ج) روش عملگر اپراتور معکوس

$$D^{-1} = \frac{1}{D} = \int$$

مثال:

$$D^{-3}(x) = ?$$

حل:

$$D^{-3}(x) = D^{-2}D^{-1}(x) = D^{-2}\int x\,dx = D^{-2}\left(\frac{x^2}{2} + c_1\right)$$

$$= D^{-1}D^{-1}\left(\frac{x^2}{2} + c_1\right) = D^{-1}\int\left(\frac{x^2}{2} + c_1\right)dx$$

$$= D^{-1}\left(\frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2\right) = \int\left(\frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2\right)dx$$

$$= \frac{x^4}{24} + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

$$D^{-1}(\sin x) = \int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

قضیه: اگر α ثابت باشد آنگاه

$$L(D)e^{\alpha x} = L(\alpha)\,e^{\alpha x}$$

مثال:

$$(6D^2 + 3D + 1)\,e^{3x} = ?$$

حل:

$$(6(3)^2 + 3(3) + 1)\,e^{3x} = 64\,e^{3x}$$

قضیه: اگر α ثابت باشد و $v(x)$ تابعی برحسب x باشد آنگاه

$$L(D)\left(e^{\alpha x}\,v(x)\right) = e^{\alpha x}\,L(D+\alpha)\,v(x)$$

منظور از $v(x)$ توابعی مانند چندجمله‌ای یا مثلثاتی هستند

مثال:

$$(D^2-4D-1)(e^{2x}x^3) = e^{2x}\left((D+2)^2-4(D+2)+1\right)x^3$$

$$= e^{2x}(D^2+4D+4-4D-8+1)x^3$$

$$= e^{2x}(D^2-3)x^3$$

$$= e^{2x}(6x-3x^3)$$

قضیه: اگر β ثابت باشد

$$L(D^2)\sin\beta x = L(-\beta^2)\sin\beta x$$

$$L(D^2)\cos\beta x = L(-\beta^2)\cos\beta x$$

مثال:

$$(D^4+3D^2+1)\sin 2x = ?$$

$$(D^4+3D^2+1)\sin 2x = \left((D^2)^2+3D^2+1\right)\sin 2x$$

$$= \left((-2^2)^2+3(-2^2)+1\right)\sin 2x$$

$$= (16-12+1)\sin 2x$$

$$= 4\sin 2x$$

درصورتیکه D توان فرد داشته باشد در مزدوج ضرب می‌کنیم تا توان زوج ظاهر شود.

روش عملگر معکوس: اگر $L(D)$ یک چندجمله‌ای اپراتوری یا عملگری باشد معکوس $L(D)$ را با $\frac{1}{L(D)}$ یا $L^{-1}(D)$ نمایش می‌دهند

(I) $L(D)y = f(x) \Rightarrow y = \frac{1}{L(D)}f(x)$

ص ۵۲

حالت های ممکن معادله (I)

الف) اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای از x باشد آنگاه $L(D)$ را تشکیل داده و تا حد ممکن تجزیه کرده و پس از تفکیک کسر از اطلاعات ریاضی ۱ برای حل آنها کمک می گیریم

$$1+D+D^2+D^3+\cdots+D^n=\frac{1-D^{n+1}}{1-D}$$

$$\frac{1}{1-D}f(x)=(1+D+D^2+\cdots+D^n)f(x)$$

$$\frac{1}{1+D}f(x)=(1-D+D^2-D^3+\cdots+D^n)f(x)$$

مثال:

$$y'''+2y''=5x^3+7$$

به روش عملگر معکوس بیابید

$$r^3+2r^2=0 \Rightarrow r^2(r+2)=0 \rightarrow r_1=r_2=0,\quad r_3=-2$$

$$y_g=c_1+c_2x+c_3e^{-2x}$$

$$(D^3+2D^2)y=5x^3+7 \Rightarrow y_p=\frac{1}{D^2(D+2)}(5x^3+7)$$

$$y_p=D^{-2}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{1+D/2}(5x^3+7)\right)=D^{-2}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{D}{2}+\frac{D^2}{4}-\frac{D^3}{8}\right)(5x^3-7)\right]$$

$$=D^{-2}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{D}{4}+\frac{D^2}{8}-\frac{D^3}{16}\right)(5x^3-7)\right]$$

$$=D^{-2}\left[\frac{5}{2}x^3-\frac{7}{2}-\frac{15x^2}{4}+\frac{15x}{4}-\frac{30}{16}\right]=D^{-1}\left(\frac{5x^4}{8}-\frac{7}{2}x-\frac{15x^3}{12}+\frac{15x^2}{8}-\frac{30}{16}x\right]$$

$$y_p=\frac{1}{8}x^5-\frac{5}{16}x^4+\frac{5}{8}x^3-\frac{43}{16}x^2$$

$$y=y_g+y_p$$

ب) اگر $L(D)y=f(x)$ که در آن $f(x)$ یک تابع نمایی باشد آنگاه اگر

$f(x)=Ae^{\alpha x}$ و $L(\alpha)\neq 0$

یعنی α ریشه معادله مفسر نباشد

جواب خصوصی بصورت $y_p=\dfrac{Ae^{\alpha x}}{L(\alpha)}$ خواهد بود

مثال:

$$y''+y'+y=2e^{-x}$$

حل: $r^2+r+1=0 \rightarrow r=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$y_g=e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$$(D^2+D+1)y=2e^{-x}\Rightarrow y_p=\frac{2e^{-x}}{D^2+D+1}=\frac{2e^{-x}}{(-1)^2-1+1}=2e^{-x}$$

$$y_p=2e^{2x}$$

$$y=y_g+y_p$$

ج) اگر $f(x)$ یک تابع مثلثاتی باشد اگر

$$L(D^2)y=k\sin\beta x$$

$$L(D^2)y=k\cos\beta x$$

و $L(-\beta^2)\neq 0$ یعنی ریشه معادله مفسر نباشد آنگاه جواب خصوصی بصورت زیر می‌باشد.

برای $\sin\beta x$ $\Rightarrow y_p=\dfrac{k\sin\beta x}{L(-\beta^2)}$

برای $\cos\beta x$ $\Rightarrow y_p=\dfrac{k\cos\beta x}{L(-\beta^2)}$

در صورتیکه توان D فرد باشد در مزدوج ضرب کرده، تا توان زوج حاصل شود.

مثل

$y'' + y' - 2y = \cos 2x$

م: $r^2 + r - 2 = 0 \longrightarrow (r+2)(r-1) = 0 \longrightarrow r = -2,\ r = 1$

$$y_g = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$$

$$(D^2 + D - 2)y = \cos 2x \Rightarrow y_p = \frac{1}{D^2 + D - 2} \cos 2x$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{(-2^2) + D - 2} \cos 2x$$

$$= \frac{1}{D - 6} \cos 2x$$

$$= \frac{1}{D - 6} \times \frac{D + 6}{D + 6} \cos 2x$$

$$= (D + 6) \frac{1}{D^2 - 36} \cos 2x$$

$$= (D + 6) \frac{1}{(-2^2) - 36} \cos 2x$$

$$= (D + 6) \frac{\cos 2x}{-40}$$

$$= \frac{\sin 2x}{20} - \frac{3}{20} \cos 2x$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{\sin 2x}{20} - \frac{3}{20} \cos 2x$$

$$y = y_g + y_p$$