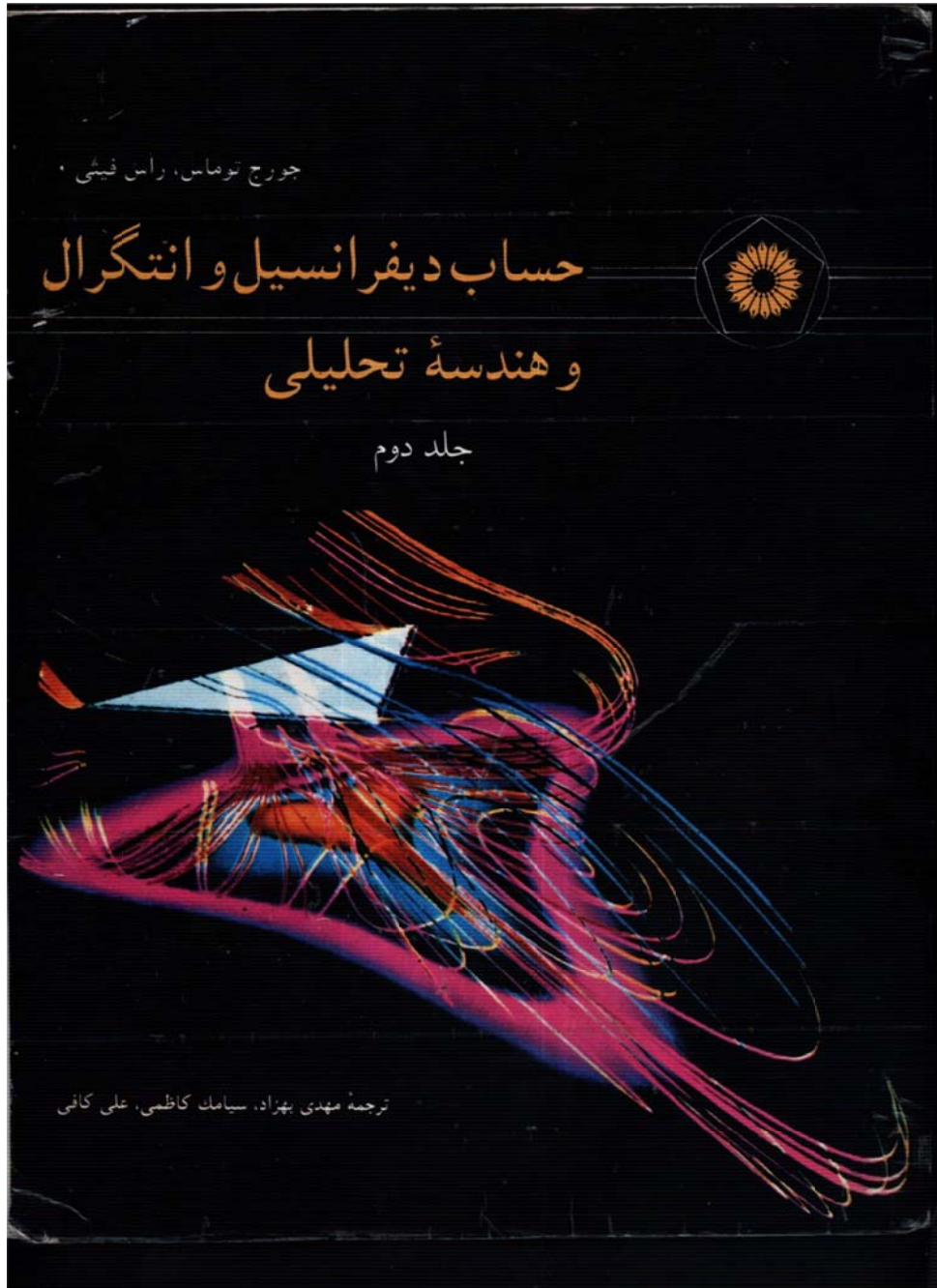


همکار محترم:

همان گونه که استحضار دارید، برای هماهنگی بیشتر در تدریس درس ریاضی عمومی ۲ فنی مقرر شد که در سال تحصیلی ۹۷-۱۳۹۶، کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی (جلد دوم)، تالیف جورج توماس و راس فینی به عنوان مرجع اصلی درس معرفی شود. به همین دلیل از فصل‌های ۱۳ تا ۱۹ این کتاب، تعدادی از مسایل مناسبتر آن انتخاب و به صورت تقریبی دسته بندی شده اند و به اطلاع مدرسان و دانشجویان رسیده است.

تعدادی از از تمرینهایی که توقع داریم دانشجویان حل کنند در این فایل آمده است و در کلاس حل تمرین که به صورت هفتگی برای دانشجویان این درس تدارک دیده شده است نیز برخی از تمرینات مشخص شده زیر حل خواهد شد. خواهشمندیم برای انتخاب مثالها برای حل در کلاس، تمرینات مشخص شده را در اولویت قرار داده و در مورد آنها بحث نمایید. امید است که دانشجویان با مطالعه مثالهای حل شده و حل تمرینهای برگزیده، برای امتحانات میان ترم و پایان ترم آمادگی لازم را کسب نمایند.

عذرخواهی: به دلیل کم بودن زمان برای تهیه این فایل، مجبور شدیم که از صفحات اسکن شده کتاب استفاده کنیم. به همین دلیل ممکن است کیفیت بعضی از قسمتها مناسب نباشد.





۳۶. الف) نشان دهید که خمیدگی نمودار تابعی چون $y = f(x)$ که دوبار مشتقپذیر است از فرمول زیر بدست می آید

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}}$$

(داهنمایی: فرض کنید $\mathbf{R}(t) = x\mathbf{i} + f(x)\mathbf{j}$)

ب) فرمول قسمت الف را در مورد $y = \ln(\cos x)$ بدکار ببرید و نتیجه ای را که بدست می آورید با نتیجه مسأله ۱ مقایسه کنید.

۳. مطلوب است معادلات پارامتری خط مماس بر خم زیر در $t = 0$:

$$\mathbf{R}(t) = e^t \mathbf{i} + (\sin t) \mathbf{j} + \ln(1-t) \mathbf{k}$$

۸. مکان ذره ای در فضا در $t \geq 0$ عبارت است از

$$\mathbf{R}(t) = 2t \mathbf{i} + \left(2 \sin \frac{t}{2}\right) \mathbf{j} + \left(2 - \frac{t}{\pi}\right) \mathbf{k}$$

نخستین لحظه ای را بیابید که در آن، $\mathbf{R}(t)$ بر بردار $\mathbf{B} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ عمود است.

۱۷. مطلوب است $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{K}, \mathbf{B}$ ، و τ در مورد خم زیر در $t = 0$:

$$\mathbf{R}(t) = (e^t \sin 2t) \mathbf{i} + (e^t \cos 2t) \mathbf{j} + (2e^t) \mathbf{k}$$

۱۸. معادلات صفحات بوسان، قائم، و راستگر خم زیر را در نقطه $(1, 1, 1)$ بیابید.

$$\mathbf{R}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$$

فصل ۱۵

رویه ها، دستگاههای مختصات و ترسیم

استوانه های مذکور در مسأله های ۱-۱۸ را رسم کنید.

$$z = y^2 - 1 \quad ۵$$

$$x = y^2 \quad ۶$$

$$z = 4 - x^2 \quad ۷$$

رویه های مذکور در مسائل ۱-۳۴ را رسم کنید. در مورد سهمیوارها، هذلولیوارها و مخروطها، نوع رویه را ذکر کنید.

$$x^2 + z^2 = y \quad ۸$$

$$(y^2/4) + (z^2/9) - (x^2/4) = 1 \quad ۲۵$$

فصل ۱۴

تابعهای برداری و حرکت

در مسائل ۲۱-۲۲، با استفاده از شتاب و شرایط اولیه، $\mathbf{R}(t)$ را تعیین کنید.

$$\mathbf{a}(t) = (1+t)^{-1/2} \mathbf{i} - e^{-t} \mathbf{j}, \quad \mathbf{v}(0) = -\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad ۲۳$$

$$\mathbf{R}(0) = (1/3) \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

۲۹. ذره ای روی بیضی $(x/3)^2 + (y/2)^2 = 1$ چنان حرکت می کند که مکانش در لحظه t عبارت است از

$$\mathbf{R}(t) = (3 \cos t) \mathbf{i} + (2 \sin t) \mathbf{j}$$

مقادیر ماکسیمم و مینیمم اندازه شتاب را بیابید.

۳۰. فرض می کنیم بردارهای مکان ذرات P_1 و P_2 که در فضا در حرکت اند عبارت اند از

$$\mathbf{R}_1(s) = 2s \mathbf{i} + (s-5) \mathbf{j} + s \mathbf{k}$$

$$\mathbf{R}_2(t) = (3+t) \mathbf{i} - (2+t) \mathbf{j} + (1+t) \mathbf{k}$$

که در آنها s و t هر دو زمان را نشان می دهند.

الف) نقطه تقاطع مسیرهای P_1 و P_2 را بیابید. درجه لحظه ای ذرات به این نقطه تقاطع می رسند؟

ب) چون s و t هر دو زمان را نشان می دهند، s را برابر با t قرار دهید و فاصله بین P_1 و P_2 را به صورت تابعی از t تعیین کنید. درجه لحظه ای فاصله دو ذره کمترین مقدار را دارد؟

در مسائل ۱-۱۵، بردار $\mathbf{R}(t)$ بردار مکان ذره ای است که در صفحه یا در فضا حرکت می کند. مطلوب است بردار مماس واحد \mathbf{T} در مورد خمی که ذره روی آن حرکت می کند. همچنین طول قطعه مشخص شده از خم را بیابید.

$$\mathbf{R}(t) = (t \cos t) \mathbf{i} + (t \sin t) \mathbf{j} + (2\sqrt{2}/3)t^{3/2} \mathbf{k} \quad ۷$$

از $t = 0$ تا $t = \pi$

$$\mathbf{R}(t) = (t \sin t + \cos t) \mathbf{i} + (t \cos t - \sin t) \mathbf{j} \quad ۸$$

از $t = 0$ تا $t = a$

در مسائل ۹-۱۴، $\mathbf{B}, \mathbf{K}, \mathbf{N}, \mathbf{T}$ ، و τ را در مورد خمهای مفروض بیابید.

$$\mathbf{R}(t) = (\cos t + t \sin t) \mathbf{i} + (\sin t - t \cos t) \mathbf{j} + 2t \mathbf{k} \quad ۱۰$$

$$\mathbf{R}(t) = \frac{4}{9}(1+t)^{3/2} \mathbf{i} + \frac{4}{9}(1-t)^{3/2} \mathbf{j} + \frac{1}{3}t \mathbf{k} \quad ۱۳$$

در مسائل ۱۵-۲۰، بسطون یساقین \mathbf{T} و \mathbf{N} ، \mathbf{a} را به صورت $\mathbf{a} = a_T \mathbf{T} + a_N \mathbf{N}$ بنویسید.

$$\mathbf{R}(t) = (a \cos \omega t) \mathbf{i} + (a \sin \omega t) \mathbf{j} + b t \mathbf{k} \quad ۱۹$$



۳۰. مقدار ماکسیمم تابع $f(x, y, z) = xyz$ را روی خط $x = 2 - y$ ، $y = z$ ، $z = 20$ بیابید. درجه نقطه یسا نقاطی از خط، این ماکسیمم به دست می آید؟ (داهنمایی: در امتداد خط، f را می توان به صورت تابع مشتق پذیری از تک متغیر t بیان کرد.)

در مسائل ۱۷-۲۲، با در نظر گرفتن خطوط میل مختلف نشان دهید که وقتی $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ، توابع مفروض حد ندارند.

$$0.20 \quad \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$0.21 \quad \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

$$0.22 \quad \frac{xy}{|xy|}$$

۳۳. در مورد تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

مذکور در مثال ۳، خمهای تراز $f(x, y) = 0$ و $f(x, y) = 1/2$ را رسم کنید. این هم راه دیگری است برای نشان دادن ناپیوستگی این تابع در مبدأ.

۲۹. فرض کنید معادله زیر z را به صورت تابع مشتق پذیری از دو متغیر مستقل x و y تعریف می کند

$$xy + z^2x - 2yz = 0.$$

مطلوب است مقدار $\partial z / \partial x$ در نقطه $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

۳۰. فرض کنید معادله زیر x را به صورت تابع مشتق پذیری از دو متغیر مستقل y و z تعریف می کند

$$xz + y \ln x + x^2 + 4 = 0.$$

مطلوب است مقدار $\partial x / \partial z$ در نقطه

$$(x, y, z) = (1, -1, -2).$$

در مسائل ۳۵-۴۰، مختصات کروی ρ ، ϕ ، θ را به صورت توابعی از مختصات دکارتی x ، y ، z بیان، ومشتقات خواسته شده را محاسبه کنید.

$$0.36 \quad \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$0.35 \quad \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$\mathbf{R}(t) = (\sqrt{t} \cos t)\mathbf{i} + (\sqrt{t} \sin t)\mathbf{j} + \sqrt{1-t}\mathbf{k}$$

در بازه $0 \leq t \leq 1$ باریک رویه درجه دوم واقع است. معادله ای برای این رویه پیدا کنید و نوع آن را مشخص کنید.

در مسأله های ۱۱-۲۰، هر معادله در یک دستگاه مختصات (دکارتی، استوانه ای، یا کروی) داده شده است. آن را به معادلاتی در دو دستگاه دیگر تبدیل کنید. همچنین، مجموعه نقاطی را که به وسیله معادله تعریف می شوند، مشخص کنید.

$$0.16 \quad \sqrt{x^2 + y^2} = z$$

$$0.18 \quad \tan^2 \phi = 1$$

$$0.20 \quad \rho = 6 \cos \phi$$

$$0.24 \quad r = 2 \cos \theta$$

در مسأله های ۱۳-۱۸، مطلوب است توصیف مجموعه هایی در فضا که با معادله ها و نامعادله های داده شده تعریف می شوند.

$$0.17 \quad \rho = 1, \quad \theta = \phi, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

۲۲. معادلات پارامتری $x = x(\theta)$ ، $y = y(\theta)$ ، $z = z(\theta)$ را برای خمی که فصل مشترک کره $\rho = a$ با صفحه $y + z = 0$ است پیدا کنید.

۳۱. عبارت $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ را بر حسب (الف) مختصات استوانه ای r ، θ ، z ، و (ب) مختصات کروی ρ ، ϕ ، θ بیان کنید (مسأله ۳۰ را ببینید). نتایج خود را به صورت هندسی و بر حسب اضلاع و قطری از یک مکعب مستطیل تعبیر کنید. شکل بکشید.

۳۲. با استفاده از نتایج مسأله ۳۱، طول خمهای زیر، بین $\theta = 0$ و $\theta = \ln 8$ ، را حساب کنید.

$$\text{الف) } z = r = ae^{\theta}$$

$$\text{ب) } \phi = \pi/6, \quad \rho = 2e^{\theta}$$

فصل ۱۶

تابعهای دو یا چند متغیره و مشتق آنها

۲۵. خمهای تراز تابع

$$f(x, y) = -(x-1)^2 - y^2 + 1$$

را به ازای $f(x, y) = 1, 0, -3, -8$ رسم کنید.

۲۶. خمهای تراز تابع $f(x, y) = 2x^2 - y + 1$ را به ازای $f(x, y) = 0, 1, 2$ رسم کنید.



سوالات برگزیده درس ریاضی ۲- فنی (هماهنگ)

نیمسال ۳۹۶۱

صفحه ۱۲۶

۷. فرض کنید که $x^2 + y^2 = r^2$ و $x = r \cos \theta$ (همان طور که در مختصات قطبی داریم). مطلوب است

$$\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_\theta \quad \text{و} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)_r$$

۸. فرض کنید معادله $g(x, y, z) = 0$ را به صورت تابع مشتق پذیری از متغیرهای مستقل x و y به دست می‌دهد، و نیز فرض کنید $g_z \neq 0$ نشان دهید که

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = -\frac{\partial g / \partial y}{\partial g / \partial z}$$

۹. با فرض $f(x, y, z) = 0$ ، رابطه زیر را که در هیدرو دینامیک کاربرد زیادی دارد ثابت کنید

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

صفحه ۱۳۱

۳۳. مطلوب است مشتق $f(x, y, z) = xyz$ در جهت بردار سرعت بیج زیر در $t = \pi/3$:

$$\mathbf{R}(t) = (\cos 2t)\mathbf{i} + (\sin 2t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$

۳۴. در مورد تابع $f(x, y) = x^2y + 2y^2x$ در نقطه $P_0(1, 2)$ مطلوب است

الف) جهت بزرگترین افزایش f
ب) مشتق f در جهت بزرگترین افزایش f

پ) جهت بزرگترین کاهش f
ت) جهتهایی که در آنها مشتق f صفر است.

صفحه ۱۳۵

در مسائل ۲۹-۳۴، مطلوب است معادلات پارامتری خطی که در نقطه مفروض بر خم محل تلاقی رویه‌ها مماس است.

۳۵. رویه‌ها: $xyz = 1$ ، $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$
نقطه: $(1, 1, 1)$

۴۱. نقاطی از رویه

$$(y+z)^2 + (z-x)^2 = 16$$

را بیابید که در آنها، خط قائم با صفحه yz موازی است.

۴۳. نشان دهید که خم زیر وقتی $t = 1$ ، بر رویه $z = 1 - x^2 - y^2$ قائم است

$$\mathbf{R}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j} - \frac{1}{t}(t+3)\mathbf{k}$$

۴۱. فرض کنید $\mathbf{R}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ بردار مکان نقطه (x, y, z) در دستگاه مختصات دکارتی باشد. x, y, z را به صورت توابعی از مختصات کروی ρ, ϕ, θ و بیان $\partial \mathbf{R} / \partial \rho$ ، $\partial \mathbf{R} / \partial \phi$ و $\partial \mathbf{R} / \partial \theta$ را محاسبه کنید. سپس این مشتق‌ها را بر حسب بردارهای واحد بنویسید.

$$\mathbf{u}_\rho = (\sin \phi \cos \theta)\mathbf{i} + (\sin \phi \sin \theta)\mathbf{j} + (\cos \phi)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u}_\phi = (\cos \phi \cos \theta)\mathbf{i} + (\cos \phi \sin \theta)\mathbf{j} - (\sin \phi)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u}_\theta = -(\sin \theta)\mathbf{i} + (\cos \theta)\mathbf{j}$$

صفحه ۱۲۰

۱۷. اگر $u = x^2 + e^{2x}$ ، $x = \sin 2t$ ، $y = \cos t^2$ ، کدام یک از عبارات زیر، du/dt را به دست می‌دهد؟

الف) $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt}$

ب) $2x \cos 2t - 2ye^{2x} t \sin t^2$

پ) $2x \cos 2t - 2ye^{2x} \sin t^2$

۱۸. اگر داشته باشیم

$$x = u - 2v + 1, \quad w = (x^2 + y - 2)^2 + (x - y + 2)^2$$

و $y = 2u + v - 2$ ، مطلوب است $\partial w / \partial v$ وقتی که $u = 0$ ، $v = 0$.

۲۷. اگر

$$F(x, y) = \int_0^{x^2 y} \cos \sqrt{t} dt$$

$\partial F / \partial x$ را در $(x, y) = (\pi, 1)$ بیابید.

صفحه ۱۲۱

۳۶. اگر مختصات قطبی $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ را در یک تابع پیوسته $w = f(x, y)$ که مشتقات جزئی پیوسته دارد قرار دهیم، نشان دهید که

$$\frac{\partial w}{\partial r} = f_x \cos \theta + f_y \sin \theta$$

و

$$\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = -f_x \sin \theta + f_y \cos \theta$$

۳۸. در ارتباط با مسأله ۳۶ نشان دهید که

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 = f_x^2 + f_y^2$$

۳۰. مشتق تسابع زیر را در نقطه $(3, 3, 1)$ در جهت بردار $2i + j - k$ بیابید

$$f(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2.$$

۳۲. جهت بزرگترین تغییر تسابع زیر را در نقطه $(1, 1, \sqrt{14})$ بیابید

$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2.$$

۳۳. مشتق $f(x, y, z) = xyz$ را در جهت بردار $i + j + k$ در نقطه $(1, 1, 1)$ بیابید. بزرگترین مقدار مشتقات جهتی f در $(1, 1, 1)$ چیست؟

صفحه ۱۴۵

۴۵. نشان دهید که خط قائم بر رویه $xy + z = 2$ در نقطه $(1, 1, 1)$ از مبدأ می‌گذرد.

۴۶. الف) گرادیان $f(x, y) = x^5 + 4xy^2 - 3y^5$ را بیابید.
ب) برای خط واقع در صفحه xy که بر خم زیر در نقطه $(1, 1)$ مماس باشد معادله‌ای بنویسید

$$x^5 + 4xy^2 - 3y^5 = 2$$

۴۹. الف) رویه $x^2 - y^2 + z^2 = 2$ را رسم کنید.

ب) يك بردار قائم بر این رویه در $(2, -3, 3)$ بیابید.
پ) معادلات صفحه مماس و خط قائم در $(2, -3, 3)$ را بیابید.

۵۰. الف) برای صفحه مماس بر رویه

$$x^2 + xy^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$$

در نقطه $(-2, 1, 2)$ ، معادله‌ای بنویسید.

ب) معادلات خط قائم بر این رویه در نقطه $(-2, 1, 2)$ را بیابید.

صفحه ۱۴۷

۶۹. فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

مطلوب است $f_{xy}(0, 0)$ و $f_{yx}(0, 0)$. شکل ۳۲.۱۶ را ببینید.

در مسائل ۱-۶، مطلوب است $\partial^2 f / \partial x^2$ ، $\partial^2 f / \partial y^2$ و $\partial^2 f / \partial y \partial x$.

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \quad ۰۱$$

$$f(x, y) = e^x \ln(3 - y^2) \quad ۰۲$$

۱۶. اگر $z = f(u, v)$ ، $u = x^2 + y^2$ و $v = 2xy$ ، z_{xx} را بیابید. جواب را بر حسب x ، y ، f_u و f_v بیان کنید.

۳۰. تابع زیر به ازای چه مقادیری از n در معادله لاپلاس دو بعدی (۱۲) صدق می‌کند؟

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^n$$

صفحه ۱۴۲

۴. فرض کنید تابع $f(x, y)$ با معادلات زیر تعریف شود

$$f(x, y) = \frac{\sin^2(x - y)}{|x| + |y|}, \quad |x| + |y| \neq 0$$

$$f(0, 0) = 0.$$

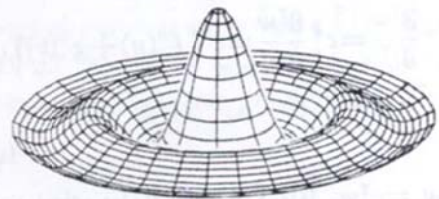
آیا f در مبدأ پیوسته است؟

۱۱. فرض کنید

$$f(r, \theta) = \begin{cases} \frac{\sin \theta r}{\theta r} & r \neq 0 \\ 1 & r = 0 \end{cases}$$

(شکل ۳۰.۱۶ را ببینید). مطلوب است: الف) $\lim_{r \rightarrow 0} f(r, \theta)$

ب) $f_r(0, 0)$ ، $f_\theta(0, 0)$ ، $r \neq 0$



صفحه ۱۴۴

۲۳. مقداری برای x بیابید که انتگرال زیر را ماکسیمم کند

$$\int_x^{x+2} t(5-t) dt$$

۲۷. اگر $z = f(u)$ و $u = (x - y)/y$ ، نشان دهید که

$$x(\partial z / \partial x) + y(\partial z / \partial y) = 0$$

۲۸. اگر $f(x, y, z) = 0$ و $z = x + y$ ، مطلوب است

$$dz/dx$$



۱۵. الف) آیا تابع $f(x, y) = x^2(y+1)$ در اطراف نقطه $(1, 0)$ نسبت به تغییرات x حساستر است یا نسبت به تغییرات y ؟
ب) چه نسبتی از dx به dy ، df را در $(1, 0)$ برابر با صفر می‌کند؟

۳۴. اگر $|a|$ خیلی بزرگتر از $|b|$ ، $|c|$ ، و $|d|$ باشد، تعیین کنید مقدار دترمینان زیر نسبت به کدام درایه از همه حساستر است؟

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

۸. مطلوب است نزدیکترین و دورترین نقاط $x^2 + xy + y^2 = 1$ به مبدأ.

۱۲. از شرکتی خواسته شده مخزنی برای انبار کردن گاز مایع طراحی کند. مشتری مخزنی می‌خواهد که استوانه‌ای شکل و دو انتهای آن به صورت نیمکره، و ظرفیت آن 8000 m^3 باشد. مشتری می‌خواهد در ساختن این مخزن از حداقل ورق استفاده شود. شعاع و ارتفاع بخش استوانه‌ای مخزن چقدر باید باشد؟

۲۰. مطلوب است نقاطی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ که در آنها تابع $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ مقادیر ماکسیمم و مینیمم خود را اختیار می‌کند.

۲۶. مطلوب است مقادیر اکسترمم $f(x, y, z) = x^2yz + 1$ بر محل تقاطع صفحه $z = 1$ با کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

در مسائل ۱-۶، با استفاده از فرمول تیلر یک چند جمله‌ای درجه دوم بیابید که $f(x, y)$ را در نزدیکی مبدأ تقریب بزند.

۱. $f(x, y) = e^x \cos y$

۲. $f(x, y) = e^x \ln(1+y)$

۵. $f(x, y) = \frac{1}{1-x-y}$

در مسائل ۱-۸، مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق $f(x, y)$ را بر ناحیه R بیابید.

۶. $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4 + 16$

R : ناحیه مثلثی واقع در بالای خط $y = -2$ ، زیر خط $y = x$ ، و سمت چپ خط $x = 2$.

۱۲. مقدار ماکسیمم تابع $xye^{-(2x+3y)}$ را در ربع اول بیابید.

کاربردهای مشتقات جزئی

توابع زیر را از لحاظ داشتن ماکسیممها، مینیممها، و نقاط زینی بیازمایید. در این نقاط، مقادیر تابعها را بیابید.

۱۸. $f(x, y) = 3 + 2x + 2y - 2x^2 - 2xy - y^2$

۱۹. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x - 4y + 5$

۲۰. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 2x + 2y - 4$

در مسائل ۳۱-۳۸، ماکسیممها و مینیممهای مطلق توابع را بر دامنه‌های مفروض بیابید.

۳۱. $f(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$ بر ناحیه مثلثی شکل بسته محدود به خطوط $x=0$ ، $y=2$ ، $y=2x$ واقع در ربع اول.

۳۷. $f(x, y) = (x^2 - 2x) \cos y$ بر ناحیه $1 \leq x \leq 3$ ، $-\pi/4 \leq y \leq \pi/4$.

۴۰. نقطه بحرانی

$f(x, y) = xy + 2x - \ln x^2 y$

را در ربع اول باز ($x > 0$ ، $y > 0$) بیابید و نشان دهید که در این نقطه یک مینیمم دارد.

۴۷. مطلوب است تعیین مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق توابع مفروض بر نواحی زیر

(i) ربع بیضی $1 = (x^2/9) + (y^2/4)$ واقع در ربع اول

(ii) نیم بیضی $1 = (x^2/9) + (y^2/4)$ ، $y \geq 0$ ، و

(iii) بیضی کامل $1 = (x^2/9) + (y^2/4)$.

الف) $f(x, y) = x^2 + 3y^2$

ب) $f(x, y) = 2x + 3y$

در مسائل ۷-۱۲، صورت خطی $L(x, y)$ تابع $f(x, y)$ را در P_0 بیابید. آنگاه با استفاده از معادله (۱۲) کران بالایی برای اندازه خطای E ناشی از تقریب زدن $f(x, y) \approx L(x, y)$ بر مستطیل R بیابید.

۷. $f(x, y) = x^2 - 3xy + 5$ ، $P_0(2, 1)$

$R: |x-2| \leq 0.1$ ، $|y-1| \leq 0.1$



$$0.10 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} dy dx$$

$$0.13 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dy dx$$

۰۱۵. مطلوب است مساحت ناحیه‌ای که $r = (2 - \sin 2\theta)^{1/2}$ از ربع اول جدا می‌کند.

۰۲۲. از تابع $f(x, y) = (\ln(x^2 + y^2)) / (x^2 + y^2)$ روی ناحیه بین دو ایر $x^2 + y^2 = e^2$ و $x^2 + y^2 = 1$ انتگرال بگیرید.

۰۳۵. فرض کنید R ناحیه‌ای واقع در ربع اول صفحه xy و محدود به هذلولیهای $xy=1$ و $xy=9$ و خطوط $y=x$ و $y=2x$ باشد (شکل ۳۱.۱۸). با استفاده از تبدیل $x=u/v$ ، $y=uv$ با ضوابط $u>0$ و $v>0$ ، انتگرال

$$\iint_R \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy} \right) dx dy$$

را به صورت انتگرالی روی ناحیه مناسبی چون G واقع در صفحه uv بنویسید. سپس این انتگرال را روی G محاسبه کنید.

۰۳۸. انتگرال

$$\int_0^2 \int_{y/2}^{(y+4)/2} y^2(2x-y)e^{(2x-y)^2} dx dy$$

را با استفاده از تبدیل $x=u+1/2v$ ، $y=v$ و تبدیل این انتگرال به یک انتگرال روی ناحیه‌ای چون G در صفحه uv محاسبه کنید.

در مسائل ۵-۱۸، انتگرالها را محاسبه کنید.

$$0.18 \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x^2}^{5-x^2} (x-y+1) dz dy dx$$

در مسائل ۲۳-۳۸، حجم اشکال و نواحی را بیابید.

۰۲۸. ناحیه واقع در یک هشتم اول و محدود به صفحات مختصات، استوانه $x^2 + y^2 = 4$ و صفحه $x+z=3$.

۰۲۹. ناحیه واقع در یک هشتم اول که به صفحات مختصات، و از بالا به استوانه $x^2 + z^2 = 1$ و از راست به سهمیوار $y = x^2 + z^2$ محدود است. (داهنمایی: نخست نسبت به y انتگرال بگیرید.)

۰۳۷. ناحیه محصور در بیضیوار

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$$

در مسائل ۱۷-۲۴، ناحیه‌ای را رسم کنید که انتگرالگیری روی آن صورت می‌گیرد و انتگرال معادلی را بیابید که ترتیب انتگرالگیری در آن، معکوس ترتیب انتگرال مفروض باشد. هر دو انتگرال را محاسبه کنید.

$$0.22 \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 dx dy$$

$$0.23 \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} y dx dy$$

$$0.24 \int_0^1 \int_0^{4-x^2} dy dx$$

انتگرالهای مسائل ۳۱-۳۶ را به این ترتیب محاسبه کنید که با معکوس کردن ترتیب انتگرالگیری انتگرال معادلی بیابید و سپس از آن انتگرال بگیرید.

$$0.35 \int_0^8 \int_{\sqrt{y}}^2 \frac{dy dx}{y^2+1}$$

$$0.36 \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{2-y} dy dx$$

در مسائل ۱-۸، مساحت ناحیه محدود به خمها و خطوط مفروض را به کمک انتگرالگیری دوگانه بیابید.

۰۸. از بالا به $x^2 = y$ ، از پایین به $y = -1$ ، از چپ به $x = -2$ و از راست به $y = 2x - 1$

انتگرالهای مسائل ۹-۱۴، مساحت نواحی از صفحه xy را مشخص می‌کنند. در هر مورد، ناحیه را رسم کنید، خمهای محدودکننده

آن را با معادلاتشان مشخص کنید. مختصات نقاط مرزی یعنی محل تقاطع خمها را بیابید. سپس مساحت ناحیه را تعیین کنید.

$$0.13 \int_{-1}^0 \int_{-2x}^{1-x} dy dx + \int_0^2 \int_{-x/2}^{1-x} dy dx$$

$$0.14 \int_0^2 \int_{x^2-4}^0 dy dx + \int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} dy dx$$



$$f(x, y, z) = 3z\sqrt{3x^2 + y^2 + z^2} \quad ۰۱۸$$

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{k}, \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$f(x, y, z) = \sqrt{3}/(x^2 + y^2 + z^2) \quad ۰۱۹$$

$$\mathbf{R}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 1 \leq t \leq 2$$

صفحه ۲۴۷

در مسائل ۹-۱۲، مطلوب است کاری که نیروی $\mathbf{F}(x, y, z)$ روی مسیر مفروض در جهت افزایش مقدار t انجام می‌دهد.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2y\mathbf{i} + 3xz\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k} \quad ۰۱۰$$

$$\mathbf{R}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + \frac{t}{\phi}\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 6z\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + 12x\mathbf{k} \quad ۰۱۲$$

$$\mathbf{R}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + \frac{t}{\phi}\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

در مسائل ۱۳-۱۶، انتگرال شارش میدان برداری $\mathbf{F}(x, y, z)$ را روی خم مفروض محاسبه کنید.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k} \quad ۰۱۴$$

$$\mathbf{R}(t) = 2t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x-z)\mathbf{i} + x\mathbf{k} \quad ۰۱۵$$

$$\mathbf{R}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

صفحه ۲۴۸

۰۲۴ مطلوب است شار میدانهای برداری

$$\mathbf{F}_2(x, y) = 2xi + (x-y)\mathbf{j} \quad \text{و} \quad \mathbf{F}_1(x, y) = 2xi - 3y\mathbf{j}$$

گذرنده از دایره

$$\mathbf{R}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

صفحه ۲۵۹

در مسائل ۵-۱۰، با استفاده از قضیه گرین، گردش در خلاف جهت ساعت و شار برونسور را در مورد میدان \mathbf{F} و خم C بیابید.

$$\mathbf{F}(x, y) = (xy+x)\mathbf{i} + (xy-y)\mathbf{j} \quad ۰۷$$

C : مربع محدود به $x=0, x=1, y=0, y=1$

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2-y)\mathbf{i} + (x+y^2)\mathbf{j} \quad ۰۸$$

C : مثلث محدود به $x=1, y=0$ و $y=x$

با استفاده از یکی از دو صورت قضیه گرین، انتگرالهای خمیده خطی در مسائل ۱۳-۱۸ را محاسبه کنید.

۰۳۹ دامنه انتگرالگیری انتگرال زیر را رسم کنید

$$\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \int_0^{1-y} dz dy dx$$

سپس این انتگرال را به صورت یک انتگرال مکرر معادل با ترتیبهای زیر بنویسید.

الف) $dydzdx$ ب) $dydx dz$

پ) $dx dy dz$ ت) $dx dz dy$

ث) $dz dx dy$

صفحه ۲۲۶

۰۱۳ مطلوب است تشکیل یک انتگرال سه گانه مکرر برای حجم کوره $z = 4 - x^2 - y^2$ در مختصات (الف) کروی، (ب) استوانه‌ای، و (پ) قائم.

۰۲۲ مطلوب است حجم ناحیه‌ای که از پایین به سهمیوار $z = x^2 + y^2$ ، از اطراف به استوانه $x^2 + y^2 = 1$ ، و از بالا به سهمیوار $z = x^2 + y^2 + 1$ محدود است.

۰۲۹ در کاسه‌ای که به شکل نیمکره‌ای به شعاع ۵ سانتیمتر است، تا ارتفاع ۳ سانتیمتری آب ریخته‌ایم. حجم آب درون کاسه را بیابید.

۰۴۸ مطلوب است حجم ناحیه‌ای که از درون به رویه $\rho = 1 + \cos \phi$ و از بیرون به کوره $\rho = 2$ محدود است.

صفحه ۲۳۲

۰۲۹ انتگرال

$$\iint \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

را روی ناحیه محصور در یک طوق از پروانه

$$(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0$$

۰۴۰ مطلوب است حجم ناحیه محصور به صفحه $z=0$ ، استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ ، و استوانه $ax = a^2 - x^2$.

۰۴۴ مطلوب است حجم ناحیه محصور در رویه $\rho = a \sin \phi$ در مختصات کروی.

فصل ۱۹

میدانهای برداری و انتگرالگیری

صفحه ۲۴۰

در مسائل ۹-۲۰، انتگرال $f(x, y, z)$ را روی خم مفروض محاسبه کنید.

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ۰۱۷$$

$$\mathbf{R}(t) = (t \sin t + \cos t)\mathbf{i} + (t \cos t - \sin t)\mathbf{j},$$

$$0 \leq t \leq \sqrt{3}$$



$$F(x, y, z) = 2xz\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z^2\mathbf{k} \quad ۰۹$$

D: گوه‌ای که صفحه $z = y$ و استوانه بیضوی $x^2 + 4y^2 = 16$ از يك هشتم اول جدا می کنند.

صفحه ۲۸۴

در مسائل ۱-۶، با استفاده از انتگرال رویه‌ای در قضیه استوکس، گردش میدان F را روی خم C در جهت مشخص شده بیابید.

$$F = x^2y^2\mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad ۰۶$$

C: مرز دایره $x^2 + y^2 = a^2$ واقع در صفحه xy ، در خلاف جهت ساعت هر گاه از بالا نگاه کنیم.

۷. فرض کنید S ناحیه محدود به بیضی $4x^2 + y^2 = 4$ و C واقع در صفحه $z = 1$ باشد. نیز فرض کنید $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ و

$$F = x^2\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}.$$

مطلوب است مقدار

$$\oint_C F \cdot d\mathbf{R}.$$

صفحه ۲۹۲

در مسائل ۱۱-۲۰، انتگرالها را محاسبه کنید.

$$\int_{(0,1,1)}^{(2,2,1)} 3x^2 dx + \frac{z^2}{y} dy + 2z \ln y dz \quad ۰۱۹$$

$$\int_{(1,0,0)}^{(0,1,1)} \sin y \cos x dx + \cos y \sin x dy + dz \quad ۰۲۰$$

۲۳. انتگرال زیر را روی پاره‌خطی که $(0, 0, 0)$ را به $(0, 2, 2)$ وصل می کند محاسبه کنید

$$\int_C x^2 dx + yz dy + y^2 dz.$$

صفحه ۲۹۴

۱۴. مطلوب است مساحت ناحیه‌ای بیضوی که استوانه $x^2 + y^2 = 1$ از صفحه $x + y + z = 1$ جدا می کند.

۱۶. مطلوب است مساحت ناحیه واقع در بالای صفحه xy که استوانه $x^2 + y^2 = 2ax$ از مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ جدا می کند.

صفحه ۲۹۵

۱۸. سوراخی به‌شعاع $2\sqrt{2}$ به‌ضلع $2\sqrt{2}$ به‌صورت متقارن در کره‌ای به‌شعاع 2 ایجاد می‌شود. نشان دهید که مساحت رویه جدا شده برابر است با $16\pi(\sqrt{2} - 1)$.

$$\oint_C (6y+x) dx + (y+2x) dy \quad ۰۱۵$$

C عبارت است از دایره $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$.

$$\oint_C 2xy^2 dx + 4x^2y^2 dy \quad ۰۱۷$$

C عبارت است از ناحیه «مثلثی شکل» واقع در ربع اول که به‌محور x ، خط $x = 1$ ، و خم $y = x^2$ محدود است.

$$\oint_C (4x-2y) dx + (2x-4y) dy \quad ۰۱۸$$

C عبارت است از دایره $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$.

صفحه ۲۶۷

۵. مطلوب است مساحت بخشی از رویه $x^2 - 2y - 2z = 0$ که بالای مثلثی واقع در صفحه xy و محدود به خطوط $x = 2$ ، $y = 0$ ، و $y = 3x$ قرار دارد.

۱۹. مطلوب است محاسبه انتگرال $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ بر رویه‌ای که صفحات $x = h$ و $x = 0$ از استوانه $x^2 + z^2 = a^2$ جدا می کنند. h را بزرگتر از ۰ اختیار کنید.

۲۰. مطلوب است محاسبه انتگرال $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ بر نیمکره $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

صفحه ۲۶۸

در مسائل ۲۱-۲۶، مطلوب است شار میدان برداری F گذرنده از بخشی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ واقع در يك هشتم اول و در جهتی که از مبدأ دور می‌شود.

$$F(x, y, z) = xi + yj + zk \quad ۰۲۵$$

صفحه ۲۶۹

۳۰. فرض کنید S آن بخش از استوانه $y = \ln x$ واقع در يك هشتم اول باشد که تصویر قائمش بر صفحه xz مستطیل $0 \leq z \leq 1$ ، $1 \leq x \leq e$ ، $0 \leq y \leq 1$ است. نیز فرض کنید \mathbf{n} بردار واحدی باشد که بر S عمود و متوجه بیرون صفحه xz است. مطلوب است شار $F = 2yz\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ گذرنده از S و در جهت \mathbf{n} .

صفحه ۲۷۷

در مسائل ۱-۱۲، با استفاده از قضیه دیورژانس، شار بر ونسوی F گذرنده از مرز ناحیه D را بیابید.

$$F(x, y, z) = yi + xyj + zk \quad ۰۵$$

D: ناحیه واقع در درون استوانه توپر $x^2 + y^2 \leq 4$ و بین صفحه $z = x^2 + y^2$ و سهمیوار $z = 0$.

$$F(x, y, z) = x^2\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j} + 3xz\mathbf{k} \quad ۰۷$$

D: ناحیه‌ای که کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ از يك هشتم اول جدا می کند.