است. و در آخر جواب خصوصی متناظر با $g_3(x)$ را می‌نویسیم. چون ۴ یکبار ریشه معادله شاخصی است و $k=1$ پس

$$y_{p_3}=x(h'_1x+h'_0)=h'_1x^2+h'_0x$$

است. بنابراین $y_p=y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3}$ است.

روش تغییر پارامترها یا روش لاگرانژ

فرض کنیم دو جواب مستقل خطی (پایه جواب) y_1 و y_2 از معادله $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ را در اختیار داریم. سوال طبیعی به ذهن می‌رسد که آیا با کمک این دو پایه جواب می‌توان یک جواب خصوصی مانند y_p برای معادله دیفرانسیل غیر همگن $y''+p(x)y'+q(x)y=g(x)$ پیدا کرد؟ برای پاسخ به سوال بالا، بیایید فرض کنیم چنین کاری را بتوانیم انجام دهیم، یعنی داشته باشیم $y_p=u_1(x)y_1+u_2(x)y_2$. بنابراین $y'_p=u'_1y_1+u_1y'_1+u'_2y_2+u_2y'_2$. بیایید کمی توقع خودمان را بکاهیم و یک محدودیت دیگر برای خودمان قائل شویم و فرض کنیم $u'_1y_1+u'_2y_2=0$. لذا $y_p=u_1y'_1+u_2y'_2$ و $y''_p=u_1y''_1+u_1y'_1+u'_2y'_2+u_2y''_2$. باجایگذاری داریم

$$\begin{aligned}
&u_1y''_1+u_1y'_1+u'_2y'_2+u_2y''_2+p(x)(u_1y'_1+u_2y'_2)+q(x)(u_1y_1+u_2y_2)\\
&=g(x)\\
&u_1[y''_1+p(x)y'_1+q(x)y_1]+u_2[y''_2+p(x)y'_2+q(x)y_2]+u'_1y'_1+u'_2y'_2=g(x)\\
&u'_1y'_1+u'_2y'_2=g(x)
\end{aligned}$$

لذا دستگاه زیر حاصل می‌شود

$$\begin{cases}u'_1y_1+u'_2y_2=0\\ u'_1y'_1+u'_2y'_2=g(x)\end{cases}$$

دستگاه بالا جواب دارد زیرا $W(y_1,y_2)\neq 0$ و با حل این دستگاه به روش کرامر (اگر روش کرامر را به خاطر ندارید فصل ۵ را ببینید) داریم

$$\begin{cases}
u'_1=\dfrac{det\begin{pmatrix}0 & y_2\\ g(x) & y'_2\end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix}y_1 & y_2\\ y'_1 & y'_2\end{pmatrix}}=\frac{-g(x)y_2}{W(y_1,y_2)}\ \Rightarrow\ u_1=\int\frac{-y_2g(x)}{W(y_1,y_2)}dx\\[2ex]
u'_2=\dfrac{det\begin{pmatrix}y_1 & 0\\ y'_1 & g(x)\end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix}y_1 & y_2\\ y'_1 & y'_2\end{pmatrix}}=\frac{g(x)y_2}{W(y_1,y_2)}\ \Rightarrow\ u_2=\int\frac{y_1g(x)}{W(y_1,y_2)}dx
\end{cases}$$

فرض کنیم معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی غیرهمگن $y''+p(x)y'+q(x)y=g(x)$ را در اختیار داریم. اگر y_1 و y_2 دو پایه جواب از معادله همگن نظیر $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ باشند آنگاه

$$y_p=y_2\int\frac{y_1g(x)}{W(y_1,y_2)}dx-y_1\int\frac{y_2g(x)}{W(y_1,y_2)}dx$$

جواب خصوصی معادله غیرهمگن بالا است.
توجه: (۱) حتما در استفاده از فرمول بالا به ضریب y'' دقت کنید، باید این ضریب ۱ باشد!
(۲) از این روش فقط برای پیدا کردن یک جواب خصوصی از معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دو استفاده می‌شود و لزومی ندارد که ضرایب ثابت باشند یا $g(x)$ به صورت شکل‌های شناخته شده باشد. محدودیت این روش این است که فقط برای معادلات مرتبه دوم کارساز است.

به مثال‌های زیر توجه نمایید.

مثال ۱۲.۶.۳. *می‌خواهیم جواب عمومی معادله*

$$xy''+(1-2x)y'+(x-1)y=e^x \qquad x>0$$

را پیدا کنیم. معادله مرتبه دوم با ضرایب خطی و غیرهمگن است. اما ضرایب ثابت نیست! ابتدا معادله را بر x تقسیم می‌کنیم

$$y''+\frac{1-2x}{x}y'+\frac{x-1}{x}y=\frac{e^x}{x}.$$

واضح است که $y_1=e^x$ یک جواب معادله همگن $xy''+(1-2x)y'+(x-1)y=0$ است (حدس زده‌ایم). حال داریم $p(x)=\frac{1-2x}{x}$ و

$$u'=\frac{1}{y_1^2}e^{\int -p(x)dx}=\frac{1}{e^{2x}}e^{\int\frac{2x-1}{x}dx}=\frac{1}{e^{2x}}e^{2x-\ln x}=\frac{1}{x}\ \Rightarrow\ u=\ln x.$$

با کمک نتیجه ۲۰.۳.۳، واضح است که x و $y_2=uy_1=e^x\ln x$ مستقل خطی هستند. بنابراین جواب عمومی معادله همگن نظیر $y_g=c_1e^x+c_2e^x\ln x$ است. حال یک جواب خصوصی نیاز داریم (روش ضرایب نامعین کارساز نیست). پس از روش لاگرانژ کمک می‌گیریم. چون پس $y_1=e^x$ و $y_2=e^x\ln x$ پایه جواب هستند، داریم

$$W(y_1,y_2)=det\begin{pmatrix}e^x & e^x\ln x\\ e^x & e^x\ln x+\frac{e^x}{x}\end{pmatrix}=\frac{e^{2x}}{x}.$$

حال طبق روش لاگرانژ داریم

$$y_p=y_2\int\frac{y_1g(x)}{W(y_1,y_2)}dx-y_1\int\frac{y_2g(x)}{W(y_1,y_2)}dx=$$
$$e^x\ln x\int\frac{xe^xe^x}{xe^{2x}}dx-e^x\int\frac{xe^x\ln xe^x}{xe^{2x}}dx=xe^x\ln x-e^x(x\ln x-x)=xe^x$$

پس $y_G=y_g+y_p=c_1e^x+c_2e^x\ln x+xe^x$ جواب عمومی است.

مثال ۱۳.۶.۳. *می‌خواهیم برای معادله $y''-4y'=e^{2x}$ یک جواب خصوصی پیدا کنیم. چون معادله شاخصی معادله همگن نظیر به صورت $t^2-4t=0$ است پس $y_1=1$ و $y_2=e^{2x}$ پایه جواب هستند. اما داریم*

$$W(y_1,y_2)=det\begin{pmatrix}1 & e^{2x}\\ 0 & 2e^{2x}\end{pmatrix}=2e^{2x}.$$

حال طبق روش لاگرانژ داریم

$$y_p=y_2\int\frac{y_1g(x)}{W(y_1,y_2)}dx-y_1\int\frac{y_2g(x)}{W(y_1,y_2)}dx=$$
$$e^{2x}\int\frac{e^{2x}}{2e^{2x}}dx-\int\frac{e^{2x}e^{2x}}{2e^{2x}}dx=\frac{xe^{2x}}{4}-\frac{e^{2x}}{4}$$

تذکر ۱۴.۶.۳. *همواره به تابع $g(x)$ دقت کنید. در برخی مواقع روش ضرایب نامعین و روش لاگرانژ را می‌توان هم زمان استفاده کرد. برای یک نمونه مثال، سوال ۲.۹.۳ را ببینید.*

تمرین ۱۵.۶.۳. *فقط فرم یک جواب خصوصی معادله $y''-4y'=2\cos^2(4x)+xe^{4x}$ را بنویسید.*

حل. این یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت است که معادله شاخصی آن به صورت $t^2-4t=0$ است. اما $g(x)$ این معادله به صورت شکل‌های شناخته شده نیست. دقت شود که $2\cos^2(4x)=1+\cos(8x)$. اما با فرض $g_1(x)=\cos(8x)$، $g_2(x)=1$ و $g_3(x)=xe^{4x}$ می‌توانیم جواب خصوصی را به روش ضرایب نامعین پیدا کنیم. ابتدا جواب خصوصی متناظر با $g_1(x)$ را می‌نویسیم. چون معادله شاخصی ریشه $8i$ ندارد، بنابراین شکل جواب خصوصی به صورت

$$y_{p_1}=r_0\cos(8x)+s_0\sin(8x)$$

است. حال جواب خصوصی متناظر با $g_2(x)$ را می‌نویسیم. چون معادله شاخصی یک ریشه صفر دارد و $k=0$، بنابراین شکل جواب خصوصی مربوط به g_2 به صورت

$$y_{p_2}=x(h_0)=h_0x$$

است. و در آخر جواب خصوصی متناظر با $g_3(x)$ را می‌نویسیم. چون ۴ یکبار ریشه معادله شاخصی است و $k=1$ پس

$$y_{p_3}=x(h'_1x+h'_0)=h'_1x^2+h'_0x$$

است. بنابراین $y_p=y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3}$ است.

تمرین ۱۶.۶.۳. *جواب عمومی معادله $y''-\frac{x}{x-1}y'+\frac{1}{x-1}y=x-1$ را پیدا کنید.*