ مجانب افقی

مجانب مایل ندارد.

ب) $f(x) = x + \sqrt{x^2-2x}$ مجانب قائم ندارد

$$\lim_{x\to+\infty} (x+\sqrt{x^2-2x}) = \lim_{x\to+\infty} (x+\sqrt{x^2}) = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ x>0}} (x+|x|)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (x+x) = \lim_{x\to+\infty} 2x = 2(+\infty) = +\infty$$

درنتیجه این تابع مجانب افقی ندارد برای $x\to+\infty$ اما ممکن است برای $x\to+\infty$ دارای مجانب مایل باشد.

$$\lim_{x\to-\infty} (x+\sqrt{x^2-2x}) = \lim_{x\to-\infty} (x+\sqrt{x^2}) = \lim_{\substack{x\to-\infty \\ x<0}} (x+|x|)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} (x-x) = -\infty-(-\infty) = -\infty+\infty$$

$$= \infty - \infty$$ ابهام

مزدوج

$$-\cancel{x^2} + 2x$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x+\sqrt{x^2-2x})}{1} \times \frac{(x-\sqrt{x^2-2x})}{x-\sqrt{x^2-2x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2}-(x^2-2x)}{x-\sqrt{x^2-2x}}$$

Subject :

Year. Month.

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x-\sqrt{x^2}} = \lim_{\substack{x\to-\infty \\ x<0}} \frac{2x}{x-|x|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x-(-x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x+x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{2x}^{\,1}}{\cancel{2x}} = 1 \Rightarrow \boxed{y=1}$$ مجانب افقی

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x^2-2x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x^2}}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x\to+\infty \\ x>0}} \frac{x+|x|}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{a=2}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty} (\underbrace{x}_{\alpha} + \sqrt{x^2-2x} - \underbrace{2x}_{\alpha})$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (-x + \sqrt{x^2-2x}) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-2x} - x) = \infty - \infty$$

مزدوج

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x} - x}{1} \times \frac{\sqrt{x^2-2x}+x}{\sqrt{x^2-2x}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2} - 2x - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-2x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2}+x}$$

$$= \lim_{\substack{x\to+\infty \\ x>0}} \frac{-2x}{|x|+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{x+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2\cancel{x}}{2\cancel{x}} = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{b=-1} \Rightarrow y = ax+b \xRightarrow[b=-1]{a=2} \boxed{y = 2x-1}$$ مجانب مایل

SINACO

ب)

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 1}$$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 1} = \frac{1^2 - 4(1) + 1}{1 - 1} = \frac{1 - 4 + 1}{0} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$x \to 1^+ \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0$

$\Rightarrow x = 1$ مجانب قائم

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} x \quad \begin{cases} \lim_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} x = -\infty \end{cases}$$

در نتیجه این تابع مجانب افقی ندارد اما چون درجه صورت
یک واحد از درجه مخرج بیشتر است لذا مجانب مایل دارد.

از راه تقسیم بدست می‌آوریم:

$$\begin{array}{l|l} x^2 - 4x + 1 & x - 1 \\ \hline \cancel{x^2} - x & x - 3 \\ \hline -\cancel{3x} + 1 & \\ -3x + 3 & \\ \hline -2 & \end{array}$$

$x - 3$ مجانب مایل

$\Rightarrow y = x - 3$ مجانب مایل

تعریف پیوستگی تابع در یک نقطه: می‌گوییم تابع $y=f(x)$ در نقطه $x=a$ پیوسته است هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

۱) $x=a\in D_f$ ۲) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجود باشد ۳) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

یا به طور خلاصه: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

نکته: از نظر هندسی نمودار توابع پیوسته به صورت متصل است و نقطه انفصال یا پرش در نمودار آنها وجود ندارد.

نکته: اگر شرط پیوستگی برقرار نباشد اصطلاحاً می‌گوییم تابع f در $x=a$ ناپیوسته است و به طور کلی دو نوع ناپیوستگی وجود دارد: ۱) ناپیوستگی رفع نشدنی ۲) ناپیوستگی رفع شدنی

تعریف ناپیوستگی رفع نشدنی: اگر در شرط پیوستگی $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجود نباشد اصطلاحاً می‌گوییم تابع f در $x=a$ دارای ناپیوستگی رفع نشدنی یا اساسی می‌باشد.

تعریف ناپیوستگی رفع شدنی: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجود باشد اما $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq f(a)$ اصطلاحاً می‌گوییم تابع f در $x=a$ دارای ناپیوستگی رفع شدنی می‌باشد و برای رفع ناپیوستگی

کافیست مقدار $f(a)$ را برابر با مقدار $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ در نظر بگیریم.

تعریف پیوستگی از راست: می‌گوییم تابع $y=f(x)$ در $x=a$ از راست پیوسته است هرگاه $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

تعریف پیوستگی از چپ: می‌گوییم تابع $y=f(x)$ در $x=a$ از چپ پیوسته است هرگاه $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

قضیه: می‌گوییم تابع $y=f(x)$ در $x=a$ پیوسته است هرگاه از راست و چپ در $x=a$ پیوسته باشد یعنی:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)$$

قضیه: هر تابع چندجمله‌ای در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته می‌باشد.

قضیه: اگر توابع f و g در $x=a$ پیوسته باشند آنگاه توابع $f+g$ و $f-g$ و $f\times g$ در $x=a$ پیوسته می‌باشند یعنی:

الف) $\lim\limits_{x\to a} (f\pm g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = f(a)\pm g(a)$

ب) $\lim\limits_{x\to a} (f\times g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\times \lim\limits_{x\to a} g(x) = f(a)\times g(a)$

قضیه: اگر توابع f و g در $x=a$ پیوسته باشند و $g(a)\neq 0$ آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ در $x=a$ پیوسته است و داریم:

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$$