Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\to \ln(u-1) = 2\ln y + \ln c = \ln c y^2$

$\to u-1 = cy^2 \to \frac{dy}{dx} = cy^2 + 1$

$\to dy = (cy^2+1)\,dx \to \int \frac{dy}{cy^2+1} = \int dx$

$\to \frac{1}{c}\,tg^{-1} cy = x + c_1 \xrightarrow{tg} (tg^{-1} cy = cx + c_1)$

$\to cy = tg(cx + c_1)$

$\to cy' = c(1 + tg^2(cx + c_1)) \to \begin{cases} y(0)=1 \to c = tg\,c_1 \\ y'(0)=2 \to 2\cancel{c} = \cancel{c}(1 + tg^2 c_1) \end{cases}$

$\to 2 = 1 + tg^2 c_1 \to tg^2 c_1 = 1$

$\to tg\,c_1 = 1$

$\to c_1 = \frac{\pi}{4}$

$c_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow c = tg\,\frac{\pi}{4} = 1$

کاربرد هندسی معادلات مرتبه‌ی اول :

مسیرهای قائم (متعامد) :

فرض کنیم دسته منحنی $f(x,y,c)=0$ داده شده باشد، در این صورت منظور از مسیر قائم برای این دسته منحنی، یعنی دسته منحنی دیگری مانند $g(x,y,c_1)=0$ به طوری که در هر نقطه‌ی تلاقی از مسیرهای دسته منحنی اول با مسیرهای دسته منحنی دوم همه بر یکدیگر عمود باشند، یعنی زاویه بین خطوط مماس بر آنها، زاویه قائمه باشد، لذا برای یافتن مسیر قائم برای دسته منحنی مفروض $f(x,y,c)=0$

مراحل زیر را داریم:

۱) ابتدا معادله دیفرانسیل مربوط به دسته منحنی $f(x,y,c)=0$ را به دست می‌آوریم و فرض می‌کنیم معادله مرتبه اول به صورت $F(x,y,y')=0$ باشد.

۲) در معادله به دست آمده، متغیر y' را به $-\frac{1}{y'}$ تبدیل کرده، و معادله‌ی جدید به صورت $F(x,y,-\frac{1}{y'})=0$ بدست آمده و آن را حل می‌کنیم، جواب عمومی این معادله، همان مسیرهای قائم بر دسته منحنی اولیه می‌باشد.

مثال: مسیرهای قائم هر یک از دسته منحنی های زیر را بدست آورید:

1) $x^2-y^2=c \xrightarrow{\text{مشتق}} 2x-2yy'=0 \to x=yy'$

$\xrightarrow{(y'=-\frac{1}{y'})} x=\frac{-y}{y'} \to xy'=-y \to x\frac{dy}{dx}=-y \to x\,dy=-y\,dx$

$\to \int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x} \to \ln y=-\ln x+\ln c$

$\to \ln y=\ln x^{-1}+\ln c \to \ln y=\ln cx^{-1}$

$\to y=cx^{-1} \to \boxed{y=\frac{c}{x}}$

2) $x^2+y^2=2cx \to 2x+2yy'=2c \to x+yy'=c \to$ جایگذاری c در معادله اولیه

$\to x^2+y^2=2(x+yy')x \to x^2+y^2=2x^2+2xyy'$

$\to \frac{y^2-x^2}{2xy}=y'$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

 حل ادامه مسائل

$$\left(y = \frac{-1}{y'}\right) \longrightarrow \frac{y^2 - x^2}{2xy} = \frac{-1}{y'} \longrightarrow y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

$$\frac{y' = v + xv'}{y = vx} \rightarrow v + v'x = \frac{2x^2 v}{x^2 - x^2 v^2} \longrightarrow$$ معادله تفکیک پذیر

* چون شرط عمود بودن دو دسته منحنی در مختصات قطبی آن است که:

$$\begin{cases} tg\psi_1 \times tg\psi_2 = -1 \\ tg\psi_1 = \dfrac{-1}{tg\psi_2} \end{cases}$$

و از طرفی: $tg\psi_1 = \frac{r}{r'}$ ، بنابراین کافی است عبارت $\frac{r}{r'}$ را تشکیل داده و پس از محاسبه به جای $\frac{r}{r'}$ قرار دهیم: $\frac{-r'}{r}$ ، از حل معادله‌ی حاصل مسیرهای قائم مورد نظر بدست می‌آید.

$$3)\ r = c(1 + \cos\theta)$$

$$r' = -c\sin\theta$$

$$\frac{r}{r'} = \frac{\cancel{c}(1 + \cos\theta)}{-\cancel{c}(\sin\theta)}$$

$$\left(\frac{r}{r'} \to \frac{-r'}{r}\right): \frac{-r'}{r} = \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{2\cos^{\cancel{2}}\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cancel{\cos\frac{\theta}{2}}} = \cot g\frac{\theta}{2}$$

$$\rightarrow \frac{dr}{d\theta} = r\cot g\frac{\theta}{2}$$

$$\rightarrow \int\frac{dr}{r} = \int\cot g\frac{\theta}{2}\,d\theta \longrightarrow \ln r = 2\ln\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) + \ln c$$

$$\longrightarrow \ln r = \ln\left(c\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\longrightarrow r = c\sin^2\frac{\theta}{2}$$