تعمیم: اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ مستقل خطی باشند آنگاه $W(y_1,y_2)\neq 0$.

مثال: در مسئله‌ی قبل داریم: $\begin{cases} y_1=e^{2x}\\ y_2=3e^{2x}\end{cases}$

$\Longrightarrow W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^{2x} & 3e^{2x}\\ 2e^{2x} & 6e^{2x}\end{vmatrix}=0 \to y_1,y_2$ مستقل خطی نیستند

$\begin{cases} y_1=e^{2x}\\ y_2=e^{3x}\end{cases} \to W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x}\\ 2e^{2x} & 3e^{3x}\end{vmatrix}=e^{5x}\neq 0 \to y_1,y_2$ مستقل خطی

تعمیم: اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب مستقل خطی معادله همگن $y''+P(x)y'+q(x)y=0$ باشند در این صورت $c_1y_1+c_2y_2$ یک جواب عمومی از این معادله دیفرانسیل است.

مثال: در مسئله فوق $y_1=e^{2x}$, $y_2=e^{3x}$ مستقل خطی بودند لذا $c_1y_1+c_2y_2=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$ یک جواب عمومی معادله $y''-5y'+6y=0$ است.

روش های حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

• روش کاهش مرتبه: ← برای ناهمگن است

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $y''+P(x)y'+q(x)y=R(x)$ (I) و معادله همگن نظیر آن یعنی $y''+P(x)y'+q(x)y=0$ (II) را در نظر بگیرید. فرض کنید $y_1(x)$ یک جواب معادله همگن (II) باشد. برای معادله ناهمگن جوابی به فرم $y_2(x)=v(x)\cdot y_1(x)$ (III) جستجو می‌کنیم که در آن $v(x)$ مجهول است و باید بدست آید. برای بدست آوردن $v(x)$ رابطه (III) را در (I) جایگذاری می‌کنیم. با بدست آوردن $v(x)$ جواب عمومی معادله ناهمگن (I) بدست می‌آید.

اگر رابطه (III) را در (I) جایگذاری کنیم داریم:

$$y_2 = v y_1 \to y_2' = v' y_1 + v y_1' \Rightarrow y_2'' = v'' y_1 + v' y_1' + v' y_1' + v y_1'' =$$

$$v'' y_1 + 2v' y_1' + v y_1'' \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{در فرمول (I) جایگذاری}} (v y_1'' + 2v' y_1' + v y_1'') + P(x)(v' y_1 + v y_1')$$

چون y_1 یک جواب معادلات است پس داخل پرانتز کلا صفر می‌شود.

$$+ q(x) \cdot v y_1 = R(x) \to v'' y_1 + 2v' y_1' + P(x) v' y_1 + v(y_1'' + \cancel{P(x)} y_1' + q(x) y_1) = R(x)$$

$$\to v'' y_1 + v'(2y_1' + P(x) y_1) = R(x) \xrightarrow[v''=w']{v'=w \ \text{قرار می‌دهیم}} \boxed{w' y_1 + (2y_1' + P(x) y_1) w = R(x)} \quad (*)$$

رابطه (*) یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول است که با حل آن w و لذا $v(x)$ بدست می‌آید.

مثال: جواب عمومی معادله زیر را بیابید: $x^2 y'' - x y' + y = x^4$

باید یک جواب خصوصی از معادله همگن داشته باشیم تا حل کنیم. مهم: ضریب y'' باید ۱ باشد.

و چون اینجا نداده باید ابتدا جواب خصوصی رو حدس بزنیم.

نکته روش حدس زدن جواب خصوصی

یک جواب معادله همگن x $y'' + P(x) y' + q(x) y = 0$ If $P(x) + x q(x) = 0 \to y(x) = x$

$$x^2 y'' - x y' + y = 0 \to y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = 0 \to P(x) + x q(x) = -\frac{1}{x} + x\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{y_1(x) = x}$$

جواب عمومی رو فرض: $y_2 = v y_1 = x v$ که باید v را بیابیم با جایگذاری در معادله اصلی و با کمک فرمول (*) داریم:

$$w' y_1 + (2y_1' + P(x) y_1) w = R(x) \Rightarrow x w' + \left(2 + \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot x\right) w = x^2$$

$$\to x w' + w = x^2 \to w' + \frac{1}{x} w = x$$

$$\to w = e^{-\int \frac{1}{x} dx}\left(\int x e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + c\right) = \frac{1}{x}\left(\int x^2 dx + c\right) = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}$$

$$\to w = v' = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x} \Rightarrow v(x) = \frac{x^3}{9} + c \ln|x| + c'$$