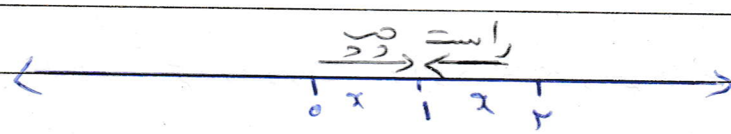
حد و پیوستگی:

می‌دانیم که در ضابطه‌ی تابع یعنی در $y=f(x)$ ، x متغیر مستقل و y متغیر وابسته است در نتیجه y به x وابسته است. در نتیجه اگر x شروع به حرکت کند و به عددی مانند a نزدیک شود به دلیل وابستگی y به x ، y هم حرکت می‌کند و به عددی مانند L نزدیک می‌شود. ما در بحث حد به دنبال این هستیم که اگر x به عددی مانند a نزدیک شود y یعنی $f(x)$ به چه عددی نزدیک می‌شود و آن را با نماد $\lim_{x\to a} f(x) = ?$ نمایش می‌دهیم.

مثال: رفتار تابع $y=x+1$ را در نزدیکی نقطه‌ی $x=1$ بررسی نمائید.

حل: رفتار این تابع را در نزدیکی $x=1$ با کمک جدول مقادیر بررسی می‌نمائیم.



در واقع x از دو طرف به ① نزدیک می‌شود یکی از راست و یکی هم از چپ. در نتیجه رفتار این تابع را در نزدیکی $x=1$ به کمک دو جدول مقادیر بررسی می‌نمائیم:

جدول مقادیر برای وقتی که x از راست به ① نزدیک می‌شود:

x	۲	۱/۷۵	۱/۵	۱/۲۵	۱/۲	۱/۰۲	۱/۰۰۲
$y=x+1$	۳	۲/۷۵	۲/۵	۲/۲۵	۲/۲	۲/۰۲	۲/۰۰۲

با توجه به این جدول وقتی x از راست به ① نزدیک می‌شود y یعنی $f(x)$ به عدد ② نزدیک می‌شود.

جدول مقادیر برای وقتی که x از چپ به ① نزدیک می‌شود:

استاد صمیمی فر

Year: Month: Date: Subject: ۲

x	۰	۰٫۲۵	۰٫۵	۰٫۷۵	۰٫۹	۰٫۹۹	۰٫۹۹۹
$y=x+1$	۱	۱٫۲۵	۱٫۵	۱٫۷۵	۱٫۹	۱٫۹۹	۱٫۹۹۹

با توجه به این جدول وقتی x از چپ به عدد ۱ نزدیک می‌شود y یعنی $f(x)$ به ۲ نزدیک می‌شود.

از این دو جدول نتیجه می‌گیریم که وقتی x به عدد ۱ نزدیک می‌شود y یعنی $f(x)$ به عدد ۲ نزدیک می‌شود. یعنی

$$\lim_{x\to 1} f(x)=2 \Rightarrow \lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

نکته: اگر $y=f(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد آنگاه

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=f(a)}$$

قضیه: حد یک تابع در صورت وجود منحصر به فرد است.

قضایای حد:

قضیه ۱: اگر m و b دو عدد ثابت باشند و $f(x)=mx+b$ آنگاه:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}(mx+b)=ma+b$$

قضیه ۲: فرض کنیم $\lim_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim_{x\to a} g(x)=L_2$، آنگاه

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)=L_1\pm L_2$$

قضیه ۳: اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ باشد آنگاه $\lim_{x\to a}[f(x)-L]=0$

قضیه ۴: اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim_{x\to a} g(x)=L_2$ باشد، آنگاه

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\times\lim_{x\to a} g(x)=L_1\times L_2$$

قضیه ۵: اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L\neq 0$ باشد، آنگاه

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{L}$$

قضیه ۶: اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim_{x\to a} g(x)=L_2\neq 0$ باشد، داریم

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$$

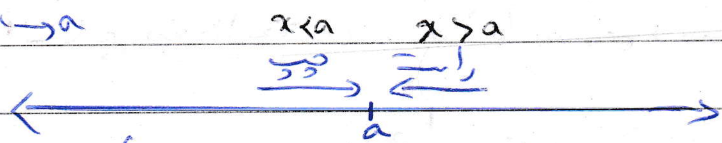
قضیه ۷: اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ باشد، آنگاه

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=\left|\lim_{x\to a} f(x)\right|=|L|$$

قضیه ۸: اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ باشد، برای هر عدد صحیح و مثبت n داریم:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L}$$

حد چپ و حد راست:



تعریف حد راست: وقتی x از سمت راست به عدد $x=a$ نزدیک می‌شود اصطلاحاً به آن حد راست می‌گوییم و با نماد زیر نمایش می‌دهیم:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=?$$

$x\to a^+$ دو چیز را نشان می‌دهد: ① نشان می‌دهد که از سمت راست به $x=a$ نزدیک می‌شویم ② نشان می‌دهد که x هایی که از سمت راست به $x=a$ نزدیک می‌شوند از a بزرگتر هستند

تعریف حد چپ: وقتی x از سمت چپ به عدد $x=a$ نزدیک می‌شود اصطلاحاً به آن حد چپ می‌گوییم و با نماد زیر نمایش می‌دهیم:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=?$$

$x\to a^-$ دو چیز را نشان می دهد: ۱) نشان می دهد که از سمت چپ به $x=a$ نزدیک می شویم ۲) نشان می دهد که x هایی که از سمت چپ به $x=a$ نزدیک می شوند از a کوچکتر هستند.

قضیه: $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود دارد اگر و تنها اگر $\lim_{x\to a^+} f(x)$ و $\lim_{x\to a^-} f(x)$ وجود داشته و با هم مساوی باشند.

نکته: حد چپ و حد راست برای محاسبه حد ۴ دسته تابع و در نقاط خاص استفاده می شود:

۱- تابع چند ضابطه ای در نقاط مرزی دامنه

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x>2 \\ 3x-2 & x<2 \end{cases}$$

نقطه مرزی دامنه

۲- تابع قدرمطلق در ریشه عبارت درون قدرمطلق

۳- تابع جزء صحیح در همه اعداد

۴- تابع رادیکالی با فرجه زوج در ریشه عبارت زیر رادیکال

مثال: $\lim_{x\to 3}([x]+[4-x])=?$

حل: $\lim_{x\to 3^+}(\overbrace{[x]}^{3}+\overbrace{[4-x]}^{0}) = \boxed{3}$

$x\to 3^+ \Rightarrow x>3 \Rightarrow x=3.2 \Rightarrow [x]=[3.2]=3$

$4-x=4-3.2=0.8 \Rightarrow [4-x]=[0.8]=0$

$$\lim_{x\to 3^-}(\overbrace{[x]}^{2}+\overbrace{[4-x]}^{1})=\boxed{3}$$

$$x\to 3^- \Rightarrow x<3 \Rightarrow x=2/9 \Rightarrow [2/9]=[x]=2$$

$$4-x=4-2/9=1/1 \Rightarrow [4-x]=[1/1]=1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+}([x]+[4-x])=\lim_{x\to 3^-}([x]+[4-x])=3$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3}([x]+[4-x])=\boxed{3}$$

قضیه فشردگی (ساندویچ): فرض کنیم در یک همسایگی محذوف a ، $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$ و فرض کنیم $\lim_{x\to a}h(x)=\lim_{x\to a}g(x)=L$. در این صورت حد تابع $f(x)$ وقتی $x\to a$ ، موجود بوده و داریم $\lim_{x\to a}f(x)=L$.

مثال: $\lim_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]$ را به کمک قضیه ی فشردگی بدست آورید.

حل: می دانیم به ازای هر $x\neq 0$ ، $(x-1<[x]\leq x)$

$$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\leq\frac{1}{x}$$

با ضرب طرفین نامساوی فوق در x ، با توجه به علامت x ، داریم:

حد راست: $x>0 \Rightarrow 1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\leq 1$,

حد چپ: $x<0 \Rightarrow 1-x>x\left[\frac{1}{x}\right]\geq 1$

$$\left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to 0}(1-x)=1-0=1\\ \lim_{x\to 0}1=1\end{array}\right.$$

از نامساوی های بالا، با استفاده از قضیه ی فشردگی، نتیجه می شود که حد چپ و حد راست $x\left[\frac{1}{x}\right]$ وقتی که $x\to 0$ ، برابر 1 است، پس $\boxed{\lim x\left[\frac{1}{x}\right]=1}$

نکته: به کمک قضیه فشار می توان ثابت کرد که:

$$1)\ \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \qquad 2)\ \lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1$$

$$3)\ \lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{\sin\theta} = 1 \qquad 4)\ \lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{\tan\theta} = 1$$

$$5)\ \lim_{x \to 0} \frac{\sin mx}{\tan nx} = \frac{m}{n} \qquad 6)\ \lim_{x \to 0} \frac{\sin mx}{nx} = \frac{m}{n}$$

$$7)\ \lim_{x \to 0} \frac{\tan mx}{nx} = \frac{m}{n}$$

حالتهای ابهام: عبارتند از: ∞^0 و $1^{\pm\infty}$ و 0^0 و $0\times(\pm\infty)$ و $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ و $\infty-\infty$ و $\frac{0}{0}$

رفع ابهام $\frac{0}{0}$: ابهام $\frac{0}{0}$ در توابع کسری اتفاق می افتد وقتی که هم در صورت و هم در مخرج هر دو صفر شود. برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ ابتدا باید عامل صفر کننده را شناسایی نمائیم که اگر x به a میل کند آنگاه $x-a$ عامل صفر کننده می باشد. سپس باید این عامل صفر کننده یعنی $x-a$ را به کمک تجزیه، گویا کردن رادیکالها و یا تقسیم چندجمله ای بر چندجمله ای عامل صفر کننده $x-a$ را در صورت و مخرج ظاهر نموده و سپس ساده می نمائیم تا ابهام برطرف شود و جواب بدست آید.

نکته: گاهی اوقات در رفع ابهام $\frac{0}{0}$ از تغییر متغیر استفاده می نمائیم.

مثال: حدهای زیر را محاسبه نمائید.

الف) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 - 6x + 5} = ?$

$= \frac{\sqrt[3]{1}-1}{1^2-6(1)+5} = \frac{1-1}{1-6+5} = \frac{0}{0}$ (عامل صفر کننده $x-1 \Rightarrow 1 \leftarrow x$)

یادآوری (اتحاد چاق و لاغر):

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

چاق و لاغر تفاضل

$$\lim_{x\to1} \frac{\overbrace{\sqrt[3]{x}}^{a}-\overbrace{1}^{b}}{x^2-6x+5}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = \lim_{x\to1}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x-5)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$$

اتحاد جمله مشترک

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x-5)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} = \frac{1}{\underbrace{(1-5)}_{-4}\underbrace{(\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1}+1)}_{3}} = -\frac{1}{12}$$

ب) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+64}-4}{\sqrt{x+64}-8}=?$

عامل صفر کننده

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+64}-4}{\sqrt{x+64}-8} = \frac{\sqrt[3]{64}-4}{\sqrt{64}-8} = \frac{4-4}{8-8}=\frac{0}{0}$$ $(x\to0 \Rightarrow x-0=\hat{x})$

تغییر متغیر $x+64=t \xrightarrow{x\to0} t\to64$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+64}-4}{\sqrt{x+64}-8} =$$

چاق و لاغر تفاضل

$$\lim_{t\to64}\frac{\overbrace{\sqrt[3]{t}}^{a}-\overbrace{4}^{b}}{\sqrt{t}-8}\times\frac{(\sqrt[3]{t^2}+4\sqrt[3]{t}+4^2)\times(\sqrt{t}+8)}{(\sqrt[3]{t^2}+4\sqrt[3]{t}+4^2)\times(\sqrt{t}+8)}$$

اتحاد مزدوج

$$=\lim_{t\to64}\frac{\cancel{(t-64)}(\sqrt{t}+8)}{\cancel{(t-64)}(\sqrt[3]{t^2}+4\sqrt[3]{t}+16)}$$

$$=\lim_{t\to64}\frac{(\sqrt{t}+8)}{\sqrt[3]{t^2}+4\sqrt[3]{t}+16} = \frac{\sqrt{64}+8}{\sqrt[3]{64^2}+4\sqrt[3]{64}+16} = \frac{8+8}{16+16+16} = \frac{\cancel{16}}{3\times\cancel{16}}$$

$$\sqrt[3]{64^2} = \sqrt[3]{(4^3)^2} = \sqrt[3]{4^{3\times 2}} = 4^2 = 16$$

نکته:
$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1)$$

ب) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - 1} = ?$

می خواهیم از تغییر متغیر استفاده کنیم چون ۳ تا رادیکال با فرجه های مختلف داریم لذا ک.م.م این فرجه ها را در نظر می گیریم

$[2,3,4] = 12$ تغییر متغیر $x = t^{12}$

$$x \to 1 \Downarrow \quad t \to 1$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{t\to 1} \frac{\sqrt[4]{t^{12}} - \sqrt[3]{t^{12}}}{\sqrt{t^{12}} - 1} = \lim_{t\to 1} \frac{t^3 - t^4}{t^6 - 1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

($t \to 1 \Rightarrow t - 1$ عامل صفرکننده)

$$= \lim_{t\to 1} \frac{t^3(1-t)}{(t-1)(t^5+t^4+t^3+t^2+t+1)} = \lim_{t\to 1} \frac{-t^3\cancel{(t-1)}}{\cancel{(t-1)}(t^5+t^4+t^3+t^2+t+1)}$$

$$= \frac{-1}{1+1+1+1+1+1} = -\frac{1}{6}$$

ج) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{x + \sin x} = ?$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{x + \sin x} = \frac{0\sin 0}{0 + \sin 0} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\cancel{\sin x}}{\cancel{\sin x}\left(\frac{x}{\sin x} + 1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\frac{x}{\sin x} + 1} = \frac{0}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

Year: Month: Date: Subject: ۹

ذ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x \tan 2x - \tan^2 3x}{x^2} = ?\ \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x \tan 2x - \tan^2 3x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x \tan 2x}{x^2} - \frac{\tan^2 3x}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\frac{\tan x}{x}}_{1} \times 2\,\underbrace{\frac{\tan 2x}{2x}}_{1} - 3\,\underbrace{\frac{\tan 3x}{3x}}_{1} \times 3\,\underbrace{\frac{\tan 3x}{3x}}_{1}\right)$$

$$= 2 - 9 = -7$$

ر) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\sin x}}{x^3} = ?\ \left(\dfrac{0}{0}\right)$

صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم مزدوج

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3} \times \frac{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+\tan x - (1+\sin x)}{x^3\left(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1}+\tan x - \cancel{1} - \sin x}{x^3\left(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin x}{1}}{x^3\left(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x - \sin x \cos x}{\cos x}}{x^3\left(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x\,(\underbrace{1-\cos x}_{2\sin^2\frac{x}{2}})}{x^3 \cos x\left(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x\left(2\sin^2 \frac{x}{2}\right)}{x^3 \cos x\left(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} \times \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{1} \times \frac{2}{4}\,\underbrace{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}_{1} \times \frac{1}{2}\,\underbrace{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}_{1} \times \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1+\tan x}}_{1} + \underbrace{\sqrt{1+\sin x}}_{1}}$$

$$= 1\times 1\times 1\times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Year: Month: Date: Subject: ۱۰

فرمول‌های مورد استفاده در مثال قبل :

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \xrightarrow[\text{کمان}]{\text{نصف}} \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow 1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \xrightarrow[\text{کمان}]{\text{نصف}} \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow 1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

2) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x-\frac{\pi}{3}} = ?$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x-\frac{\pi}{3}} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{0} = \frac{0}{0}$$

تغییر متغیر :

$$x-\frac{\pi}{3} = t \xrightarrow{x\to\frac{\pi}{3}} t\to 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x = t+\frac{\pi}{3}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{x-\frac{\pi}{3}} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin(\overset{\alpha}{t}+\overset{\beta}{\frac{\pi}{3}})-\frac{\sqrt{3}}{2}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\sin t\overbrace{\cos\frac{\pi}{3}}^{\frac{1}{2}}+\cos t\overbrace{\sin\frac{\pi}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t-\frac{\sqrt{3}}{2}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin t+\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos t-1)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin t-\frac{\sqrt{3}}{2}\overbrace{(1-\cos t)}^{2\sin^2\frac{t}{2}}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2}\sin t - \sqrt{3}\sin^2\frac{t}{2}}{t} = \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{2}\frac{\sin t}{t} - \sqrt{3}\,\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{t}\right]$$

$$= \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{2}\overbrace{\frac{\sin t}{t}}^{1} - \sqrt{3}\overbrace{\left(\frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \times \overbrace{\sin\frac{t}{2}}^{0}\right)}^{0}\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\times 0\right) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

ج) $\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x} = ?$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{1-1} = \frac{0}{0}$$

تغییر متغیر:

$$x-1 = t \Rightarrow x = t+1$$

$$x\to 1 \Downarrow$$

$$t\to 0$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{\underbrace{\underbrace{1-x}_{-(x-1)}}_{t}} = \lim_{t\to 0}\frac{\cos\frac{\pi}{2}(t+1)}{-t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\cos(\overbrace{\frac{\pi}{2}t}^{\alpha} + \overbrace{\frac{\pi}{2}}^{\beta})}{-t} = \lim_{t\to 0}\frac{\overbrace{\cos\frac{\pi}{2}t\cos\frac{\pi}{2}}^{0} - \sin\frac{\pi}{2}t\,\overbrace{\sin\frac{\pi}{2}}^{1}}{-t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{-\sin\frac{\pi}{2}t}{-t} = \lim_{t\to 0}\frac{\pi}{2}\overbrace{\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}}^{1} = \frac{\pi}{2}$$