۲

تنش_کرنش و روابط بین آن‌ها

مباحث مربوط به تنش، کرنش و روابط بین آن‌ها بسیار گسترده و مفصل است. لذا در این بخش فقط به‌طور بسیار فشرده و تنها به‌منظور یادآوری، در مورد نکات اساسی و مهم مربوط به تنش و کرنش که در مبحث معیارهای شکست کاربرد دارد، توضیحاتی ارائه می‌گردد.

اگر جسمی با سطح مقطع منشوری A تحت تأثیر نیروی محوری عمودی F قرارگیرد، تنش $\sigma = A / F$ در آن القا می‌گردد. در علم مکانیک‌سنگ درصورتی که نیروی F فشاری باشد، σ مثبت و در غیر این صورت منفی درنظر گرفته می‌شود. جسمی که تحت تأثیر تنش σ قرار دارد در امتداد اعمال محور تنش به اندازه ΔL تغییر طول می‌دهد. به نسبت تغییر طول جسم به طول اولیه آن کرنش (تنجش). عمودی محوری ($\varepsilon_a = \Delta L / L$) گفته می‌شود.

کرنش محوری در صورتی مثبت است که طول جسم نسبت به طول اولیه آن کاهش یافته باشد[1]. تغییر طول محوری یک جسم معمولاً همراه با تغییر طول جانبی آن در جهت عمود بر محور بارگذاری است. به نسبت تغییر طول جانبی به طول اولیه جسم در امتداد عمود بر محور بارگذاری، کرنش جانبی، ε_L، گفته می‌شود.

۱- ذکر این نکته لازم است که در مکانیک‌سنگ قراردادهای مربوط به تعیین علامت تنش و کرنش نرمال با آنچه در مقاومت‌مصالح مرسوم است، متفاوت می‌باشد.

قدر مطلق نسبت کرنش جانبی به کرنش محوری همواره نسبت ثابتی است که آن را نسبت پواسون، ν، می‌نامند.

$$\nu = (-\varepsilon_L / \varepsilon_a)$$

هوک نشان‌داد که در مورد اجسام الاستیک خطی نسبت تنش به کرنش متناظر با آن، همیشه یک مقدار ثابت است که آنرا ضریب ارتجاعی (مدول الاستیسیته) می‌نامند.

$$E = \sigma / \varepsilon$$

اگر بر صفحه‌ای که تنش عمودی وارد می‌شود، تنش برشی اعمال نشود، این صفحه را صفحهٔ اصلی و تنش وارد بر آن‌را تنش اصلی می‌نامند. به همین ترتیب به کرنش‌هایی که در امتداد تنش‌های اصلی بوجود می آیند، کرنش‌های اصلی گویند.

اگر جسمی تحت اثر تنش‌های برشی قرار گیرد، هر نقطه واقع بر آن جسم نسبت به موقعیت اولیه خود دچار تغییر شکل زاویه‌ای (چرخش) می‌شود. به تانژانت زاویه چرخش مورد نظر کرنش برشی می‌گویند. رابطهٔ بین کرنش‌های برشی و عمودی شبیه روابط بین تنش‌های برشی و عمودی است.

جزئی از یک جسم که در سیستم مختصات دو بعدی تحت میدان تنش‌های اصلی حداکثر و حداقل قرار دارد را در نظر بگیرید (شکل ۲-۱). بر روی هر صفحه داخل این جسم که با صفحه تنش اصلی حداکثر زاویه θ می‌سازد، تنش عمودی σ_n و تنش برشی τ به‌وجود می آید که اندازه آن‌ها عبارت‌است از:

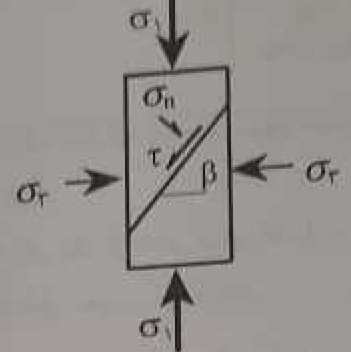
$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{3} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \times \cos(2\theta)$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \times \sin(2\theta)$$

معادلات فوق مکان هندسی نقاط واقع بر یک دایره موسوم به دایره موهر را مشخص می‌نمایند که اندازه شعاع آن (R) و طول مرکز این دایره (C) عبارت‌اند از:

$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$C = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$



شکل ۲-۱ یک جز در سیستم مختصات دو بعدی تحت تنش‌های اصلی حداکثر و حداقل

بین کرنش‌های عمودی و برشی واقع بر یک جز نیز روابط مشابهی وجود دارد، به شرط آنکه به‌جای تنش عمودی، کرنش عمودی و به جای تنش برشی، نصف کرنش برشی جایگزین گردد.

به‌طور کلی تنش و کرنش کمیت‌های تانسوری درجه دوم هستند. زیرا علاوه بر مقدار به دو عامل دیگر یعنی امتداد تنش یا کرنش و صفحه‌ای که تنش یا کرنش بر آن اعمال می‌گردد نیز وابسته اند.

بنابراین بر یک جزء مکعبی در داخل یک جسم در حالت سه بعدی میدان تنش زیر اعمال می‌گردد.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

در این رابطه $[\sigma_{ij}]$ عبارت‌است از تنشی که در صفحه i و در امتداد j اعمال می‌شود، صفحه i صفحه‌ای است که بر محور i ها عمود است. مثلاً σ_{xy} تنشی است که در صفحه x (یعنی صفحه‌ای به موازات صفحه zoy و عمود بر محور x ها) و در امتداد محور y ها اعمال می‌شود. این تنش از نوع تنش‌های برشی است، اما تنش σ_{xx} که دارای زیرنویس‌های مشابهی است، از نوع تنش‌های عمودی است.

اندازه تنش‌های اصلی σ_2، σ_1 و σ_1 وارد بر یک جز با تانسور تنش $[\sigma_{ij}]$ را می‌توان از حل معادله زیر به‌دست آورد.

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx}-\sigma_n & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy}-\sigma_n & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}-\sigma_n \end{vmatrix} = ۰$$

معادله فوق در حالت کلی یک معادله درجه سوم است که می‌تواند سه جواب به‌صورت $\sigma_۱$، $\sigma_۲$ و $\sigma_۳$ داشته باشد.

کسینوس‌های هادی امتداد هر یک از تنش‌های اصلی، مثلاً $\sigma_۱$، نسبت به‌دستگاه مختصات z y x از حل معادلات ذیل تعیین می‌گردند.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}-\sigma_۱ & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy}-\sigma_۱ & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}-\sigma_۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} n_۱ \\ n_۲ \\ n_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$n_۱^۲ + n_۲^۲ + n_۳^۲ = ۱$$

در مورد کرنش‌ها نیز چنین روابطی بر قرار است. با این تفاوت که به‌جای کرنش‌های برشی در هر یک از روابط فوق باید نصف مقدار آن را جایگزین نمود. به‌عنوان مثال برای محاسبهٔ اندازهٔ کرنش‌های اصلی باید معادله زیر حل شود.

$$\begin{vmatrix} \gamma_{xx}-\gamma & \gamma_{xy}/۲ & \gamma_{xz}/۲ \\ \gamma_{yx}/۲ & \gamma_{yy}-\gamma & \gamma_{yz}/۲ \\ \gamma_{zx}/۲ & \gamma_{zy}/۲ & \gamma_{zz}-\gamma \end{vmatrix} = ۰$$

در اکثر کتاب‌های مقاومت مصالح و تئوری الاستیسیته، توضیحات لازم و کافی در مورد مطالب مورد بحث آورده شده است. از آن جمله می‌توان به کتاب‌های ذیل اشاره نمود.

۱- پوپوف، ایگور؛ ترجمه شاپور طاحونی؛ مقاومت مصالح؛ انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر؛ ۱۳۷۳
۲- عادلی، حجت ا...؛ مقاومت مصالح؛ انتشارات دهخدا؛ ۱۳۸۰

مسائل

۲-۱) با توجه به میدان تنش زیر، تنش‌های اصلی و صفحات مربوط به آن‌ها را تعیین نمایید [۲].

$\sigma_x = ۱۰$ MPa

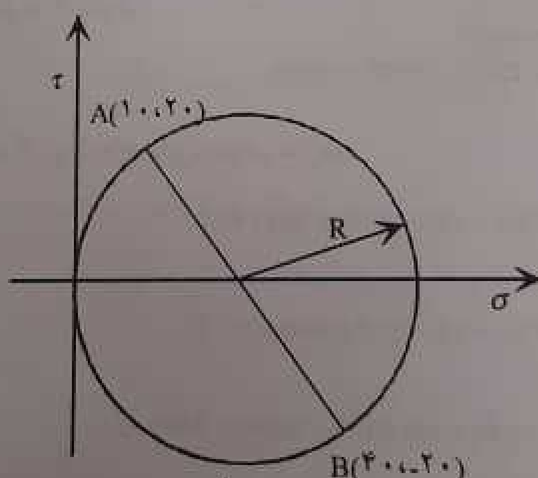
$\sigma_y = ۴۰$ MPa

$\tau_{xy} = ۲۰$ MPa

حل:

مرکز دایره موهر عبارت است از:

$$C = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{۲} = \frac{۱۰ + ۴۰}{۲} = ۲۵ \quad \text{MPa}$$



شعاع دایره موهر عبارت است از:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{۲}\right)^۲ + \left(\tau_{xy}\right)^۲} = \sqrt{۱۵^۲ + ۲۰^۲} = ۲۵ \quad \text{MPa}$$

با توجه به مرکز و شعاع دایره موهر داریم:

$$\left|\begin{array}{l} \frac{\sigma_۱ + \sigma_۲}{۲} = ۲۵ \\ \frac{\sigma_۱ - \sigma_۲}{۲} = ۲۵ \end{array}\right. \Rightarrow \quad \sigma_۲ = ۰ \;,\; \sigma_۱ = ۵۰ \quad \text{MPa}$$

زوایای صفحات اصلی نسبت به صفحه‌ای که تنش متناظر با نقطه B به آن اعمال می‌شود، عبارت‌اند از:

$$2\theta_1 = \tan^{-1}\left(-\frac{2\times\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{20}{15}\right) \Rightarrow \theta_1 = 26.6^\circ$$

$$\theta_2 = 90+\theta_1 = 90+26.6 = 116.6^\circ$$

۲-۲) با توجه به میدان تنش زیر و با استفاده از دایره تنش موهر، تنش عمودی را بر روی صفحه‌ای که با امتداد تنش حداقل زاویه ۱۰ درجه می‌سازد، محاسبه کنید و تنش برشی متناظر را نیز به‌دست آورید [۲].

$$\sigma_x = -60 \ \text{MPa} \ , \quad \sigma_y = 30 \ \text{MPa} \ , \quad \tau_{xy} = 25 \ \text{MPa}$$

حل:

طول مرکز دایرهٔ موهر عبارت است از:

$$C = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} = \frac{-60+30}{2} = \frac{-30}{2} = -15$$

شعاع دایرهٔ موهرعبارت است از:

$$R = \sqrt{\left(\frac{-60-30}{2}\right)^2 + 25^2} \Rightarrow R = 51.48$$

با توجه به مقادیر مرکز و شعاع دایرهٔ موهر داریم:

$$\sigma'_y = C + R\times\cos(2\theta) = -15 + 51.48\times\cos(20)$$
$$\sigma'_y = 33.38 \quad \text{MPa}$$
$$\sigma'_x = C - R\times\cos(2\theta) = -15 - 51.48\times\cos(20)$$
$$\sigma'_x = -63.38 \quad \text{MPa}$$
$$\tau_{xy} = R\times\sin(2\theta) = 51.48\times\sin(20) = 17.61 \quad \text{MPa}$$

۲-۳) اگر کرنش‌های وارد بر جزئی به‌صورت زیر باشند، مطلوب‌است تعیین کرنش‌های اصلی و امتدادهای مربوط به آن‌ها. این مسأله را یکبار با استفاده از روابط مربوط به دایره کرنش موهر و بار دیگر با کمک روابط تانسوری کرنش حل نمایید [۲].

$$\varepsilon_x = -0.12\times10^{-3}$$
$$\varepsilon_y = 1.12\times10^{-3}$$
$$\gamma_{xy} = -0.2\times10^{-3}$$

حل:

طول مرکز و اندازه شعاع دایره کرنش موهر به‌ترتیب عبارت‌اند از:

$$\varepsilon_0=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{۲}=\frac{-۰٫۰۰۰۱۲+۰٫۰۰۱۱۲}{۲}=۰٫۰۰۰۵$$

$$R=\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{۲}\right)^۲+\left(\frac{\gamma_{xy}}{۲}\right)^۲}=\sqrt{\left(\frac{-۰٫۰۰۰۱۲-۰٫۰۰۱۱۲}{۲}\right)^۲+\left(\frac{-۰٫۰۰۰۲}{۲}\right)^۲}$$

$$R=۰٫۰۰۰۶۲$$

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{\varepsilon_۱+\varepsilon_۲}{۲}=۰٫۰۰۰۵\\[2ex]\dfrac{\varepsilon_۱-\varepsilon_۲}{۲}=۰٫۰۰۰۶۳\end{array}\right. \Rightarrow \ \varepsilon_۱=۰٫۰۰۱۱۳ \ ، \ \varepsilon_۲=-۰٫۰۰۰۱۳$$

$$\theta_۱=\frac{۱}{۲}\tan^{-۱}\left(\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x-\varepsilon_y}\right)=\frac{۱}{۲}\tan^{-۱}\left(\frac{-۰٫۰۰۰۲}{-۰٫۰۰۰۱۲-۰٫۰۰۱۱۲}\right)\Rightarrow\theta_۱=۴٫۵۸^\circ$$

راه حل دوم :

$$\begin{vmatrix}\varepsilon_x-\varepsilon & \dfrac{\gamma_{xy}}{۲}\\ \dfrac{\gamma_{xy}}{۲} & \varepsilon_y-\varepsilon\end{vmatrix}=۰ \Rightarrow \begin{vmatrix}-۰٫۱۲\times۱۰^{-۳}-\varepsilon & \dfrac{-۲\times۱۰^{-۴}}{۲}\\ \dfrac{-۲\times۱۰^{-۴}}{۲} & ۱۱۲\times۱۰^{-۵}-\varepsilon\end{vmatrix}=۰$$

$$(-۰٫۱۲\times۱۰^{-۳}-\varepsilon)\times(۱۱۲\times۱۰^{-۵}-\varepsilon)-(۲\times۱۰^{-۴})^۲=۰$$

$$\varepsilon^۲-(۱۱۲\times۱۰^{-۵}-۰٫۱۲\times۱۰^{-۳})\times\varepsilon-۰٫۱۲\times۱۰^{-۳}\times۱۱۲\times۱۰^{-۵}-۱۰^{-۸}=۰$$

$$\varepsilon^۲-۱۰^{-۳}\times\varepsilon-۱٫۴۴۴\times۱۰^{-۷}=۰$$

$$\varepsilon_۱=۱٫۱۲۸\times۱۰^{-۳} \quad ، \quad \varepsilon_۲=-۱٫۲۸۰\times۱۰^{-۴}$$

امتداد بردار هادی کرنش اصلی بزرگتر ($\varepsilon_۱$) نیز به‌ترتیب زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x-\varepsilon_۱ & \dfrac{\gamma_{xy}}{۲}\\ \dfrac{\gamma_{xy}}{۲} & \varepsilon_y-\varepsilon_۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}n_x\\ n_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\ ۰\end{bmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{l}(\varepsilon_x-\varepsilon_۱)\times n_x+\dfrac{\gamma_{xy}}{۲}\times n_y=۰\\[2ex] \left(\dfrac{\gamma_{xy}}{۲}\right)\times n_x+(\varepsilon_y-\varepsilon_۱)\times n_y=۰\end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l}۱٫۲۴۸\times۱۰^{-۳}\times n_x-۱\times۱۰^{-۴}\times n_y=۰\\ -۱\times۱۰^{-۴}\times n_x-۸\times۱۰^{-۶}\times n_y=۰\end{array}\right.$$

از طرفی می‌دانیم که:

$$n_x^۲ + n_y^۲ = ۱ \Rightarrow n_x = ۰٫۰۷۹۹ \quad ، \quad n_y = ۰٫۹۹۶۸$$

$$\tan\theta_۱ = \frac{n_x}{n_y} = \frac{۰٫۰۷۹۹}{۰٫۹۹۶۸} = ۴٫۵۸^\circ$$

بدیهی است که امتداد ($\varepsilon_۱$) بر امتداد ($\varepsilon_۲$) عمود است.

۲-۴) اگر میدان کرنش‌های وارد بر جزئی به‌صورت ذیل باشد، مطلوب‌است تعیین کرنش‌های اصلی و امتدادهای مربوط به آن‌ها [۲].

$$\varepsilon_x = ۰٫۰۰۰۸۰$$
$$\varepsilon_y = -۰٫۰۰۰۳۰$$
$$\gamma_{xy} = ۰٫۰۰۰۸۰$$

حل: طول مرکز و اندازه شعاع دایره کرنش موهر به‌ترتیب عبارت‌اند از:

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{۲} = \frac{۰٫۰۰۰۸۰ - ۰٫۰۰۰۳۰}{۲} \Rightarrow \varepsilon_0 = ۰٫۰۰۰۳$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{۰٫۰۰۰۸ + ۰٫۰۰۰۲}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{۰٫۰۰۰۸}{۲}\right)^۲} \Rightarrow R = ۰٫۰۰۰۶۴$$

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\varepsilon_۱ + \varepsilon_۲}{۲} = ۰٫۰۰۰۳ \\ \dfrac{\varepsilon_۱ - \varepsilon_۲}{۲} = ۰٫۰۰۰۶۴ \end{array}\right. \Rightarrow \varepsilon_۱ = ۰٫۰۰۰۹۴ \quad ، \quad \varepsilon_۲ = -۰٫۰۰۰۳۴$$

$$\theta_۱ = \frac{۱}{۲}\tan^{-۱}\left(\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}\right) = \frac{۱}{۲}\tan^{-۱}\left(\frac{۰٫۰۰۰۸}{۰٫۰۰۰۸ + ۰٫۰۰۰۲}\right)$$

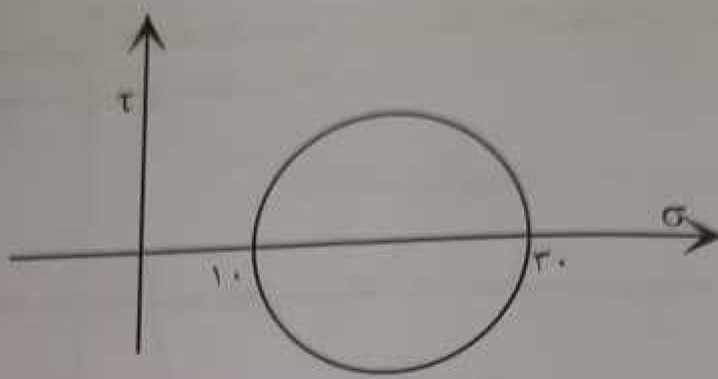
$$\theta_۱ = ۱۹٫۳^\circ$$

امتداد ($\varepsilon_۱$) بر امتداد ($\varepsilon_۲$) عمود است.

۲-۵) با توجه به شکل زیر طول مرکز (C) و اندازه شعاع دایره موهر (R) چقدر است [۳].

$$\sigma_۱ = ۳۰ \quad kgf/cm^۲$$

$$\sigma_۲ = ۱۰ \quad kgf/cm^۲$$



حل:

$$C = \frac{\sigma_۱ + \sigma_۲}{۲} = \frac{۴۰}{۲} = ۲۰$$

$$R = \frac{\sigma_۱ - \sigma_۲}{۲} = \frac{۲۰}{۲} = ۱۰$$

۲-۶) موقعیت و مقدار تنش در یک توده سنگی به‌صورت زیر است. تنش‌هایی که روی سطوح اصلی واقع می‌شوند را تعیین نمایید [۳].

$\sigma_x = ۱۵ \quad MPa$

$\sigma_y = ۴۰ \quad MPa$

$\tau_{xy} = ۱۰ \quad MPa$

حل : سطوح متناظر با تنش‌های اصلی سطوحی هستند که تنش برشی بر روی آنها صفر است. C مرکز دایره موهر برابر نصف مجموع تنش‌های متعامد وارد بر جسم است.

$$\sigma_o = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{۲} = \frac{۱۵ + ۴۰}{۲}$$

$\sigma_o = ۲۷/۵ \quad MPa$

$$\sigma_۱ = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{۲} + \left[(\tau_{xy})^۲ + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{۲}\right)^۲\right]^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱۵ + ۴۰}{۲} + \left[۱۰^۲ + \left(\frac{۱۵ - ۴۰}{۲}\right)^۲\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

$\sigma_۱ = ۴۳/۵ \quad MPa$

باید توجه داشت که همواره:

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_۱ + \sigma_۲ = ۲ \times C$$

۲-۷) ضریب برشی و الاستیک یک نمونه سنگ، $E = 50\,Gpa$ و $G = 20\,Gpa$ به دست آمده است. مطلوبست تعیین ضریب پواسون [۳].

حل:

$$E = 2G(1+\nu) \Rightarrow 50 = (2\times 20)\times(1+\nu) \Rightarrow \nu = 0/25$$

۲-۸) اگر $\tau_{xy} = -2\,Mpa$ و $\sigma_y = 0$ و $\sigma_x = 6\,Mpa$ باشد، تنش اصلی حداکثر چه قدر است. [۳]

حل:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 8\,Mpa$$

۲-۹) نقاط A و B میدان تنش‌های برشی و عمودی بر روی دو صفحه متفاوت در داخل جزئی که تحت میدان تنش‌های دو محوره قرارگرفته است را نشان می‌دهند. مطلوباست تعیین مقادیر تنش‌های اصلی حداکثر و حداقل به روش ترسیمی و با استفاده از دایره تنش موهر [۲].

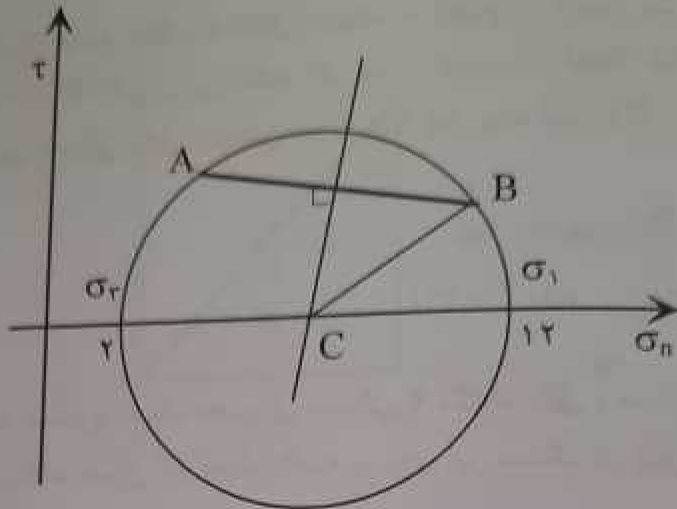
$$A(\sigma_n = 4 \,،\, \tau = 4) \,،\, B(\sigma_n = 11 \,،\, \tau = 3)$$

تنش‌های فوق بر حسب مگاپاسکال اندازه‌گیری شده‌اند.

حل:

دیهی است مرکز دایره موهر (نقطه C) بر برخوردگاه عمود منصف پاره‌خط AB و محور منطبق است. برای رسم دایره موهر کافی است دایره‌ای به مرکز C و شعاع CB یا CA سیم گردد. برخوردگاه‌های این دایره با محور σ، اندازه تنش‌های اصلی حداکثر و داقل را نمایش می‌دهند. اکنون با توجه به دایرهٔ رسم شده داریم:

$$\sigma_1 = 12\ MPa \quad , \quad \sigma_2 = 2\ MPa$$



۲-۱۰) ثابت کنید تغییر حجم یک نمونه سنگی در واحد حجم آن یا کرنش حجمی ($\varepsilon v = \Delta V / V$) در شرایط بارگذاری فشاری، تقریباً برابر است با مجموع کرنش‌های عمودی در سه وجه آن [۵].

حل: برای تسهیل در حل مسأله یک نمونه مکعبی به ابعاد واحد و با حجم ۱ = V_0 را درنظر می‌گیریم که پس از اعمال فشار، حجم آن به V خواهد رسید. در نتیجه:

$$V_0 = ۱\times۱\times۱ = ۱$$
$$V = (۱+\varepsilon_۱)\times(۱+\varepsilon_۲)\times(۱+\varepsilon_۳)$$
$$V = ۱+\varepsilon_۱\times\varepsilon_۲+\varepsilon_۲\times\varepsilon_۳+\varepsilon_۱\times\varepsilon_۳+\varepsilon_۱\times\varepsilon_۲\times\varepsilon_۳+\varepsilon_۱+\varepsilon_۲+\varepsilon_۳$$

به‌دلیل آن‌که جملات زیر در مقایسه با سایر جملات خیلی کوچکتر هستند می‌توان از آنها صرف نظر کرد.

$$\varepsilon_۱\times\varepsilon_۲ \quad ، \quad \varepsilon_۱\times\varepsilon_۳ \quad ، \quad \varepsilon_۲\times\varepsilon_۳ \quad ، \quad \varepsilon_۱\times\varepsilon_۲\times\varepsilon_۳$$

پس:

$$\Delta V = V - V_0 = (۱+\varepsilon_۱+\varepsilon_۲+\varepsilon_۳) - ۱ = \varepsilon_۱+\varepsilon_۲+\varepsilon_۳$$

$$e = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\varepsilon_۱+\varepsilon_۲+\varepsilon_۳}{۱} = \varepsilon_۱+\varepsilon_۲+\varepsilon_۳$$

۲-۱۱) نمونه‌ای از ماسه سنگ به شکل استوانه به ارتفاع ۱۰۰میلی متر و قطر ۵۰ میلی متر تحت بار ۳۹۰۰۰۰ نیوتن می‌شکند. اگر مقدار کرنش در لحظه شکست ۰/۱ درصد باشد مقدار انرژی مصرفی برای شکستن نمونه چند ژول بوده است [۳].

حل:

$$\varepsilon = \frac{\Delta h}{h} \Rightarrow ۱۰^{-۳} = \frac{\Delta h}{۰/۱} \Rightarrow \Delta h = ۱۰^{-۴}\ m$$

$$E = P \times \Delta h = ۳۹۰۰۰۰ \times ۱۰^{-۴} = ۳۹\,J$$

۲-۱۲) مقاومت فشاری تک محوری سنگی ۷ مگاپاسکال و مدول یانگ آن ۲٫۵ گیگاپاسکال می‌باشد میزان کار انجام یافته بر روی این سنگ در پایان آزمایش فشاری تک محوره چقدر است.

ارتفاع نمونه استوانه‌ای مورد آزمایش ۱۰۰ میلیمتر و قطر آن ۵۰ میلیمتر است [۳].

حل: فرض می‌کنیم که سنگ موردنظر الاستیک کامل بوده و در نقطه مقاومت نهائی می‌شکند.

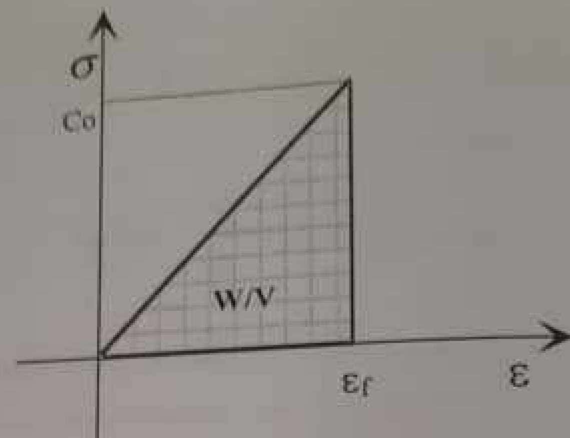
$$E = ۲٫۵ \times ۱۰^{۳}\ MPa \quad , \quad d = ۵۰\ mm = ۰٫۰۵\ m \quad , \quad h = ۱۰۰\ mm = ۰٫۱\ m$$

$$\sigma = E \times \varepsilon \Rightarrow C_o = E \times \varepsilon_f \Rightarrow \varepsilon_f = \frac{C_o}{E}$$

کار انجام شده در واحد حجم نمونه مورد آزمایش برابر است با سطح زیر منحنی تنش - کرنش.

$$\frac{W}{V} = \int_{۰}^{\varepsilon f} \sigma \times d\varepsilon \quad , \quad \sigma = E \times \varepsilon$$

$$W = V \times \int_{۰}^{\varepsilon f} \sigma \times d\varepsilon = V \times \int_{۰}^{\varepsilon f} E \times \varepsilon \times d\varepsilon$$



$$W = V \times E \times \frac{(\varepsilon_f)^۲}{۲} = V \times \frac{(C_0)^۲}{۲E} = \pi \times \frac{D^۲}{۴} \times h \times \frac{(C_0)^۲}{۲E}$$

$$W = \pi \times \frac{۰/۰۵^۲}{۴} \times ۰/۱ \times \frac{(۷\times۱۰^۶)^۲}{۲\times۳/۵\times۱۰^۹} = ۱/۳۷۴ \ \mathrm{J}$$

۲-۱۳) منحنی تنش ـ کرنش سنگی توسط رابطه تجربی زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\sigma}{C_0} = (۵\times۱۰^۶\times\varepsilon)^{۵/۶}$$

ضریب ارتجاعی وتری یا مدول سکانت (ES) و ضریب ارتجاعی مماسی یا مدول تانژانت (ET) این سنگ را در تنش $\sigma = ۶۰ \ \mathrm{kgf/cm^۲}$ به‌دست آورید. مقاومت فشاری تک‌محوره نمونه $C_0 = ۱۲۰ \ \mathrm{kgf/cm^۲}$ می‌باشد [۲].

حل:

$$\sigma(۵۰\,\%) = ۶۰ \quad \mathrm{kgf/cm^۲}$$

$$\frac{\sigma}{C_0} = (۵\times۱۰^۶\times\varepsilon)^{۵/۶}$$

$$\sigma = ۱۲۰\times(۵\times۱۰^۶\times\varepsilon)^{۵/۶} \quad \mathrm{kgf/cm^۲}$$

$$ET_{(۵۰\%)} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = ۱۲۰\times\left(\frac{۵}{۶}\times۵\times۱۰^۶\right)\times(۵\times۱۰^۶\times\varepsilon)^{-۱/۶} \quad \mathrm{kgf/cm^۲}$$

کرنش متناظر با تنش موردنظر ($\sigma = ۶۰ \ \mathrm{kgf/cm^۲}$) عبارت‌است از :

$$\frac{۶۰}{۱۲۰} = (۵\times۱۰^۶\,\varepsilon)^{۵/۶} \Rightarrow \varepsilon_{(۶۰)} = ۸/۷۱\times۱۰^{-۸}$$

در نتیجه:

$$ET(۵۰\%) = ۱۲۰ \times \left(\frac{۵}{۶} \times ۵ \times ۱۰^{۴}\right) \times \left(۵ \times ۱۰^{۴} \times ۸٫۷۱ \times ۱۰^{-۸}\right)^{-۱} \%$$

$$ET(۵۰\%) = ۵٫۷۴ \times ۱۰^{۸} \quad kgf/cm^{۲}$$

$$ES(۵۰\%) = \tan\alpha = \frac{\sigma(۵۰\%)}{\varepsilon(۵۰\%)} = \frac{۶۰}{۸٫۷۱ \times ۱۰^{-۸}} = ۶٫۸۹ \times ۱۰^{۸} \quad kgf/cm^{۲}$$

۲-۱۴) بر روی یک نمونه سنگی به ارتفاع ۱۰ سانتیمتر و سطح مقطع ۹۰ سانتیمتر مربع آزمایش‌هایی برای تعیین مدول الاستیک سنگ انجام پذیرفته و نتایج بارگذاری - تغییر شکل آن در جدول ۲-۱ آورده شده است.

جدول ۲-۱ نتایج بارگذاری - تغییر شکل

شماره آزمایش	بار (kgf)	تغییر شکل (cm)
۱	۰	۰
۲	۱۲۰۰	$۱٫۴ \times ۱۰^{-۲}$
۳	۳۱۵۰	$۳٫۲ \times ۱۰^{-۲}$
۴	۵۴۵۰	$۵٫۴ \times ۱۰^{-۲}$
۵	۷۲۰۰	$۷٫۲ \times ۱۰^{-۲}$
۶	۹۰۰۰	$۸٫۹ \times ۱۰^{-۲}$
۷	۱۰۰۰۰	$۹٫۸ \times ۱۰^{-۲}$

با توجه به این که حداکثر باری که نمونه سنگی تحمل می‌کند ۱۰۰۰۰ کیلوگرم نیرو می‌باشد، مطلوب است:

الف - مدول الاستیک مماسی (تانژانتی)

ب - مدول الاستیک وتری (سکانتی) در تراز تنش ۸۰ کیلوگرم بر سانتیمتر مربع [۲].

حل قسمت الف: با توجه به سطح مقطع نمونه و طول آن می‌توان مقادیر تنش و کرنش متناظر با هر آزمایش را به‌دست آورد و جدولی مطابق جدول ۲-۲ تنظیم نمود.

جدول ۲-۲ مقادیر تنش کرنش متناظر با جدول ۲-۱

شماره آزمایش	تنش (kgf/cm^2)	کرنش
۱	۰	۰
۲	۱۳٫۳۳	$۱٫۴\times ۱۰^{-۳}$
۳	۳۵	$۳٫۲\times ۱۰^{-۳}$
۴	۶۰٫۵۶	$۵٫۴\times ۱۰^{-۳}$
۵	۸۰	$۷٫۲\times ۱۰^{-۳}$
۶	۱۰۰	$۸٫۹\times ۱۰^{-۳}$
۷	۱۱۱٫۱۱	$۹٫۸\times ۱۰^{-۳}$

با توجه به اطلاعات مندرج در جدول۲-۲، رابطه بین تنش و کرنش تا وقتی که مقادیر نیرو بسیار کم و یا بسیار زیاد نیست، خطی می‌باشد و اگر منحنی تنش ـ کرنش برای چنین سنگی بر اساس اطلاعات جدول ترسیم گردد، شکلی شبیه S کشیده به‌دست خواهد آمد.

بنابراین برای یافتن مدول الاستیک مماسی این سنگ به‌ازای تنش‌های معمولی (نه کم و نه زیاد) می‌توان معادله قسمت خطی منحنی موردنظر را به‌دست آورد. در واقع شیب این منحنی نشان دهندهٔ مدول الاستیک مماسی سنگ است. با رگرسیون اطلاعات مندرج در ردیف‌های ۳ ، ۴ ، ۵ و ۶ جدول خواهیم داشت:

$$\sigma = -۱٫۲ + ۱۱۳۴۸\times\varepsilon \qquad kgf/cm^2$$

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = ۱۱۳۴۸ \qquad kgf/cm^2$$

حل قسمت ب:

$$E_s = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \frac{۸۰}{۷٫۲\times ۱۰^{-۳}}$$

$$E_s = ۱۱۱۱۱ \ kgf/cm^2$$

۲-۱۵) معادله منحنی تنش-کرنش یک نمونه سنگی به‌صورت زیر تعریف شده است :

$$\frac{\sigma}{C_0} = (۵\times ۱۰^{۶}\times\varepsilon)^{۲/۳}$$

نمونه‌ای از این سنگ به‌شکل استوانه به قطر ۵۴ میلیمتر و طول ۱۲۵ میلیمتر را تحت آزمایش تراکمی تک محوره قرار داده و میزان تنش وارده را تا نقطه مقاومت نهایی سنگ مزبور یعنی ۱۲ مگاپاسکال افزایش می‌دهیم. میزان انرژی ذخیره شده در سنگ تا قبل از نقطه مقاومت نهایی را محاسبه نمایید [۲].

حل:

$$\frac{\sigma}{C_0} = (5\times10^{6}\times\varepsilon)^{2/3} \Rightarrow \sigma = C_0\times(5\times10^{6}\times\varepsilon)^{2/3}$$

ابتدا کرنش سنگ در نقطه مقاومت نهایی ε_p را محاسبه می‌نماییم.

$$\sigma = C_0 \Rightarrow C_0 = C_0\times(5\times10^{6}\times\varepsilon_p)^{2/3} \Rightarrow \varepsilon_p = 2\times10^{-7}$$

مقدار انرژی ذخیره شده در واحد حجم نمونه برابراست با :

$$\frac{W}{V} = \int_0^{\varepsilon_p} \sigma\times d\varepsilon = \int_0^{2\times10^{-7}} 12\times(5\times10^{6}\times\varepsilon)^{2/3}\,d\varepsilon$$

$$\frac{W}{V} = 1.44\times10^{-6} \quad (MJ/m^3)$$

$$W = 1.44\times10^{-6}\times V = 1.44\times10^{-6}\times\pi\times\frac{(0.054)^2}{4}\times0.125 = 4.1224\times10^{-10}\ MJ$$

۲-۱۶) نقطه‌ای از یک جسم بارگذاری شده دارای تانسور تنش زیر در مختصات دکارتی است. مطلوب‌است تعیین تنش‌های اصلی و جهت آن‌ها نسبت به محورهای مختصات مفروض [۷].

حل:

$$\sigma = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 9 \\ 6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

تنش‌ها بر حسب مگاپاسکال می‌باشد.

ابتدا از قطر اصلی تانسور تنش، تنش اصلی را کم کرده، سپس دترمینان تانسور تنش را برابر با صفر قرار می‌دهیم. در این صورت از حل معادله درجه سوم حاصله مقادیر تنش‌های اصلی به‌دست خواهد آمد.

$$\begin{vmatrix} -۵-\sigma_n & ۴ & ۶ \\ ۴ & ۸-\sigma_n & ۹ \\ ۶ & ۹ & ۷-\sigma_n \end{vmatrix} = ۰$$

$$(-۵-\sigma_n)\times\begin{vmatrix} ۸-\sigma_n & ۹ \\ ۹ & ۷-\sigma_n \end{vmatrix} - ۴\times\begin{vmatrix} ۴ & ۹ \\ ۶ & ۷-\sigma_n \end{vmatrix} + ۶\times\begin{vmatrix} ۴ & ۸-\sigma_n \\ ۶ & ۹ \end{vmatrix} = ۰$$

$$-(\sigma_n)^۳ + ۱۰\times(\sigma_n)^۲ - ۱۵۲\times\sigma_n - ۱۵۷ = ۰$$

پس از حل معادله بالا نتایج زیر حاصل می‌شوند:

$$\sigma_n = ۱۸٫۶۱۷۳۸ \quad \text{MPa}$$

$$\sigma_n = -۱٫۱۲۵۶۴ \quad \text{MPa}$$

$$\sigma_n = -۷٫۴۹۱۷۴ \quad \text{MPa}$$

مقادیر فوق را در تانسور تنش قرار داده و برای هر یک از آنها جهت‌های اصلی را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} -۵-۱۸٫۶۱۷۳۸ & ۴ & ۶ \\ ۴ & ۸-۱۸٫۶۱۷۳۸ & ۹ \\ ۶ & ۹ & ۷-۱۸٫۶۱۷۳۸ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} n_۱ \\ n_۲ \\ n_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

با ساده کردن معادله ماتریسی فوق یک دستگاه همگن سه معادله سه مجهولی به‌دست می‌آید که برای یافتن جواب‌های آن نیاز به یک معادله دیگر نیز می‌باشد.

$$-۲۳٫۶۱۷۳۸\times n_۱ + ۴\times n_۲ + ۶\times n_۳ = ۰$$

$$۴\times n_۱ - ۱۰٫۶۱۷۳۸\times n_۲ + ۹\times n_۳ = ۰$$

$$۶\times n_۱ + ۹\times n_۲ - ۱۱٫۶۱۷۳۸\times n_۳ = ۰$$

از آنجا که کسینوس‌های هادی هر امتداد، یک بردار یکه را مشخص می‌کنند، پس:

$$(n_۱)^۲ + (n_۲)^۲ + (n_۳)^۲ = ۱$$

بنابراین کسینوس‌های هادی عبارت خواهند بود از:

$$n_۱ = ۰٫۲۸۶۶$$

$$n_۲ = ۰٫۶۸۰۰$$

$$n_۳ = ۰٫۶۷۴۹$$

به همین ترتیب، جهت‌های دو تنش اصلی دیگر نیز به‌دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} -۳,۸۷۴۳۶ & ۴ & ۶ \\ ۴ & ۹,۱۲۵۶۴ & ۹ \\ -۶ & ۹ & ۸,۱۲۵۶۴ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} n_۱ \\ n_۲ \\ n_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$-۳,۸۷۴۳۶ \times n_۱ + ۴ \times n_۲ + ۶ \times n_۳ = ۰$$

$$۴ \times n_۱ + ۹,۱۲۵۶۴ \times n_۲ + ۹ \times n_۳ = ۰$$

$$-۶ \times n_۱ + ۹ \times n_۲ + ۸,۱۲۵۶۴ \times n_۳ = ۰$$

$$(n_۱)^۲ + (n_۲)^۲ + (n_۳)^۲ = ۱$$

در نتیجه کسینوس‌های هادی امتداد تنش اصلی متوسط عبارت خواهند بود از:

$$n_۱ = -۰,۲۲۳۴۳ \quad ، \quad n_۲ = ۰,۷۳۲۷۴ \quad ، \quad n_۳ = -۰,۶۳۹۲۲$$

در مورد تنش اصلی حداقل نیز داریم:

$$\begin{bmatrix} -۵+۷,۴۹۱۷۴ & ۴ & ۶ \\ ۴ & ۸+۷,۴۹۱۷۴ & ۹ \\ -۶ & ۹ & ۷+۷,۴۹۱۷۴ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} n_۱ \\ n_۲ \\ n_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

با توجه به معادلات بالا مقادیر زیر به‌دست می‌آیند:

$$n_۱ = -۰,۹۲۹۱۷ \quad ، \quad n_۲ = ۰,۰۲۵۶۹ \quad ، \quad n_۳ = ۳۶۸۷۵$$

۲-۱۷) نقطه‌ای از جسمی دارای تانسور تنش زیر است:

$$\sigma = \begin{bmatrix} ۱۱۲ & a & ۰ \\ b & -۱۱۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۹۹ \end{bmatrix} \quad (kgf/cm^۲)$$

الف) a و b را طوری تعیین کنید که قدر مطلق دو تنش اصلی ۲۱۲ باشد.

ب) کسینوس‌های هادی این دو تنش اصلی را به‌دست آورید.

ج) مقادیر تنش‌های اصلی را محاسبه نمایید.

د) فشار هیدروستاتیک در این نقطه چقدر است [۷].

حل قسمت الف: یکی از دو تنش اصلی را از قطر اصلی تانسور تنش کم می‌کنیم:

$$|\sigma_n| = ۲۱۲ \Rightarrow \sigma_n = \pm ۲۱۲$$

$$\begin{bmatrix} 112-212 & a & 0 \\ b & -112-212 & 0 \\ 0 & 0 & 99-212 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 & a & 0 \\ b & -324 & 0 \\ 0 & 0 & -113 \end{bmatrix}$$

از تانسور تنش موردنظر دترمینان گرفته و حاصل آن‌را برابر صفر قرار می‌دهیم. به این ترتیب مقادیر a و b برحسب یکدیگر محاسبه می‌شوند. از طرف دیگر با توجه به تقارن تانسور تنش داریم : $b = a$

$$-100 \times \begin{vmatrix} -324 & 0 \\ 0 & -113 \end{vmatrix} - a \times \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & -113 \end{vmatrix} = 0$$

$$-100 \times (-324) \times (-113) - a \times b \times (-113) = 0$$

$$a = b$$

$$a^2 = b^2 = 32400 \Rightarrow a = b = \pm 180$$

حل قسمت ب: $a = b = 180$ یا $a = b = -180$ را در تانسور تنش جایگزین نموده و جهت بردار تنشی که مقدار آن ۲۱۲+ است را از حل همزمان معادلات زیر به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} -100 & 180 & 0 \\ 180 & -324 & 0 \\ 0 & 0 & -113 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-100 \times n_1 + 180 \times n_2 = 0$$

$$180 \times n_1 - 324 \times n_2 = 0$$

$$-113 \times n_3 = 0 \Rightarrow n_3 = 0$$

$$(n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 = 1$$

از حل معادلات بالا خواهیم داشت:

$$n_1 = 0/874 \quad , n_2 = 0/485 \quad , n_3 = 0$$

مقادیر فوق جهت و امتداد یکی از بردارهای تنش که مقدار آن ۲۱۲ می‌باشد را نسبت به محورهای مختصات مفروض مشخص می‌کنند. در مورد تنش دیگر یعنی تنشی که مقدار آن ۲۱۲- می‌باشد نیز به همین ترتیب می‌توان کسینوس‌های هادی را محاسبه نمود.

حل قسمت ج:

$$\begin{vmatrix} ۱۱۲-\sigma_n & ۱۸۰ & ۰ \\ ۱۸۰ & -۱۱۲-\sigma_n & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۹۹-\sigma_n \end{vmatrix}=۰$$

$$(۱۱۲-\sigma_n)\times\begin{vmatrix} -۱۱۲-\sigma_n & ۰ \\ ۰ & ۹۹-\sigma_n \end{vmatrix}-۱۸۰\times\begin{vmatrix} ۱۸۰ & ۰ \\ ۰ & ۹۹-\sigma_n \end{vmatrix}=۰$$

$$(۹۹-\sigma_n)\times\left[(-\sigma_n+۱۱۲)\times(-\sigma_n-۱۱۲)-۱۸۰^۲\right]=۰$$

$$\sigma_۱=۲۱۲\ \ \mathrm{kgf/cm^۲}\ ,\quad \sigma_۲=۹۹\ \ \mathrm{kgf/cm^۲}\ ,\quad \sigma_۳=-۲۱۲\ \ \mathrm{kgf/cm^۲}$$

حل د: فشار هیدروستاتیک عبارتست از:

$$p=\frac{۱}{۳}\times\sum P_i \Rightarrow P=\frac{۱}{۳}\times(-۲۱۲+۲۱۲+۹۹)=\frac{۱}{۳}\times(۱۱۲-۱۱۲+۹۹)$$

$$p=۳۳\quad \mathrm{kgf/cm^۲}$$

۲-۱۸) بر نقطه‌ای از یک جسم بارگذاری شده، تانسور تنش زیر اعمال می‌شود:

$$\sigma=\begin{bmatrix} ۱۰۰۰ & ۵۰۰ & -۵۰۰ \\ ۵۰۰ & -۱۰۰۰ & -۵۰۰ \\ -۵۰۰ & -۵۰۰ & -۱۰۰۰ \end{bmatrix}\ \mathrm{MPa}$$

الف) بر روی سطحی مورب با بردار نرمال n ، مقدار نیروی وارده را در جهت x , y و z در صورتی که مساحت صفحه مورب واحد باشد، حساب کنید.

$$n=(\ ۱/۲\ ,\ ۱/۲\ ,\ ۱/\sqrt{۲}\ )$$

ب) مقدار مؤلفه عمودی تنش وارد بر سطح را به‌دست آورید.

ج) مؤلفه تنش برشی در صفحهٔ مورب چقدر است [۷].

حل قسمت الف:

$$n=\frac{۱}{۲}\cdot\vec{i}+\frac{۱}{۲}\cdot\vec{j}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cdot\vec{k}$$

$$P_x=\sigma_{xx}\times S\times n_x+\sigma_{yx}\times S\times n_y+\sigma_{zx}\times S\times n_z$$

$$P_x = ۱۰۰۰ \times \frac{۱}{۲} + ۵۰۰ \times \frac{۱}{۲} - ۵۰۰ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۲۹۶/۴۴ \quad MN$$

$$P_y = \sigma_{xy} \times S \times n_x + \sigma_{yy} \times S \times n_y + \sigma_{zy} \times S \times n_z$$

$$P_y = ۵۰۰ \times \frac{۱}{۲} - ۱۰۰۰ \times \frac{۱}{۲} - ۵۰۰ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = -۶۰۳/۵۵ \quad MN$$

$$P_z = \sigma_{xz} \times S \times n_x + \sigma_{yz} \times S \times n_y + \sigma_{zz} \times S \times n_z$$

$$P_z = -۵۰۰ \times \frac{۱}{۲} - ۵۰۰ \times \frac{۱}{۲} - ۱۰۰۰ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = -۱۲۰۷/۱۱ \quad MN$$

حل قسمت ب :

$$\sigma_n = \sigma_{xx} \times (n_x)^۲ + \sigma_{yy} \times (n_y)^۲ + \sigma_{zz} \times (n_z)^۲ + ۲n_x . n_y . \sigma_{xy} + ۲n_y . n_z . \sigma_{yz} + ۲n_x . n_z . \sigma_{xz}$$

$$\sigma_n = ۱۰۰۰ \times (\frac{۱}{۲})^۲ + (-۱۰۰۰) \times (\frac{۱}{۲})^۲ + (-۱۰۰۰) \times (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ + ۵۰۰ \times (\frac{۱}{۲}) - ۵۰۰ \times (\frac{\sqrt{۲}}{۲}) - ۵۰۰ \times (\frac{\sqrt{۲}}{۲}) \Rightarrow \sigma_n = -۹۵۷/۱۱ \quad MPa$$

حل قسمت ج:

$$P = \sqrt{(P_x)^۲ + (P_y)^۲ + (P_z)^۲} = \sqrt{۲۹۶/۴۴^۲ + ۶۰۳/۵۵^۲ + ۱۲۰۷/۱۱^۲}$$

$$P = ۱۴۰۶/۶۱ \quad (MN) \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{P}{S} = \frac{۱۴۰۶/۶۱}{۱} = ۱۴۰۶/۶۱ \quad MPa$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\sigma^۲ - (\sigma_n)^۲} = \sqrt{۱۴۰۶/۶۱^۲ - ۹۵۷/۱۱^۲} = ۱۰۳۰/۷۷ \quad MPa$$

۲-۱۹) بر نقطه‌ای از یک جسم در مختصات دکارتی تانسور تنش زیر اثر می‌کند. چنانچه محورهای مختصات حول محور z ها در جهت عکس چرخش عقربه‌های ساعت به اندازه ۴۵ درجه دوران کنند، تانسور تنش در سیستم مختصات جدید را تعین کنید [۷].

حل:

$$\sigma = \begin{bmatrix} ۵ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۴ \\ ۰ & ۴ & ۳ \end{bmatrix} \quad (MPa)$$

ماتریس تبدیل و ترانهاده آن به شکل زیر است:

$$T = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad T^t = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^t \times \sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$T^t \times \sigma = \begin{bmatrix} 3\times\sqrt{2} & 3\times\sqrt{2}/2 & 2\times\sqrt{2} \\ -2\times\sqrt{2} & \sqrt{2}/2 & 2\times\sqrt{2} \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[\sigma'] = [T^t]\times[\sigma]\times[T]$$

$$[\sigma'] = \begin{bmatrix} 3\times\sqrt{2} & 3\times\sqrt{2}/2 & 2\times\sqrt{2} \\ -2\times\sqrt{2} & \sqrt{2}/2 & 2\times\sqrt{2} \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\sigma'] = \begin{bmatrix} 4.5 & -1.5 & 2\times\sqrt{2} \\ -1.5 & 2.5 & 2\times\sqrt{2} \\ 2\times\sqrt{2} & 2\times\sqrt{2} \cdot & 3 \end{bmatrix} \quad (MPa)$$

۲-۲۰) میدان تنش در جسمی با تانسور تنش زیر نشان داده شده است. مطلوب است تعیین بردار تنش عمود بر صفحه‌ای به معادله $x + y + z = 7$ که از نقطه $M(4,2,1)$ می‌گذرد [۲].

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3y \\ 0 & 1 & 4x \\ 3y & 4x & 1 \end{vmatrix} \times 10^3 \quad (MPa)$$

حل: با توجه به معادله صفحه و بردار نرمال آن داریم:

$$n = (\sqrt{۳}/۳ ,\ \sqrt{۳}/۳ ,\ \sqrt{۳}/۳)$$

$$P_x = (\sigma_{xx} \times n_x + \sigma_{yx} \times n_y + \sigma_{zx} \times n_z) \times S$$

$$P_x = (۱۰^۲ + ۲ \times ۱۰^۲ \times y) \times S \times \sqrt{۳}/۳$$

$$P_y = (\sigma_{xy} \times n_x + \sigma_{yy} \times n_y + \sigma_{zy} \times n_z) \times S$$

$$P_y = (۱۰^۲ + ۴ \times ۱۰^۲ \times x) \times S \times \sqrt{۳}/۳$$

$$P_z = (\sigma_{xz} \times n_x + \sigma_{yz} \times n_y + \sigma_{zz} \times n_z) \times S$$

$$P_z = (۲ \times ۱۰^۲ \times y + ۴ \times ۱۰^۲ \times x + ۱۰^۲) \times S \times \sqrt{۳}/۳$$

مختصات نقطه M را جایگذاری می‌کنیم.

$$P_x = ۷ \times \sqrt{۳}/۳ \times ۱۰^۲ \times S$$

$$P_y = ۵ \times \sqrt{۳}/۳ \times ۱۰^۲ \times S$$

$$P_z = ۱۱ \times \sqrt{۳}/۳ \times ۱۰^۲ \times S$$

$$P_n = P \times n = P_x \times n_x + P_y \times n_y + P_z \times n_z$$

$$P_n = (\frac{۷}{۳} + \frac{۵}{۳} + \frac{۱۱}{۳}) \times ۱۰^۲ \times S$$

$$P_n = \frac{۲۳}{۳} \times ۱۰^۲ \times S$$

$$\sigma_n = \frac{P_n}{S} \times n = \frac{۲۳\sqrt{۳}}{۹} \times ۱۰^۲ \times (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

۲-۲۱) موقعیت تنش در یک توده‌سنگ به‌صورت زیر است.

$\tau_{yx} = \tau_{xy} = ۱۰ \quad \sigma_y = ۴۰ \quad \sigma_x = ۱۵$ (MPa)

اگر τ_{xy} در جهت عقربه‌های ساعت و τ_{yx} در خلاف جهت عقربه‌های ساعت باشد. مطلوباست تنش‌هایی که بر روی سطوح اصلی وارد می‌شوند [۳].

حل:

$$\sigma_{۱,۲} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{۲} \pm \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{۲})^۲ + (\tau_{xy})^۲}$$

$$\sigma_۱ = \frac{۱۵ + ۴۰}{۲} + \sqrt{(\frac{۱۵ - ۴۰}{۲})^۲ + ۱۰^۲} = ۴۳٫۵ \text{ MPa}$$

۲-۲۳) نمونه‌ای از ...

اندازه ۱۰میلیمتر ...

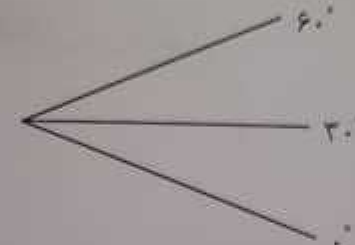
ضریب صلبیت نمونه ...

حل:

$$\sigma_3 = \frac{15+40}{2} - \sqrt{\left(\frac{15-40}{2}\right)^2 + 10^2} = 11.5\ \text{MPa}$$

۲-۲۲) بر روی یک نمونه سنگ دستگاه‌های اندازه‌گیری کرنش مطابق شکل زیر نصب شده و کرنش‌ها در امتدادهایی که با هم زاویه ۳۰ درجه می‌سازند اندازه‌گیری شده است. نتایج اندازه‌گیری کرنش عبارت است از:

$\varepsilon_0 = -1\times10^{-4}$ ، $\varepsilon_{30} = 2.3\times10^{-4}$ ، $\varepsilon_{60} = 3\times10^{-4}$



با در نظر گرفتن اطلاعات فوق، امتداد کرنش‌های اصلی را با استفاده از دایره کرنش موهر محاسبه کنید [۶].

حل:

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_0\\ \varepsilon_{30}\\ \varepsilon_{60}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos^2 0 & \sin^2 0 & \frac{1}{2}\sin 0\\ \cos^2 30 & \sin^2 30 & \frac{1}{2}\sin 60\\ \cos^2 30 & \sin^2 60 & \frac{1}{2}\sin 120\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_{xy}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_0\\ \varepsilon_{30}\\ \varepsilon_{60}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3/4 & 1/4 & \sqrt{3}/4\\ 1/4 & 3/4 & \sqrt{3}/4\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_{xy}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_{xy}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 2\\ -2.3 & 3.4 & -1.1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}-1\times10^{-4}\\ 2.3\times10^{-4}\\ 3\times10^{-4}\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\varepsilon_x = -1\times10^{-4}\\ \varepsilon_y = 4\times10^{-5}\\ \varepsilon_{xy} = 6.8\times10^{-4}\end{cases}$$

$$R = \frac{1}{2}\left((\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}{}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$R = \frac{1}{2}\left((-1\times10^{-4} - 4\times10^{-5})^2 + 6.8\times10^{-4}\right)^{\frac{1}{2}} = 3.4\times10^{-4}$$

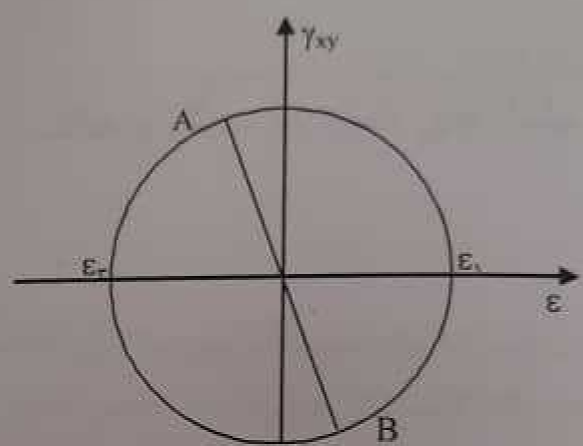
$$\varepsilon_c = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{۲} = \frac{-۱\times۱۰^{-۴} + ۴\times۱۰^{-۵}}{۲} = -۳\times۱۰^{-۵}$$

$$\varepsilon_۱ = \varepsilon_c + R = -۳\times۱۰^{-۵} + ۳{,}۴\times۱۰^{-۴} = ۳{,}۱\times۱۰^{-۴}$$

$$\varepsilon_۲ = \varepsilon_c - R = -۳\times۱۰^{-۵} - ۳{,}۴\times۱۰^{-۴} = ۳{,}۷\times۱۰^{-۴}$$

$$A = (\varepsilon_x , {}^{\gamma_{xy}}\!/_{۲}) = (-۱\times۱۰^{-۴} , ۶{,}۸\times۱۰^{-۴})$$

$$B = (\varepsilon_y , {}^{-\gamma_{xy}}\!/_{۲}) = (۴\times۱۰^{-۵} , -۶{,}۸\times۱۰^{-۴})$$



۲-۲۳) نمونه‌ای از سنگ آهک به شکل استوانه و با نسبت $\frac{l}{d} = ۳$ تحت بار ۱۰ تن به اندازه ۱۰میلیمتر کاهش طول می‌دهد (کاهش طول). قطر نمونه ۱۰۰ میلیمتر است. ضریب صلبیت نمونه چند کیلوگرم بر سانتی‌متر است [۳].

حل:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F\Delta l}{A.l} \Rightarrow F = \frac{E.A}{l}\Delta l \text{ و } K = \frac{E.A}{L}$$

$$F = K\Delta L \Rightarrow ۱۰^{۴} = K \times ۱۰^{-۱} \Rightarrow K = ۱۰^{۵}\ \frac{kg}{cm^{۲}}$$

۲-۲۴) مؤلفه‌های کرنش یک نقطه در یک جسم برابر مقادیر زیر است:

$\varepsilon_x = ۱۲\eta$ ، $\varepsilon_y = ۴\eta$ ، $\gamma_{xy} = -۶\eta$

مقدار کرنش اصلی بزرگتر چه قدر است [۳].

حل:

$$\varepsilon_۱ = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{۲} + \left(\left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{\gamma_{xy}}{۲}\right)^۲\right)^{۰/۵}$$

$$\varepsilon_۱ = \frac{۱۲\eta + ۴\eta}{۲} + \left(\left(\frac{۱۲\eta - ۴\eta}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{-۶\eta}{۲}\right)^۲\right)^{۰/۵} = ۱۳\eta$$