مثال: $\lim_{x \to 1} [x][x+1] = ?$

حل: $\lim_{x \to 1^+} [x][x+1] = \lim_{x \to 1^+} \overset{1}{[x]}(\overset{1}{[x]}+1) = 1\times 2 = 2$

$x>1 \Rightarrow x = 1/1 \Rightarrow [x] = [1/1] = 1$

$\lim_{x \to 1^-} [x][x+1] = \lim_{x \to 1^-} \overset{0}{[x]}(\overset{0}{[x]}+1) = 0\times 1 = 0$

$x \to 1^- \Rightarrow x<1 \Rightarrow x = 0/99 \Rightarrow [x] = [0/99] = 0$

حد چپ و حد راست باهم برابر نیستند در نتیجه حد وجود ندارد.

مثال: مقدار a را طوری بیابید که تابع زیر در $x=1$ حد داشته باشد:

$$f(x) = \begin{cases} 2^{[x]} + x & , x<1 \\ [-x] + a & , x>1 \end{cases}$$

حل: تابع در $x=1$ حد داشته باشد یعنی اینکه:

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$ (★)

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (\overset{-2}{[-x]} + a) = \boxed{-2+a}$

$x>1$ $\quad x \to 1^+ \Rightarrow x>1 \Rightarrow x = 1/1 \Rightarrow -x = -1/1 \Rightarrow [-x] = [-1/1] = -2$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (2^{\overset{0}{[x]}} + x) = \lim_{x \to 1^-} (2^0 + x) = \boxed{1+1=2}$

$x<1$

$x \to 1^- \Rightarrow x<1 \Rightarrow x = 0/9 \Rightarrow [x] = [0/9] = 0$

با جایگذاری در (★):

$-2+a = 2 \Rightarrow a = 2+2 \Rightarrow \boxed{a=4}$

Year: Month: Date: Subject: ۲

تعریف حد در بی نهایت: اگر بخواهیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ را حساب کنیم به آن حد در بی نهایت می‌گوییم.

مثال: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{[x]}{x} = ?$

حل: $x\to+\infty$ ، $x>0$ ، در جزء صحیح اعداد برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$x-1<[x]\leq x$$

در نتیجه برای $x>0$ داریم:

$$x-1<[x]\leq x \xrightarrow{x\frac{1}{x}} \frac{1}{x}(x-1)<\frac{1}{x}[x]\leq\frac{1}{x}\times x$$

$$\overbrace{1-\frac{1}{x}}^{h(x)} < \frac{[x]}{x} \leq \overbrace{1}^{g(x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1-\frac{1}{+\infty}^{\,0}=1-0=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 1=1$$

در نتیجه بنا بر قضیه فشردگی داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{[x]}{x}=1$$

قضیه: فرض کنید $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ یک چندجمله‌ای از درجه n و $Q_m(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_1x+b_0$ یک چندجمله‌ای از درجه m باشد که $a_n\neq0$ و $b_m\neq0$ در این صورت داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}\frac{a_n}{b_m}, & n=m\\ 0, & n<m\\ +\infty, & n>m,\ \frac{a_n}{b_m}>0\end{cases}$$

نکته ۱: اگر c یک عدد باشد ۲ حالت

$$\text{if } c>0 \Rightarrow c\times(+\infty)=+\infty$$

$$\text{if } c>0 \Rightarrow c\times(-\infty)=-\infty$$

$$\text{if } c<0 \Rightarrow c\times(+\infty)=-\infty$$

$$\text{if } c<0 \Rightarrow c\times(-\infty)=+\infty$$

مثال: حدهای زیر را محاسبه نمایید.

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x+3}{2x-9}=\dfrac{4}{2}=2 \qquad (n=m=1)$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+x+5}{4x^3+3}=0 \qquad (n=2,\ m=3,\ n<m)$

پ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x+4}{\sqrt{2x^2-5}}=? \qquad |x|=\begin{cases} x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+4}{\sqrt{2x^2-5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+4}{\sqrt{2x^2}}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ x>0}}\frac{2x+4}{\sqrt{2}\,|x|}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+4}{\sqrt{2}\,x}=\frac{2}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}}=\sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+4}{\sqrt{2x^2-5}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+4}{\sqrt{2x^2}}=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ x<0}}\frac{2x+4}{\sqrt{2}\,|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+4}{-\sqrt{2}\,x}$$

$$=\frac{2}{-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-\frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}}=-\sqrt{2}$$

ت) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)=?$

Year: Month: Date: Subject: ۴

حل:

$$\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+3}-x)=\infty-\infty$$ ابهام

مزدوج

$$\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+3}-x)\times\frac{\sqrt{x^2+3}+x}{\sqrt{x^2+3}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\cancel{x^2}+3-\cancel{x^2})}{\sqrt{x^2+3}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2}+x}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\x>0}}\frac{3x}{|x|+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{2x}=\boxed{\frac{3}{2}}$$

تعریف حد نامتناهی: اگر $\lim_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty$ یا $\lim_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty$

یا $\lim_{x\to a}f(x)=\pm\infty$ باشد به آن حد نامتناهی می‌گوییم.

قضیه: اگر $\lim_{x\to a,\,a^+,\,a^-}f(x)=L$ و $\lim_{x\to a,\,a^+,\,a^-}g(x)=0$ آنگاه:

الف) اگر $L>0$ و $g(x)$ با مقادیر مثبت به صفر نزدیک شود (0^+) آنگاه

$$\lim_{x\to a,\,a^+,\,a^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L>0}{0^+}=+\infty$$

ب) اگر $L>0$ و $g(x)$ با مقادیر منفی به صفر نزدیک شود (0^-) آنگاه

$$\lim_{x\to a,\,a^+,\,a^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L>0}{0^-}=-\infty$$

پ) اگر $L>0$ و $g(x)$ با مقادیر مثبت به صفر نزدیک شود (0^+) آنگاه:

$$\lim_{x \to a, a^+, a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L<0}{0^+} = -\infty$$

ت) اگر $L>0$ و $g(x)$ با مقادیر منفی به صفر نزدیک شود (0^-) آنگاه:

$$\lim_{x \to a, a^+, a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L<0}{0^-} = +\infty$$

مثال: $\lim_{x \to 2^-} \frac{[x^2]-4}{x^2-4} = ?$

حل: $x \to 2^- \Rightarrow x<2 \Rightarrow \overset{1/7}{\sqrt{3}} < x < 2 \xrightarrow[2]{\text{به توان}} 3 < x^2 < 4$

$\Rightarrow [x^2] = 3$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{[x^2]-4}{x^2-4} = \lim_{x \to 2^-} \frac{3-4}{x^2-4} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-1}{x^2-4}$$

$$= \frac{-1}{2^2-4} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$x \to 2^- \Rightarrow x<2 \xrightarrow[2]{\text{به توان}} x^2 < 4 \Rightarrow x^2-4<0$

مثال: $\lim_{x \to 2^+} \frac{(-1)^{[x]}}{4-x^2} = ?$

حل: $x \to 2^+ \Rightarrow x>2 \Rightarrow x=2/1 \Rightarrow [x]=[2/1]=2$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{(-1)^{[x]}}{4-x^2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(-1)^2}{4-x^2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{4-x^2} = \frac{1}{4-4} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$x \to 2^+ \Rightarrow x>2 \xrightarrow{\text{به توان } 2} x^2>4 \Rightarrow x^2-4>0$

تعریف مجانب: مجانب ها خطوطی هستند که نمودار تابع به این خطوط نزدیک می شوند اما نمودار تابع از این خطوط عبور نمی کند. مجانب ها سه نوع هستند: ۱) مجانب قائم ۲) مجانب افقی ۳) مجانب مایل

تعریف مجانب قائم: خط $x=a$ را مجانب قائم تابع $y=f(x)$ گوییم هرگاه حداقل یکی از چهار شرط زیر برقرار باشد:

1) $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ 2) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

3) $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ 4) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

تعریف مجانب افقی: خط افقی $y=b$ را مجانب افقی تابع $y=f(x)$ گوییم هرگاه حداقل یکی از دو شرط زیر برقرار باشد:

1) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$ 2) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$

نکته ۱: مجانب قائم بیشتر در توابع کسری اتفاق می افتد در ریشه های مخرج به شرط آنکه ریشه مخرج، ریشه صورت نباشد زیرا اگر ریشه مخرج، ریشه صورت باشد ابهام $\frac{0}{0}$ اتفاق می افتد و باید رفع ابهام کنیم اگر بعد از رفع ابهام جواب حد $+\infty$ یا $-\infty$ شود آنگاه ریشه مخرج مجانب قائم است و اگر بعد از رفع ابهام جواب حد عدد

شود آنگاه ریشه مخرج مجانب قائم نمی باشد.

نکته ۲: برای تعیین مجانب افقی یک تابع ($y=f(x)$) کافیست $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ را محاسبه نمائیم و اگر عدد $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$ باشد آنگاه (جواب عددی نهایت $=y$) مجانب افقی می باشد.

نکته ۳: یک تابع کسری که صورت و مخرج آن دو چندجمله ای است درصورتی مجانب افقی دارد که درجه صورت کوچکتر یا مساوی درجه مخرج باشد.

تعریف مجانب مایل: خط مایل $y=ax+b$ مجانب مایل برای تابع $y=f(x)$ است هرگاه حداقل یکی دو شرط زیر برقرار باشد:

۱) $\lim_{x\to+\infty} |f(x)-(ax+b)|=0$

۲) $\lim_{x\to-\infty} |f(x)-(ax+b)|=0$

نکته ۴: فرض کنید $y=f(x)$ یک تابع دلخواه باشد اگر $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ ممکن است تابع $f(x)$ مجانب مایل داشته باشد.

نکته ۵: یک تابع کسری درصورتی مجانب مایل دارد که اولاً درجه صورت کسر، دقیقاً یک واحد از درجه مخرج بیشتر باشد و ثانیاً اگر صورت کسر را بر مخرج کسر تقسیم کنیم خارج قسمت به شکل $ax+b$ باشد.