مثال: تمرین

$$\mathrm{tgh}\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

۱) $xy''+y'=0$

۲) $y''=y'+\mathrm{tgh}\,x$

۳) $yy''-(y')^2=0$

۴) $y''+e^y(y')^3=0$

۵) $y''+y'\,\mathrm{tg}\,x=\sin 2x$

۶) xy''

تذکر: درحالت کلی معادله $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(k+n)})=0$ با استفاده از تغییر متغیر $z=y^{(k)}$ به معادله مرتبهٔ nام $F(x, z, z', \dots, z^{(n)})$ تبدیل می‌شود.

مثال) $xy'''+y''=1+x$

$z=y'' \rightarrow z'=y'''$ $\qquad xz'+z=1+x$

$z'+\frac{1}{x}z=1+\frac{1}{x}$ $\qquad$ خطی مرتبهٔ اول

$z=? \Rightarrow y''=? \xrightarrow{\text{دو بار انتگرال}}$

$z=\frac{1}{x}\left(\int x\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)dx+c\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2}+x+c\right) \longrightarrow$ ادامه ۲ بار انتگرال گیری

- معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم:

صورت کلی معادلات مرتبهٔ دوم به شکل زیر است:

غیرهمگن

I) $\quad y''+P(x)y'+Q(x)y=r(x)$

درحالتی که $r(x)=0$، یعنی II $\quad y''+P(x)y'+Q(x)y=0$، معادله را همگن نامیم.

قضیهٔ ۱: اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ جوابهای خصوصی معادلهٔ II (همگن) باشند، $y_h=c_1y_1+c_2y_2$ $(c_i\in\mathbb{R})$ جواب عمومی معادلهٔ II می‌باشد.

قضیهٔ ۲: اگر y_p جواب خصوصی معادلهٔ I (غیرهمگن) و y_h جواب عمومی معادلهٔ II باشد، $y=y_h+y_p$ جواب عمومی معادلهٔ I (غیرهمگن) می‌باشد.

جواب عمومی غیرهمگن — جواب عمومی همگن — جواب خصوصی غیرهمگن

در این مبحث برای حل معادلهٔ غیرهمگن ابتدا معادلهٔ همگن را حل می‌کنیم (روشهای مشخص دارد)، سپس

با توجه به طرف دوم معادله غیر همگن، جواب خصوصی معادله را به دست می‌آوریم جمع دو جواب، جواب عمومی غیر همگن می‌باشد.

تعریف: توابع $y_1, y_2, \ldots, y_n$ مستقل خطی هستند هرگاه از تساوی $c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n=0$ نتیجه $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$ حاصل شود. در غیر این صورت وابسته‌اند.

مثال: درهر مورد استقلال یا وابستگی را بررسی کنید.

1) $x, x^2 \to c_1x+c_2x^2=0 \overset{?}{\Longrightarrow} c_1=c_2=0$

$$x=1,\ x=2 \quad \begin{cases} c_1+c_2=0 & (\times -2) \\ 2c_1+4c_2=0 \end{cases} \to \begin{array}{l} -2c_2+4c_2=0 \Rightarrow 2c_2=0 \quad \boxed{c_2=0} \\ c_1+c_2=0 \to c_1+0=0 \quad \boxed{c_1=0} \end{array}$$

$\longrightarrow$ x و x^2 مستقل می‌باشند.

2) $e^x, e^{2x} \to c_1e^x+c_2e^{2x}=0$

$$\underset{\neq 0}{e^x}(c_1+c_2e^x)=0 \qquad c_1+c_2e^x=0$$

$$\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} c_1+c_2=0 \\ c_1+ec_2=0 & (-) \end{cases} \quad c_2-ec_2=0 \quad c_2(1-e)=0 \quad \boxed{c_2=0} \quad c_1=0$$

$\Rightarrow$ مستقل هستند

3) $e^x, 5e^x \to c_1e^x+c_2(5e^x)=0 \to \underset{\neq 0}{e^x}(c_1+5c_2)=0$

$$\Rightarrow c_1+5c_2=0 \Rightarrow \boxed{c_1=-5c_2}$$

$\Leftarrow$ پس مستقل نیستند.

تعریف: فرض کنیم توابع $y_1, y_2, \ldots, y_n$ تا مرتبه $n-1$ مشتق‌پذیر باشند، در این صورت رونسکی (رونسکین) این توابع به این صورت تعریف می‌شود:

$$w(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

مثال:

$$w(x^2, x^3) = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^4 - 2x^4 = x^4 \neq 0$$

$\Leftarrow$ مستقل اند

تذکر: توابع $y_1, y_2, \dots, y_n$ مستقل خطی می باشند هرگاه $w(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$ باشد. مثال:

$$w(e^x, 3e^x) = \begin{vmatrix} e^x & 3e^x \\ e^x & 3e^x \end{vmatrix} = 3e^{2x} - 3e^{2x} = 0$$

$\Leftarrow$ پس وابسته اند

تذکر: اگر $y_1, y_2, \dots, y_n$ ، n جواب مستقل معادلهٔ مرتبهٔ n ام باشند، جواب عمومی به شکل زیر می باشد:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \cdots + c_n y_n$$

در حالتی که معادلهٔ مرتبهٔ دوم باشد: $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم همگن:

صورت کلی $\rightarrow$ $y'' + P(x) y' + Q(x) y = 0$

$y_1 = y_1(x)$
جواب خصوصی

ترجیحاً اثبات فرمول در کتاب دیده شود. $\longrightarrow$ $\underline{y_2 = y_1 \left(\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)\,dx} dx \right)}$ $\Rightarrow$ $\underline{y = c_1 y_1 + c_2 y_2}$

- در حالات زیر جواب خصوصی مشخص می شوند:

1) $1 + P(x) + Q(x) = 0 \Rightarrow y_1 = e^{x}$

2) $1 - P(x) + Q(x) = 0 \Rightarrow y_1 = e^{-x}$

$$3)\quad P(x) + xQ(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = x$$

$$4)\quad m^2 + mP(x) + Q(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = e^{mx}$$

مثال: هر یک از معادلات زیر را حل کنید:

$Q(x)$ روی y اثر دارد اما در جواب y_2 دیده نمی‌شود.

$$1)\quad xy'' + 2y' + xy = 0 \quad , \quad y_1 = \frac{\sin x}{x}$$

(یکی از جواب‌های خصوصی داده شده است، برای یافتن جواب عمومی، کافیست یک جواب دیگر خصوصی را به دست آورد که با اولی مستقل خطی باشد)

اشتباه به عدم استاندارد می‌نویسیم

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$$

$$y_2 = y_1\left(\int \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{-\int P(x)\,dx}\,dx\right)$$

$$y_2 = \frac{\sin x}{x}\left(\int \frac{x^2}{\sin^2 x}\, e^{-\int \frac{2}{x}\,dx}\,dx\right) = \frac{\sin x}{x}\left(\int \frac{\cancel{x^2}}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{\cancel{x^2}}\,dx\right)$$

$$y_2 = \frac{\sin x}{x}\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \frac{\sin x}{x}\int (1 + \cot^2 x)\,dx$$

$$y_2 = \frac{\sin x}{x} \times -\cot x = -\frac{\cos x}{x} \qquad \boxed{y_2 = \frac{-\cos x}{x}}$$

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1\frac{\sin x}{x} + c_2\left(\frac{-\cos x}{x}\right)$$

مثال:

$$(x+1)y'' - (2x+3)y' + (x+2)y = 0 \qquad y_1 = e^x$$

حل:

$$y'' - \left(\frac{2x+3}{x+1}\right) + \frac{x+2}{(x+1)}y = 0$$

$$\boxed{\int \frac{2x+3}{x+1}\,dx = \int \frac{2x+2+1}{x+1}\,dx \qquad \int 2 + \frac{1}{x+1}\,dx = 2x + \ln(x+1)}$$

$$y_2 = e^x\left(\int \frac{1}{e^{2x}} \cdot e^{\int \frac{2x+3}{x+1}\,dx}\,dx\right)$$

$$y_2 = e^x\left(\int e^{-2x} \cdot e^{2x + \ln(x+1)}\,dx\right)$$

$$= e^x\left(\int e^{\ln(x+1)}\,dx\right) = e^x\left(\int x+1\,dx\right) = e^x\left(\frac{x^2}{2} + x\right)$$

$$y_2 = e^x\left(\frac{x^2}{2} + x\right)$$

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^x + c_2e^x\left(\frac{x^2}{2} + x\right)$$