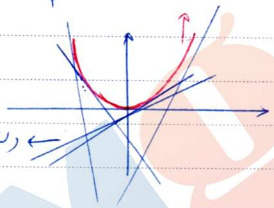
$y = xp - \frac{1}{2}p^2 \to f(p) = -\frac{1}{2}p^2 \to f'(p) = -p$

$\to \begin{cases} x = -(-p) = p \\ y = -p(-p) - \frac{1}{2}p^2 = p^2 - \frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}p^2 \end{cases}$ جواب غ ع

ج غ ع : $y = \frac{1}{2}x^2$



۲) $y = xy' + \ln(1+y')$ ج ع : $y = cx + \ln(1+c)$ (امتحان میان‌ترم س)

$\xrightarrow{y'=p} xp + \ln(1+p) \to f(p) = \ln(1+p)$

$f'(p) = \frac{1}{1+p}$

$\begin{cases} x = -\frac{1}{1+p} \to -\frac{1}{x} = 1+p \to p = -1-\frac{1}{x} \\ y = -p\left(\frac{1}{1+p}\right) + \ln(1+p) \end{cases}$ $y = -\left(-1-\frac{1}{x}\right)(-x) + \ln\left(\frac{-1}{x}\right)$

جواب غیر عادی

ع معادله‌ی فاقد y :

در این دسته از معادلات که شامل دو مشتق متوالی y می‌باشند و به صورت $F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ بیان می‌شوند، کافی است تغییر متغیر $u = y^{(n-1)} \to u' = y^{(n)}$ را در نظر بگیریم و به معادله‌ی مرتبه‌ی اول $F(x, u, u') = 0$ برسیم، از حل آن u را یافته و با (n-1) بار انتگرال‌گیری می‌توانیم y را بدست آوریم.

مثال: $y''' = \frac{1}{x} y''$

$u = y'' \to u' = y''' \to u' - \frac{1}{x}u = 0 \to \frac{du}{dx} = \frac{u}{x}$

$\to u\,du = u\,dx \to \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}$

$\to \ln u = \ln x + \ln c = \ln cx$

$\to y'' = cx \to y' = c\frac{x^2}{2} + c_1 \to y = c\frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2$ جواب عمومی

ب) معادله فاقد x: برای حل معادلاتی به صورت $F(y, y', y'') = 0$ می‌توانیم با در نظر گرفتن تغییر متغیر $u = y'$ و در نتیجه:

$u = y' \Rightarrow y'' = u' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}(y')$

$= \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \times \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy} u$

و جایگذاری آن در معادله، به یک معادله مرتبه‌ی اول برسیم که با توجه به موارد گفته شده در قبل از حل آن می‌توان u و سپس با یکبار انتگرال‌گیری، y را بدست آورید.

مثال: جواب مسئله با مقدار اولیه زیر را بدست آورید

$yy'' + 2y' = 2(y')^2$ $\quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

$\to y \times u\frac{du}{dy} + 2u = 2u^2 \to yu\frac{du}{dy} = 2u(u-1)$

$\to y\,du = 2(u-1)dy \to \int \frac{du}{u-1} = \int 2\frac{dy}{y}$

$$\rightarrow \ln(u-1) = 2\ln y + \ln c = \ln c y^2$$

$$\rightarrow u-1 = cy^2 \rightarrow \frac{dy}{dx} = cy^2+1$$

$$\rightarrow dy = (cy^2+1)\,dx \rightarrow \int \frac{dy}{cy^2+1} = \int dx$$

$$\rightarrow \frac{1}{c}\,tg^{-1} cy = x + c_1 \xrightarrow{tg} (tg^{-1} cy = cx + c_1)$$

$$\rightarrow cy = tg(cx+c_1)$$

$$\rightarrow cy' = c(1+tg^2(cx+c_1)) \rightarrow \begin{cases} y(0)=1 \rightarrow c = tg\,c_1 \\ y'(0)=2 \rightarrow 2\cancel{c} = \cancel{c}(1+tg^2 c_1) \end{cases}$$

$$\rightarrow 2 = 1+tg^2 c_1 \rightarrow tg^2 c_1 = 1$$

$$\rightarrow tg\, c_1 = 1$$

$$\rightarrow c_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$c_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow c = tg\frac{\pi}{4} = 1$$

کاربرد هندسی معادلات مرتبه ی اول :

مسیرهای قائم (متعامد) :

فرض کنیم دسته منحنی $f(x,y,c)=0$ داده شده باشد، در این صورت منظور از مسیر قائم برای این دسته منحنی، یعنی دسته منحنی دیگری مانند $g(x,y,c_1)=0$ به طوری که در هر نقطه ی تلاقی از مسیرهای دسته منحنی اول با مسیرهای دسته منحنی دوم هر بر یکدیگر عمود باشند، یعنی زاویه بین خطوط مماس بر آنها، زاویه قائمه باشد، لذا برای یافتن مسیر قائم برای دسته منحنی مفروض $f(x,y,c)=0$