مکانیک کلاسیک

سید علی حسینی منصوری

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

۲۷ بهمن ۱۳۹۸

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه

این درسنامه براساس کتاب مکانیک کلاسیک Gregory نوشته شده است. البته دانشجویان می توانند دیگر منبع از جمله کتاب گرانت فاولز و سایمون را نیز مطالعه نمایند.

برای مکانیک تحلیلی ۱ تا پایان فصل هشتم از کتاب را تدریس خواهم کرد.

در این هشت فصل مکانیک نیوتنی برای یک ذره مجرد را مورد مطالعه قرار خواهیم داد. موضوعاتی که به آن خواهیم پرداخت عبارت است از

- فصل ۳ : جبر و محاسبات برداری
- فصل ۳ : سرعت، شتاب و سرعت زاویه ای اسکالر
- فصل ۴: قوانین نیوتن و گرانش
- فصل ۵: مسائل دینامیک ذره
- فصل ۶: نوسانات خطی و مدهای نرمال
- فصل ۷: بقای انرژی
- فصل ۸: مدارهای حرکت در نیروی مرکزی
- فصل ۹: نوسانات غیر خطی و فضای فاز

تاریخ میانترم: و تاریخ پایان ترم:

[۱] درسنامه مکانیک کلاسیک

فصل ۲

کمیت‌های فیزیکی و تحلیل ابعادی

همانگونه که می‌دانید مشاهده و اندازه‌گیری بخش جدایی‌ناپذیر نظریه‌های فیزیکی است. آن‌چه را که با یک ابزار مشخص قابل اندازه‌گیری است، کمیت فیزیکی می‌نامیم. کمیت‌های فیزیکی به دو دسته‌ی کمیت‌های اسکالر (عددی) و کمیت‌های برداری تقسیم می‌شوند. کمیت‌های اسکالر به کمیت‌هایی گفته می‌شود که مقدار آن‌ها تنها با یک عدد حقیقی بیان می‌شود، مانند جرم، زمان، دمای اتاق. در حالی که کمیت‌های برداری علاوه بر بزرگی دارای جهت نیز هستند. برای نمونه نیرویی که توسط یک طناب به یک جسم وارد می‌کنید، دارای بزرگی و جهت است؛ یعنی هم مقدار نیروی صرف شده و هم کشیدگی طناب را (که نشان دهنده‌ی جهت نیرو است) در خود دارد.

نکته: بزرگی این کمیت‌ها اعم از اسکالر و برداری، به دو دسته کمیت‌های بُعددار و بدون‌بُعد تقسیم می‌شوند. کمیت‌های بُعددار به کمیت‌هایی گفته می‌شود که بزرگی آن‌ها با تغییر ابزار اندازه‌گیری تغییر می‌کند، مثلا فاصله شاهرود تا تهران با متر حدود ۴۰۰۰۰۰ متر است در صورتی که کیلومتر شمار ماشین عدد ۴۰۰ را نشان می‌دهد.

۱.۲ تحلیل ابعادی

در فیزیک هفت کمیت اصلی وجود دارد که کمیت‌های دیگر را می‌توان بر اساس آن‌ها نوشت. این کمیت‌ها عبارتند از طول (L)، جرم (M)، زمان (T)، جریان الکتریکی (A)، دما $(\mathcal{T})$، مقدار ماده (n)، و شدت روشنایی (I_v) . در سیستم استاندارد واحدها (SI) واحد این کمیت‌ها به ترتیب عبارتند از متر، کیلوگرم، آمپر، کلوین، مول، و کاندلا. البته می‌توان سیستم‌های دیگر انتخاب کرد که مقدار این واحدها در آن متفاوت است ولی بُعد آن‌ها همواره ثابت است (شکل ۱.۲ را مشاهده نمایید.). نوشتن کمیت بر حسب بُعد، تحلیل ابعادی [1] نام دارد. وقتی می‌خواهیم

[1] dimensional analysis

شکل ۱.۲: واحد های اصلی SI

کمیتی را تحلیل ابعادی کنیم، آن را در [ ] قرار می‌دهیم، مثلا

$$[x] = L \qquad [t] = T \qquad [i] = A \tag{۱.۲}$$

مثال: می‌دانیم که مساحت بُعد مربع طول دارد. بنابراین

$$[A] = L^2, \tag{۲.۲}$$

است. تحلیل ابعادیِ سرعت برابر

$$v = \frac{x}{t} \longrightarrow [v] = LT^{-1}, \tag{۳.۲}$$

است. تحلیل ابعادیِ شتاب برابر

$$a = \frac{v}{t} \longrightarrow [a] = LT^{-2}, \tag{۴.۲}$$

است. بنابراین تحلیل ابعادیِ نیرو

$$F = ma \longrightarrow [F] = MLT^{-2}, \tag{۵.۲}$$

و تحلیل ابعادیِ انرژی

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \longrightarrow [E] = ML^2T^{-2} \quad (۶.۲)$$

است. برای به دست آوردن بُعد بار الکتریکی از کمیت جریان الکتریکی کمک می‌گیریم، چون جریان کمیت اصلی است. پس

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \longrightarrow [q] = AT. \quad (۷.۲)$$

در نتیجه بُعد میدان الکتریکی به صورت

$$E = \frac{F}{q_0} \longrightarrow [E] = MLA^{-1}T^{-3}. \quad (۸.۲)$$

و بُعد میدان مغناطیسی

$$F = qvB \longrightarrow [B] = MA^{-1}T^{-2}. \quad (۹.۲)$$

است.

تمرین: به کمک آن‌چه در بالا گفته شد، استفاده از قانون کولن که $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}$ و میدان مغناطیسی در مرکز حلقه‌ی جریان که $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ است، بُعد ϵ_0 و μ_0 را تعیین کنید. برای آن که در نهایت روابط خود را راستی‌آزمایی کنید از رابطه‌ی $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ که c سرعت نور است و بُعد سرعت دارد، کمک بگیرید.

تمرین: به کمک رابطه‌ی $F = G\frac{m_1m_2}{r^2}$ بُعد G (ثابت جهانی گرانش) را محاسبه کنید.

تمرین: به کمک رابطه‌ی $E = hf$ که در آن f بسامد و h ثابت پلانک است. بُعد h را محاسبه کنید.

به سادگی می‌توان دریافت که تحلیل ابعادی ابزاری قدرتمند در مطالعه‌ی فیزیک است. در دو سمت یک رابطه‌ی فیزیکی باید از لحاظ بُعد سازگاری وجود داشته باشد. حتی زمانی که اطلاعات بسیار کمی از یک کمیت در اختیار ما قرار دارد، تحلیل ابعادی به یافتن یک رابطه کمک فراوانی می‌کند. فرض کنید گلوله‌ی کوچکی به یک طناب آویزان است. از ما خواسته می‌شود تنها به کمک تحلیل ابعادی رابطه‌ای برای دوره‌ی تناوب این آونگ به دست آوریم. چون تنها ابزار ما تحلیل ابعادی است فقط باید از بُعد کمیت‌ها استفاده کنیم. از خود سوال می‌پرسیم که دوره‌ی تناوب آونگ به چه کمیت‌هایی می‌تواند بستگی داشته باشد؟ در پاسخ می‌توان از طول آونگ (l)، جرم آونگ (m)، زاویه‌ای که آونگ را به نوسان در آورده‌ایم (θ)، و شتاب گرانش زمین (g) یاد کرد. چون تنها ابزار ما تحلیل ابعادی است، باید تابعی از کمیت‌های بالا بسازیم که در نهایت فقط بُعد زمان داشته باشد. بنابراین دوره‌ی نوسان آونگ حاصل‌ضربی از توان‌های نامشخص کمیت‌های بالا است. پس

$$T = l^\alpha m^\beta g^\gamma \theta^\lambda \quad (۱۰.۲)$$

است. حاصل‌ضرب کمیت‌های سمت راست رابطه‌ی (۱۰.۲) در نهایت باید بُعد زمان داشته باشند تا با سمت

چپ سازگار باشند. در ادامه به جای کمیت‌های رابطه‌ی (۱۰.۲) بُعد آن‌ها را قرار می‌دهیم. چون زاویه در یکاهای استاندارد بدون بُعد است، پس رابطه‌ی ما در مورد زاویه‌ی شروع نوسان اطلاعاتی به ما نمی‌دهد ($\lambda = 0$).

$$T = L^{\alpha} M^{\beta} L^{\gamma} T^{-2\gamma} = L^{\alpha+\gamma} M^{\beta} T^{-2\gamma} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \longrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = 0 \\ -2\gamma = 1 \longrightarrow \gamma = \frac{-1}{2} \end{cases} \tag{۱۱.۲}$$

در نتیجه رابطه‌ای که ما فقط به کمک تحلیل ابعادی برای دوره‌ی نوسان آونگ به دست آوردیم، برابر $T = \sqrt{\frac{l}{g}}$ است، که بسیار به رابطه‌ی دقیق آن شباهت دارد.
مثال ساده‌ی بالا نشان داد که تحلیل ابعادی ابزاری قدرتمند در فیزیک است. در هنگام استفاده از این تحلیل باید به نکات زیر دقت کرد:

- اگر در یک رابطه، عدد ثابت و یا کمیت‌های بدون بُعد مانند زاویه وجود داشته باشد، این مقادیر با تحلیل ابعادیِ صِرف به دست نخواهند آمد.

- در رابطه‌ای که به کمک تحلیل ابعادی به دست می‌آوریم، همواره کمیت‌ها در هم ضرب و یا بر هم تقسیم می‌شوند. به کمک تحلیل ابعادیِ صِرف نمی‌توان رابطه‌ای نوشت که کمیت‌ها با هم جمع شده‌اند (مگر آن‌که از جایی اطلاعات دیگری داشته باشیم). چون وقتی دو کمیت با هم جمع می‌شوند یعنی این که بُعد یکسانی دارند. در نتیجه نمی‌توانیم آن‌ها را از هم تمیز دهیم.

- ابزار قدرتمند تحلیل ابعادی در مسائلی که چند کمیت با بُعد یکسان در مسئله دخیل هستند، کارایی خود را از دست می‌دهد. مثلا فرض کنید در مسئله چند کمیت با بُعد طول بر نتایج تاثیر می‌گذارند.

تمرین: به کمک آن‌چه در بالا گفته شد، از سه ثابت جهانی فیزیک یعنی c, G, h کمیتی بسازید که
الف) بُعد طول داشته باشد.
ب) بُعد زمان داشته باشد.
ج) بعد جرم داشته باشد.
تمرین: در سال ۱۹۴۷ میلادی، مجموعه‌ای عکس از نخستین انفجار اتمی در سال ۱۹۴۵ در نیومکزیکو در مجله‌ی لایف چاپ شد. این عکس‌ها شعاع موج شوکی کروی را در زمان‌های متوالی بر حسب میلی ثانیه نشان می‌داد. از

Table 1.1 RADIUS R OF BLAST WAVE AFTER TIME T

T/msec	R/m
0.10	11.1
0.24	19.9
0.38	25.4
0.52	28.8
0.66	31.9
0.80	34.2
0.94	36.3
1.08	38.9
1.22	41.0
1.36	42.8
1.50	44.4
1.65	46.0
1.79	46.9
1.93	48.7
3.26	59.0
3.53	61.1
3.80	62.9
4.07	64.3
4.34	65.6
4.61	67.3
15.0	106.5
25.0	130.0
34.0	145.0
53.0	175.0
62.0	185.0

عکس‌ها می‌توان شعاع موج کروی را به عنوان تابعی از زمان بدست آورد: نتایج در جدولِ ۱.۲ آمده است. با فرض این‌که سطح زمین در انتشار موج تاثیر چندانی ندارد، و حرکت موج فقط به انرژی آزاد شده از انفجار E و چگالی هوایِ بیرون ρ بستگی داشته باشد، شعاع موج انفجار را به عنوان تابعی از زمان محاسبه نمایید. به کمک جدول انرژی آزاد شده از انفجار را تخمین بزنید.

[۱] درسنامه مکانیک کلاسیک

فصل ۳

جبر و محاسبات برداری

در این فصل در ابتدا مروری بر کابردهای جبر برداری خواهیم داشت به طوری که مباحثی همچون عملگرهای برداری و ویژگیهای آنها به همراه مثال های گوناگون را شامل خواهد شد. در ادامه فصل مشتق گیری از توابع برداری از یک متغیر اسکالر و از جمله مفاهیمی نظیر بردار مماس و بردار نرمال روی یک خمینه که مستلزم تفسیر کمیت های دیگری همچون سرعت و شتاب هستند، را مورد مطالعه قرار می دهیم.

۱.۳ بردار و کمیت های برداری

اکثر کمیت های فیزیکی به دو دسته، کمیت های اسکالر و کمیت های برداری تقسیم می شوند. برای مثال دمای اتاق یک کمیت اسکالر است زیرا مقدار آن تنها با یک عدد حقیقی بیان می شود. مثالی دیگری همچون زمان که ساعت پشت دست شما را نشان می دهد، جرم یک قوطی کنسرو و حجم آن، چگالی آهن و فشار هوای داخل اتاق تماما کمیت های اسکالر هستند. اما کمیت های برداری به صورت زیر تعریف می شوند.

- کمیت برداری: اگر کمیت Q دارای بزرگی و جهت باشد بنابراین Q یک کمیت برداری نامیده می شود.

برای مثال جابجایی یک ذره یک کمیت برداری است. اگر فرض کنید ذره از نقطه A شروع به حرکت کند و پس از طی مسیری به نقطه انتهای B برسد. در این صورت بزرگی این جابجایی فاصله AB و جهت این جابه جایی جهت خط راستی است که نقطه A را به B متصل می کند. همچنین به عنوان مثال دیگر نیروی F اعمال شده به یک جسم به وسیله یک طناب یک کمیت برداری است زیرا بزرگی آن، شدت نیرو که همواره مقدار حقیقی مثبت است و جهت آن جهت طناب کشیده شده است. از جمله کمیت های دیگری نظیر سرعت و شتاب نیز کمیت برداری

محسوب می شوند. به منظور یکسان سازی تمام کمیت های فیزیکی مستقل از مبدا فیزیکی آنها می توان مفهوم بردار را به عنوان یک کمیت کلیتری نسبت به مثالهای خاصی بیان کرد. بنابراین می توان گفت:

- یک بردار یک کمیت نظری است که توسط دو ویژگی بزرگی و جهت مشخص می‌شود، لذا دو بردار زمانی با یکدیگر مساوی هستند که دارای بزرگی و جهت یکسان باشند.

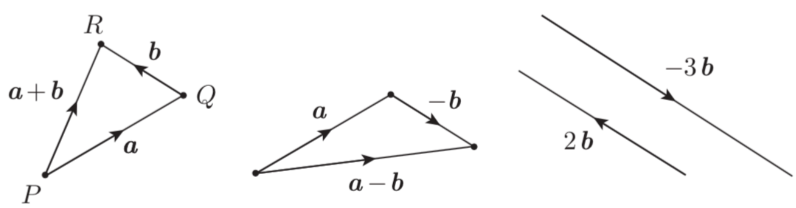
در سرتاسر این درسنامه همانند کتاب تمام بردارها با حروف انگلیسی برجسته مانند a ، F و بزرگی آنها را معمولا با $|a|$ یا a نمایش می دهیم. اکنون شما همانند کمیت های عددی می توانید اعمال جبری نظیر جمع تفریق و ضرب را برای کمیت های برداری بکار گیرید.

۲.۳ عملگرهای خطی نظیر $\mathrm{a} \pm \mathrm{b}$ و $\lambda\mathrm{a}$

- جمع برداری: فرض کنید a و b دو بردا باشند. مطابق شکل ۱.۳ قسمت $\vec{PQ}$ را با a و قسمت $\vec{QR}$ را با b نمایش می دهیم. در این صورت جمع $\mathrm{a}+\mathrm{b}$ نمایشی برای قسمت $\vec{PR}$ است.

- قرینه یک بردار: برای بردار دلخواه b همیشه می توان بردای با اندازه یکسان اما در جهتی مخالف بردار b در نظر گرفت که به آن قرینه بردار گفته می شود و با نماد $-\mathrm{b}$ نوشته می شود. بنابراین تفریق برداری را می توان با رابطه زیر بیان کرد (شکل وسط از شکل ۱.۳ را مشاهده کنید.).
$$\mathrm{a}-\mathrm{b}=\mathrm{a}+(-\mathrm{b}) \qquad (۱.۳)$$

- ضرب اسکالر: اجازه دهید a یک بردار و λ یک اسکالر (عدد حقیقی) باشد در این صورت ضرب اسکالر $\lambda\mathrm{a}$ یک بردار با بزرگی $|\lambda||a|$ و جهت آن بسته به منفی، مثبت و یا صفر بودن λ به ترتیب خلاف، هم جهت و صفر است (قسمت سمت راست از شکل ۱.۳ را مشاهده کنید.).



شکل ۱.۳: جمع، تفریق و ضرب اسکالر بردارها

جدول ۱.۳: قوانین جبری

خاصیت جابجایی	$\mathrm{a}+\mathrm{b}=\mathrm{b}+\mathrm{a}$
خاصیت شرکت پذیری	$\mathrm{a}+(\mathrm{b}+\mathrm{c})=(\mathrm{a}+\mathrm{b})+\mathrm{c}$
خاصیت شرکت پذیری	$\lambda(\mu\mathrm{a})=(\lambda\mu)\mathrm{a}$
خاصیت توزیع پذیری	$\lambda(\mathrm{a}+\mathrm{b})=\lambda\mathrm{a}+\lambda\mathrm{b}$
خاصیت توزیع پذیری	$(\lambda+\mu)\mathrm{a}=\lambda\mathrm{a}+\mu\mathrm{a}$

۳.۳ بردار واحد

برداری با بزرگی واحد, بردار واحد نامیده می شود. اگر بردار a را بر بزرگی اش تقسیم کنیم بردار حاصل بردار واحد است که همجهت با بردار a است. بنابراین

$$\widehat{a}=\frac{\overrightarrow{a}}{|a|} \tag{۲.۳}$$

۴.۳ مجموعه پایه استاندارد

به مجموعه پایه (بردار یکه) متعامد $\{i,j,k\}$ در دستگاه دکارتی، مجموعه پایه استاندارد نامیده می شود و می توان هر بردار را بر حسب این مجموعه بسط داد (شکل ۲.۳).

$$\mathrm{v}=\lambda i+\mu j+\nu k \tag{۳.۳}$$

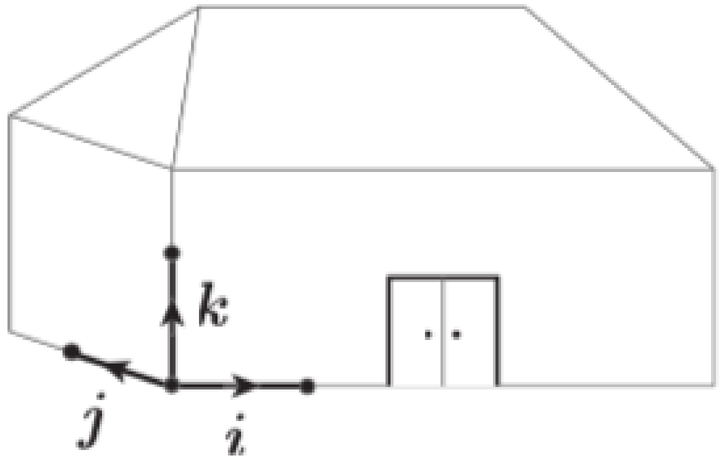
۵.۳ بردار مکان

اگر نقطه ثابت O در فضا را به عنوان مبدا مختصات (مبدا چارچوب مرجع) فرض کنیم در این صورت مکان هر نقطه دیگر مانند A نسبت به مبدا را با بردار $\overrightarrow{OA}$ که با a مطابق شکل ۳.۳ نشان داده می شود.

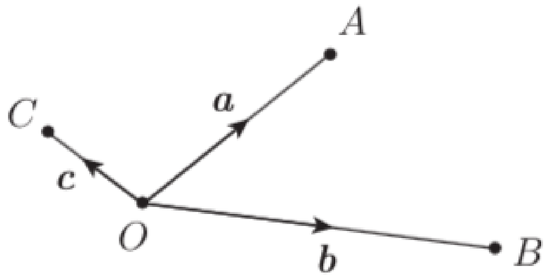
۶.۳ ضرب اسکالر دو بردار

ضرب اسکالر دو بردار با رابطه زیر تعریف می شود.

$$\mathrm{a.b}=ab\cos(\theta) \tag{۴.۳}$$



شکل ۲.۳: بردار پایه استاندارد.



شکل ۳.۳: نقاط A و B و C به ترتیب دارای بردار مکان a و b و c نسبت به مبدا هستند.

که θ زاویه میان دو بردار است. نکته: ضرب اسکالر دو بردار یک کمیت اسکالر است یعنی تنها با عدد مشخص می شود. هچنین ضرب داخلی به معنی انداختن سایه بردار a روی بردار b است، یا به عبارتی معادل نوشتن مولفه بردار a در راستای بردار b است.

۱.۶.۳ خواص ضرب اسکالر

- اندازه یا بزرگی یک بردار دلخواه را می توان از مجذور ضرب اسکالر بردار در خودش به دست آورد، یعنی

$$|a|^2 = a^2 = \mathrm{a.a} \qquad (۵.۳)$$

- دو بردار a و b بر هم عمود هستند اگر و تنها اگر ضرب اسکالر دو بردار صفر باشد،

$$\mathrm{a.b} = ab\cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \rightarrow \mathrm{a} \perp \mathrm{b} \qquad (۶.۳)$$

جدول ۲.۳: قوانین جبری برای ضرب اسکالر

خاصیت جابجایی	$\mathrm{a.b} = \mathrm{b.a}$
خاصیت توزیع پذیری	$\mathrm{a.(b+c)} = \mathrm{a.b} + \mathrm{a.c}$
خاصیت شرکت پذیری با ضرب اسکالر	$(\lambda \mathrm{a}).\mathrm{b} = \lambda(\mathrm{a.b})$

- اگر $\{i, j, k\}$ پایه های متعامد باشند در این صورت

$$i.i = j.j = k.k = 1 \qquad i.j = j.k = k.i = 0 \tag{۷.۳}$$

- اگر $\mathrm{a}_1 = \lambda_1 i + \mu_1 j + \nu_1 k$ و $a_2 = \lambda_2 i + \mu_2 j + \nu_2 k$ باشند، در این صورت داریم

$$\mathrm{a}_1.\mathrm{a}_2 = \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 \tag{۸.۳}$$

علاوه بر خواص ذکر شده می توانید دیگر خواص را در جدول ۲.۳ مشاهده کنید.

مثال

با توجه به اولین شکل سمت چپ از شکل ۱.۳ مطلوبست

الف: بزرگی بردار حاصل جمع

جواب

$$|\mathrm{a}+\mathrm{b}|^2 = (\mathrm{a}+\mathrm{b}).(\mathrm{a}+\mathrm{b}) = \mathrm{a.a} + 2\mathrm{a.b} + \mathrm{b.b} = a^2 + 2ab\cos(\theta) + b^2 \tag{۹.۳}$$

ب: اگر فرض کنیم اندازه در بردار با هم برابر باشد ($a = b$) در این صورت رابطه بالا را ساده کنید. جواب: برای ساده سازی رابطه بالا استفاده از اتحادهای مثلثاتی زیر مفید هستند.

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \tag{۱۰.۳}$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y) \tag{۱۱.۳}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y) \tag{۱۲.۳}$$

حال با توجه به روابط بالا به رابطه زیر خواهیم رسید.

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 \tag{۱۳.۳}$$

اکنون با فرض هم اندازه بودن بردارها داریم

$$|\mathrm{a}+\mathrm{b}| = a(2+2\cos(\theta))^{\frac{1}{2}} = 2a\cos(\frac{\theta}{2}) \quad (۱۴.۳)$$

تمرین

عملیات بالا را برای حاصل تفریق دو بردار (شکل میانی) تکرار کنید.

۷.۳ مؤلفه یک بردار

اگر فرض کنیم n یک بردار واحد باشد، در این صورت مؤلفه بردار v در راستای n را با v.n تعریف می شود. به طور کلی مؤلفه بردار v در راستای هر بردار دلخواه a را با $\mathrm{v}.\widehat{a}$ به دست می آید.

تمرین

اگر $\mathrm{v} = 6i - 3j + 15k$ و $\mathrm{a} = 2i - j - 2k$ باشد در این صورت مؤلفه بردار v در راستای بردار a را به دست آورید.

۸.۳ ضرب برداری $\mathrm{a} \times \mathrm{b}$

ضرب برداری: فرض کنید مطابق شکل ۱.۴ دو بردار، a و b به ترتیب دارای نمایش $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ باشند، همچنین n بردار واحد عمود بر صفحه OAB باشد به طوری که مجموعه $\{\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{n}\}$ یک مجموعه راست دست باشد (شکل ۵.۳ را نگاه کنید.)، در این صورت ضرب برداری به صورت زیر تعریف می شود.

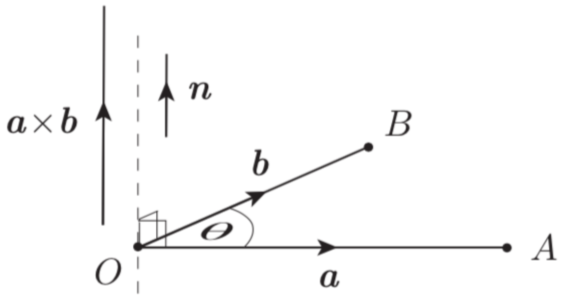
$$\mathrm{a}\times\mathrm{b} = (ab\sin(\theta))\mathrm{n} \quad (۱۵.۳)$$

که θ زاویه میان $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ است. توجه داشته باشید ضرب برداری یک کمیت برداری است (شکل ۱.۴).

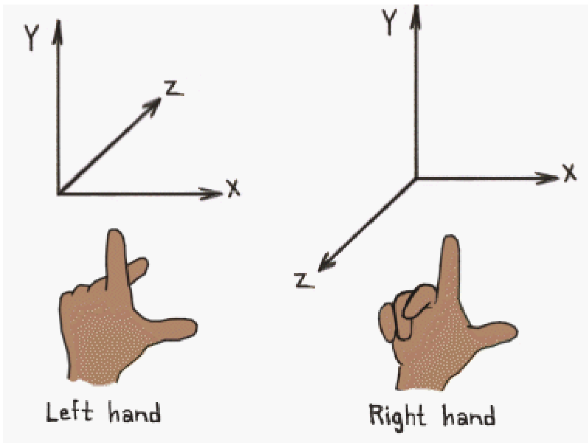
از مهمترین خواص ضرب برداری می توان به موارد زیر اشاره کرد.

- ضرب برداری هر بردار در خودش صفر است

$$\mathrm{a}\times\mathrm{a} = 0 \quad (۱۶.۳)$$



شکل ۴.۳: ضرب برداری دو بردار



شکل ۵.۳: در راست دستی، انگشت اشاره دست راست در سمت بردار اول و کف دست راست در سمت بردار دوم قرار دارند در این صورت انگشت شصت جهت بردار سوم را نشان می دهد. اما در چپ دستی چنین قواعد برای دست چپ بکار گرفته می شود.

- اگر دو بردار موازی باشند بنابراین ضرب برداری آنها صفر است،

$$a \times b = 0 \to a \| b \tag{۱۷.۳}$$

- اگر $\{i, j, k\}$ پایه های استاندارد باشند بنابراین

$$i \times j = k \quad k \times i = j \quad j \times k = i \quad i \times i = j \times j = k \times k = 0 \tag{۱۸.۳}$$

- اگر $a_1 = \lambda_1 i + \mu_1 j + \nu_1 k$ و $a_2 = \lambda_2 i + \mu_2 j + \nu_2 k$ باشد در این صورت خواهیم داشت،

$$a_1 \times a_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{vmatrix} \tag{۱۹.۳}$$

جدول ۳.۳: قوانین جبری برای ضرب برداری

خاصیت پادجابجایی	$a \times b = -b \times a$
خاصیت توزیع پذیری	$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
خاصیت شرکت پذیری با ضرب اسکالر	$(\lambda a) \times b = \lambda(a \times b)$

در این رابطه دترمینان با سطر اول محاسبه می شود. همچنین دیگر خواص ضرب برداری را می توانید در جدول ۳.۳ دنبال کنید.

نکته: چون ضرب برداری خاصیت پادجابجایی دارد بنابراین ترتیب عبارات در ضرب برداری بایستی همواره حفظ شود. پس ضرب برداری خاصیت شرکت پذیری ندارد.
تمرین: اگر $a = 2i - j + 2k$ و $b = -i - 3k$ باشند، در این صورت یک بردار واحد که عمود بر هردو این بردارهاست را بیابید.

۹.۳ ضرب های سه‌گانه

ضرب سه گانه یک عملگر جدید نیست در واقع برآمدی ساده از عملیات دیگر است. دو نوع ضرب سه گانه وجود دارد، ضرب سه گانه اسکالر و ضرب سه گانه برداری از این جمله هستند.

۱.۹.۳ ضرب سه گانه اسکالر

عبارتی به شکل $a.(b \times c)$ را ضرب سه گانه اسکالر می نامیم زیرا مقدار آن یک عدد است.
خواص ضرب سه گانه اسکالر

- جایگشت های دوره ای از بردارهای a، b و c در ضرب سه گانه اسکالر، مقدار یکسانی را حاصل می شوند.

$$a.(b \times c) = c.(a \times b) = b.(c \times a) \qquad (۲۰.۳)$$

علاوه براین رابطه ضرب سه گانه به شکل های دیگر نیز نوشته می شود،

$$a.(b \times c) = (a \times b).c \qquad (۲۱.۳)$$

این به این معناست که جابجایی ضرب اسکالر و ضرب برداری مقدار نهایی را تغییر نمی دهد. به علت این خاصیت تقارنی، ضرب سه گانه را می توان با نماد $[a, b, c]$ نشان داد که درارای خواص زیر است.

- ضرب سه گانه $[a, b, c] = 0$ است اگر و تنها اگر بردارهای a، b و c داخل یک صفحه باشند (هم صفحه). البته اگر یکی از بردارها صفر باشد و همچنین اگر دو تا از بردارها یکسان باشند این ضرب بازهم صفر است.
- اگر $[a, b, c] > 0$ باشد، مجموعه $\{a, b, c\}$ راست دست و اگر $[a, b, c] < 0$ باشد، مجموعه $\{a, b, c\}$ چپ دست است.
- اگر $a_1 = \lambda_1 i + \mu_1 j + \mu_1 k$، $a_2 = \lambda_2 i + \mu_2 j + \mu_2 k$ و $a_3 = \lambda_3 i + \mu_3 j + \mu_3 k$ باشند در این صورت،

$$[a, b, c] = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} \tag{۲۲.۳}$$

۲.۹.۳ ضرب سه گانه برداری

عبارتی به شکل $a \times (b \times c)$ را ضرب سه گانه برداری می نامیم زیرا مقدار آن یک بردار است.
خواص ضرب سه گانه برداری
چون $b \times c$ عمود بر هر دو بردار b و c است، لذا بردار حاصل از $a \times (b \times c)$ در صفحه حاصل از دو بردار b و c قرار می گیرد. بنابراین می توان آن را به شکل $\lambda b + \mu c$ بسط داد. به طور دقیقتر می توان ضرب سه گانه برداری را به صورت زیر بسط داد.

$$a \times (b \times c) = (a.c) - (a.b)c \tag{۲۳.۳}$$

به علت اینکه ضرب برداری خاصیت پادجابجایی و نیز شرکت ناپذیری را داراست، لذا عاقلانه ترین راه ممکن این است که فرم بالا را به همین شکل بکار گیریم.
اثبات: برای اثبات رابطه بالا بهتر است نماد لوی-چیویتا ϵ_{ijk} را معرفی کنیم. این نماد دارای خواص زیر است.

- این نماد کاملا پاد متقارن است، به طور که اگر (i, j, k) جایگشتی زوج از $(1, 2, 3)$ باشد در این صورت مقدار ۱ و نیز اگر جایگشت فردی باشد مقدار آن -1 است و در غیر این صورت مقدار آن صفر است (شکل ۶.۳).

$$\epsilon_{312} = \epsilon_{231} = \epsilon_{123} = 1 \quad \epsilon_{321} = -\epsilon_{312} = -\epsilon_{123} = -1 \quad \epsilon_{112} = \epsilon_{221} = 0 \tag{۲۴.۳}$$

همچنین

•

$$\epsilon_{ijk}\epsilon^{imn} = \sum_{i=1,2,3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} \quad (۲۵.۳)$$

در رابطه بالا اندیس ها شبیه به هم در بالا و پایین به معنای جمع روی آن اندیس است (قاعده جمع انیشتین).

$$\epsilon_{ijk}\epsilon^{imn} = \delta_j^m\delta_k^n - \delta_j^n\delta_k^m \quad (۲۶.۳)$$

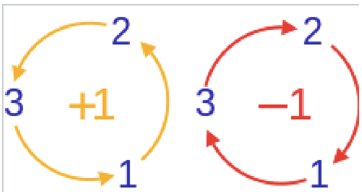
$$\epsilon_{jmn}\epsilon^{imn} = 2\delta_j^i \quad (۲۷.۳)$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon^{ijk} = 6 \quad (۲۸.۳)$$

در رابطه بالا δ_i^j دلتای کرونکر است.

تمرین: با استفاده از رابطه زیر روابط بالا را به دست آورید.

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \quad (۲۹.۳)$$



شکل ۶.۳: جایگشت های زوج (زرد) و جایگشت های فرد (قرمز)

اکنون با استفاده از ویژگی های اشاره شده برای نماد لوی-چیویتا، دترمینان یک ماتریس مربعی 3×3 با $A = [a_{ij}]$ را به صورت زیر نوشت.

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k} \quad (۳۰.۳)$$

بنابراین ضرب برداری را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$c = a \times b \Rightarrow c_i = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}a_jb_k \quad (۳۱.۳)$$

که c_i مؤلفه بردار c است. اکنون رابطه ۲۳.۳ به صورت زیر اثبات می شود.

$$\begin{aligned} \mathrm{d} &= \mathrm{a}\times(\mathrm{b}\times\mathrm{c}) \Rightarrow d_i = \sum_{j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}a_j(\mathrm{b}\times\mathrm{c})_k = \sum_{j,k=1}^{3}\sum_{n,m=1}^{3}\epsilon_{ijk}\epsilon_{knm}a_jb_nc_m \quad (۳۲.۳)\\ &= \epsilon_{ijk}\epsilon^{knm}a_jb_nc_m = (\delta_i^n\delta_j^m-\delta_i^m\delta_j^n)a_jb_nc_m = a_jc_jb_i - a_jb_jc_i\\ &\Rightarrow \mathrm{d} = (\mathrm{a.c})\mathrm{b}-(\mathrm{a.b})\mathrm{c} \quad (۳۳.۳)\end{aligned}$$

تمرین: عبارت $(\mathrm{a}\times\mathrm{b}).(\mathrm{c}\times\mathrm{d})$ را بسط دهید.

۱۰.۳ توابع برداری از یک متغیر اسکالر

اغلب مقدار یک کمیت برداری وابسته به یک کمیت اسکالر مانند زمان است. برای مثال حرکت یک ذره در فضا با بردار مکان a داده می‌شود که بازمان در حال تغییر است یعنی $\mathrm{a}=\mathrm{a}(t)$ در این صورت این بردار تابعی از متغییر اسکالر زمان است. لازم به ذکر است که وابستگی زمانی یک بردار نیازمند حرکت نمی باشد. مثلا مقدار میدان الکتریکی و مغناطیسی در این مکان ثابت از فضا می تواند به طور کلی با زمان تغییر کند به گونه‌ای که $E=E(t)$ و $B=B(t)$ باشند. به طور کلی تنها زمان به عنوان مغییر اسکالر نیست بلکه می‌توان کمیت های اسکالر دیگر را نیز در نظر گرفت و بردار را بر حسب آن پارامتربندی کرد. همان طور که در شکل ۷.۳ منحنی $\mathcal{C}$ دارای نقاطی است که با پارامتر α پارامتربندی شده است. هر نقطه از این منحنی دارای خط مماسی است که جهتش توسط بردار واحد t مشخص می‌شود که به این بردار بردار مماس واحد گفته می‌شود و وابسته به α است، یعنی $t=t(\alpha)$. در این مورد متغییر مستقل، اسکالر α و متغییر وابسته بردار t است.

۱.۱۰.۳ مشتق پذیری

اکثر عملگرهای مهم که توسط توابع برداری وابسته به یک کمیت اسکالر قابل بیان هستند، مشتق پذیر هستند.
تعریف: فرض کنید بردار v تابعی از کمیت اسکالر α باشد در این صورت مشتق تابع برداری $\mathrm{v}(\alpha)$ نسبت به پارامتر α با رابطه حدی زیر تعریف می‌شود.

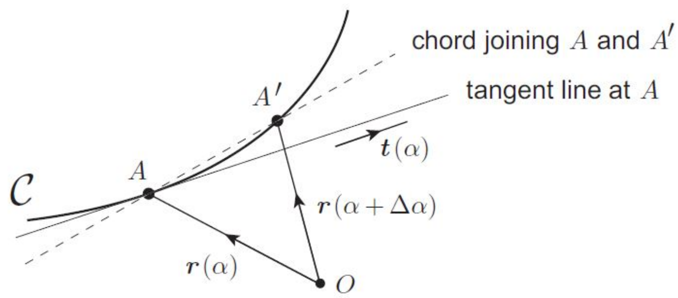
$$\frac{d\mathrm{v}}{d\alpha} = \lim_{\Delta\alpha\to 0}\left(\frac{\mathrm{v}(\alpha+\Delta\alpha)-\mathrm{v}(\alpha)}{\Delta\alpha}\right) \quad (۳۴.۳)$$

به نظر می‌سد این تعریف مشابه با تعریف یک تابع حقیقی باشد، اما یک تفاوت عمده وجود دارد. زمانی که α به $\alpha+\Delta\alpha$ تغییر می‌کند تابع برداری v از $\mathrm{v}(\alpha)$ به $\mathrm{v}(\alpha+\Delta\alpha)$ تغییر می‌کند یعنی اختلافی نظیر $\mathrm{v}(\alpha+\Delta\alpha)-\mathrm{v}(\alpha)$. نکته ای که وجود دارید این است که ایت اختلاف یک تفریق برداری است که کمیتی برداری می‌باشد و حتی بعد

جدول ۴.۳: قواعد مشتق برای توابع برداری : فرض کنید $\mathrm{u}(\alpha)$ و $\mathrm{v}(\alpha)$ توابع برداری از متغیر اسکالر α و نیز $\lambda(\alpha)$ یک تابع اسکالر باشد، در این صورت و با فرض $\dot{\mathrm{u}} = \frac{d}{d\alpha}\mathrm{u}$ داریم:

$\frac{d}{d\alpha}(\mathrm{u} \pm \mathrm{v}) = \dot{\mathrm{u}} \pm \dot{\mathrm{v}}$	$\frac{d}{d\alpha}(\lambda \mathrm{u}) = \dot{\lambda}\mathrm{u} + \lambda\dot{\mathrm{u}}$
$\frac{d}{d\alpha}(\mathrm{u}.\mathrm{v}) = \dot{\mathrm{u}}.\mathrm{v} + \mathrm{u}.\dot{\mathrm{v}}$	$\frac{d}{d\alpha}(\mathrm{u} \times \mathrm{v}) = \dot{\mathrm{u}} \times \mathrm{v} + \mathrm{u} \times \dot{\mathrm{v}}$

از تقسیم بر یک اسکالر $\Delta\alpha$ همچنان بردار است. بنابراین کمیت $\frac{d\mathrm{v}}{d\alpha}$ نیز کمیتی برداری است. از طرفی چون $\frac{d\mathrm{v}}{d\alpha}$ وابسته به α است، بنابراین خود تابع برداری از متغییر اسکالر α می‌باشد. قواعد حاکم بر این مشتق نیز مشابه با قواعد مشتق برای توابع حقیقی است (به جدول ۴.۳ رجوع شود).



شکل ۷.۳: بردار مماس واحد در نقطه فرضی A روی خمینه $\mathcal{C}$.

تمرین

اگر بردار مکان یک ذره با رابطه زیر داده شود در این صورت توابع برداری $\frac{d\mathrm{r}}{dt}$ و $\frac{d^2\mathrm{r}}{dt^2}$ را بیابید.

$$\mathrm{r} = (3t^3 - 5t)i + (2t+1)j + t^3k \tag{۳۵.۳}$$

تمرین

اگر بردار $\mathrm{a} = a(t)$ نیز و b بردار ثابت باشد رابطه زیر را اثبات کنید.

$$\frac{d}{dt}\Big[\mathrm{a}.(\dot{\mathrm{a}} \times \mathrm{b})\Big] = \mathrm{a}.(\ddot{\mathrm{a}} \times \mathrm{b}) \tag{۳۶.۳}$$

۱۱.۳ بردارهای مماس و نرمال به یک خمینه

در فصل آینده سرعت و شتاب مربوط به ذره در حال حرکت در فضای سه بعدی را تعریف خواهیم کرد. برای تفسیر چنین تعاریفی نیازمند اطلاعات در مورد هندسی مشتقی از خمینه (مسیر منحنی) هستیم، از جمله بردار مماس و بردار نرمال (بردار عمود).

۱.۱۱.۳ بردار مماس واحد

اگر بار دیگر مسیر منحنی $\mathcal{C}$ در شکل ۷.۳ را که توسط معادله پارامتری $\mathrm{r} = \mathrm{r}(\alpha)$ تعریف می‌شود را در نظر بگیریم (به طور کلی این مسیر می‌تواند در فضای سه بعدی نیز در نظر گرفته شود ولی در این جا در دو بعد کار می‌کنیم.) و اجازه نقطه فرضی A روی این مسیر را با پارامتر α و نقطه نزدیک به آن یعنی A' را متقابلا با پارامتر $\alpha + \Delta\alpha$ در نظر بگیریم. بنابراین وتر $\overrightarrow{AA'}$ به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$\Delta\mathrm{r} = \mathrm{r}(\alpha + \Delta\alpha) - \mathrm{r}(\alpha) \qquad (۳۷.۳)$$

بنابراین $\Delta\mathrm{r}/|\Delta\mathrm{r}|$ برداری واحد موازی با وتر $\overrightarrow{AA'}$ است. زمانی که $A' \to A$ میل کند در این صورت بردار مماس واحد با رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\mathrm{t}(\alpha) = \lim_{\Delta\alpha\to 0} \frac{\Delta\mathrm{r}}{|\Delta\mathrm{r}|} \qquad (۳۸.۳)$$

همچنین بردار مماس t به توسط رابطه زیر به مشتق $\frac{d\mathrm{r}}{d\alpha}$ وابسته است.

$$\frac{d\mathrm{r}}{d\alpha} = \lim_{\Delta\alpha\to 0} \frac{\Delta\mathrm{r}}{|\Delta\mathrm{r}|} \times \lim_{\Delta\alpha\to 0} \frac{|\Delta\mathrm{r}|}{\Delta\alpha} = \mathrm{t}(\alpha) \times |\lim_{\Delta\alpha\to 0} \frac{\Delta\mathrm{r}}{\Delta\alpha}| = \mathrm{t}(\alpha)|\frac{d\mathrm{r}}{d\alpha}| \qquad (۳۹.۳)$$

به بیانی ساده تر داریم

$$\mathrm{t}(\alpha) = \frac{\frac{d\mathrm{r}}{d\alpha}}{|\frac{d\mathrm{r}}{d\alpha}|} \qquad (۴۰.۳)$$

مثال: مطابق شکل ۸.۳ مسیر نیم دایره در صفحه دو بعدی $x - y$ با مختصات $x = x(\theta) = a(\theta - \sin(\theta))$، $y = y(\theta) = a(1 - \cos(\theta))$ و $z = z(\theta) = 0$ بر حسب پارامتر θ پارامتر بندی شده است. بردار مماس بر این مسیر را بیابید. لازم به ذکر است که $0 < \theta < 2\pi$ است.

جواب: ابتدا لازم است بردار مکان را تعریف کنیم.

$$\mathrm{r}(\theta) = x(\theta)i + y(\theta)j + z(\theta)k = a(\theta - \sin(\theta))i + a(1 - \cos(\theta))j \qquad (۴۱.۳)$$

اکنون به راحتی می‌توان بردار مماس واحد را به دست آورد.

تمرین: مثال را ادامه دهیم و عبارت نهایی برای بردار مماس واحد را بیابید.

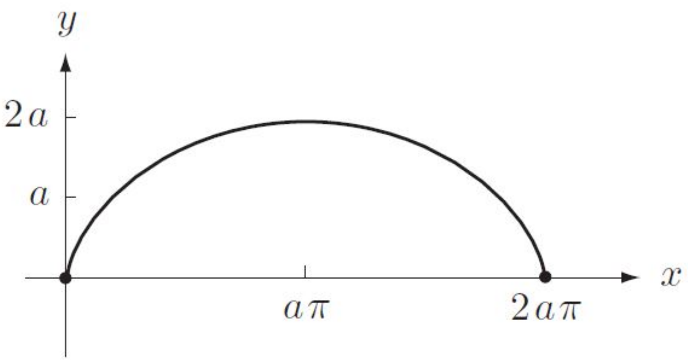
از سوی دیگر اگر مسیر منحنی حرکت ذره را با پارامتر نظیر s پارامتربندی کنیم به گونه‌ای که

$$|\frac{d\mathrm{r}}{ds}| = |\lim_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta\mathrm{r}}{\Delta s}| = 1 \qquad (۴۲.۳)$$

بنابراین بردار مماس به شکل ساده زیر باز تعریف می‌شود.

$$\mathrm{t} = \frac{d\mathrm{r}}{ds} \qquad (۴۳.۳)$$

که شکل مناسبتری برای مقاصد نظری است.



شکل ۸.۳: مسیر حرکت ذره‌ای در فضای دو بعدی

۲.۱۱.۳ بردار نرمال واحد

اجازه دهید $t(s)$ بردار مماس واحد بر خمینه $\mathcal{C}$ باشد که s فاصله در طول منحنی را نشان می‌دهد. بنابراین اگر t تابع برداری از متغییر اسکالر s باشد، در این صورت مشتق $\frac{d\mathrm{t}}{ds}$ نیز تابعی برداری دیگر وابسته به پارامتر s است. چون t بردار واحد است، یعنی $\mathrm{t}(s).\mathrm{t}(s) = 1$ می توان با گرفتن مشتق از شرط واحد بودن به رابطه زیر رسید.

$$\frac{d}{ds}(\mathrm{t}(s).\mathrm{t}(s) = 1) \Rightarrow 0 = \frac{d}{ds}(\mathrm{t}.\mathrm{t}) = \frac{d\mathrm{t}}{ds}.\mathrm{t} + \mathrm{t}.\frac{d\mathrm{t}}{ds} = 2\Big(\frac{d\mathrm{t}}{ds}.\mathrm{t}\Big) \qquad (۴۴.۳)$$

این رابطه نشان می‌دهد که $\frac{d\mathrm{r}}{ds}$ همواره عمود بر t است. بنابراین به طور معمول می‌توان $\frac{d\mathrm{t}}{ds}$ را به شکل زیر نوشت.

$$\frac{d\mathrm{t}}{ds} = \kappa \mathrm{n} \qquad (۴۵.۳)$$

که $\kappa = |d\mathrm{t}/ds|$ خمش اسکالر و نیز n بردار نرمال واحد است که همواره بر بردار مماس t عمود است. این دو کمیت تفسیر هندسی زیبایی دارند. نقطه A را روی منحنی در نظر بگیرید و فرض کنید پارامتر فاصله s از نقطه A اندازه گیری شده باشد. سپس با بسط تیلور شکل منحنی $\mathcal{C}$ نزدیک نقطه A به طور تقریبی با رابطه زیر داده می‌شود.

$$\mathrm{r}(s) = \mathrm{r}(0) + s\Big[\frac{d\mathrm{r}}{ds}\Big]_{s=0} + \frac{1}{2}s^2\Big[\frac{d^2\mathrm{r}}{ds^2}\Big]_{s=0} + \mathcal{O}(s^3) \qquad (۴۶.۳)$$

نکته: به طور کلی بسط تیلور تابع $f(x)$ حول نقطه $x = x_0$ با رابطه زیر داده می‌شود.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}|_{x=x_0}(x - x_0)^n$$

که $f^{(n)}$ مشتق n ام از تابع است. همچنین معادله ۴۶.۳ را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\mathrm{r}(s) = \mathrm{a} + s\mathrm{t} + \Big(\frac{1}{2}\kappa s^2\Big)\mathrm{n} + \mathcal{O}(s^3) \qquad (۴۷.۳)$$

که a بردار مکان از نقطه A و t و n محاسبه شده در نقطه A هستند. بنابراین در نزدیک نقطه A منحنی $\mathcal{C}$ در صفحه گذارنده از نقطه A موازی با بردارهای t و n قرار دارد. همچنین از شکل رابطه ۴۷.۳ می‌توان دید که منحنی $\mathcal{C}$ با تقریب خوبی نزدیک نقطه A سهموی است. در تقریب مرتبه یکسان، می‌توان معدله زیر را نظیر رابطه ۴۷.۳ در نظر گرفت.

$$\mathrm{r}(s) = \mathrm{a} + \kappa^{-1}(\sin\kappa s)\mathrm{t} + \kappa^{-1}(1-\cos\kappa s)\mathrm{n} + \mathcal{O}(s^3) \tag{۴۸.۳}$$

بنابراین نزدیک نقطه A منحنی $\mathcal{C}$ تقریبا دایره‌ای به شعاع κ^{-1} است و t بردار مماس بر این دایره و بردار n به سمت مرکز این دایره است. معمولا شعاع κ^{-1} را شعاع خمش منحنی C در نقطه A می نامند.

تمرین: نشان دهید در حد s کوچک دو رابطه ۴۷.۳ و ۴۸.۳ با یکدیگر معادل هستند.

مثال: بردار نرمال واحد و خمش نیم دایره مثال قبل (شکل ۸.۳) را به دست آورید.

حل: بردار مماس به این نیم دایره با رابطه زیر مشخص می‌شود.

$$\mathrm{t}(\theta) = \frac{d\mathrm{r}}{d\theta}/|\frac{d\mathrm{r}}{d\theta}| = (\sin\frac{1}{2}\theta)i + (\cos\frac{1}{2}\theta)j \tag{۴۹.۳}$$

بنابراین با استفاده از قاعده زنجیره‌ای مشتق داریم

$$\begin{aligned}\frac{d\mathrm{t}}{ds} &= \frac{d\mathrm{t}/d\theta}{ds/d\theta} = \frac{d\mathrm{t}/d\theta}{|d\mathrm{r}/d\theta|}\\ &= \frac{\frac{1}{2}(\cos\frac{1}{2}\theta)i - \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\theta j}{2a\sin\frac{1}{2}\theta} = (4a\sin\frac{1}{2}\theta)^{-1}\Big((\cos\frac{1}{2}\theta)i - (\sin\frac{1}{2}\theta)j\Big)\end{aligned} \tag{۵۰.۳}$$

در این صورت بردار نرمال یکه و نیز خمش نیم دایره،

$$\mathrm{n}(\theta) = (\cos\frac{1}{2}\theta)i - (\sin\frac{1}{2}\theta)j \qquad \kappa(\theta) = (4a\sin\frac{1}{2}\theta)^{-1} \tag{۵۱.۳}$$

شعاع این خمش نیز $4a\sin\frac{1}{2}\theta$ است.

تمرینات: شماره تمرین‌های ۱.۱ ، ۱.۱۱ ، ۱.۱۴ ، ۱.۱۵ ، ۱.۱۶،۱.۱۷ ، ۱.۱۸ از کتاب صفحات ۲۲ ، ۲۳ و ۲۴ را پاسخ دهید.

[0] درسنامه مکانیک کلاسیک

فصل ۴

سرعت، شتاب و سرعت زاویه‌ای اسکالر

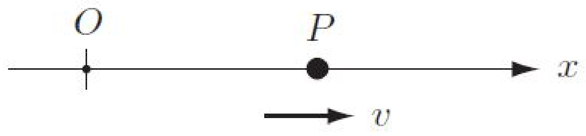
سینماتیک به مطالعه حرکت اجسام بدون توجه به نیروهای منجر به این حرکت گفته می‌شود. در واقع سوال در مورد علت حرکت جسم مربوط به دینامیک است که در اینجا موضوع مورد نظر ما نیست. برای مثال قوانین کپلر سینماتیک هستند زیرا فقط خواص مدارهای ماهواره ها مانند شکل بیضی بودن آنها را بدون در نظر گرفتن نیروی که منجر به این می‌شود، را بررسی می‌کند. در حالی که قوانین نیوتن برای گرانش دینامیک را شامل می‌شود زیرا نیروی گرانش را به عنوان چرایی حرکت بیضی ماهواره ها توصیف می‌کند. سینماتیک بیشتر یک توصیف هندسی از حرکتهای ممکن را فراهم می‌سازد. سنگبنای پایه‌ای اجسام در مکانیک را ذره می‌نامیم، برای نمونه یک جسم منزوی تنها یک نقطه از فضا را اشغال می‌کنند (یعنی یک ذره در نظر گرفته می‌شود.). کمیت‌های سینماتیکی مهم در حرکت یک ذره، سرعت و شتاب ذره هستند. برای سهولت ابتدا از حرکت مستقیم خط در یک بعد شروع خواهیم کرد زیرا چنین کمیت‌های اسکالر هستند و سپس به سه بعد که در آن کمیتهای سرعت و شتاب برداری هستند تعمیم خواهیم داد.

ایده‌ال سازی مهم دیگری ;که در اینجا فرض می‌کنیم جسم صلب است که مجموعه‌ای از ذرات متصل شده به هم در یک چارچوب صلب هست. کمیت سینماتیکی در حرکت یک جسم صلب اندازه حرکت زاویه‌ای آن است. در این بخش تنها حرکات جسم صلب در دو بعد را در نظر می‌گیریم زیرا در دو بعد سرعت زاویه‌ای یک کمیت اسکالر است. مورد سه بعدی کلیتر در بخش ۱۶ کتاب بررسی خواهد شد.

۱.۴ حرکت مستقیم الخط یک ذره

ذره P در حال حرکت در محور x به طوری که جابجایی x از مبدا $\mathcal{O}$ تابع مشخصی از زمان استُ، را در نظر بگیرید. سرعت متوسط ذره P در طی بازه زمانی $t_1 \leq t \leq t_2$ به افزایش در جابجایی ذره بر زمان سپری شده گفته می‌شود، یعنی

$$\overline{v} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \tag{۱.۴}$$



شکل ۱.۴: ذره P در خط مستقیم حرکت می‌کند و دارای جابجایی x و سرعت v در زمان t است.

تمرین:
فرض کنید جابجایی ذره P از مبدا $\mathcal{O}$ در زمان t با تابع $x = t^2 - 6t$ مشخص می‌شود. در این صورت سرعت متوسط در بازه زمانی $1 \leq t \leq 3$ چقدر است؟

سرعت متوسط یک ذره از درجه اهمیت کمتری نسبت به سرعت لحظه‌ای، سرعت در یک لحظه مشخص، برای ماست. در واقع با قرار دادن $t_1 = t_2$ در رابطه ۱.۴ نمی‌توانیم سرعت در لحظه t_1 را بیابیم زیرا خارج قسمت آن تعریف نشده است. با این وجود، سرعت لحظه‌ای به عنوان حد سرعت لحظه‌ای زمانی که بازه زمانی به سمت صفر میل می‌کند، یعنی $t_2 \to t_1$ قابل تعریف است. بنابراین سرعت لحظه‌ای $v(t_1)$ ذره P در زمان t_1 به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$v(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \left(\frac{x(t_2) - x_{t_1}}{t_2 - t_1} \right) \tag{۲.۴}$$

اما این رابطه دقیقا تعریف مشتق x نسبت به t است محاسبه شده در $t = t_1$ است. بنابراین می‌تون سرعت را با رابطه زیر تعریف کرد.

تعریف: سرعت (لحظه‌ای) v ذره P در جهت مثبت x با رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{۳.۴}$$

نکته: تندی ذره P به آهنگ افزایش کل مسافت طی شده گفنه می‌شود که برابر با بزرگی سرعت $|v|$ است. به طور مشابه، شتاب ذره P آهنگ افزایش سرعت v است و به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف: شتاب (لحظه‌ای) ذره در جهت مثبت x با

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{۴.۴}$$

تمرین: فرض کنید جابجایی ذره‌ای از مبدا مختصات با رابطه $x = t^3 - 6t^2 + 4$ داده شده است. سرعت و شتاب ذره را در لحظه t حساب کنید. با این نتیجه که ذره دوبار به حالت سکون می‌رسد، مکان و شتاب ذره در زمان آخرین سکون را محاسبه کنید.
تمرین: یک ذره در امتداد محور x با شتاب وابسته به زمان زیر حرکت می‌کند.

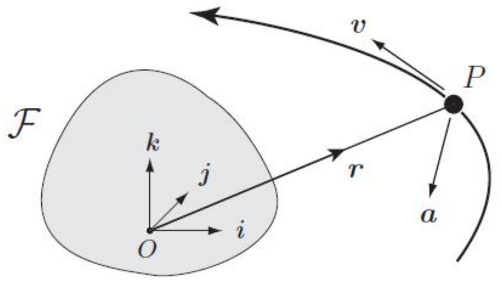
$$a = 12t^2 - 6t + 6 \tag{۵.۴}$$

در ابتدا در نقطه $x = 4m$ و با سرعت $8m/s$ در جهت منفی x شروع به حرکت می‌کند. سرعت و جابجایی ذره در لحظه‌ی t را به‌دست آورید.

۲.۴ حرکت کلی یک ذره

زمانی که یک ذره‌ی P در دو یا سه بعد حرکت می‌کند، مکانش می‌تواند با بردار جابجایی r از مبدا $\mathcal{O}$ که نقطه‌ی ثابتی در چارچوب مرجع صلب $\mathcal{F}$ است، توصیف شود. خواه $\mathcal{F}$ متحرک یا ثابت باشد، بردار مکان r به سادگی نسبت به چارچوب $\mathcal{F}$ قابل اندازه‌گیری است. شکل ۲.۴ یک ذره P در حال حرکت در فضای سه بعدی با بردار مکان r (نسبت به چارچوب مرجع $\mathcal{F}$) در زمان t را نشان می‌دهد.
سوال: چارچوب مرجع چیست و چرا به آن نیازمندیم؟
یک چارچوب مرجع صلب لزوما یک جسم صلب است که ذراتش می‌توانند به منظور ایجاد نقطه مرجع برچسب گذاری شوند. معروف ترین چنین اجسامی زمین است. نسبت به یک ذره منفرد تنها چیزی که توان مشخص کرد فاصله از آن ذره است. با این وجود، نسبت به یک جسم صلب می‌توان هم جهت و هم فاصله را مشخص کرد. بنابراین مقدار هر کمیت برداری نسبت به چارچوب F قابل تعیین شدن است. خصوصا اگر ما برخی از ذرات جسم را به عنوان مبدا $\mathcal{O}$ برجسب گذاری کنیم، ما می‌توانیم مکان هر نقطه از فضا را به وسیله بردار مکان نسبت به چارچوب $\mathcal{F}$ و مبدا مختصات $\mathcal{O}$ مشخص کنیم.
تشخیص بردارها نسبت به یک چارچوب مرجع زمانی که ما دستگاه مختصات کارتزین را معرفی می‌کنیم، به مراتب ساده تر می‌شود. این عمل به روش‌های مختلف نامتناهی قابل اجراست. تصور کنید $\mathcal{F}$ را به وسیله مجموعه‌ای از سه صفحه‌ی دوبه دو متعامد که به طور صلب در آن غوطه ور هستند، را بسط دهیم. سپس مختصات x, y, z از نقطه‌ی P فاصله نقطه P از سه صفحه هستند. اکنون اجازه دهید $\mathcal{O}$ مبدا این دستگاه مختصات باشد و $\{i, j, k\}$ بردارهای یکه آن باشند. سپس به طور قراردادی مرجع $\mathcal{F}$ به همراه دستگاه مختصات غوطه‌ور شده $Oxyz$ را با نمادگذاری $\mathcal{F}\{O; i, j, k\}$ نمایش می‌دهیم. در حلت کلی، سرعت و شتاب یک ذره کمیت‌های باداری هستند که با روابط زیر تعریف می‌شوند.

$$\mathrm{v} = \frac{d\mathrm{r}}{dt} \qquad a = \frac{d\mathrm{v}}{dt} \tag{۶.۴}$$



شکل ۲.۴: ذره P در فضای سه بعدی نسبت به چارچوپ مرجع $\mathcal{F}$ و مبدا O حرکت می‌کند و دارای بردار مکان r در زمان t است.

سرعت و شتاب اسکالر تعریف شده در بخش قبل برای حرکت مستقیم الخط به طور ساده‌ای به کمیت‌های برداری تعریف شده در بالا مرتبط هستند. این امکان وجود دارد که با استفاده از فرمولبندی برداری در مورد حرکت مستقیم خط در محور x ، r، v و a را به شکل زیر نوشت.

$$\mathrm{r} = xi \quad \mathrm{v} = vi \quad \mathrm{a} = ai \tag{۷.۴}$$

که $v = dx/dt$ و $a = dv/dt$ هستند.

تمرین: نسبت به چارچوپ $\mathcal{F}\{O; i, j, k\}$ مکان ذره P در زمان t به صورت

$$\mathrm{r} = (2t^2 - 3)i + (4t + 4)j + (t^3 + 3t^2)k$$

داده شده است. مطلوبست: فاصله OP زمانی که $t = 0$ است؟ سرعت ذره در $t = 1$؟ شتاب ذره در $t = 2$ ؟

تفسیر بردارهای v و a

بردار سرعت v تفسیر ساده‌ای دارد. فرض کنید s مسیر کمان طی شده توسط ذره P باشد که از نقطه ثابتی از مسیراش اندازه گیری می‌شود و s با زمان افزایش می‌یابد. بنابراین با استفاده از قاعده زنجیره‌ای داریم

$$\mathrm{v} = \frac{d\mathrm{r}}{dt} = \frac{d\mathrm{r}}{ds} \times \frac{ds}{dt} = v\mathrm{t} \tag{۸.۴}$$

که بردار t بردار مماس یکه بر مسیر و $v = ds/dt$ تندی ذره P است. بنابراین در هر لحظه، جهت بردار سرعت v در امتداد مماس بر مسیر حرکت ذره و $|v|$ تندی ذره P است. توصیف شتاب سختر به نظر می‌رسد. این تا حدی

به این دلیل است که ما بشتر به حرکت مستقیم الخط عادت کرده ایم. به هر حال به طور کلی داریم

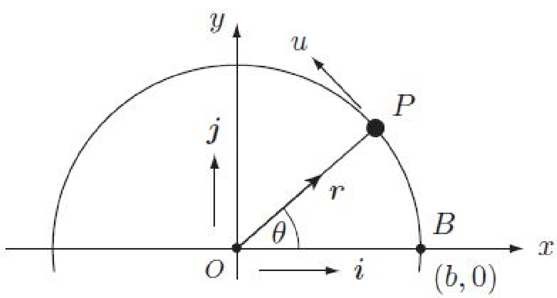
$$\begin{aligned} \mathrm{a} &= \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{d(v\mathrm{t})}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathrm{t} + v\frac{d\mathrm{t}}{t} = \Big(\frac{dv}{dt}\Big)\mathrm{t} + v\Big(\frac{d\mathrm{t}}{ds} \times \frac{ds}{dt}\Big) \\ &= \Big(\frac{dv}{dt}\Big)\mathrm{t} + \Big(\frac{v^2}{\rho}\Big)\mathrm{n} \end{aligned} \qquad (۹.۴)$$

که n بردار یکه نرمال بر مسیر ذره و $\rho(=\kappa^{-1})$ شعاع خمش مسیراست. در نتیجه، شتاب درای یک مولفه dv/dt مماس بر مسیر و یک مولفه v^2/ρ عمود بر مسیر است. مفهموم این رابطه زمانی که از مختصات قطبی استفاده خواهیم کرد، بیشتر واضح می‌شود.

۳.۴ حرکت دایره‌ای یکنواخت

ساده‌ترین مثال از حرکت غیر مستقیم حرکت در یک دایره است. حرکت دایروی در کابردهای عملی در ماشین‌های چرخشی مهم است. در اینجا مورد خاصی از حرکت دایره‌ای یکنواخت یعنی حرکت دایره‌ای با سرعت ثابت را در نظر می‌گیریم. ذره‌ی P را که با سرعت ثابت u و در جهت خلاف عقربه‌های ساعت که اطراف دایره‌ای به مرکز O و شعاع b همانند آنچه در شکل ۳.۴ نمایش داده شده است، حرکت می‌کند را در نظر بگیرید. در زمان $t = 0$ ذره در نقطه $B(b, 0)$ است. سرعت و شتاب ذره در لحظه t چیست؟ اولین گام یافتن بردار مکان ذره در زمان t است. چون ذره با سرعت ثابت u حرکت می کند، کمان BP طی شده در زمان t بایستی ut باشد. در نتیجه زاویه θ مشخص شده در شکل ۳.۴ با $\theta = ut/b$ تعیین می‌گردد. بنابراین بردار مکان ذره در زمان t به صورت زیر مشخص می‌شود.

$$\mathrm{r} = b\cos(\theta)i + b\sin(\theta)j = b\cos(ut/b)i + b\sin(ut/b)j \qquad (۱۰.۴)$$



شکل ۳.۴: ذره P با سرعت ثابت u حول دایره‌ای به شعاع b حرکت می‌کند.

۰ درسنامه مکانیک کلاسیک