الف) روش ضرایب نامعین

۱- اگر $f(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots + k_n x^n$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد آنگاه

$$y_p = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n$$ اگر ریشه‌ها مخالف صفر باشد

$$y_p = x^t (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n)$$ اگر ریشه‌ها برابر صفر با مرتبه تکرار t باشد

مثال:

$$y''' - 3y' + 2y = 2x^2 + 1$$

حل: $r^3 - 3r + 2 = 0 \rightarrow (r+2)(r-1)^2 = 0 \rightarrow r_1 = r_2 = +1 ,\ r_3 = -2$

$$y_g = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-2x}$$ جواب عمومی همگن

چون معادله غیرهمگن و چندجمله‌ای است و درجه آن ۲ و ریشه‌ها مخالف صفر است از حالت اول برای بدست آوردن جواب خصوصی استفاده می‌کنیم

$$y_p = A_0 + A_1 x + A_2 x^2$$

به تعداد مرتبه معادله از جواب خصوصی مشتق می‌گیریم و آنرا در معادله قرار می‌دهیم تا ضرایب مجهول بدست بیاید.

$$y'_p = A_1 + 2A_2 x$$

$$y''_p = 2A_2$$

$$y'''_p = 0$$

$$0 - 3(A_1 + 2A_2 x) + 2(A_0 + A_1 x + A_2 x^2) = 2x^2 + 1$$

$$2A_2 x^2 + (2A_1 - 6A_2)x + (2A_0 - 3A_1) = 2x^2 + 1$$

$$\begin{cases} 2A_2 = 2 \Rightarrow A_2 = 1 \\ 2A_1 - 6A_2 = 0 \Rightarrow A_1 = 3 \\ 2A_0 - 3A_1 = 1 \Rightarrow A_0 = 5 \end{cases} \Rightarrow y_p = 5 + 3x + x^2$$ جواب خصوصی

$$y = y_g + y_p = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-2x} + 5 + 3x + x^2$$

مثال:

$$y'' - y' = 2x - 1$$

حل:

$$r^2 - r = 0 \rightarrow r(r-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = 1 \end{cases}$$

$$y_g = c_1 + c_2 e^{x}$$

چون یکی از ریشه‌ها صفر با مرتبه تکرار ۱ از حالت دوم استفاده می‌کنیم

$$y_p = x^1 (A_0 + A_1 x) \rightarrow y_p = A_0 x + A_1 x^2$$

$$y_p' = A_0 + 2A_1 x$$

$$y_p'' = 2A_1$$

$$2A_1 - (A_0 + 2A_1 x) = 2x - 1$$

$$-2A_1 x + (2A_1 - A_0) = 2x - 1$$

$$\begin{cases} -2A_1 = 2 \Rightarrow A_1 = -1 \\ 2A_1 - A_0 = -1 \Rightarrow A_0 = -1 \end{cases}$$

$$y_p = x(-1 - x) \Rightarrow y_p = -x - x^2$$

$$y = y_g + y_p = c_1 + c_2 e^{x} - x - x^2$$

۲ اگر $f(x) = ke^{\alpha x}$ یک تابع نمایی باشد

- اگر α ریشه معادله مشخصه (مفسر) نباشد: $y_p = Ae^{\alpha x}$
- اگر α ریشه معادله مشخصه با مرتبه تکرار t باشد: $y_p = x^t(Ae^{\alpha x})$

مثال:

$$y''' + 8y = 2e^{2x}$$

حل:

$$r^3 + 8 = 0 \rightarrow (r+2)(r^2 - 2r + 4) = 0 \rightarrow r_1 = -2, \quad r_2 = 1 \pm \sqrt{3}\, i$$

$$y_g = c_1 e^{-2x} + e^{x}\left(c_2 \cos(\sqrt{3}x) + c_3 \sin(\sqrt{3}x)\right)$$

در این مثال $\alpha = 2$ برابر با ریشه‌های معادله مفسر نیست لذا از حالت اول استفاده می‌کنیم

$$y_p = Ae^{2x}$$

مانند روش چند جمله‌ای‌ها به تعداد مرتبه معادله مشتق می‌گیریم و در معادله جایگزاری می‌کنیم تا جواب خصوصی بدست آید.

$$y_p' = 2Ae^{2x}$$

$$y_p'' = 4Ae^{2x}$$

$$y_p''' = 8Ae^{2x}$$

$$8Ae^{2x} + 8Ae^{2x} = 2e^{2x}$$

$$16Ae^{2x} = 2e^{2x}$$

$$16A = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{8} \rightarrow y_p = \frac{1}{8} e^{2x}$$

$$y = y_g + y_p = c_1 e^{-2x} + e^{x}\left(c_2 \cos(\sqrt{3}x) + c_3 \sin(\sqrt{3}x)\right) + \frac{1}{8} e^{2x}$$

مثال:

$$4y'' + 4y' + y = e^{-\frac{1}{2}x}$$

حل: $4r^2 + 4r + 1 = 0 \rightarrow (2r+1)^2 = 0 \rightarrow r_1 = r_2 = -\frac{1}{2}$

$$y_g = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{1}{2}x}$$

چون $\alpha = -\frac{1}{2}$ برابر با ریشه معادله مشخصه با مرتبه تکرار ۲ است از حالت دوم استفاده می‌کنیم

$$y_p = x^2 A e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$y_p' = 2Ax e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}Ax^2 e^{-\frac{1}{2}x} = \left(2Ax - \frac{1}{2}Ax^2\right) e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$y_p'' = (2A - Ax) e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}\left(2Ax - \frac{1}{2}Ax^2\right) e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$y_p'' = \left(2A - 2Ax + \frac{1}{4}Ax^2\right) e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$4\left(2A - 2Ax + \frac{1}{4}Ax^2\right) e^{-\frac{1}{2}x} + 4\left(2Ax - \frac{1}{2}Ax^2\right) e^{-\frac{1}{2}x} + x^2 A e^{-\frac{1}{2}x} = e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$\left(8A \cancel{- 8Ax} + \cancel{Ax^2} \cancel{+ 8Ax} \cancel{- 2Ax^2} + \cancel{x^2 A}\right) e^{-\frac{1}{2}x} = e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$8A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{8}$$

$$y_p = \frac{1}{8} x^2 e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$y = y_g + y_p = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{x^2}{8} e^{-\frac{1}{2}x}$$

علیرضا لشکری ص ۴۲

۳) اگر $f(x) = k_1 \sin\beta x + k_2 \cos \beta x$ یک مثلثاتی باشد آنگاه،

$$y_p = A_1 \sin\beta x + A_2 \cos\beta x$$ اگر βi ریشه‌های معادله مشخصه نباشد

$$y_p = x^t\left(A_1 \sin\beta x + A_2 \cos\beta x\right)$$ اگر βi ریشه‌های معادله مشخصه با مرتبه تکرار t باشد

مثال:

$$y'' + 4y' + 3y = \overset{\beta}{2}\cos(2x)$$

ح: $r^2 + 4r + 3 = 0 \rightarrow (r+3)(r+1) = 0 \rightarrow r = -3,\ r = -1$

$$y_g = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x}$$

چون $\beta = 2$ و $\beta i = 2i$ برابر ریشه‌های معادله مشخصه نیست از حالت اول استفاده می‌کنیم

مانند حالت ۲ نسبت به تعداد مرتبه معادله مشتق گرفته در معادله دیفرانسیل جایگزین می‌کنیم

$$y_p = A_1 \sin(2x) + A_2 \cos(2x)$$

$$y'_p = 2A_1 \cos(2x) - 2A_2 \sin(2x)$$

$$y''_p = -4A_1 \sin(2x) - 4A_2 \cos(2x)$$

$$= 2\cos 2x$$

$$-4A_1 \sin(2x) - 4A_2 \cos(2x) + 4\left(2A_1 \cos(2x) - 2A_2 \sin(2x)\right) + 3\left(A_1 \sin 2x + A_2 \cos 2x\right)$$

$$(-4A_1 - 8A_2 + 3A_1)\sin 2x + (-4A_2 + 8A_1 + 3A_2)\cos 2x = 2\cos 2x$$

$$8\begin{cases} -A_1 - 8A_2 = 0 \\ 8A_1 - A_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} -8A_1 - 64A_2 = 0 \\ 8A_1 - A_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow 65A_2 = 2 \Rightarrow A_2 = \frac{-2}{65}, \quad A_1 = \frac{16}{65}$$

$$y_p = \frac{16}{65}\sin(2x) - \frac{2}{65}\cos(2x)$$

$$y = y_g + y_p = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x} + \frac{16}{65}\sin(2x) - \frac{2}{65}\cos(2x)$$

مثال:

$$y'' + 9y = \sin 3x - \cos 3x \longrightarrow \beta$$

حل: $r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{-9} \Rightarrow r = 0 \pm \sqrt{9}\sqrt{-1} \Rightarrow r = 0 \pm 3i$

$$y_g = e^{0x}\left(c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)\right)$$

چون $\beta = 3$ ، $\beta i = 3i$ برابر با ریشه معادله مشخصه است از حالت دوم استفاده می‌کنیم

$$y_p = x\left(A_1 \sin 3x + A_2 \cos 3x\right)$$

$$y_p' = A_1 \sin(3x) + A_2 \cos(3x) + 3A_1 x \cos 3x - 3A_2 x \sin 3x$$

$$y_p' = (A_1 - 3A_2 x)\sin 3x + (A_2 + 3A_1 x)\cos 3x$$

$$y_p'' = \underline{-3A_2 \sin 3x} + (3A_1 - 9A_2 x)\cos 3x + 3A_1 \cos 3x + \underline{(-3A_2 - 9A_1 x)\sin 3x}$$

$$y_p'' = (-6A_2 - 9A_1 x)\sin 3x + (6A_1 - 9A_2 x)\cos 3x$$

$$(-6A_2 - \cancel{9A_1 x})\underline{\sin 3x} + (6A_1 - \cancel{9A_2 x})\cos 3x + \cancel{9A_1 x}\,\underline{\sin 3x} + \cancel{9A_2 x}\cos 3x = \sin 3x - \cos 3x$$

$$-6A_2 \sin 3x + 6A_1 \cos 3x = \sin 3x - \cos 3x$$

$$\begin{cases} -6A_2 = 1 \Rightarrow A_2 = -\frac{1}{6} \\ 6A_1 = -1 \Rightarrow A_1 = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$y_p = -\frac{1}{6} x \sin 3x - \frac{1}{6} x \cos 3x$$

$$y = y_g + y_p = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x) - \frac{1}{6} x \sin 3x - \frac{1}{6} x \cos 3x$$

۴ اگر $f(x) = p(x)\, e^{\alpha x}$ بصورت حاصلضرب یک چند جمله‌ای درجه n بصورت $p(x)$ در نمایی باشد آنگاه

اگر α ریشه معادله مشخصه نباشد
$$y_p = (A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n)\, e^{\alpha x}$$

اگر α ریشه معادله مشخصه با مرتبه تکرار t باشد
$$y_p = x^t (A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n)\, e^{\alpha x}$$

مثال:
$$y'' - y = x e^{2x}$$

حل: $r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1$

$$y_g = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$$

چون $\alpha = 2$ برابر با ریشه معادله مشخصه نیست از حالت اول استفاده میکنیم

$$y_p = (A_0 + A_1 x)\, e^{2x}$$

$$y_p' = A_1 e^{2x} + (2A_0 + 2A_1 x) e^{2x} = (A_1 + 2A_0 + 2A_1 x) e^{2x}$$

$$y_p'' = 2A_1 e^{2x} + (2A_1 + 4A_0 + 4A_1 x) e^{2x} = (4A_1 + 4A_0 + 4A_1 x) e^{2x}$$

$$(4A_1 + 4A_0 + 4A_1 x) e^{2x} - (A_0 + A_1 x) e^{2x} = x e^{2x}$$

$$\begin{cases} 4A_1 + 3A_0 = 0 & \rightarrow A_0 = -\frac{4}{9} \\ 3A_1 = 1 & \Rightarrow A_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$y_p = \left(-\frac{4}{9} + \frac{1}{3} x\right) e^{2x}$$

$$y = y_g + y_p = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + \left(-4/9 + 1/3\, x\right) e^{2x}$$

مثال:

$$y'' - y' = x e^{x}$$

حل: $r^2 - r = 0 \rightarrow r(r-1) = 0 \rightarrow r = 1,\ r = 0$

$$y_g = c_1 + c_2 e^{x}$$

چون $\alpha = 1$ برابر با یکی از ریشه های معادله است لذا از روش دوم استفاده میکنیم

$$y_p = x(A_0 + A_1 x)e^{x} = (A_0 x + A_1 x^2)e^{x}$$

$$y'_p = (A_0 + 2A_1 x + A_0 x + A_1 x^2)e^{x}$$

$$y''_p = (2A_1 + A_0 + 2A_1 x + A_0 + 2A_1 x + A_0 x + A_1 x^2)e^{x}$$

$$y''_p = (2A_1 + 2A_0 + 4A_1 x + A_0 x + A_1 x^2)e^{x}$$

$$(2A_1 + 2A_0 + (4A_1 + A_0)x + \cancel{A_1 x^2})e^{x} - (A_0 + 2A_1 x + A_0 x + \cancel{A_1 x^2})e^{x} = x e^{x}$$

$$((2A_1 + A_0) + (2A_1 x))e^{x} = x e^{x}$$

$$\begin{cases} 2A_1 + A_0 = 0 \rightarrow A_0 = -1 \\ 2A_1 = 1 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y_p = \left(-x + \frac{1}{2}x^2\right)e^{x}$$

$$y = y_g + y_p = c_1 + c_2 e^{x} + \left(-x + \tfrac{1}{2}x^2\right)e^{x}$$

ص ٤٧

۵) اگر $f(x) = \underbrace{p(x)}_{m} \sin \beta x + \underbrace{q(x)}_{n} \cos \beta x$ حاصلضرب چند جمله‌ای های از درجه n و m تشکیل شده باشد آنگاه

اگر βi ریشه های معادله مشخصه نباشد

$$y_p = (A_0 + A_1 x + \cdots + A_s x^s) \cos \beta x + (B_0 + B_1 x + \cdots + B_s x^s) \sin(\beta x)$$

$$s = \max\{m, n\}$$

اگر βi ریشه های معادله مشخصه با مرتبه تکرار t باشد

$$y_p = x^t \left[(A_0 + A_1 x + \cdots + A_s x^s) \cos \beta x + (B_0 + B_1 x + \cdots + B_s x^s) \sin(\beta x) \right]$$

$$s = \max\{m, n\}$$

مثال:

$$y'' - y = x \sin x$$

حل: $r^2 - 1 = 0 \rightarrow r = \pm 1$ $\quad$ $y_g = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$

$$y_p = (A_0 + A_1 x) \cos x + (B_0 + B_1 x) \sin x$$

$$y_p' = A_1 \cos x - (A_0 + A_1 x) \sin x + B_1 \sin x + (B_0 + B_1 x) \cos x$$

$$y_p'' = -A_1 \sin x - A_1 \sin x - (A_0 + A_1 x) \cos x + B_1 \cos x + B_1 \cos x - (B_0 + B_1 x) \sin x$$

$$(-2A_1 - 2B_0) \sin x + (2B_1 - 2A_0) \cos x - 2A_1 x \cos x - 2B_1 x \sin x = x \sin x$$

$-2B_1 = 1 \rightarrow B_1 = -\frac{1}{2}$

$2A_1 = 0 \rightarrow A_1 = 0$

$2B_1 - 2A_0 = 0 \rightarrow A_0 = -\frac{1}{2}$

$-2A_1 - 2B_0 = 0 \rightarrow B_0 = 0$

$$y_p = -\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} x \sin x$$

$$y = y_g + y_p = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} x \sin x$$

علیرضا اکبر ص ۴۷

۴) اگر $f(x) = k_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + k_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$ حاصلضرب نمایی در مثلثاتی باشد که k_1 و k_2 عددی معلوم هستند

اگر $\alpha \pm \beta i$ ریشه معادله مشخصه نباشد
$$y_p = A_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + A_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$$

اگر $\alpha \pm \beta i$ ریشه معادله مشخصه با مرتبه تکرار t باشد
$$y_p = x^t\left(A_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + A_2 e^{\alpha x}\sin\beta x\right)$$

مثال: معادله با مقدار اولیه $y(0)=0$ و $y'(0)=0$ را بیابید

$$y'' - 5y' + 6y = e^x \sin x$$

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \rightarrow (r-3)(r-2) = 0 \rightarrow r=3,\ r=2$$

$$y_g = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}$$

$$y_p = A_1 e^x\cos x + A_2 e^x \sin x \rightarrow y_p' = A_1 e^x \cos x - A_1 e^x \sin x + A_2 e^x \sin x + A_2 e^x \cos x$$

$$y_p'' = A_1 e^x\cos x - A_1 e^x \sin x - A_1 e^x \sin x - A_1 e^x \cos x + A_2 e^x \sin x + A_2 e^x \cos x + A_2 e^x \cos x - A_2 e^x \sin x$$

$$\left((A_2 + 3A_1)\sin x + (A - 3A_2)\cos x\right)e^x = e^x \sin x + 0$$

$$3\begin{cases} A_2 + 3A_1 = 1 \\ -3A_2 + A_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3A_2 + 9A_1 = 3 \\ -3A_2 + A_1 = 0 \end{cases} \quad A_1 = \frac{3}{10} \quad A_2 = \frac{1}{10}$$

$$y_p = \frac{3}{10} e^x \cos x + \frac{1}{10} e^x \sin x$$

$$\boxed{y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} + \frac{3}{10} e^x \cos x + \frac{1}{10} e^x \sin x}$$ جواب عمومی

$$y' = 3c_1 e^{3x} + 2c_2 e^{2x} + \frac{3}{10} e^x \cos x - \frac{3}{10} e^x \sin x + \frac{1}{10} e^x \sin x + \frac{1}{10} e^x \cos x$$

$$y(0)=0 \rightarrow 0 = c_1 + c_2 + \frac{3}{10} + 0$$

$$y'(0)=0 \rightarrow 0 = 3c_1 + 2c_2 + \frac{3}{10} - 0 + 0 + \frac{1}{10}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = -\frac{3}{10} \\ 3c_1 + 2c_2 = -\frac{4}{10} \end{cases}$$

$$c_1 = \frac{1}{5} \quad c_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{5} e^{3x} - \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{3}{10} e^x \cos x + \frac{1}{10} e^x \sin x}$$ جواب خصوصی

ص ۴۸