مرکز نشر دانشگاهی

روشهای ریاضی در فیزیک

جلد دوم

جورج آرفکن

ترجمهٔ اعظم پورقاضی

روشهای ریاضی در فیزیک

جلد دوم

جورج آرفکن

ترجمهٔ اعظم پورقاضی

مرکز نشر دانشگاهی

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست

عنوان	صفحه

عنوان	صفحه

عنوان	صفحه

۸

معادلات دیفرانسیل

۱.۸ معادلات دیفرانسیل بامشتقهای جزئی درفیزیك نظری

تقریباً تمام بخشهای بنیادی فیزیك نظری و بسیاری از بخشهای پیشرفتهٔ آن برحسب معادلات دیفرانسیل(غالباً معادلات دیفرانسیل جزئی)فرمولبندی می‌شوند. ازمیان معادلات دیفرانسیلی که خیلی به آنها برمی‌خوریم می‌توان موارد زیررا برشمرد:

۱. معادلهٔ لاپلاس، $\nabla^2\psi = 0$.

به این معادلهٔ بسیارمهم و بسیار متداول درمباحث زیر برمی‌خوریم

الف) پدیده‌های الکترومغناطیسی شامل الکتروستاتیك، دی‌الکتریکها، جریانهای دائم، و مغناطوستاتیك،

ب) هیدرودینامیك (شارش غیرچرخشی سیال کامل و امواج سطحی)،

ج) شارش گرما،

د) گرانش.

۲. معادلهٔ پواسون، $\nabla^2\psi = -\rho/\varepsilon_0$.

معادلهٔ پواسون، برخلاف معادلهٔ لاپلاس همگن، معادله‌ای ناهمگن است ویك جملهٔ مربوط به چشمه، $-\rho/\varepsilon_0$، دارد.

۳. معادلهٔ موج (هلمهولتز) و معادلات پخش مستقل از زمان، $\nabla^2\psi \pm k^2\psi = 0$.

این معادلات درپدیده‌های متنوعی به‌قرار زیرظاهر می‌شوند

الف) امواج کشسان درجامدات شامل تارها، میله‌ها، وغشاهای مرتعش،

ب) صوت یا آکوستیك،

ج) امواج الکترومغناطیسی،
د) رآکتورهای هسته‌ای.

۴. معادلهٔ پخش وابسته به‌زمان: $\nabla^{2}\psi=\frac{1}{a^{2}}\frac{\partial\psi}{\partial t}$، و صورتهای چهار بعدی متناظر با آن‌که شامل دالامبری، مشابه چهاربعدی لاپلاسی درفضای مینکوفسکی، هستند.

$$\square^{2}=\nabla^{2}+\frac{\partial^{2}}{\partial x_{4}^{2}}=\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}+\frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}}+\frac{\partial^{2}}{(ic)^{2}\partial t^{2}}$$

۵. معادلهٔ موج وابسته به‌زمان، $\square^{2}\psi=0$.
۶. معادلهٔ پتانسیل نرده‌ای، $\square^{2}\psi=-\rho/\varepsilon_{0}$.
این معادله نیز، مانند معادلهٔ پواسون ناهمگن است ویک جملهٔ مربوط به چشمه، $-\rho/\varepsilon_{0}$، دارد.
۷. معادلهٔ کلاین-گوردن، $\square^{2}\psi=\mu^{2}\psi$، و معادله‌های برداری متناظری‌که درآنها به‌جای تابع نرده‌ای ψ یک‌تابع برداری می‌نشیند.

صورتهای پیچیده‌تری نیزمتداول‌اند.
۸. معادلهٔ موج شرودینگر

$$-\frac{\hbar^{2}}{2m}\nabla^{2}\psi+V\psi=i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

و درحالت مستقل اززمان این معادله

$$-\frac{\hbar^{2}}{2m}\nabla^{2}\psi+V\psi=E\psi.$$

۹. معادلات مربوط به‌امواج‌کشسان وشاره‌های چسبنده ومعادلهٔ تلگراف.
۱۰. معادلات دیفرانسیل جفت‌شدهٔ ماکسول در زمینهٔ میدانهای الکتریکی و مغناطیسی و معادلات دیفرانسیل جفت‌شدهٔ دیراک در زمینهٔ تابع موجهای نسبیتی الکترون. برای دستیابی به‌بحثی درباب معادلات ماکسول، مقدمه ونیز بخش ۹.۱ را ببینید (جلد اول).

همهٔ این‌معادلات رامی‌توان به‌شکل زیر نوشت

$$H\psi=F$$

که درآن H یک‌عملگر دیفرانسیلی است

$$H\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial t},x,y,z\right)$$

F تابعی معلوم، و ψ یک‌تابع نرده‌ای (یا برداری) نامعلوم است.

این دو مشخصه از اهمیت خاصی برخوردارند:

۱. همهٔ این معادلات برحسب تابع نامعلوم ψ خطی‌اند.[1] با حل مسائل آسانتر ریاضی و فیزیك، معادلات دیفرانسیل غیرخطی، مثلا معادلاتی که پدیده‌های موج شوکی را توصیف می‌کنند، بیشتر موردتوجه قرارمی‌گیرد. معادلات بنیادی‌فیزیك جو غیرخطی‌اند. تلاطم، شاید مهمترین مسئلهٔ حل نشده درحوزهٔ فیزیك کلاسیك، اساساً غیرخطی است. اما، هم خود معادلات دیفرانسیل غیرخطی وهم روشهای عادی‌که غالباً برای یافتن پاسخ به‌آنها روی می‌آوریم، هردو ازدامنهٔ بحث این کتاب خارج‌اند.

۲. این معادلات جملگی معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم‌اند [معادلات ماکسول و دیراك مرتبهٔ اول‌اند ولی‌شامل دوتابع نامعلوم‌هستند. حذف یکی‌ازتوابع نامعلوم به‌یك معادلهٔ مرتبهٔ دوم برحسب تابع‌دیگر می‌انجامد (با بخش ۹.۱ مقایسه کنید)].

گهگاه، به‌معادلات مرتبهٔ بالاتری نیز برمی‌خوریم. معادلهٔ زیررا، هم درنظریهٔحرکت آهستهٔ شارهٔ چسبنده وهم درنظریهٔ جسم‌کشسان خواهیم یافت

$$(\nabla^۲)^۲\psi=\left(\frac{\partial^۴}{\partial x^۴}+۲\frac{\partial^۴}{\partial x^۲\partial y^۲}+\frac{\partial^۴}{\partial y^۴}\right)\psi=۰.$$

خوشبختانه، در بحثهای مقدماتی نظیر این‌کتاب، این معادلات دیفرانسیل مرتبه‌های بالاتر نسبتاً نادرند.

معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ‌اول نیزدرفیزیك‌نظری ظاهرمی‌شوند، هرچندکه ظهورآنها نه‌مانند معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم فراوان ونه به‌آن اهمیت است. جواب برخی انواع مهمترمعادلات مرتبهٔ‌اول (معمولی) را دربخش ۲.۸ بیشتر موردبحث قرارخواهیم داد.

دراین فصل چند روش کلی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی مورد بحث قرار می‌گیرد.

۱. جداسازی متغیرها. معادلهٔ دیفرانسیل‌جزئی به‌دو معادلهٔ دیفرانسیل معمولی‌تجزیه می‌شودکه هر یك را می‌توان با روش فروبنیوس بخش ۵.۸ حل کرد. با روش جداسازی متغیرها دربخش ۶.۲ (جلداول) آشنا شدیم، ودربخش ۳.۸ بیشتر در خصوص آن بحث می‌کنیم. این روش همیشه هم کارساز نیست، اما وقتی به‌کار برده‌شود ساده‌ترین روش به‌شمار می‌آید.

۲. جوابهای انتگرالی با بهره‌گیری از یك تابع‌گرین. با تکنیك تابع گرین در بخش۷.۸ آشنا خواهیدشد. این تکنیك را درفصل ۱۶ به‌تفصیل بررسی‌خواهیم کرد.

۳. سایرروشهای‌تحلیلی مانند استفاده ازتبدیلهای انتگرالی. برخی روشهای این رده را تعمیم می‌دهیم، وآنهارا درفصل ۱۵ به‌کارخواهیم گرفت.

---

۱. برای دستیابی به‌تعریف خطی‌بودن، بخش ۶.۲ (جلد اول) را ببینید.

۴. محاسبات عددی. پیشرفت ماشینهای محاسبهٔ امروزی، امکانات گسترده‌ای برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی بر پایهٔ قوانین حاکم برحساب تفاضلهای متناهی فراهم ساخته است. از آن جمله روشهای واهلشی است. در بخش ۸.۸ دو روش عددی، روش رونژ-کوتا و روش پیشگو-مصحح، را برای معادلات دیفرانسیل معمولی به‌کار می‌بندیم.[۱]

۲.۸ معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول

علم فیزیك مستلزم تعدادی معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول است. شاید بهتر باشد که برای کامل بودن مطلب (و مرور احتمالی) آنها را به‌اختصار بررسی کنیم.

دراینجا معادلات دیفرانسیل را به‌صورت کلی درنظرمی‌گیریم

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \qquad (۱.۸)$$

روشن‌است که معادلهٔ (۱.۸) یك‌معادلهٔ دیفرانسیل‌معمولی مرتبهٔ اول‌است. مرتبهٔ اول، به‌این علت که فقط شامل‌مشتقهای مرتبهٔ اول‌است ونه‌بالاتر. معمولی، زیرا تنهامشتق موجود در آن یعنی dy/dx یك‌مشتق کامل یامعمولی‌است. معادلهٔ (۱.۸) ممکن‌است خطی باشد یا نباشد، هرچندکه حالت خطی، معادلهٔ (۱۵.۸)، را بعداً به‌وضوح بررسی خواهیم‌کرد.

متغیرهای تفکیك‌پذیر

بارها پیش می‌آیدکه معادلهٔ (۱.۸) به‌شکل خاص زیردرآید

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=-\frac{P(x)}{Q(y)} \qquad (۲.۸)$$

که می‌توان‌آن را به‌این صورت بازنویسی‌کرد

$$P(x)dx+Q(y)dy=0$$

با انتگرالگیری از (x_0,y_0) تا (x,y) خواهیم داشت

$$\int_{x_0}^{x} P(x)dx+\int_{y_0}^{y} Q(y)dy=0 \qquad (۳.۸)$$

---

۱. خواننده می‌تواند برای‌دستیابی به‌مطالب مشروحتر پیرامون محاسبات عددی مطالعات‌خود را باکتابی بامشخصات زیر آغازکند وآنگاه به‌مراجع تخصصی‌تر بپردازد.

Numerical Methods for Scientists and Engineers, R.W.Hamming (New-York: McGraw-Hill, 1973).

باتوجه به‌اینکه حدود پایینی x_0 و y_0 مقادیر ثابتی‌را می‌دهند، می‌توانیم از آنها چشم بپوشیم وفقط یك‌ثابت انتگرالگیری اضافه کنیم. توجه‌کنیم که دراین روش تفکیك متغیرها نیازی نیست که معادلهٔ دیفرانسیل خطی باشد.

مثال ۱۰۲۰۸ قانون بویل

شکل دیفرانسیلی قانون بویل درموردگازها دربارهٔ مقدار معینی‌گاز به‌حجم V وفشار P (و دمای ثابت) به‌شکل زیر است

$$\frac{dV}{dP}=-\frac{V}{P}$$

باتفکیك متغیرها خواهیم داشت

$$\frac{dV}{V}=-\frac{dP}{P}$$

یا

$$\ln V=-\ln P+C$$

باوجود دوجملهٔ لگاریتمی، بازنویسی ثابت انتگرالگیری، C، به‌صورت $\ln k$ کاررا خیلی آسانتر می‌کند. پس

$$\ln V+\ln P=\ln PV=\ln k$$

و

$$PV=k.$$

معادلات دیفرانسیل کامل

معادلهٔ (۱۰۸) را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (۴۰۸)$$

این‌معادله راآنگاه کامل گویندکه بتوان آن‌را بایك دیفرانسیل $d\varphi$، به‌قرار زیر، جورکرد

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy \qquad (۵۰۸)$$

از آنجا که سمت راست معادلهٔ (۴۰۸) صفر است، ما تابع مجهول $\varphi(x,y)=\text{const.}$ و $d\varphi=0$ را جستجو می‌کنیم.

اگرچنین تابعی وجود داشته‌باشد، داریم

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy \qquad (۶.۸)$$

و

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=P(x,y),\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=Q(x,y) \qquad (۷.۸)$$

شرط لازم وکافی برای آنکه معادلهٔ دیفرانسیل ما کامل باشد آن است که مشتقهای جزئی آمیختهٔ دوم $\varphi(x,y)$ (که پیوسته فرض می‌شوند) از ترتیب مشتقگیری مستقل باشند

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}=\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \qquad (۸.۸)$$

به‌تشابه بامعادلات بخش ۱۳.۱ (**جلد اول**)، «نظریهٔ پتانسیل» توجه کنید. اگرمعادلهٔ(۴.۸) بایك تاو (مساوی باصفر) متناظر باشد،آنگاه يك‌پتانسیل، $\varphi(x,y)$، باید وجودداشته‌باشد.

اگر $\varphi(x,y)$ وجودداشته باشد، پس‌جواب معادلهٔ ما با استفاده ازمعادلات (۴.۸)و (۶.۸) عبارت است از

$$\varphi(x,y)=C \qquad (۹.۸)$$

درست همان‌طور که دربخش ۱۳.۱ (جلد اول) پتانسیل برداری مغناطیسی را به کمك تاو آن تشکیل دادیم، می‌توانیم $\varphi(x,y)$ رانیز به‌کمك مشتقهای جزئی‌آن تشکیل دهیم.

ممکن‌است روشن‌شودکه معادلهٔ(۴.۸) کامل‌نیست، یعنی معادلهٔ (۸.۸) برقرار نیست. درهر حال همواره دست‌کم يك و شاید بینهایت عامل انتگرالگیری، $\alpha(x,y)$، چنان وجود دارد که

$$\alpha(x,y)P(x,y)dx+\alpha(x,y)Q(x,y)dy=0$$

کامل‌باشد. متأسفانه، یافتن عامل انتگرالگیری همواره بدیهی ویا آسان نیست. جز درمورد معادلهٔ دیفرانسیل‌مرتبهٔ‌اول خطی که ازاین پس آن‌را بررسی‌می‌کنیم، هیچ‌روش‌سیستماتیکی برای پیداکردن عامل‌انتگرالگیری درمورد معادلهٔ (۴.۸) وجود ندارد.

معادلهٔ دیفرانسیلی که متغیرهایش ازهم تفکیك شده‌اند به‌خودی خود کامل است. هر معادلهٔ دیفرانسیل کاملی‌لزوماً تفکیك‌پذیر نیست.

معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول خطی

اگر $f(x,y)$ درمعادلهٔ (۱.۸) به‌صورت $-p(x)y+q(x)$ باشد،آنگاه معادلهٔ (۱.۸) به‌شکل زیر درمی‌آید

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x) \tag{۱۰.۸}$$

معادلهٔ (۱۰.۸) کاملترین معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول خطی است. اگر $q(x)=0$، آنگاه معادلهٔ (۱۰.۸) (برحسب y) همگن است. هر $q(x)$ غیرصفر می‌تواند نمایانگر چشمه یا جملهٔ راه‌انداز باشد. معادلهٔ (۱۰.۸) خطی است؛ یعنی هر جملهٔ آن برحسب y یا dy/dx خطی است. توانهای بالاتری در آن وجود ندارد؛ یعنی، نه y^2 و نه حاصلضربهایی به‌صورت $y(dy/dx)$ در آن موجودنیست. توجه‌کنیم که خطی‌بودن به y و dy/dx مربوط می‌شود؛ ضرورتی ندارد $p(x)$ و $q(x)$ برحسب x خطی باشند. معادلهٔ (۱۰.۸)، مهمترین معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول درفیزیك، رامی‌توان دقیقاً حل کرد.

به‌جستجوی عامل انتگرالگیری $\alpha(x)$ برآییم، به‌طوری‌که رابطهٔ

$$\alpha(x)\frac{dy}{dx}+\alpha(x)p(x)y=\alpha(x)q(x) \tag{۱۱.۸}$$

را بتوان به‌صورت زیر بازنویسی‌کرد

$$\frac{d}{dx}[\alpha(x)y]=\alpha(x)q(x) \tag{۱۲.۸}$$

هدف ازاین‌کار آن است که سمت چپ معادلهٔ (۱۰.۸) را به‌صورت یك مشتق درآوریم تا بتوانیم از آن، ازطریق بازرسی، انتگرال بگیریم. این‌کار، تصادفاً، معادلهٔ (۱۰.۸) را نیز کامل می‌کند. با بسط معادلهٔ (۱۲.۸)، داریم

$$\alpha(x)\frac{dy}{dx}+\frac{d\alpha}{dx}y=\alpha(x)q(x)$$

مقایسه بامعادلهٔ (۱۱.۸) نشان می‌دهدکه باید داشته باشیم

$$\frac{d\alpha(x)}{dx}=\alpha(x)p(x) \tag{۱۳.۸}$$

این معادله‌ای دیفرانسیل برحسب $\alpha(x)$ است که در آن متغیرهای α و x تفکیك پذیرند. متغیرها را تفکیك می‌کنیم، انتگرال می‌گیریم، وعامل انتگرالگیری را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$\alpha(x)=\exp\left[\int^x p(x)dx\right] \tag{۱۴.۸}$$

حال‌که $\alpha(x)$ را به‌دست‌آوردیم، از معادلهٔ (۱۲.۸) انتگرال می‌گیریم. البته، α را ازابتدا به‌همین منظور وارد کردیم. داریم

$$\int^x \frac{d}{dx}[\alpha(x)y(x)]dx = \int^x \alpha(x)q(x)dx$$

اینك ازطریق بازرسی انتگرال می‌گیریم، داریم

$$\alpha(x)y(x) = \int^x \alpha(x)q(x)dx + C$$

به‌جای همهٔ ثابتهای حاصل ازمقدار ثابت حدپایینی انتگرالگیری، ثابت C را قرارمی‌دهیم. با تقسیم بر $\alpha(x)$، خواهیم داشت

$$y(x) = [\alpha(x)]^{-1}\left\{\int^x \alpha(x)q(x)dx + C\right\}$$

سرانجام، پس‌ازنشاندن مقادیر معادل α ازمعادلهٔ (۱۴.۸)، به‌دست می‌آوریم

$$y(x) = \exp\left[-\int^x p(t)dt\right]\left\{\int^x \exp\left[\int^s p(t)dt\right]q(s)ds + C\right\} \quad (۱۵.۸)$$

در اینجا برای جلوگیری از ابهام، متغیرهای (ظاهری) انتگرالگیری را تعویض کرده‌ایم. معادلهٔ (۱۵.۸) جواب عمومی وکامل معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول خطی (۱۰.۸) است. جزء

$$y_1(x) = C\exp\left[-\int^x p(t)dt\right] \quad (۱۶.۸)$$

به‌حالت $q(x) = 0$ مربوط است وجواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل همگن به‌شمار می‌آید. جملهٔ دیگر معادلهٔ (۱۵.۸)، یعنی

$$y_2(x) = \exp\left[-\int^x p(t)dt\right]\int^x \exp\left[\int^s p(t)dt\right]q(s)ds \quad (۱۷.۸)$$

جواب خصوصی متناظر باجملهٔ چشمهٔ خاص $q(x)$ است.

خواننده باید توجه کرده باشدکه معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول خطی همگن $(q=0)$ تفکیك‌پذیر است. درغیراین‌صورت، جزدرحالتهای‌خاصی‌مانند $p=\text{const}$، $q=\text{const}$، یا $q(x) = ap(x)$، معادلهٔ (۱۰.۸) تفکیك‌پذیر نیست.

مثال ۱.۲.۸ مدار RL

قانون کیرشهوف درمورد جریان $I(t)$، دریك مدار مقاومت‌ـ‌القا به معادلهٔ زیر می‌انجامد

$$L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = V(t)$$

که در آن L القاگر و R مقاومت است و هردو ثابت‌اند. $V(t)$ ولتاژ برقرارشدهٔ وابسته به‌زمان است.

عامل انتگرالگیری ما، $\alpha(t)$، بااستفاده ازمعادلهٔ (۱۴.۸) عبارت است از

$$\alpha(t)=\exp\int^t \frac{R}{L}dt$$

$$=e^{Rt/L}$$

آنگاه ازمعادلهٔ (۱۵.۸) خواهیم داشت

$$I(t)=e^{-Rt/L}\left[\int^t e^{Rt/L}\frac{V(t)}{L}\,dt+C\right]$$

که در آن ثابت C به‌کمک یك‌شرط اولیه (شرط مرزی) تعیین می‌شود.

درحالت خاص $V(t)=V_\circ$، یعنی یك‌مقدار ثابت، داریم

$$I(t)=e^{-Rt/L}\left[\frac{V_\circ}{L}\cdot\frac{L}{R}e^{Rt/L}+C\right]$$

$$=\frac{V_\circ}{R}+Ce^{-Rt/L}$$

اگرشرط اولیه به‌صورت $I(\circ)=\circ$ باشد، آنگاه $C=-V_\circ/R$ و

$$I(t)=\frac{V_\circ}{R}[1-e^{-Rt/L}]$$

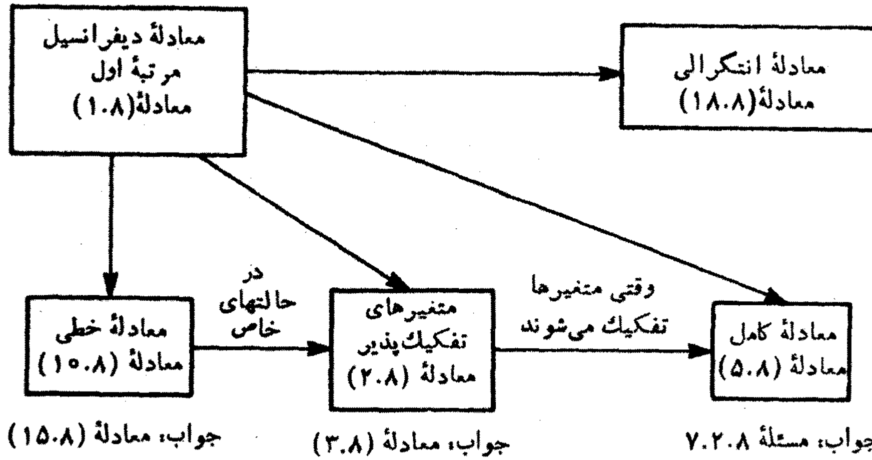
تبدیل به‌معادلهٔ انتگرالی

معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول (۱.۸) را می‌توان از طریق انتگرالگیری مستقیم، به‌یك معادلهٔ انتگرالی تبدیل کرد

$$y(x)-y(x_\circ)=\int_{x_\circ}^{x} f[x,y(x)]dx \tag{۱۸.۸}$$

درمعادلهٔ بالا به‌عنوان یك‌معادلهٔ انتگرالی امکان دارد یك جواب به‌صورت سری نویمان با تقریب‌اولیهٔ $y(x)\approx y(x_\circ)$ وجود داشته باشد (بخش۳.۱۶ را ببینید). این‌روش به‌زبان معادلهٔ دیفرانسیل «روش تقریبهای پیاپی پیکارد» نام دارد.

رابطهٔ میان روشهای گوناگونی که دراین بخش با آنها آشنا شدیم درشکل ۱.۸ نموده شده‌است.



شکل ۱.۸

درفصل ۱۵، درارتباط باتبدیلات لاپلاس ودرفصل ۱۷، درطی معادلهٔ اویلر حساب وردشها، باردیگر بامعادلات دیفرانسیل مرتبهٔاول روبه‌رو خواهیم شد. روشهای عددی‌حل معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول‌را دربخش ۸.۸ بررسی خواهیم کرد.

مسائل

۱.۲.۸ جریان I که از یك‌مدار RC (مقاومت-خازن) می‌گذرد (شکل ۲.۸) بنابر قانون کیرشهوف ازمعادلهٔ زیرپیروی می‌کند

$$R\frac{dI}{dt}+\frac{۱}{C}I=۰$$

(الف) $I(t)$ را بیابید. (ب) جریان I را برای یك‌خازن ۱۰۰۰۰ میکروفارادی که تا ۱۰۰ ولت باردار شده‌است و دریك مقاومت یك مگااهمی تخلیه می‌شود درلحظهٔ $t=۰$ و در $t=۱۰۰\text{s}$ بیابید.

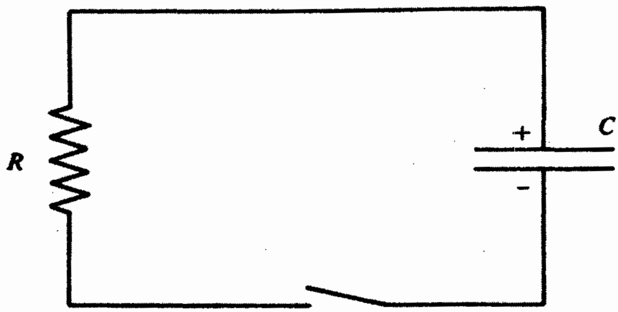
یادآوری. ولتاژ اولیه $I_۰R$ یا Q/C است، که درآن $Q=\int_۰^\infty I(t)dt$.

۲.۲.۸ تبدیل لاپلاس معادلهٔ بسل ($n=۰$) به‌معادلهٔ زیرمی‌انجامد

$$(s^۲+۱)f'(s)+sf(s)=۰$$

این معادله را برحسب $f(s)$ حل کنید.

۳.۲.۸ کاهش جمعیت‌ازطریق برخوردهای فاجعه‌آمیزدوجسمی به‌کمك معادلهٔ زیرتوصیف می‌شود.



شکل ۲.۸ مدار RC.

$$\frac{dN}{dt}=-kN^{2}$$

این معادله، یک‌معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ‌اول غیرخطی است. تحقیق کنید که جواب این‌معادله به‌صورت زیر است

$$N(t)=N_0\left(1+\frac{t}{\tau_0}\right)^{-1}$$

که درآن $\tau_0=(kN_0)^{-1}$. این‌رابطه برنامتناهی‌بودن جمعیت در زمان $t=-\tau_0$ دلالت می‌کند.

پاسخ. $N(t)=N_0\left(1+\frac{t}{\tau_0}\right)^{-1}$.

۴.۲.۸ آهنگ واکنش شیمیایی خاص $A+B\to C$ باغلظت واکنش دهنده‌های A و B متناسب است

$$\frac{dC(t)}{dt}=\alpha[A(0)-C(t)][B(0)-C(t)]$$

(الف) $C(t)$ رابه‌ازای $A(0)\neq B(0)$ بیابید.
(ب) $C(t)$ رابه‌ازای $A(0)=B(0)$ بیابید.
شرط اولیه عبارت است‌از: $C(0)=0$.

۵.۲.۸ قایقی درحالی‌که درامتداد آب حرکت می‌کند درحال کناره گرفتن است. نیروی مقاومی متناسب با v^n بر آن وارد می‌آید. v سرعت لحظه‌ای قایق است. قانون دوم نیوتون درمورد این قایق به‌صورت زیر در می‌آید

$$m\frac{dv}{dt}=-kv^{n}$$

باشرایط $v(t=\circ)=v_\circ$ و $x(t=\circ)=\circ$، ازاین‌معادله انتگرال بگیرید تا v را به‌صورت تابعی اززمان ونیز v را به‌صورت تابعی ازفاصله به‌دست آورید.

۶.۲.۸ درمعادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول $dy/dx=f(x,y)$، تابع $f(x,y)$ تابعی از نسبت y/x است، یعنی

$$\frac{dy}{dx}=g(y/x)$$

نشان دهید که جانشانی $u=y/x$ به‌یك معادلهٔ تفکیك‌پذیر برحسب u و x می‌انجامد.

۷.۲.۸ معادلهٔ دیفرانسیل

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\circ$$

کامل است. جوابی به‌صورت زیر برای آن به‌دست آورید

$$\varphi(x,y)=\int_{x_\circ}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_\circ}^{y}Q(x_\circ,y)dy=\text{const}\cdot$$

۸.۲.۸ معادلهٔ دیفرانسیل

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\circ$$

کامل است. اگر

$$\varphi(x,y)=\int_{x_\circ}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_\circ}^{y}Q(x_\circ,y)dy$$

نشان دهید که

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=P(x,y),\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=Q(x,y)$$

ازاین‌رو، $\varphi(x,y)=\text{const}\cdot$ یکی‌ازجوابهای معادلهٔ دیفرانسیل اصلی است.

۹.۲.۸ به‌شرط آنکه $\alpha(x)$ درمعادلهٔ (۱۳.۸) صدق کند، ثابت کنید مطابق با مفهوم معادلهٔ (۸.۸)، معادلهٔ (۱۱.۸) کامل است.

۱۰.۲.۸ یك معادلهٔ دیفرانسیل معین به‌صورت زیر است

$$f(x)dx+g(x)h(y)dy=\circ$$

که‌در آن‌هیچکدام از توابع $f(x)$، $g(x)$، و $h(y)$ متحد باصفر نیستند. نشان دهید که شرط لازم وکافی برای آنکه این معادله کامل باشد آن‌است‌که: $g(x)=\text{const.}$

۱۱.۲.۸ با مشتقگیری ازعبارت

$$y(x)=\exp\left[-\int^{x} p(t)dt\right]\left\{\int^{x}\exp\left[\int^{s} p(t)dt\right]q(s)ds+C\right\}$$

ونشاندن آن درمعادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y(x)=q(x)$$

نشان دهیدکه $y(x)$ درعبارت بالاجواب این‌معادلهٔ دیفرانسیل است.

۱۲.۲.۸ حرکت جسمی راکه در محیطی مقاوم سقوط می‌کنـد، می‌توان به صورت زیر توصیف‌کرد

$$m\frac{dv}{dt}=mg-bv$$

که درآن نیروی ترمزی باسرعت v متناسب است. سرعت را بیابید. با شرط $v(0)=0$، ثابت انتگرالگیری را پیداکنید.

۱۳.۲.۸ واپاشی هسته‌های پرتوزا مطابق قانون زیرانجام می‌گیرد

$$\frac{dN}{dt}=-\lambda N$$

که درآن N غلظت یك نوکلید معین و λ ثابت واپاشی‌خاص‌آن است. دریك‌رشتهٔ پرتوزا شامل n نوکلید مختلف‌که با N_1 شروع می‌شود، داریم

$$\frac{dN_1}{dt}=-\lambda_1 N_1$$

$$\frac{dN_2}{dt}=\lambda_1 N_1-\lambda_2 N_2, \ldots$$

با شرط $N_1(0)=N_0$ و $N_2(0)=0$، کمیت $N_2(t)$ را پیداکنید.

۱۴.۲.۸ آهنگ تبخیر ازیك قطرهٔ کروی مایع معین (با چگالی ثابت) با مساحت سطح قطره متناسب است. بافرض‌آنکه تبخیر تنهامنشأ اتلاف‌جرم باشد، شعاع قطره را به‌صورت تابعی اززمان پیداکنید.

۱۵۰۲۰۸ درمعادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن

$$\frac{dv}{dt}=-av$$

متغیرها تفکیك‌پذیرند. وقتی متغیرها راجداکنیم این معادله‌کامل است. این‌معادله را باشرط $v(\circ)=v_\circ$ وبا هریك ازروشهای زیرحل کنید

(الف) تفکیك‌متغیرها وانتگرالگیری.

(ب) بررسی معادلهٔ با متغیرهای مجزا، به‌صورت یك‌معادلهٔ کامل.

(ج) بهره‌گیری ازنتیجهٔ مربوط به‌معادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن.

پاسخ. $v(t)=v_\circ e^{-at}$.

۱۶۰۲۰۸ معادلهٔ برنولی

$$\frac{dy}{dx}+f(x)y=g(x)y^n$$

به‌ازای ۱ یا $n\neq\circ$ غیرخطی‌است. نشان دهیدکه جانشانی $u=y^{1-n}$ معادلهٔ برنولی را به‌یك معادلهٔ خطی تبدیل می‌کند.

پاسخ. $\frac{du}{dx}+(1-n)f(x)u=(1-n)g(x)$.

۱۷.۲۰۸ معادلهٔ مرتبهٔ اول‌خطی (۱۰.۸) را بافرض $y(x)=u(x)v(x)$ حل‌کنید، که در آن $v(x)$ جوابی‌ازمعادلهٔ همگن متناظر$[q(x)=\circ]$ است. این‌همان‌روش وردش‌پارامترها منسوب به لاگرانژ است. این روش را برای معادلات مرتبهٔ دوم در مسئلهٔ ۲۵.۶.۸ به‌کار می‌گیریم.

۳.۸ جداسازی (تفکیك) متغیرها ــ معادلات دیفرانسیل معمولی

معادلاتی‌که درفیزیك ریاضی مطرح می‌شوند وفهرستشان دربخش۱.۸ آمد، جملگی‌معادلات دیفرانسیل جزئی‌اند. نخستین روش، برای حل آنها عبارت است‌ازتجزیهٔ معادلهٔ دیفرانسیل جزئی n متغیره به nمعادلهٔ دیفرانسیل‌معمولی. هرگونه جداسازی‌یك‌ثابت جداسازی‌دلخواه وارد معادله‌می‌کند. اگر n متغیرداشته باشیم باید $n-1$ ثابت واردکنیم؛ شرایط حاکم بر وضعیت مسئله این ثابتها را تعیین می‌کنند.

روش جداسازی متغیرها در مورد معادلهٔ موج در مختصات دکارتی، استوانه‌ای، و قطبی‌کروی دربخش۶.۲ (جلداول) مطرح‌شد. معادلهٔ موج دردستگاه مختصات قطبی‌کروی

$$\nabla^2\psi+k^2\psi=\circ \qquad (19.8)$$

به‌این معادلهٔ سمتی انجامید

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}+m^2\Phi(\varphi)=0 \qquad (۲۰.۸)$$

که در آن m^2 — ثابت جداسازی است. برای آنکه نشان دهیم این ثابت چگونه تعیین می‌شود، خاطرنشان می‌سازیم که φ درمختصات قطبی کروی یك‌زاویهٔ سمتی است. درنتیجه، درحوزهٔ یك‌مسئلهٔ کلاسیکی، مسلماً باید $\Phi(\varphi)$، جزء سمتی جواب، تك‌مقدار باشد، یعنی

$$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi) \qquad (۲۱.۸)$$

این‌شرط معادل آن است که جواب سمتی، دوره‌ای برابر 2π یامضرب درستی‌ازآن داشته باشد.[1] بنابراین m باید عدد درستی‌باشد. اینکه این‌عدد درست چه‌عددی باشد به‌جزئیات مسئله بستگی دارد. دربارهٔ این موضوع در فصل ۹ بحث می‌کنیم. هرگاه مختصه‌ای مربوط به‌یك محورانتقال یایك زاویهٔ سمتی‌باشد، معادلهٔ تفکیك‌شده همواره برای φ، زاویهٔ سمتی، به‌صورت

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}=-m^2\Phi(\varphi)$$

و برای z، محور انتقال دریکی‌ازدستگاههای مختصات استوانه‌ای، به‌این صورت‌است

$$\frac{d^2Z(z)}{dz^2}=\pm a^2Z(z) \qquad (۲۲.۸)$$

روشن است که جوابها به‌ازای $-a^2$ عبارت‌اند از $\sin az$ و $\cos az$، و به‌ازای $+a^2$ عبارت‌اند ازتوابع هذلولوی (یانمایی) متناظر $\sinh az$ و $\cosh az$.

معادلهٔ لژاندر

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+l(l+1)\Theta=0$$

$$(۲۳.۸)$$

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+l(l+1)y=0$$

---

۱. این‌شرط دربسیاری ازمسائـل کوانتوم مکانیـکی نیز اعمال می‌شود، ولی درآنجا مستلزم برهان بسیار پیچیده‌تری است. اگر m عدد درست نباشد، روابط گروه چرخشی (بخش ۹.۴، جلـد اول) و روابط عملگر نردبانی (بخش ۷.۱۲ را ببینید) بر قرار نخواهـد بود. مقایسه کنید با:

Merzbacher, E ,"Single Valuedness of Wave Functions," *Am. J. Phys.*, **30**, 237 (1962).

ومعادلهٔ وابستهٔ لژاندر، به‌قرار زیر، نیز فراوان ظاهر می‌شود

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+l(l+1)\Theta-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\Theta=0$$

(۲۴.۸)

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+l(l+1)y-\frac{m^2}{1-x^2}y=0^*$$

همان گونه که در بخش ۶.۲ (جلداول) خاطر نشان شد، این معادلات هنگامی پیدا می‌شوند که ∇^2 درمختصات قطبی کروی به‌کارمی‌رود. مختصات کره‌وار کشیده و پخت نیز به‌معادلات لژاندر و وابستهٔ لژاندر می‌انجامند.

سومین معادله‌ای که بارها به‌آن برمی‌خوریم معادلهٔ دیفرانسیل بسل است

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0 \tag{۲۵.۸}$$

مختصات قطبی کروی و استوانه‌ای دربخشهای ۴.۲ و ۵.۲ (جلد اول) انواعی از معادلهٔ بسل را به‌دست‌دادند. جداسازی **متغیرهای معادلهٔ** لاپلاس درمختصات‌سهموی نیز به‌معادلهٔ بسل می‌انجامد. باید بگوییم معادلهٔ بسل از آن جهت که می‌تواند صورتهای گوناگونی به‌خود بگیرد معادله‌ای مشهور است. جدول مشروحی از صورتهای مختلف تابع بسل در کتابی تألیف جانك و امده ارائه شده است.[1]

معادلات دیفرانسیل معمولی دیگری که گهگاه به آنها برمی‌خوریم عبارت‌اند از معادلات لاگر و وابستهٔ لاگر که درمسئلهٔ فوق‌العاده مهم اتم هیدروژن در مکانیك کوانتومی ظاهر می‌شوند

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\frac{dy}{dx}+\alpha y=0 \tag{۲۶.۸}$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(1+k-x)\frac{dy}{dx}+\alpha y=0 \tag{۲۷.۸}$$

درحوزهٔ نظریهٔ کوانتوم مکانیکی نوسانگرخطی، معادلهٔ هرمیت راداریم

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2\alpha y=0 \tag{۲۸.۸}$$

---

* این صورتها ازلحاظ جبری معادل‌اند و درآنها: $x=\cos\theta$.

1. Fourth revised edition. New York: Dover (1945), p.146.

نیز:

"*Tables of Higher Functions*", 6th ed. E. Jahnke, F. Emde, and F. Lösch, New York: McGraw-Hill (1960).

سرانجام، گهگاه معادلهٔ دیفرانسیل چبیشف را پیدا می‌کنیم

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+n^2y=0 \qquad (۲۹.۸)$$

برای مراجعهٔ راحت‌تر، صورت جوابهای معادلهٔ لاپلاس، معادلهٔ هلمهولتز، و معادلهٔ پخش درمختصات قطبی‌کروی درجدول ۱.۸ گردآوری شده‌است. جوابهای معادلهٔ لاپلاس درمختصات استوانه‌ای درجدول ۲.۸ درج شده‌اند.

درمورد معادلهٔ هلمهولتز و معادلهٔ پخش ثابت $\pm k^2$ را به ثابت جداسازی $\pm\alpha^2$ می‌افزاییم وپارامترجدید γ^2 یا $-\gamma^2$ را تعریف می‌کنیم. درصورتی که $+\gamma^2(\gamma^2>0)$ را انتخاب کنیم $N_m(\gamma\rho)$ و $J_m(\gamma\rho)$ را بدست می‌آوریم با انتخاب $-\gamma^2(\gamma^2>0)$ مثل قبل به $I_m(\gamma\rho)$ و $K_m(\gamma\rho)$ دست می‌یابیم.

این معادلات دیفرانسیل معمولی ودوشکل تعمیم یافتهٔ آنها را دربخش بعد به‌صورتی سیستماتیک بررسی می‌کنیم. درفصل ۹ به‌بحث دربارهٔ خواص کلی ناشی‌از شکل معادلات دیفرانسیل می‌پردازیم. درفصلهای ۱۰ تا ۱۳ جوابهای تک‌تک این‌معادلات را پیدا وبررسی می‌کنیم.

جدول ۱.۸ جوابها درمختصات قطبی‌کروی*

$$\psi=\sum_{l,m} a_{lm}\,\psi_{lm}$$

.۱	$\nabla^2\psi=0$	$\psi_{lm}=\begin{Bmatrix} r^l \\ r^{-l-1}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} P_l^m(\cos\theta) \\ Q_l^m(\cos\theta)\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}^{\dagger}$
.۲	$\nabla^2\psi+k^2\psi=0$	$\psi_{lm}=\begin{Bmatrix} j_l(kr) \\ n_l(kr)\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} P_l^m(\cos\theta) \\ Q_l^m(\cos\theta)\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}^{\dagger}$
.۳	$\nabla^2\psi-k^2\psi=0$	$\psi_{lm}=\begin{Bmatrix} i_l(kr) \\ k_l(kr)\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} P_l^m(\cos\theta) \\ Q_l^m(\cos\theta)\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}^{\dagger}$

* مراجع برخی از این توابع عبارت‌اند از $P_l^m(\cos\theta)$ به ازای $m=0$، بخش ۱.۱۲؛ به ازای $m\neq 0$،بخش ۵.۱۲؛ $Q_l^m(\cos\theta)$، بخش ۱۰.۱۲؛ $j_l(kr)$،$n_l(kr)$، $i_l(kr)$، و $k_l(kr)$، بخش ۷.۱۱.

† به‌جای $\cos m\varphi$ و $\sin m\varphi$ می‌توان قرارداد: $e^{\pm im\varphi}$.

جدول ۲۰۸ جوابها درمختصات استوانه‌ای*

$$\psi=\sum_{m,\alpha} a_{m\alpha}\psi_{m\alpha},\ \nabla^۲\psi=۰$$

(الف)
$$\psi_{m\alpha}=\begin{Bmatrix}J_m(\alpha\rho)\\ N_m(\alpha\rho)\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}e^{-\alpha z}\\ e^{\alpha z}\end{Bmatrix}$$

(ب)
$$\psi_{m\alpha}=\begin{Bmatrix}I_m(\alpha\rho)\\ K_m(\alpha\rho)\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos \alpha z\\ \sin \alpha z\end{Bmatrix}$$

(ج) به‌ازای $\alpha=۰$ (مستقل از z)
$$\psi_m=\begin{Bmatrix}\rho^m\\ \rho^{-m}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}$$

* مراجع توابع شعاعی عبارت‌انـد از: $J_m(\alpha\rho)$، بخش ۱.۱۱؛ $N_m(\alpha\rho)$، بخش ۳.۱۱؛ $I_m(\alpha\rho)$ و $K_m(\alpha\rho)$، بخش ۵.۱۱.

دست‌اندرکاران فیزیك احتمالا به‌معادلات دیفرانسیل مرتبهٔدوم معمولی دیـگری نیز برمی‌خورند، که برخی‌از آنها را می‌توان به‌نمونه‌هایی‌که دراینجا بررسی می‌کنیم، تبدیـل کرد. برخی ازاین‌معادلات دیفرانسیل را می‌توان به‌کمك روشهایی که دربخشهای ۵.۸ و ۶.۸ خواهیم‌آموخت، حل‌کرد. درمورد بقیه، برای یافتن جوابهای عـددی، باید از ماشین محاسبه یاری جست.

مسائل

۱۰۳۰۸ عملگر تکانهٔ زاویه‌ای کوانتوم مکانیکی با رابطهٔ $\mathbf{L}=-i(\mathbf{r}\times\nabla)$ بیان می‌شود.[۱] نشان دهید که

$$\mathbf{L}.\mathbf{L}\psi=l(l+۱)\psi$$

به‌معادلهٔ وابستهٔ لژاندر می‌انجامد.

راهنمایی. مسائل ۱.۹.۹ و ۱۶.۵.۲ (جلداول) می‌توانند به‌حل این‌مسئله کمك کنند.

۲۰۳۰۸ معادلهٔ موج شرودینگر یك‌بعدی برای ذره‌ای درمیدان پتانسیل $V=(۱/۲)kx^۲$ به

۱. دراین رابطه، مقصود از نماد ∇ عملگر برداری گرادیان است.

صورت زیر است

$$-\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{d^{2}\psi}{dx^{2}}+\frac{1}{2}kx^{2}\psi=E\psi(x)$$

(الف) با استفاده از $\xi=ax$ و ثابت λ، داریم

$$a=\left(\frac{mk}{\hbar^{2}}\right)^{1/4}$$

$$\lambda=\frac{2E}{\hbar}\left(\frac{m}{k}\right)^{1/2}$$

نشان دهید که

$$\frac{d^{2}\psi(\xi)}{d\xi^{2}}+(\lambda-\xi^{2})\psi(\xi)=0$$

(ب) از طریق جانشانی

$$\psi(\xi)=y(\xi)e^{-\xi^{2}/2}$$

نشان دهید که $y(\xi)$ در معادلهٔ دیفرانسیل هرمیت صدق می‌کند.

۳.۳.۸ تحقیق کنید که توابع زیر جوابهای معادلهٔ لاپلاس‌اند.

(الف) $\psi_{1}=1/r$

(ب) $\psi_{2}=\frac{1}{2r}\ln\frac{r+z}{r-z}$

۴.۳.۸ اگر Ψ جواب معادلهٔ لاپلاس، $\nabla^{2}\Psi=0$، باشد، نشان دهید که $\partial\Psi/\partial z$ نیز یك جواب است.

یادآوری. مشتقهای $1/r$ نسبت به z چندجمله‌ایهای لژاندر، $P_n(\cos\theta)$، را تولید می‌کنند (مسئلهٔ ۷.۱.۱۲ را ببینید). مشتقهای $(1/2r)\ln[(r+z)/(r-z)]$ نسبت به z، توابع لژاندر $Q_n(\cos\theta)$ را تولید می‌کنند.

۴.۸ نقاط تکین

دراین بخش بامفهوم نقطهٔ تکین یا تکینگی (به‌طوری که دریك معادلهٔ دیفرانسیل به‌کارمی‌رود) آشنا می‌شویم. دلیل توجه به‌این‌مفهوم از آنجا سرچشمه می‌گیرد که به‌کمك آن می‌توان: (۱) معادلات دیفرانسیل را رده‌بندی کرد، و (۲) امکان وجود جوابی به‌صورت سری را بررسی

کرد. این امکان مبحث قضیهٔ فوش در بخشهای ۵.۸ و ۶.۸ را تشکیل می‌دهد. نخست به تعریف تکینگی می‌پردازیم.

ازهمهٔ معادلات دیفرانسیل معمولی که فهرست آنها را در بخش ۳.۸ آوردیم می‌توان d^2y/dx^2 را به‌دست آورد. بااستفاده ازنماد $d^2y/dx^2=y''$ داریم[1]

$$y''=f(x,y,y') \qquad (۳۰.۸)$$

حال اگر درمعادلهٔ (۳۰.۸)، y و y' در نقطهٔ $x=x_0$، بتوانند همهٔ مقادیر متناهی را بگیرند و y'' متناهی بماند، نقطهٔ $x=x_0$ یك نقطهٔ معمولی است. ازسوی دیگر، اگر y'' به‌ازای هرگزینهٔ متناهی y و y'، نامتناهی‌شود نقطهٔ $x=x_0$ نقطه‌ای است تکین.

روش دیگر بیان این تعریف نقطهٔ تکین آن است که معادلهٔ دیفرانسیل همگن را به صورت زیر بنویسیم

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \qquad (۳۱.۸)$$

حال اگر $P(x)$ و $Q(x)$ در $x=x_0$ متناهی باقی بمانند، نقطهٔ $x=x_0$ یك نقطهٔ معمولی است. ولی اگر $P(x)$ یا $Q(x)$ (یا هردو) به‌ازای $x\to x_0$ واگرا شود، نقطهٔ x_0 یك نقطهٔ تکین است.

بااستفاده ازمعادلهٔ (۳۱.۸) می‌توانیم دونوع نقطهٔ تکین تمیز دهیم:

۱. اگر به‌ازای $x\to x_0$، $P(x)$ یا $Q(x)$ واگرا شود، ولی $(x-x_0)P(x)$ و $(x-x_0)^2Q(x)$ در $x\to x_0$ متناهی بمانند، آنگاه $x=x_0$ را یك نقطهٔ تکین غیراساسی یا منظم می‌نامند.

۲. اگر $P(x)$ سریعتر از $1/(x-x_0)$ واگرا شود، به‌طوری‌که با $x\to x_0$، کمیت $(x-x_0)P(x)$ نامتناهی شود، یا $Q(x)$ سریعتر از $1/(x-x_0)^2$ واگرا شود، به‌طوری‌که $(x-x_0)^2Q(x)$ با $x\to x_0$ نامتناهی‌شود، آنگاه نقطهٔ $x=x_0$ را به‌یك تکینگی اساسی یا نامنظم نسبت می‌دهیم.

این تعریفها به‌ازای همهٔ مقادیر متناهی x_0 صادق‌اند. تحلیل نقطهٔ $x\to\infty$ به‌بررسی توابع متغیرمختلط شبیه‌است (بخش ۶.۶، جلد اول). درمعادلهٔ دیفرانسیل به‌جای x کمیت $1/z$ را می‌نشانیم، آنگاه z را به‌سمت صفرمیل می‌دهیم. باتغییر متغیر درمشتقات، داریم

$$\frac{dy(x)}{dx}=\frac{dy(z^{-1})}{dz}\,\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{x^2}\,\frac{dy(z^{-1})}{dz}=-z^2\,\frac{dy(z^{-1})}{dz} \qquad (۳۲.۸)$$

---

۱. این نمادگذاری پریم، $y'=dy/dx$، را لاگرانژ در اواخر قرن هیجدهم به عنوان مخففی برای نماد صریحتر ولی دست و پاگیرتر لایب‌نیتس، dy/dx، به‌مباحث ریاضی وارد کرد.

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}=\frac{d}{dz}\left[\frac{dy(x)}{dx}\right]\frac{dz}{dx}=(-z^2)\left[-2z\frac{dy(z^{-1})}{dz}-z^2\frac{d^2y(z^{-1})}{dz^2}\right]$$
(۳۳.۸)

$$=2z^3\frac{dy(z^{-1})}{dz}+z^4\frac{d^2y(z^{-1})}{dz^2}$$

با استفاده ازاین نتایج، معادلۀ (۳۱.۸) را به‌معادلۀ زیر تبدیل می‌کنیم

$$z^4\frac{d^2y}{dz^2}+[2z^3-z^2P(z^{-1})]\frac{dy}{dz}+Q(z^{-1})y=0 \qquad (۳۴.۸)$$

پس رفتار y'' در $x=\infty\,(z=0)$ به‌رفتارضرایب جدید

$$\frac{2z-P(z^{-1})}{z^2} \quad \text{و} \quad \frac{Q(z^{-1})}{z^4}$$

درحالت $z\to 0$ بستگی دارد. اگر این دوعبارت متناهی بمانند، نقطهٔ $x=\infty$ یك نقطهٔ معمولی است. اگراین‌عبارتها، به‌ترتیب، سریعتر از $1/z$ و $1/z^2$ واگرا نشوند، نقطهٔ $x=\infty$ یك نقطهٔ تکین منظم، و درغیراین صورت یك نقطهٔ تکین نامنظم (تکینگی اساسی) است.

مثال ۱.۴.۸

معادلۀ بسل عبارت است‌از

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0 \qquad (۳۵.۸)$$

درمقایسه بامعادلۀ (۳۱.۸)، داریم

$$P(x)=\frac{1}{x}\ ,\quad Q(x)=1-\frac{n^2}{x^2}$$

که نشان‌می‌دهد نقطهٔ $x=0$ یك‌تکینگی منظم‌است. بادقت نظر می‌بینیم که در گسترهٔ متناهی هیچ نقطهٔ تکین‌دیگری وجودندارد. به‌ازای $x=\infty$، بااستفاده‌ازمعادلۀ(۳۴.۸)، به‌ضرایب زیر می‌رسیم

$$\frac{2z-z}{z^2} \quad \text{و} \quad \frac{1-n^2z^2}{z^4}$$

ازآنجاکه با $x\to\infty\,(z\to 0)$، عبارت سمت‌راست بالا به‌صورت z^{-4} واگرا می‌شود، نقطهٔ $x=\infty$ یك‌تکینگی اساسی یا نامنظم‌است.

درجدول ۳.۸ نقاط تکین معادلات دیفرانسیل معمولی‌بخش ۳.۸، به‌اضافهٔ دو معادلۀ

جدول ۳.۸

معادله	تکینگی منظم $x=$	تکینگی نامنظم $x=$
۱. فوق هندسی $x(x-۱)y''+[(۱+a+b)x-c]y'+aby=۰$	۰، ۱، ∞	—
۲. لژاندر* $(۱-x^۲)y''-۲xy'+l(l+۱)y=۰$	۱-، ۱، ∞	—
۳. چبیشف $(۱-x^۲)y''-xy'+n^۲y=۰$	۱-، ۱، ∞	—
۴. فوق هندسی همشار $xy''+(c-x)y'-ay=۰$	۰	∞
۵. بسل $x^۲y''+xy'+(x^۲-n^۲)y=۰$	۰	∞
۶. لاگر* $xy''+(۱-x)y'+ay=۰$	۰	∞
۷. نوسانگر هماهنگ ساده $y''+\omega^۲y=۰$	—	∞
۸. هرمیت $y''-۲xy'+۲\alpha y=۰$	—	∞

* معادلات وابسته نیز همین نقاط تکین را دارند.

دیگر، معادلات فوق‌هندسی وفوق‌هندسی همشار، درج شده‌است.

سه‌معادلهٔ نخست در جدول فوق، یعنی معادلات فوق‌هندسی و لژاندر و چبیشف، جملگی سه نقطهٔ تکین منظم دارند. معادلهٔ فوق‌هندسی اتکینگیهای منظم در ۰و۱و∞ را استاندارد یا صورت بندادی می‌گیریم. آنگاه می‌توان جواب دو معادلهٔ دیگر را برحسب جوابهای این معادله، یعنی توابع فوق‌هندسی، مشخص کرد. این کار را درفصل ۱۳ انجام می‌دهیم.

به همین ترتیب، معادلهٔ فوق هندسی همشار را شکل بندادی یك معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم خطی با یك نقطهٔ تکین منظم ویك نقطهٔ تکین نامنظم می‌گیریم.

مسائل

۱.۴.۸ نشان‌دهیدکه معادلهٔ لژاندر در $x=-۱$، $x=۱$، و $x=\infty$ تکینگیهای منظمی دارد.

۲.۴.۸ نشان دهیدکه معادلهٔ لاگر نیز مانند معادلهٔ بسل در $x=\circ$ یك تکینگی منظم و در $x=\infty$ یك تکینگی نامنظم دارد.

۳.۴.۸ نشان دهیدکه جانشانی

$$x \to \frac{۱-x}{۲}\ ,\ a=-l\ \ ,\ b=l+۱\ \ ,\ c=۱$$

معادلهٔ فوق‌هندسی را به‌معادلهٔ لژاندر تبدیل می‌کند.

۵.۸ جوابهای به‌صورت سری ـ روش فروبنیوس

دراین‌بخش روشی رابرای یافتن یکی‌از جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل همگن مرتبهٔ دوم خطی مطرح می‌کنیم. این روش،که بسط‌سری است، به‌شرط‌آنکه نقطهٔ بسط ازیك‌نقطهٔ تکین‌منظم بدتر نباشد، همواره به‌کار می‌آیـد. این شرط بسیار ساده تقریباً همواره در فیزیك برقرار است.

یك معادلهٔ دیفرانسیل همگن مرتبهٔ دوم خطی را می‌توان به‌شکل زیر بیان‌کرد

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=\circ \tag{۳۶.۸}$$

این معادله همگن است زیرا، هریك از جمله‌های آن شامل $y(x)$ یا یکی از مشتقهای آن است؛ خطی است، زیرا y، dy/dx، یا $d^۲y/dx^۲$ تنها باتوان یك‌درآن ظاهرمی‌شوند و هیچ جمله‌ای نیز که شامل حاصلضرب آنها باشد وجود ندارد. در این بخش (دست‌کم) یکی ازجوابهای معادلهٔ(۳۶.۸) را پیدا می‌کنیم. دربخش ۶.۸ دومین‌جواب مستقل را پیدا وثابت می‌کنیم که هیچ‌جواب مستقل‌سومی وجودندارد. بنابراین، عمومیترین جواب‌معادلهٔ (۳۶.۸) را می‌توان به‌صورت زیرنوشت

$$y(x)=c_۱y_۱(x)+c_۲y_۲(x) \tag{۳۷.۸}$$

ممکن است مسئلهٔ فیزیکی‌ما به‌یك معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم ناهمگن منجرشود

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=F(x) \tag{۳۸.۸}$$

تابع سمت‌راست، $F(x)$، یك‌چشمه (مانند بار الکتروستاتیکی)، یا یك نیروی محرك (مثل

مورد نوسانگر واداشته) را به‌نمایش می‌گذارد. در مسئلهٔ ۲۵.۶.۸ به اختصار به جواب خصوصی این‌معادلهٔ ناهمگن می‌پردازیم. در بخشهای ۷.۸، ۵.۱۶، و ۶.۱۶ با استفاده از تکنیکهای تابع گرین، ودر بخش ۱۱.۱۵ با استفاده از تکنیك تبدیل لاپلاس به‌بررسی مشروحتر این‌جواب خصوصی می‌پردازیم. این جواب را y_p می‌نامیم، و می‌توانیم به‌آن،هریك از جوابهای معادلهٔ همگن متناظر [معادلهٔ (۳۶.۸)] را بیفزاییم. بنابراین، عمومیترین جواب معادلهٔ (۳۸.۸) عبارت است از

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+y_p(x) \qquad (۳۹.۸)$$

ثابتهای c_1 و c_2 را به‌کمك شرایط مرزی تعیین می‌کنیم.

فعلا، می‌گیریم: $F(x)=0$، یعنی‌فرض می‌کنیم معادلهٔ دیفرانسیل‌ما همگن‌است. سعی خواهیم کرد که با نشاندن یك سری توانی به‌جای ضرایب مجهول، یکی از جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل‌همگن‌مرتبهٔ‌دوم خطی، معادلهٔ(۳۶.۸)، را به‌دست‌آوریم. دراین سری‌کوچکترین توان با ضریب غیرصفر نیز پارامتری است که باید تعیین شود. برای‌آنکه این روش را نشان دهیم، آن را در دومعادلهٔ دیفرانسیل مهم به‌کارمی‌گیریم. نخست، معادلهٔ نوسانگرخطی

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0 \qquad (۴۰.۸)$$

که می‌دانیم جوابهای‌آن عبارت‌اند از: $\sin\omega x$ و $\cos\omega x$.

سری زیررا امتحان می‌کنیم

$$\begin{aligned} y(x)&=x^k(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots) \\ &=\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^{k+\lambda}, \quad a_0\neq 0 \end{aligned} \qquad (۴۱.۸)$$

که درآن توان k وهمهٔ ضرایب a_λ مجهول‌اند. دقت کنیدکه لازم نیست k عددی درست باشد. با دوبار مشتقگیری خواهیم داشت

$$\frac{dy}{dx}=\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda(k+\lambda)x^{k+\lambda-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda(k+\lambda)(k+\lambda-1)x^{k+\lambda-2}$$

با نشاندن درمعادلهٔ (۴۰.۸)، داریم

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda(k+\lambda)(k+\lambda-1)x^{k+\lambda-2}+\omega^2\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^{k+\lambda}=0 \qquad (۴۲.۸)$$

باتوجه به‌یکتایی سری توانی (فصل ۵)، ضریب تك تك توانهای x درسمت چپ معادلهٔ (۴۲.۸) باید صفر شود.

کوچکترین توانی از x که درمعادلهٔ (۴۲.۸) ظاهرمی‌شود، عبارت است از x^{k-2} که به‌ازای $\lambda=0$ در نخستین مجموعیابی به‌دست می‌آید. شرط حذف شدن این ضریب[1]، معادلهٔ زیررا به‌دست می‌دهد

$$a_0 k(k-1)=0$$

a_0 ضریب جملهٔ غیرصفر سری [معادلهٔ (۴۱.۸)] به‌ازای کمترین مقدار λ است، بنابراین، مطابق تعریف، $a_0 \neq 0$. بنابراین، داریم

$$k(k-1)=1 \qquad (۴۳.۸)$$

این معادله را که از ضریب جملهٔ به‌ازای کمترین مقدار λ به دست می‌آید، معادلهٔ اندیسی می‌نامیم. معادلهٔ اندیسی و ریشه‌هایش دربررسی ما نقشی اساسی بازی می‌کنند. روشن است که دراین مثال باید k را ۰ یا ۱ بگیریم.

قبل‌ازآنکه این دوامکان مختلف را درنظربگیریم، به‌معادلهٔ (۴۲.۸) بازمی‌گردیم، و بقیهٔ ضرایب خالص، مثلا ضریب x^{k+j} $(j \geqslant 0)$، را نیز برابر صفر قرار می‌دهیم. λ را در مجموعیابی اول برابر $j+2$ ودرمجموعیابی دوم برابر j اختیارمی‌کنیم. (این‌مجموعیابیها از یکدیگر مستقل‌اند و λ شاخصی ظاهری است.) درنتیجه

$$a_{j+2}(k+j+2)(k+j+1)+\omega^2 a_j=0$$

یا

$$a_{j+2}=-a_j \frac{\omega^2}{(k+j+2)(k+j+1)} \qquad (۴۴.۸)$$

این عبارت یك رابطهٔ بازگشتی دوجمله‌ای است.[2] با داشتن a_j، می‌توانیم a_{j+2} و سپس a_{j+4}، a_{j+6}، والی‌آخر رامحاسبه‌کنیم. توجه‌کنیدکه اگراز a_0 شروع‌کنیم، معادلهٔ(۴۴.۸) تمام ضرایب زوج a_2، a_4، و a_6 الی‌آخر را به‌ما می‌دهد واز a_1 و a_3 و a_5 و مانندآنها چشمپوشی می‌کند. از آنجا که a_1 کمیتی اختیاری است، آن‌را برابر صفر می‌گیریم (با مسائل ۳.۵.۸ و ۴.۵.۸ مقایسه‌کنید)، آنگاه از (۴۴.۸) داریم

$$a_3=a_5=a_7=\cdots=0$$

---

۱. یکتایی سری توانی، بخش ۷.۵ (جلد اول).

۲. رابطهٔ بازگشتی ممکن‌است حاوی سه‌جمله باشد، یعنی، a_{j+2} وابسته به a_j و a_{j-2}. معادلهٔ (۱۲.۱۳) درمورد توابع هرمیت مثالی‌است برای تعیین نوع این رفتار.

وتمام ضرایب باشمارهٔ فرد صفر می‌شوند. این جمله‌هایی که ازآنها چشم پوشیده‌ایم مشکلی ایجاد نمی‌کنند؛ هدف ما آن است که یکی ازجوابها را به‌دست آوریم. هنگامی که ریشهٔ دوم معادلهٔ اندیسی را به‌کار می‌بریم توانهایی که ازآنها چشم پوشیده‌ایم، عملا دوباره پدیدار می‌شوند.

به‌معادلهٔ اندیسی، معادلهٔ (۴۳.۸)، بازمی‌گردیم، ابتدا جواب $k=0$ را امتحان‌می‌کنیم. رابطهٔ بازگشتی [معادلهٔ (۴۴.۸)] به‌صورت زیر درمی‌آید

$$a_{j+2}=-a_j\frac{\omega^2}{(j+2)(j+1)} \tag{۴۵.۸}$$

که منجر می‌شود به

$$a_2=-a_0\frac{\omega^2}{1\times 2}=-\frac{\omega^2}{2!}a_0$$

$$a_4=-a_2\frac{\omega^2}{3\times 4}=+\frac{\omega^4}{4!}a_0$$

$$a_6=-a_4\frac{\omega^2}{5\times 6}=-\frac{\omega^2}{6!}a_0,\ \ldots$$

با دقت نظر (واستقرای ریاضی)، پی‌می‌بریم که

$$a_{2n}=(-1)^n\frac{\omega^{2n}}{(2n)!}a_0 \tag{۴۶.۸}$$

وجواب ما بدین قرار است

$$y(x)_{k=0}=a_0\left[1-\frac{(\omega x)^2}{2!}+\frac{(\omega x)^4}{4!}-\frac{(\omega x)^6}{6!}+\cdots\right] \tag{۴۷.۸}$$

$$=a_0\cos\omega x$$

اگر ریشهٔ $k=1$ معادلهٔ اندیسی [معادلهٔ(۴۴.۸)] را برگزینیم، رابطهٔ بازگشتی‌چنین خواهد شد

$$a_{j+2}=-a_j\frac{\omega^2}{(j+3)(j+2)} \tag{۴۸.۸}$$

j را به‌ترتیب برابرصفر و ۲ و ۴ می‌گیریم، وخواهیم داشت

$$a_{۲}=-a_{\circ}\frac{\omega^{۲}}{۲\times ۳}=-\frac{\omega^{۲}}{۳!}a_{\circ}$$

$$a_{۴}=-a_{۲}\frac{\omega^{۲}}{۴\times ۵}=+\frac{\omega^{۴}}{۵!}a_{\circ}$$

$$a_{۶}=-a_{۴}\frac{\omega^{۲}}{۶\times ۷}=-\frac{\omega^{۶}}{۷!}a_{\circ}\,,\ \cdots$$

در اینجا نیز، بادقت‌نظر واستقرای ریاضی، به‌این نتیجه می‌رسیم

$$a_{۲n}=(-۱)^{n}\frac{\omega^{۲n}}{(۲n+۱)!}a_{\circ} \qquad (۴۹.۸)$$

با این انتخاب، $k=۱$، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} y(x)_{k=۱} &= a_{\circ}x\left[۱-\frac{(\omega x)^{۲}}{۳!}+\frac{(\omega x)^{۴}}{۵!}-\frac{(\omega x)^{۶}}{۷!}+\cdots\right] \\ &= \frac{a_{\circ}}{\omega}\left[(\omega x)-\frac{(\omega x)^{۳}}{۳!}+\frac{(\omega x)^{۵}}{۵!}-\frac{(\omega x)^{۷}}{۷!}+\cdots\right] \qquad (۵۰.۸) \\ &= \frac{a_{\circ}}{\omega}\sin\omega x \end{aligned}$$

برای جمعبندی این رهیافت، می‌توانیم معادلهٔ (۴۲.۸) را به‌صورت طرحوارهٔ نمایش‌یافته در شکل ۳.۸ بنویسیم. با توجه به‌یکتایی سری توانی (بخش ۷.۵، جلد اول)، ضریب کل هریك‌ازتوانهای x بایدبه‌تنهایی صفرشود. شرط صفرشدن اولین ضریب(۱) به معادلهٔاندیسی(۴۳.۸) می‌انجامد، دومین‌ضریب را بافرض $a_{۱}=\circ$، صفرمی‌کنیم. صفرشدن ضریب x^{k} (وتوانهای بالاترکه یکی‌یکی درنظرگرفته می‌شوند) به‌رابطهٔ بازگشتی (۴۴.۸) می‌انجامد.

$$\underbrace{\overset{(۱)}{\boxed{a_{\circ}k(k-۱)}}}_{=\circ}x^{k-۲}+\underbrace{\overset{(۲)}{\boxed{a_{۱}(k+۱)k}}}_{=\circ}x^{k-۱}+\underbrace{\overset{(۳)}{\boxed{\begin{matrix}a_{۲}(k+۲)(k+۱)\,x^{k} \\ +\,a_{\circ}\omega^{۲}\,x^{k}\end{matrix}}}}_{=\circ}+\underbrace{\overset{(۴)}{\boxed{\begin{matrix}a_{۳}(k+۳)(k+۲)\,x^{k+۱} \\ +\,a_{۱}\omega^{۲}\,x^{k+۱}\end{matrix}}}}_{=\circ}+\cdots=\circ$$

شکل ۳.۸

این‌جا نشاندن سری که به‌روش فروبنیوس معروف‌است، دوجواب سری برای‌معادلهٔ نوسانگر خطی به‌دست داده است. ولی دو نکته در مورد چنین جوابهای به‌صورت سری وجود دارد که باید قویاً بر آنها تأکید ورزیم:

۱. جواب سری را همواره، برای‌نگه‌داشتن جانب‌احتیاط درمقابل خطاهای جبری‌و منطقی، باید در معادلهٔ دیفرانسیل قرارداد و بررسی کرد که آیا درست است یا خیر. اگر درست بود، آنگاه آن را یك‌جواب می‌دانیم.

۲. قابلیت قبول‌جواب‌سری به‌همگرایی‌آن(شامل همگرایی‌مجانبی) بستگی‌دارد. در روش‌فروبنیوس کاملا میسراست‌که یك‌جواب سری به‌دست می‌آوریم که وقتی‌آن را درمعادلهٔ دیفرانسیل اصلی قرارمی‌دهیم، کاملا در آن صدق کند، ولی در گسترهٔ موردنظر همگرا نباشد. این وضعیت درمعادلهٔ دیفرانسیل لژاندر به‌چشم‌می‌خورد.

بسط حول $x_\circ$

معادلهٔ (۴۱.۸) بسط حول مبدأ $x_\circ = \circ$ است. به خوبی می‌توان به جای معادلهٔ (۴۱.۸)، معادلهٔ زیررا به‌کار برد

$$y(x) = \sum_{\lambda=\circ}^{\infty} a_\lambda (x - x_\circ)^{k+\lambda}, \quad a_\circ \neq \circ \neq \circ \qquad (۵۱.۸)$$

درواقع گزینهٔ $x_\circ = 1$ برای معادله‌های لژاندر، چیبشف، وفوق هندسی مزیتهایی هم‌دارد. نقطهٔ $x_\circ$ نباید یك‌تکینگی اساسی‌باشد، وگرنه روش فروبنیوس احتمالا کارسازنخواهدبود. سری حاصل (که در آن $x_\circ$ یك نقطهٔ معمولی یایك نقطهٔ تکین منظم است) هرجاکه همگرا باشد برقرار است. هرگاه $|x - x_\circ| = |z_s - x_\circ|$، که درآن z_s نزدیکترین تکینگی به $x_\circ$ درصفحهٔ مختلط است، می‌توان انتظار نوعی واگرایی را داشت.

تقارن جوابها

خوانندهٔهوشیار بداین‌نکته‌توجه خواهدکردکه یك‌جواب باتقارن‌زوج $y_1(x) = y_1(-x)$، ویك جواب باتقارن فرد $y_2(x) = -y_2(-x)$ به‌دست آورده‌ایم. این‌موضوع اتفاقی نیست بلکه پیامد مستقیم صورت معادلهٔ دیفرانسیل است. معادلهٔ دیفرانسیل عام را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathcal{L}(x)\, y(x) = \circ \qquad (۵۲.۸)$$

که درآن $\mathcal{L}(x)$ عملگر دیفرانسیلی‌است. می‌بینیم که $\mathcal{L}(x)$ درمعادلهٔ نوسانگرخطی(۴۰.۸) زوج است؛ یعنی

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(-x) \qquad (۵۳.۸)$$

این‌خاصیت را غالبا پاریتهٔ زوج می‌نامند.

هرگاه عملگر دیفرانسیلی دارای تقارن یا پاریتهٔ معینی، خواه زوج یا فرد، باشد، می‌توانیم $x+$ و $x-$ را باهم تعویض کنیم ومعادلهٔ (۵۲۰۸) به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\pm\mathcal{L}(x)y(-x)=0 \qquad (۵۴۰۸)$$

علامت $+$ برای حالت زوج $\mathcal{L}(x)$، و علامت $-$ برای وقتی که $\mathcal{L}(x)$ فرد باشد. روشن است که اگر $y(x)$ جواب معادلهٔ دیفرانسیل باشد، $y(-x)$ نیزجواب آن است. آنگاه هرجواب را می‌توان به‌دوبخش زوج وفرد تجزیه کرد

$$y(x)=\frac{1}{2}[y(x)+y(-x)]+\frac{1}{2}[y(x)-y(-x)] \qquad (۵۵۰۸)$$

کروشهٔ اول سمت‌راست یکی‌از جوابهای زوج و کروشهٔ دوم یکی‌از جوابهای فرد معادله است.

اگر به‌بخش ۴۰۸ بازگردیم می‌توانیم ببینیم که معادله‌های (یاعمگرهای دیفرانسیلی) لژاندر، چبیشف، بسل، نوسانگر هماهنگ‌ساده، وهرمیت، جملگی‌همین پاریتهٔ زوج رانمایش می‌دهند. جوابهای همهٔ آنها را می‌توان به‌صورت یك‌سری‌ازتوانهای زوج x وسری‌مجزای دیگری از توانهای فرد x نوشت. معادلهٔ دیفرانسیل لاگر نه تقارن زوج دارد و نه‌فرد، از این‌رو نمی‌توان انتظار داشت که جوابهای آن پاریتهٔ زوج یا فرد نشان دهند. تأکید ما بر پاریته اساساً به‌دلیل اهمیت آن در مکانیك کوانتومی است. پی‌خواهیم برد که تابع موجها معمولا یا زوج‌اند یافرد؛ به‌این معنی‌که دارای پاریتهٔ معینی هستند. بیشتر برهم‌کنشها هم یا زوج‌اند ویا فرد (به‌استثنای واپاشی بتا)، درنتیجه پاریته پایسته است.

محدودیتهای رهیافت سری ــ معادلهٔ بسل

حل معادلهٔ نوسانگر خطی شاید کمی بیش‌ازحد آسان بود. با نشاندن سری توانی (۴۱۰۸) درمعادلهٔ دیفرانسیل (۴۰۰۸)، بدون کوچکترین زحمتی دوجواب مستقل به‌دست‌آوردیم.

برای آنکه ببینیم چه‌پیش می‌آید درجهت حل‌معادلهٔ بسل تلاش می‌کنیم

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0 \qquad (۵۶۰۸)$$

که در آن $y'=dy/dx$ و $y''=d^2y/dx^2$. دراینجا نیز، فرض می‌کنیم که جوابی به صورت زیرداریم

$$y(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda x^{k+\lambda}$$

مشتق می‌گیریم ودرمعادلهٔ (۵۶۰۸) قرارمی‌دهیم. درنتیجه خواهیم داشت

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda(k+\lambda)(k+\lambda-1)x^{k+\lambda}+\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda(k+\lambda)x^{k+\lambda}$$
$$+\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda+2}-\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda n^2 x^{k+\lambda}=0$$

(۵۷.۸)

با قراردادن $\lambda=0$، ضریب x^k، پایینترین توانی‌از x را که درسمت چپ ظاهر می‌شود، به‌دست می‌آوریم

$$a_0[k(k-1)+k-n^2]=0 \tag{۵۸.۸}$$

بازمطابق تعریف داریم $a_0\neq 0$. ازاین‌رو معادلهٔ اندیسی را از معادلهٔ (۵۸.۸) به دست می‌آوریم

$$k^2-n^2=0 \tag{۵۹.۸}$$

که جوابهای آن عبارت‌اند از: $k=\pm n$.

بررسی ضریب x^{k+1} نیز جالب است. دراین مورد خواهیم داشت

$$a_1[(k+1)k+k+1-n^2]=0$$

یا

$$a_1(k+1-n)(k+1+n)=0 \tag{۶۰.۸}$$

که به‌ازای $k=\pm n$، نه $k+1-n$ صفراست و نه $k+1+n$؛ وباید داشته باشیم $a_1=0$.[1]

به‌کار خود ادامه می‌دهیم وضریب x^{k+j} را به‌ازای $k=n$ بررسی می‌کنیم. λ رادر جمله‌های اول، دوم، وچهارم معادلهٔ(۵۷.۸) برابر j ودرجملهٔ سوم برابر $j-2$ می‌گیریم. بافرض آنکه ضریب حاصل باید صفر باشد، داریم

$$a_j[(n+j)(n+j-1)+(n+j)-n^2]+a_{j-2}=0$$

به‌جای j کمیت $j+2$ را می‌نشانیم ومی‌نویسیم

$$a_{j+2}=-a_j\frac{1}{(j+2)(2n+j+2)} \tag{۶۱.۸}$$

که‌همان رابطهٔ بازگشتی موردنظراست. باکاربرد متوالی‌این رابطهٔ بازگشتی روابط زیر را خواهیم داشت

---

۱. $k=\pm n=-(1/2)$ مستثنی است.

$$a_2=-a_0\frac{1}{2(2n+2)}=-\frac{a_0 n!}{2^2 1!(n+1)!}$$

$$a_4=-a_2\frac{1}{4(2n+4)}=+\frac{a_0 n!}{2^4 2!(n+2)!}$$

$$a_6=-a_4\frac{1}{6(2n+6)}=-\frac{a_0 n!}{2^6 3!(n+3)!},\ \ldots$$

و به‌طور کلی

$$a_{2p}=(-1)^p\frac{a_0 n!}{2^{2p}p!(n+p)!} \tag{۶۲.۸}$$

با نشاندن این‌ضرایب درجواب سری مفروض، داریم

$$y(x)=a_0x^n\left[1-\frac{n!x^2}{2^2\times 1!(n+1)!}+\frac{n!x^4}{2^4\times 2!(n+2)!}-\ldots\right] \tag{۶۳.۸}$$

به‌صورت مجموعیابی داریم

$$\begin{aligned}y(x)&=a_0\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{n!x^{n+2j}}{2^{2j}j!(n+j)!}\\&=a_0 2^n n!\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{1}{j!(n+j)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2j}\end{aligned} \tag{۶۴.۸}$$

درفصل ۱۱، این مجموعیابی اخیررا تابع بسل $J_n(x)$ خواهیم نامید. دقت‌کنید که جواب $J_n(x)$، همان‌گونه‌که ازصورت معادلۀ بسل برمی‌آید، یا تقارن زوج دارد یا فرد.[۱]

اگر $k=-n$ و n عدد درستی‌نباشد، می‌توانیم جواب متمایزدوم راکه با $J_{-n}(x)$ نشان می‌دهیم، به‌دست آوریم. ولی‌اگر $n-$ یك‌عدد درست منفی باشد، مشکلات، ازهمین جا شروع می‌شود. رابطۀ بازگشتی برای ضرایب a_j هنوز هم از معادلۀ (۶۱.۸) به دست می‌آید، اما به‌جای $2n$، کمیت $2n-$ می‌نشیند. آنگاه، وقتی که $2n=2+j$ یا $j=2(n-1)$، ضریب a_{j+2} واگرا می‌شود و جواب سری نخواهیم داشت. می‌توان در معادلۀ (۶۴.۸) از این نتیجۀ ناساز رهایی یافت، در فصل ۱۱ این کار را انجام داده‌ایم، درنتیجه

---

۱. اگر n یك‌عدددرست زوج باشد $J_n(x)$ تابعی زوج‌است واگر n عدد درست‌فردی‌باشد، $J_n(x)$ یك تابع فرد است. به ازای مقادیر غیردرست n، کمیت x^n چنین تقارن ساده‌ای نخواهدداشت.

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x) \quad \text{عدد درست } n \tag{۶۵.۸}$$

جواب دوم صرفاً تکرار جواب اول است. هرگاه n عددی درست باشد نمی‌توانیم با این روش سری‌یك جواب مستقل دوم برای معادلهٔ بسل پیدا کنیم.

به‌کمك جانشانی دریك سری نامتناهی، دوجواب برای معادلهٔ نوسانگر خطی و یك جواب (اگر n عددی درست نباشد، دوجواب) برای‌معادلهٔ بسل به‌دست‌آورده‌ایم. درپاسخ به‌این پرسش‌که آیا همواره می‌توان‌این کارراکرد یاخیر؟ ویا آیا این روش همواره عملی است؟ بایدگفت خیر. این‌روش‌جواب سری همیشه‌عملی نیست.

تکینگیهای منظم و نامنظم

توفیق این جانشانی سری به ریشه‌هـای معادلهٔ اندیسی و به‌درجهٔ تکینگی ضرایب معادلـهٔ دیفرانسیل بستگی‌دارد. برای آنکه تأثیرضرایب معادله براین رهیافت خام جانشانی سری را بهتر بفهمیم، چهارمعادلهٔ سادهٔ زیررا درنظرمی‌گیریم

$$y''-\frac{6}{x^2}y=0 \tag{۶۶.۸ الف}$$

$$y''-\frac{6}{x^3}y=0 \tag{۶۶.۸ب}$$

$$y''+\frac{1}{x}y'-\frac{a^2}{x^2}y=0 \tag{۶۶.۸ ج}$$

$$y''+\frac{1}{x^2}y'-\frac{a^2}{x^2}y=0 \tag{۶۶.۸ د}$$

به‌سادگی می‌توان نشان‌دادکه معادلهٔ اندیسی مربوط به‌معادلهٔ (۶۶.۸ الف) عبارت‌است‌از

$$k^2-k-6=0$$

درنتیجه $k=3$ و -2. چون‌کـه معادلهٔ (۶۶.۸ الف) برحسب x همگن است (d^2/dx^2 را به‌صورت x^{-2} به‌حساب می‌آوریم)، رابطهٔ بازگشتی وجودندارد؛ وبه‌ازای $i>0$ داریم: $a_i=0$. اما، دوجواب کاملامطلوب، x^3 و x^{-2}، برای ما می‌ماند.

اختلاف معادلهٔ (۶۶.۸ ب) با معادلهٔ (۶۶.۸ الف) تنها در یك توان x است، ولی همین اختلاف، معادلهٔ اندیسی را به‌صورت زیر درمی‌آورد

$$-6a_0=0$$

که‌هیچ جوابی‌ندارد، زیرا قرارداد کرده بودیم که $a_0\neq 0$، جانشانی سری، برای معادلهٔ

(۶۶.۸ الف) که تنها یك تکینگی منظم داشت عملی است، ولی برای معادلهٔ (۶۶.۸ ب) که دارای یك نقطهٔ تکین نامنظم درمبدأ است، ناموفق خواهد بود.

معادلهٔ (۶۶.۸ ج) را درنظرمی‌گیریم، به‌این‌معادله یك‌جملهٔ y'/x اضافه شده‌است. معادلهٔ اندیسی به‌این صورت است

$$k^{2}-a^{2}=0$$

ولی دراینجا هم رابطهٔ بازگشتی نداریم. جوابها عبارت‌اند از $y=x^{a}, x^{-a}$ که هر دو سریهای تك‌جمله‌ای کاملاً قابل قبول‌اند.

وقتی توان x در ضریب y' را از ۱— به ۲— تغییر می‌دهیم، معادلهٔ (۶۶.۸ د)، تغییرعمده‌ای درجواب به‌وجود می‌آید. معادلهٔ اندیسی (که تنها جملهٔ y' درآن سهیم‌است) به‌صورت زیردرمی‌آید

$$k=0$$

یك رابطهٔ بازگشتی داریم

$$a_{j+1}=+a_{j}\frac{a^{2}-j(j-1)}{j+1}$$

که درمورد آن داریم

$$\lim_{j\to\infty}\left|\frac{a_{j+1}}{a_{j}}\right|=\lim_{j\to\infty}\frac{j(j-1)}{j+1}$$
$$=\lim_{j\to\infty}\frac{j^{2}}{j}=\infty$$

مگرآنکه پارامتر a چنان برگزیده شودکه به‌ختم شدن سری بینجامد.

بنابراین جواب‌سری ما به‌ازای همهٔ مقادیر $x\neq 0$، واگرا می‌شود. بازهم روش ما برای معادلهٔ (۶۶.۸ ج) با یك تکینگی منظم عملی است، ولی درمورد معادلهٔ (۶۶.۸ د) با تکینگی نامنظم، باعدم توفیق قرین‌است.

قضیهٔ فوش

پاسخ این‌پرسش اساسی‌راکه چه‌وقت می‌توان‌انتظار داشت روش‌جانشانی سری عملی‌باشد، قضیهٔ فوش، به‌این‌صورت می‌دهدکه همواره می‌توانیم دست‌کم به‌یك جواب به‌صورت سری توانی دست‌یابیم؛ به‌شرط‌آنکه بسط را حول‌یك نقطهٔ معمولی یا دست‌کم یك‌نقطهٔ تکین‌منظم انجام‌دهیم. اگر بخواهیم حول‌یك‌تکینگی‌اساسی‌یا نامنظم بسط‌دهیم، روش‌ما، به‌همان‌ترتیبی که درمورد معادلات (۶۶.۸ ب) و (۶۶.۸ د) پیش‌آمد، ناموفق خواهد بود. خوشبختانه معادلات مهمتر فیزیك ریاضی‌که فهرست آنها را دربخش ۴.۸ آوردیم، درصفحهٔ متناهی

تکینگی نامنظم ندارنـد. بحث مشروحتری پیرامون قضیهٔ فوش را دربخش ۶.۸ خواهیم آورد.

از جدول ۳.۸ دربخش ۴.۸ مشاهده می‌شود که درهمهٔ معادله‌های موردنظر، نقطهٔ تکین عبارت است از بینهایت. معادلهٔ لژاندر (با یك تکینگی منظم در بینهایت)، به‌عنوان نمایش دیگر قضیهٔ فوش، جواب سری همگرایی برحسب توانهای منفی شناسه دارد (بخش ۱۰.۱۲). برعکس، از معادلهٔ بسل (بایك تکینگی نامنظم در بینهایت) یك سری مجانبی به‌دست می‌آید [بخشهای ۱۰.۵ (جلد اول) و ۶.۱۱ را ببینید]. هرچند کـه این جوابهای مجانبی خیلی مفیدند، ولی عملا واگرا هستند.

جمعبندی

دررهیافت جانشانی سری، اگرسری را حول یك‌نقطهٔ معمولی یا دست‌کم یك تکینگی منظم بسط دهیم، دست کم یك جواب به‌دست می آید (قضیهٔ فوش).

اینکه یك یا دوجواب متمایز به‌دست آوریم به‌ریشه‌های معادلهٔ اندیسی بستگی‌دارد.

۱. اگردوریشهٔ معادلهٔ‌اندیسی‌باهم برابرباشند، باروش جانشانی سری تنهایك‌جواب به‌دست خواهیم آورد.

۲. اگراختلاف دوریشه باهم‌برابر یك‌عدد غیردرست باشد، می‌توان دوجواب‌مستقل به‌دست آورد.

۳. اگر دو ریشه باهم اختلافی برابر یك‌عدد درست داشته باشند، ریشهٔ بزرگتر یك جواب را به‌دست می‌دهد.

ریشهٔ کوچکتر، بسته به‌رفتار ضرایب، ممکن‌است یك‌جواب ارائه‌کنـد یا نکنـد. درمعادلهٔ نوسانگر خطی دوجواب به‌دست‌آوردیم؛ درمورد معادلهٔ بسل فقط‌یك جواب.

سودمندی جواب سری از لحاظ مقدار (عـددی) آن، به‌تندی همگـرایی سری و دسترس‌پذیر بودن بستگی دارد. بسیاری از معـادلات دیفرانسیل، شاید بیشتر آنها، روابط بازگشتی برای ضرایب ندارند. به‌طور کلی، سری دسترس‌پذیر شاید به‌ازای مقدار خیلی کوچك $|x|$ (یا $|x-x_0|$)، مفید است. می‌توان از کامپیوتر استفاده کرد و به‌کمك زبانی نظیر FORMAC، تعداد بیشتری از ضرایب سری را تعیین کرد. اما، غالباً در کارهای عددی، انتگرالگیری عددی مستقیم را ترجیح می‌دهند (بخش ۸.۸).

مسائل

۱.۵.۸ قضیهٔ یکتایی. تابع $y(x)$ در یك معادلهٔ دیفرانسیل همگن خطی مرتبهٔ دوم صدق می‌کند. در نقطهٔ $x=x_0$ داریم: $y(x)=y_0$ و $dy/dx=y'_0$. نشان دهید که $y(x)$ یکتاست، یعنی هیچ جواب دیگری از معادلهٔ دیفرانسیـل با شیب y'_0 از نقطهٔ (x_0,y_0) نمی‌گذرد.

راهنمایی. جواب دومی را درنظر بگیرید که همین شرایط برای آن برقرار باشد، وآن را با بسط سری‌تایلور مقایسه کنید.

۲.۵.۸ یك‌جواب سری را با بسط آن‌حول نقطهٔ $x = x_{\circ}$ درمعادلهٔ(۳۶.۸) امتحان‌می‌کنیم. اگر $x_{\circ}$ یك نقطهٔ‌معمولی باشد، نشان‌دهیدکه ریشه‌های معادلهٔ‌اندیسی عبارت‌اند از صفر و یك.

۳.۵.۸ در روند دستیابی به‌یك جواب سری برای معادلهٔ نوسانگر هماهنگ ساده، از دومین‌ضریب سری، یعنی a_{1} چشم پوشیدیم و آن را صفر گرفتیم. با استفاده از ضریب‌توانی که یکی بعد از پایینترین توان x قراردارد، x^{k-1}، یك معادلهٔ دیگر ازنوع معادلهٔ اندیسی تشکیل دهید.

(الف)(معادلهٔ نوسانگر هماهنگ‌ساده با $k = \circ$)، نشان‌دهیدکه‌به a_{1} هرمقدارمتناهی (ازجمله صفر) می‌توان نسبت‌داد.

(ب) (معادلهٔ نوسانگر هماهنگ‌ساده با $k = ۱$)، نشان‌دهیدکه a_{1} باید مساوی‌صفر قرار داده شود.

۴.۵.۸ جواب سری معادله‌های دیفرانسیل زیررا بررسی کنید و ببینید چه وقت a_{1} را می‌توان بدون‌آنکه چیزی از عمومیت مسئله کاسته شود برابر صفرقرار داد وچه وقت باید آن‌را صفر گرفت.

(الف)لژاندر، (ب) چبیشف، (ج) بسل، (د) هرمیت.

پاسخ. برای (الف) لژاندر، (ب) چبیشف، (د) هرمیت: به‌ازای $k = \circ$، a_{1} را می‌توان برابر صفر قرارداد، به‌ازای $k = ۱$، a_{1} را باید برابر صفرگرفت. (ج) بسل: a_{1} را باید مساوی صفرگرفت [مگرآنکه $k = \pm n = (-۱/۲)$].

۵.۵.۸ معادلهٔ لژاندر

$$(۱ - x^{۲})y'' - ۲xy' + n(n+۱)y = \circ$$

را ازطریق جانشانی سری مستقیم حل کنید.

(الف)تحقیق کنیدکه معادلهٔ اندیسی به‌صورت زیراست

$$k(k-۱) = \circ$$

(ب) بااستفاده از $k = \circ$، یك سری ازتوانهای زوج x، $(a_{1} = \circ)$ به‌دست‌آورید

$$y_{\text{زوج}} = a_{\circ}\left[۱ - \frac{n(n+۱)}{۲!}x^{۲} + \frac{n(n-۲)(n+۱)(n+۳)}{۴!}x^{۴} + \cdots\right]$$

که در آن

$$a_{j+۲} = \frac{j(j+۱) - n(n+۱)}{(j+۱)(j+۲)}a_{j}$$

(ج) بااستفاده از $k=۱$، یك سری از توانهای فرد x $(a_۱=\circ)$ تشکیل دهید

$$y_{\text{فرد}}=a_\circ\left[x-\frac{(n-۱)(n+۲)}{۳!}x^۳+\frac{(n-۱)(n-۳)(n+۲)(n+۴)}{۵!}x^۵+\cdots\right]$$

که درآن

$$a_{j+۲}=\frac{(j+۱)(j+۲)-n(n+۱)}{(j+۲)(j+۳)}a_j$$

(د) نشان دهیدکه، اگر سریها تا بینهایت ادامه یابند، هر دوجواب زوجy و فردy، به‌ازای $x=\pm۱$ واگرا می‌شوند.

(ه) سرانجام با گزینش مقدار مناسبی برای n، نشان دهید که هربار یکی از این سریها را می‌توان به یك چند جمله‌ای بدل کرد، و در نتیجه از فرجام نامیمون واگرایی رهایی یافت. این محدودیت n به مقادیر درست، در مکانیك کوانتومی به کوانتش تکانهٔ زاویه‌ای، مربوط می‌شود.

۸.۵.۶ (الف)جوابهای سری معادلهٔ دیفرانسیل هرمیت زیررا به‌دست‌آورید

$$y''-۲xy'+۲\alpha y=\circ$$

پاسخ. معادلهٔ اندیسی، $k(k-۱)=\circ$.

به‌ازای $k=\circ$

$$a_{j+۲}=۲a_j\frac{j-\alpha}{(j+۱)(j+۲)}\quad (j \text{ زوج})$$

$$y_{\text{زوج}}=a_\circ\left[۱+\frac{۲(-\alpha)x^۲}{۲!}+\frac{۲^۲(-\alpha)(۲-\alpha)x^۴}{۴!}+\cdots\right]$$

به‌ازای $k=۱$

$$a_{j+۲}=۲a_j\frac{j+۱-\alpha}{(j+۲)(j+۳)}\quad (j \text{ زوج})$$

$$y_{\text{فرد}}=a_\circ\left[x+\frac{۲(۱-\alpha)x^۳}{۳!}+\frac{۲^۲(۱-\alpha)(۳-\alpha)x^۵}{۵!}+\cdots\right]$$

(ب) نشان دهیدکه هردو جواب سری به‌ازای همهٔ xها همگرایند، نسبت ضریبهای متوالی، به‌ازای شاخصهای بزرگ، مانند نسبت متناظر در بسط $\exp(۲x^۲)$ رفتارمی‌کنند.

(ج) نشان دهید که باگزینش مقدار مناسب α، جوابهای سری را می‌توان قطع و به یك چندجمله‌ای متناهی تبدیل کرد. (این چندجمله‌ایها، با بهنجارش مناسب به صورت چندجمله‌ایهای هرمیت بخش ۱.۱۳ درمی‌آیند.)

۷.۵.۸ معادلهٔ دیفرانسیل لاگر به‌صورت زیرمفروض است

$$xL_n''(x)+(1-x)L_n'(x)+nL_n(x)=0$$

یك‌جواب سری برای‌آن تشکیل دهید وپارامتر n را چنان برگزینید که سری حاصل به‌یك چندجمله‌ای تبدیل شود.

۸.۵.۸ معادلهٔ چبیشف زیررا به‌کمك جانشانی سری حل‌کنید

$$(1-x^2)T_n''-xT_n'+n^2T_n=0$$

چه‌محدودیتهایی روی n اعمال‌کنیم تا جواب سری حاصل به‌ازای $x=\pm 1$ همگرا شود؟
پاسخ. سری نامتناهی به‌ازای $x=\pm 1$ همگرا می‌شود. بنابراین، هیچ محدودیتی برای n وجود ندارد (با مسئلهٔ ۱۶.۲.۵ مقایسه‌کنید).

۹.۵.۸ معادلهٔ زیررا حل‌کنید

$$(1-x^2)U_n''(x)-3xU_n'(x)+n(n+2)U_n(x)=0=0$$

ریشه‌ای ازمعادلهٔ اندیسی را برگزینیدکه به‌یك سری از توانهای فرد x منجرشود. باتوجه به‌اینکه این‌سری به‌ازای $x=1$ واگرا می‌شود، n را چنان برگزینیدکه سری را به‌یك چندجمله‌ای تبدیل‌کند

پاسخ. $k(k-1)=0$.

به‌ازای $k=1$

$$a_{j+2}=\frac{(j+1)(j+3)-n(n+2)}{(j+2)(j+3)}a_j$$

۱۰.۵.۸ یك جواب سری برای‌معادلهٔ فوق هندسی

$$x(x-1)y''+[(1+a+b)x-c]y'+aby=0$$

به‌دست آورید. همگرایی جواب خودرا بیازمایید.

۱۱.۵.۸ دو جواب سری برای معادلهٔ فوق هندسی همشار زیر به‌دست آورید

$$xy''+(c-x)y'-ay=0$$

همگرایی جواب خودرا بیازمایید.

۱۲-۵-۸ تحلیل کوانتوم مکانیکی اثر اشتارك (درمختصات سهموی) به‌معادلهٔ دیفرانسیل زیر می‌انجامد

$$\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{du}{d\xi}\right)+\left(\frac{1}{2}E\xi+\alpha-\frac{m^2}{4\xi}-\frac{1}{4}F\xi^2\right)u=0$$

دراینجا α ثابت جداسازی، E انرژی کل، و F عددی است ثابت، Fz انرژی پتانسیلی است که بر اثر اعمال میدان الکتریکی، به‌سیستم افزوده می‌شود.

بااستفاده ازریشهٔ بزرگتر معادلهٔ اندیسی، یکی از جوابهای سری توانی را درحول $\xi=0$ به‌دست آورید. سه‌ضریب اول را برحسب a_0 محاسبه کنید

پاسخ. معادلهٔ اندیسی $\quad k^2-\frac{m^2}{4}=0$.

$$u(\xi)=a_0\xi^{m/2}\left\{1-\frac{\alpha}{m+1}\xi+\left[\frac{\alpha^2}{2(m+1)(m+2)}-\frac{E}{4(m+2)}\right]\xi^2+\dots\right\}$$

توجه کنید که اختلال E درجملات قبل از a_2 ظاهر نمی‌شود.

۱۳-۵-۸ تحلیل کوانتوم مکانیکی یون مولکولی هیدروژن برای حالت خاص عدم وابستگی به‌زاویهٔ سمتی به‌معادلهٔ زیرمی‌انجامد

$$\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{du}{d\eta}\right]+\alpha u+\beta\eta^2u=0$$

یکی ازجوابهای سری توانی را برای $u(\eta)$ به‌دست آورید. سه‌ضریب غیرصفر نخست را برحسب a_0 حساب کنید

پاسخ. معادلهٔ اندیسی $\quad k(k-1)=0$

$$u_{k=1}=a_0\eta\left\{1+\frac{2-\alpha}{6}\eta^2+\left[\frac{(2-\alpha)(12-\alpha)}{120}-\frac{\beta}{20}\right]\eta^4+\dots\right\}$$

۱۴-۵-۸ برهم‌کنش دونوکلئون را می‌توان، با تقریب مطلوبی، به‌کمك پتانسیل مزونی زیر توصیف کرد

$$V=\frac{Ae^{-ax}}{x}$$

که به‌ازای مقادیر منفی A ربایشی‌است. برای‌معادلهٔ موج شرودینگر متناظر بااین پتانسیل، یك جواب‌سری به‌دست آورید

$$\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{d^{2}\psi}{dx^{2}}+(E-V)\psi=0$$

این جواب تاسومین ضریب غیرصفر به‌صورت زیراست

$$\psi_{k=1}=a_{0}\left\{x+\frac{1}{2}A'x^{2}+\frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}A'^{2}-E'-aA'\right]x^{3}+\cdots\right\}$$

که درآن پریم نشانگر ضرب در $2m/\hbar^{2}$ است.

۱۵.۵.۸ انرژی‌پتانسیل تك‌الکترونی درنزدیکی هستهٔ یك‌اتم پیچیده ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$V=\frac{Ze^{2}}{r}(1+b_{1}r+b_{2}r^{2})$$

که درآن ثابتهای b_1 و b_2 ناشی از اثرات استارند. درحالتی‌که تکانهٔ زاویه‌ای صفر باشد، نشان‌دهیدکه سه‌جملهٔ نخست جواب‌معادلهٔ شرودینگر به‌همان‌صورت سه‌جملهٔ‌اول سری مسئلهٔ ۱۴.۵.۸ است. اولیـن سه‌جمله دربسط سری معادلهٔ موج را، با انتقال مناسب ضرایب یا پارامترها بنویسید.

۱۶.۵.۸ اگر پارامتر a^{2} در معادلهٔ (۶۶.۸ د) برابر ۲ باشد، این معادله به‌صورت زیر درمی‌آید

$$y''+\frac{1}{x^{2}}y'-\frac{2}{x^{2}}y=0$$

بااستفاده ازمعادلهٔ اندیسی ورابطهٔ بازگشتی، جواب $y=1+2x+2x^{2}$ را برای این معادله به‌دست آورید. بانشاندن این‌جواب درمعادله، درستی‌آن را تحقیق‌کنید.

۱۷.۵.۸ تابع تعدیل‌یافتهٔ بسل $I_{0}(x)$ درمعادلهٔ دیفرانسیل زیرصدق می‌کند

$$x^{2}\frac{d^{2}}{dx^{2}}I_{0}(x)+x\frac{d}{dx}I_{0}(x)-x^{2}I_{0}(x)=0$$

ازمسئلهٔ ۴.۴.۷، جلد اول، می‌دانیم‌که جملهٔ پیشرو دربسط مجانبی عبارت‌است از

$$I_\circ(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{۲\pi x}}$$

یك سری به‌صورت زیر درنظر بگیرید

$$I_\circ(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{۲\pi x}}\{۱+b_۱x^{-۱}+b_۲x^{-۲}+\ldots\}$$

وضریبهای $b_۱$ و $b_۲$ را پیدا کنید.

پاسخ. $b_۱=\frac{۱}{۸}$ ، $b_۲=\frac{۹}{۱۲۸}$.

۱۸.۵.۸ جواب سری توانی زوج معادلهٔ لژاندر درمسئلهٔ ۵.۵.۸ به‌دست آمد. $a_\circ$ را برابر یك و n را برابر عددی که‌عدد درست‌زوج نباشد بگیرید، مثلاً $n=۰٫۵$. مجموعهای جزئی سری را تا $x^{۲۰۰}$، $x^{۴۰۰}$، $x^{۶۰۰}$، ...، $x^{۲۰۰۰}$ به‌ازای $x=۰٫۹۵(۰٫۰۱)۱٫۰۰$ محاسبه کنید. همچنین تك‌تك جمله‌های متناظر با هریك ازاین توانها را بنویسید.

یادآوری. این محاسبه، همگرایی در $x=۰٫۹۹$ یا واگرایی در $x=۱٫۰۰$ را ثابت نمی‌کند، ولی‌شاید از آن بتوان اختلاف‌درنحوهٔ رفتار دنبالهٔ مجموعهای‌جزئی به‌ازای این دومقدار x را مشاهده کرد.

۱۹.۵.۸ (الف)جواب سری توانی‌فرد معادلهٔ هرمیت درمسئلهٔ ۶.۵.۸ به‌دست می‌آید. $a_\circ$ را برابر یك بگیرید. این سری را به‌ازای $\alpha=۰$ و $x=۱,۲,۳$ براوردکنید. هرجا که آخرین جملهٔ محاسبه شده، باضریبی برابر $۱۰^۶$ یا بیشتر، کمتر ازجملهٔ پیشینه شود، به‌محاسبهٔ خود پایان دهید. برای‌خطای ناشی ازچشمپوشی ازجمله‌های باقیمانده درسری نامتناهی یك کران بالایی را در نظر بگیرید.

(ب) برای‌آزمودن‌محاسبهٔ‌قسمت(الف)،نشان دهیدکه سری هرمیت $(\alpha=۰)$ فرد y متناظر است با $\int_\circ^x \exp(x^۲)dx$.

(ج) این‌انتگرال را به‌ازای $x=۱,۲,۳$ محاسبه‌کنید.

۶.۸ جواب دوم

دربخش ۵.۸ یکی‌از جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل همگن مرتبهٔ‌دوم را ازطریق جانشانی یك سری توانی به‌دست‌آوردیم. بااستفاده ازقضیهٔ فوش، می‌دانیم که این‌کار، به‌شرط‌آنکه‌سری توانی درحول یك‌نقطهٔ معمولی یایك تکینگی غیراساسی بسط پیداکند، همواره میسراست.[۱] هیچ تضمینی وجود نداردکه این‌رهیافت دوجواب مستقلی راکه برای یك‌معادلهٔ دیفرانسیل

۱. به‌همین دلیل‌است‌که رده‌بندی تکینگیها، بخش ۴.۸، بسیار مهم است.

مرتبهٔدوم خطیانتظارداریم، به‌دست دهد. درواقع، بااین‌تکنیك برای معادلهٔ بسل(که درآن n عدد درستی‌است) تنها یك‌جواب به‌دست‌آمد. دراین‌بخش دو روش برای یافتن جواب مستقل دوم ارائه‌خواهیم داد: یکی‌روش انتگرالی ودیگری سری توانی شامل یك جملهٔ لگاریتمی. درهرحال، نخست به‌مسئلهٔ استقلال مجموعه‌ای ازتوابع می‌پردازیم.

استقلال خطی جوابها

مجموعه‌ای ازتوابع، φ_λ، رادرنظرمی‌گیریم. معیار وابستگی خطی‌آن عبارت‌است ازوجود رابطه‌ای به‌صورت زیر

$$\sum_\lambda k_\lambda \varphi_\lambda = 0 \qquad (۶۷.۸)$$

که درآن همهٔ ضریبهای k_λ صفر نباشند. ازسوی دیگر اگر تنها جواب معادلهٔ (۶۷.۸)، به ازای همهٔ λها به‌صورت $k_\lambda = 0$ باشد، مجموعهٔ تابعهای φ_λ را مستقل خطی می‌نامند.

تصور وابستگی‌خطی بردارها می‌تواند به‌درك موضوع كمك‌كند. درفضای سه بعدی، **A**، **B**، و **C** را چنان بگیریدکه $\mathbf{A}.\mathbf{B}\times\mathbf{C}\neq 0$. دراین صورت هیچ رابطه‌ای به‌صورت زیروجود ندارد

$$a\mathbf{A}+b\mathbf{B}+c\mathbf{C}=0 \qquad (۶۸.۸)$$

A، **B**، و **C** مستقل خطی‌اند. از سوی دیگر، هر بردار چهارم **D** را می‌توان به صورت ترکیبی خطی‌از **A**، **B**، و **C** نوشت (بخش ۴.۴، جلد اول)

$$\mathbf{D}-a\mathbf{A}-b\mathbf{B}-c\mathbf{C}=0 \qquad (۶۹.۸)$$

واین چهار بردار مستقل خطی نیستند. سه بردار **A**،**B**، و **C** غیرواقع دریك صفحه فضای سه‌بعدی حقیقی مارا می‌پیمایند.

اگرمجموعه‌ای از بردارها یا توابع متقابلا برهم عمود باشند، آنگاه به‌خودی خود مستقل خطی‌اند. تعامد، براستقلال خطی‌دلالت می‌کند. این نکته را می‌توان به‌سادگی و به کمك ضربهای داخلی (ضرب نرده‌ای یانقطه‌ای برای‌بردارها، انتگرال تعامد بخش ۲.۹ برای توابع) نمایش داد.

فرض می‌کنیم که توابع φ_λ، در صورت لزوم مشتقپذیر باشند. آنگاه با مشتقگیری مکرر از معادلهٔ (۶۷.۸)، مجموعهٔ معادلات زیررا تشکیل می‌دهیم

$$\sum_\lambda k_\lambda \varphi'_\lambda = 0 \qquad (۷۰.۸)$$

$$\sum_\lambda k_\lambda \varphi''_\lambda = 0, \ldots \qquad (۷۱.۸)$$

با این کار به‌مجموعه‌ای از معادلات خطی همگن برای کمیتهای مجهول k_λ دست خواهیم یافت. در بخش ۱.۴ (جلداول) دیدیم که تنها درصورتی یك جواب به‌شکل $k_\lambda \neq 0$ داریم که دترمینان ضریبهای k_λ برابرصفرشود. یعنی

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi'_1 & \varphi'_2 & \cdots & \varphi'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0 \tag{۷۲.۸}$$

این دتَرمینان را **رونسکیی** می‌نامند.

۱. اگر رونسکیی صفر نباشد، آنگاه معادلهٔ (۶۷.۸) هیچ جوابی جز $k_\lambda = 0$ ندارد. بنابراین مجموعهٔ تابعهای φ_λ مستقل است.

۲. اگر رونسکیی به‌ازای‌مقادیر مجزایی‌ازشناسه صفر شود، لزوماً وابستگی خطی به اثبات نرسیده است (مگر درموردی‌که مجموعهٔ تابعها تنها دوتابع داشته باشد). ولی اگر رونسکیی روی تمامی‌گسترهٔ متغیرصفر باشد، تابعهای φ_λ روی این‌گستره وابستهٔ خطی‌اند[1] (برای حالت سادهٔ دوتابع بامسئلهٔ ۲.۵.۸ مقایسه کنید).

مثال ۱.۶.۸ استقلال خطی

جوابهای معادلهٔ نوسانگرخطی (۴۰.۸) عبارت‌اند از $\varphi_1 = \sin \omega x$ و $\varphi_2 = \cos \omega x$. رونسکیی عبارت خواهد بود از

$$\begin{vmatrix} \sin \omega x & \cos \omega x \\ \omega \cos \omega x & -\omega \sin \omega x \end{vmatrix} = -\omega \neq 0$$

بنابراین دوتابع φ_1 و φ_2 مستقل‌خطی‌اند. تنها برای دوتابع، استقلال خطی به‌منزلهٔ آن‌است که یکی مضربی‌از دیگری نیست، که به‌وضوح دراین حالت درست است.

می‌دانیم که

$$\sin \omega x = \pm(1 - \cos^2 \omega x)^{1/2}$$

---

۱. برای اثبات این مطلب نگاه‌کنید به‌صفحهٔ ۱۸۷ ازکتابی بامشخصات زیر:
Elements of Pure and Applied Mathematics. H. Lass. New York: McGraw-Hill, 1957.
فرض می‌شود که توابع دارای‌مشتقهای پیوسته‌اند و دست‌کم یکی از کهادهای سطر آخر معادلهٔ (۷۲.۸)، در بسط لاپلاس، دربازهٔ موردنظر، $[a,b]$، صفر نمی‌شود.

ولی این یک‌رابطهٔ خطی به‌صورت (۶۷.۸) نیست.

مثال ۲.۶.۸ وابستگی خطی

برای آنکه وابستگی خطی را نمایش دهیم، جوابهای معادلهٔ پخش یك بعدی را در نظر می‌گیریم. داریم $\varphi_1 = e^x$ و $\varphi_2 = e^{-x}$، و تابع $\varphi_3 = \cosh x$ راکه خود نیز یکی‌از جوابهاست، به‌آنها اضافه می‌کنیم. رونسکیی عبارت است از

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \cosh x \\ e^x & -e^{-x} & \sinh x \\ e^x & e^{-x} & \cosh x \end{vmatrix} = 0$$

این دترمینان به‌ازای همهٔ مقادیر x صفر است، زیرا سطر اول و سوم آن با هم برابرند. بنابراین e^x، e^{-x}، و $\cosh x$ وابستهٔ خطی‌اند، ودرواقع بین‌آنها رابطه‌ای‌به‌صورت معادلهٔ (۶۷.۸) وجود دارد

$$e^x + e^{-x} - 2\cosh x = 0 \qquad (\text{با } k_\lambda \neq 0)$$

جواب دوم

به‌معادلهٔ دیفرانسیل همگن مرتبهٔ دوم خطی، به‌شکل کلی زیر برمی‌گردیم

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (۷۳.۸)$$

y_1 و y_2 را دو جواب مستقل می‌گیریم. آنگاه مطابق تعریف، رونسکیی به صورت زیر است

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2 \qquad (۷۴.۸)$$

بامشتقگیری ازرونسکیی خواهیم داشت

$$\begin{aligned} W' &= y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' \\ &= y_1[-P(x)y_2' - Q(x)y_2] - y_2[-P(x)y_1' - Q(x)y_1] \qquad (۷۵.۸) \\ &= -P(x)(y_1 y_2' - y_1' y_2) \end{aligned}$$

عبارت داخل پرانتز همان‌رونسکیی، W، است وداریم

$$W' = -P(x)W \qquad (۷۶.۸)$$

اگر $P(x) = 0$، یعنی

$$y''+Q(x)y=0 \qquad (۷۷.۸)$$

رونسکیی به‌صورت زیر خواهد بود

$$W=y_1y_2'-y_1'y_2=\text{const.} \qquad (۷۸.۸)$$

از آنجاکه معادلهٔ دیفرانسیل اصلی ما همگن است، می‌توانیم جوابهای y_1 و y_2 را درهر ثابتی که می‌خواهیم ضرب کنیم و ترتیبی اتخاذ کنیم که رونسکیی برابر ۱ (یا ۱ −) شود. حالت $P(x)=0$ بیش از آنچه انتظار می‌رود پیش می‌آید. یادآوری می‌کنیم که ∇^2 در مختصات دکارتی شامل مشتق اول نیست. همچنین جزء وابستهٔ شعاعی $\nabla^2(r\psi)$ در مختصات قطبی کروی مشتق اول ندارد. سرانجام، هرمعادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم خطی را می‌توان به معادله‌ای به‌صورت (۷۷.۸) تبدیل کرد (با مسئلهٔ ۱۱.۶.۸ مقایسه کنید).

فرض کنید که یکی از جوابهای معادلهٔ (۷۳.۸) را به‌کمك جانشانی سری (یا ازطریق حدس) به‌دست آورده باشیم. اکنون کارخود راادامه می‌دهیم ویك جواب مستقل دیگر به‌دست می‌آوریم. معادلهٔ (۷۶.۸) را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\frac{dW}{W}=-P\,dx_1$$

از $x_1=a$ تا $x_1=x$ انتگرال می‌گیریم. خواهیم داشت

$$\ln\frac{W(x)}{W(a)}=-\int_a^x P(x_1)dx_1$$

یا[1]

$$W(x)=W(a)\exp\left[-\int_a^x P(x_1)dx_1\right] \qquad (۷۹.۸)$$

اما

$$\begin{aligned}W(x)&=y_1y_2'-y_1'y_2\\&=y_1^2\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)\end{aligned} \qquad (۸۰.۸)$$

با ترکیب معادله‌های (۷۹.۸) و (۸۰.۸) داریم

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)=W(a)\frac{\exp[-\int_a^x P(x_1)dx_1]}{y_1^2} \qquad (۸۱.۸)$$

---

۱. اگر $P(x_1)$ در $a\leqslant x_1\leqslant x$ متناهی باقی‌بماند آنگاه، $W(x)\neq 0$ مگرآنکه $W(a)=0$. یعنی رونسکیی دوجواب ما یامتحد با صفراست یاهرگز صفرنیست.

سرانجام باانتگرالگیری ازمعادلهٔ (۸۱.۸) از $x_2=b$ تا $x_2=x$ داریم

$$y_2(x)=y_1(x)W(a)\int_a^x \frac{\exp[-\int_a^{x_2} P(x_1)dx_1]}{[y_1(x_2)]^2}dx_2 \qquad (۸۲.۸)$$

در اینجا a و b ثابتهای اختیاری‌اند و ازیك جملهٔ $y_1(x)y_2(b)/y_1(b)$ چشمپوشی شده‌است، زیرا این‌جمله به‌چیز تازه‌ای نمی‌انجامد. از آنجا که $W(a)$، یعنی رونسکیبی در $x=a$ ثابت است، و جواب ما برای معادلهٔ دیفرانسیل همگن همواره شامل یك عامل بهنجارش نامعلوم‌است، $W(a)$ را یك‌می گیریم ومی‌نویسیم

$$y_2(x)=y_1(x)\int^x \frac{\exp[-\int^{x_2} P(x_1)dx_1]}{[y_1(x_2)]^2}dx_2 \qquad (۸۳.۸)$$

توجه کنیدکه حدهای پایینی $x_1=a$ و $x_2=b$ حذف شده‌اند. اگر این حدها را نگه داریم، تنها اثرشان افزودن سهمی برابر یك مقدار ثابت ضرب درجواب معلوم اول، یعنی $y_1(x)$، است وچیز تازه‌ای اضافه نشده است.

درحالت خاص مهم $P(x)=0$، معادلهٔ (۸۳.۸) به‌معادلهٔ زیرتقلیل می‌یابد

$$y_2(x)=y_1(x)\int^x \frac{dx_2}{[y_1(x_2)]^2} \qquad (۸۴.۸)$$

یعنی، بااستفاده از معادلهٔ (۸۳.۸) یا (۸۴.۸) می‌توانیم ازیك جواب معلوم، از طریق انتگرالگیری، یك‌جواب مستقل‌دوم برای معادلهٔ (۷۳.۸) به‌دست‌آوریم. این‌تکنیك را در بخش ۱۰.۱۲ برای تولید جواب دوم معادلهٔ دیفرانسیل لژاندر به‌کارمی‌بریم.

مثال ۳.۶.۸ جواب دوم معادلهٔ نوسانگرخطی

برای‌معادلهٔ $d^2y/dx^2+y=0$ با $P(x)=0$، یکی‌ازجوابهارابه‌صورت $y_1=\sin x$ درنظرمی‌گیریم. بابهره‌گیری ازمعادلهٔ (۸۴.۸)، خواهیم‌داشت

$$y_2(x)=\sin x\int^x \frac{dx_2}{\sin^2 x_2}$$

$$=\sin x(-\cot x)=-\cos x$$

که آشکارا مستقل‌از $\sin x$ (بدون یك‌مضرب خطی) است.

شکل سری جواب دوم

به‌کمك رشتهٔ عملیات زیرمی‌توان نسبت‌به ماهیت جواب‌دوم معادلهٔ دیفرانسیل به درك

عمیقتری دست یافت:

۱. $P(x)$ و $Q(x)$ درمعادلهٔ (۷۳.۸) را به‌صورت زیر بسط می‌دهیم

$$P(x)=\sum_{i=-1}^{\infty} p_i x^i, \qquad Q(x)=\sum_{j=-2}^{\infty} q_j x^j \quad (۸۵.۸)$$

حد پایینی مجموعیابیها را چنان برگزیده‌ایم که قویترین تکینگی منظم ممکن‌را(در مبدأ) ایجادکنیم. این‌شرایط دقیقاً درقضیهٔ فوش صدق‌می‌کنند و ازاین‌رو به‌کمك آنها قضیهٔ فوش رابهترمی‌فهمیم.

۲. چندجملهٔ اول یك‌جواب سری توانی را، مانند بخش ۵.۸ به‌دست می‌آوریم.

۳. بااستفاده‌ازاین‌جواب به‌جای y_1 وباانتگرالگیری‌جمله به‌جمله‌ازمعادلهٔ(۸۳.۸)، یك جواب دوم y_2 ازنوع سری به‌دست می‌آوریم.

با انجام مرحلهٔ ۱، داریم

$$y''+(p_{-1}x^{-1}+p_0+p_1x+\cdots)y'+(q_{-2}x^{-2}+q_{-1}x^{-1}+\cdots)y=0$$

(۸۶.۸)

که‌در آن‌نقطهٔ $x=0$ دربدترین‌شرایط‌یك‌نقطهٔ‌تکین‌منظم‌است. اگر $p_{-1}=q_{-1}=q_{-2}=0$، این‌نقطه به‌یك‌نقطهٔ معمولی تبدیل می‌شود. باقراردادن

$$y=\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda}$$

(مرحلهٔ ۲)، خواهیم داشت

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}(k+\lambda)(k+\lambda-1)a_\lambda x^{k+\lambda-2}+\sum_{i=-1}^{\infty} p_i x^i \sum_{\lambda=0}^{\infty}(k+\lambda)a_\lambda x^{k+\lambda-1}$$

$$+\sum_{j=-2}^{\infty} q_j x^j \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda}=0 \quad (۸۷.۸)$$

بافرض اینکه $p_{-1}\neq 0$ و $q_{-2}\neq 0$، معادلهٔ اندیسی به‌صورت زیراست

$$k(k-1)+p_{-1}k+q_{-2}=0$$

که‌ضریب خالص x^{k-2} را صفر قرارمی‌دهد. این‌معادله به‌معادلهٔ زیرتقلیل می‌یابد

$$k^2+(p_{-1}-1)k+q_{-2}=0 \quad (۸۸.۸)$$

دوریشهٔ این‌معادلهٔ اندیسی‌را با $k=\alpha$ و $k=\alpha-n$ نشان می‌دهیم، که درآن n یاصفر

است و یا یك عدد درست مثبت. (اگر n عدد درستی نباشد، با روشهایی که در بخش ۵.۸ آموختیم دوجواب سری مستقل به‌دست می‌آوریم ومشکلی نداریم.) درنتیجه

$$(k-\alpha)(k-\alpha+n)=0 \qquad (۸۹.۸)$$

یا

$$k^2+(n-2\alpha)k+\alpha(\alpha-n)=0$$

بامعادل قراردادن ضریبهای k درمعادله‌های (۸۸.۸) و (۸۹.۸) داریم

$$p_{-1}-1=n-2\alpha \qquad (۹۰.۸)$$

جواب سری معلوم متناظر با ریشهٔ بزرگتر $k=\alpha$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$y_1=x^\alpha \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^\lambda$$

بانشاندن این‌جواب‌سری درمعادلهٔ (۸۳.۸)، مرحلهٔ۳، باانتگرال زیرسروکار خواهیم‌داشت

$$y_2(x)=y_1(x)\int^x \frac{\exp(-\int_a^{x_2}\sum_{i=-1}^{\infty} p_i x_1^i dx_1)}{x_2^{2\alpha}(\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x_2^\lambda)^2}dx_2 \qquad (۹۱.۸)$$

که در آن جوابهای y_1 و y_2 چنان بهنجار شده‌اند که رونسکیی عبارت است از: $W(a)=1$. ابتدا به‌جملهٔ نمایی می‌پردازیم؛ داریم

$$\int_a^{x_2}\sum_{i=-1}^{\infty} p_i x_1^i dx_1=p_{-1}\ln x_2+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p_k}{k+1}x_2^{k+1}+f(a) \qquad (۹۲.۸)$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\exp\left(-\int_a^{x_2}\sum_i p_i x_1^i dx_1\right)\\ &=\exp[-f(a)]\,x_2^{-p_{-1}}\exp\left(-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p_k}{k+1}x_2^{k+1}\right)\\ &=\exp[-f(a)]\,x_2^{-p_{-1}}\left[1-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p_k}{k+1}x_2^{k+1}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{1}{2!}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p_k}{k+1}x_2^{k+1}\right)^2+\cdots\right]\end{aligned} \qquad (۹۳.۸)$$

اگر بسط سری اصلی مربوط به ضریب $P(x)$ همگرا باشد، آخرین بسط سری فوق برای تابع‌نمایی نیز مسلماً همگرا خواهدبود.

دربارهٔ مخرج کسر درمعادلهٔ (۶۹.۸) می‌توان به‌ترتیب زیرعمل کرد

$$\left[x_2^{2\alpha} \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x_2^\lambda \right)^2\right]^{-1} = x_2^{-2\alpha} \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x_2^\lambda\right)^{-2}$$

(۹۴.۸)

$$= x_2^{-2\alpha} \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda x_2^\lambda$$

با چشمپوشی از عاملهای ثابت که در هرحال باشرط $W(a)=1$ برچیده خواهند شد، داریم

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x x_2^{-p-1-2\alpha} \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda x_2^\lambda \right) dx_2 \qquad (۹۵.۸)$$

بااستفاده ازمعادلهٔ (۹۰.۸) داریم

$$x_2^{-p-1-2\alpha} = x_2^{-n-1} \qquad (۹۶.۸)$$

وبنابرفرض n عددی است‌درست. بانشاندن این‌نتیجه درمعادلهٔ (۹۵.۸)، خواهیم‌داشت

$$y_2(x) = y_1(x) \int^x (c_0 x_2^{-n-1} + c_1 x_2^{-n} + c_2 x_2^{n+1} + \dots + c_n x^{-1} + \dots) dx_2$$

(۹۷.۸)

انتگرالی‌که درمعادلهٔ (۹۷.۸) ظاهرشده است، ضریب $y_1(x)$ را به صورت دوبخش زیر به‌دست می‌دهد:

۱. یك سری توانی‌که با x^{-n} شروع می‌شود.

۲. یك‌جملهٔ لگاریتمی حاصل‌از انتگرالگیری از x^{-1} (به‌ازای $\lambda = n$). هرگاه n عددی درست باشد، این‌جمله همواره ظاهر می‌شود، مگر آنکه c_n به‌طور اتفاقی صفرشود.[1]

مثال ۴.۶.۸ یکی‌ازجوابهای دیگرمعادلهٔ بسل

ازمعادلهٔ بسل، معادلهٔ (۵۶.۸)[با تقسیم بر x^2 برای ایجاد سازگاری با معادلهٔ (۷۳.۸)]، داریم

$$P(x) = x^{-1} \qquad Q(x) = 1 \qquad \text{برای حالت } n = 0$$

---

۱. به‌خاطر ملاحظات پاریته‌ای، $\ln x$ را به‌صورت $\ln|x|$، یعنی زوج، درنظرمی‌گیرند.

از این‌رو $p_{-1}=1$، $q_0=1$؛ بقیهٔ p_iها و q_jها صفرند. معادلهٔ اندیسی بسل عبارت است از

$$k^2=0$$

[معادلهٔ (۵۹.۸)، با $n=0$]. از این‌رو معادله‌های (۸۸.۸) تا (۹۰.۸) را به ازای $n=\alpha=0$ بررسی می‌کنیم.

اولین‌جواب را از معادلهٔ (۶۴.۸) به‌دست می‌آوریم. برای سازگاری با فصل ۱۱ این‌جواب را مجدداً نمادگذاری می‌کنیم (و a_0 را برابر یك می‌گیریم)، خواهیم‌داشت[1]

$$y_1(x)=J_0(x)=1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{64}-O(x^6) \qquad \text{(۹۸.۸ الف)}$$

اکنون، با نشاندن همهٔ این عبارتها درمعادلهٔ (۸۳.۸) حالت‌خاص متناظر با معادلهٔ (۹۱.۸) را به‌دست می‌آوریم

$$y_2(x)=J_0(x)\int^x \frac{\exp[-\int^{x_2} x_1^{-1}\,dx_1]}{[1-x_2^2/4+x_2^4/64-\dots]^2}dx_2 \qquad \text{(۹۸.۸ب)}$$

ازصورت انتگرالده داریم

$$\exp\left[-\int^{x_2}\frac{dx_1}{x_1}\right]=\exp[-\ln x_2]=\frac{1}{x_2}$$

که‌این عبارت نظیر x_2^{-p-1} در معادلهٔ (۹۳.۸) است. ازمخرج انتگرالده، با به کاربستن بسط دوجمله‌ای، داریم

$$\left[1-\frac{x_2^2}{4}+\frac{x_2^4}{64}\right]^{-2}=1+\frac{x_2^2}{2}+\frac{5x_2^4}{32}+\dots$$

نظیرمعادلهٔ (۹۵.۸)، خواهیم داشت

$$y_2(x)=J_0(x)\int^x\frac{1}{x_2}\left[1+\frac{x_2^2}{2}+\frac{5x_2^4}{32}+\dots\right]dx_2$$

(۹۸.۸ ج)

$$=J_0(x)\left\{\ln x+\frac{x^2}{4}+\frac{5x^4}{128}+\dots\right\}$$

---

۱. حرف O (حرف اول کلمهٔ **order** به‌معنای مرتبه) دراینجا به‌معنای جملات متناسب با توان ششم یا بالاتر x است.

این نتیجه را می‌آزماییم. از معادلهٔ (۶۳.۱۱)، که‌شکل استانـدارد جواب دوم را می‌دهد، داریم

$$N_0(x)=\frac{2}{\pi}[\ln x-\ln 2+\gamma]J_0(x)+\frac{2}{\pi}\left\{\frac{x^2}{4}-\frac{3x^4}{128}+\cdots\right\} \quad (۹۸.۸\ د)$$

دو نکته پیش‌می‌آید: (۱) ازآنجاکه معادلهٔ بسل همگن است، می‌توانیم $y_2(x)$ را در هر ثابتی‌ضرب کنیم. برای آنـکه $y_2(x)$ با $N_0(x)$ جورشود، آن را در $2/\pi$ ضرب می‌کنیم. (۲) به‌این جواب دوم، یعنی $(2/\pi)y_2(x)$، می‌توانیم هرمضرب ثابتی ازجواب اول را بیفزاییم. بازبرای جورشدن با $N_0(x)$ عبارت زیر را می‌افزاییم

$$\frac{2}{\pi}[-\ln 2+\gamma]J_0(x)$$

که درآن γ همان ثابت اویلر-ماشرونی (بخش ۲.۵، جلداول) است.[1] جواب دوم جدید تعدیل‌یافته عبارت است‌از

$$y_2(x)=\frac{2}{\pi}[\ln x-\ln 2+\gamma]J_0(x)+\frac{2}{\pi}J_0(x)\ \left\{\frac{x^2}{4}+\frac{5x^4}{128}+\cdots\right\}$$

(۹۸.۸ ه)

اکنون برای‌مقایسه با $N_0(x)$ فقط باید $J_0(x)$ ازمعادلهٔ (۹۸.۸ الف) را درعبارت داخل آکولاد معادلهٔ (۹۸.۸ ج) ضرب کرد. این‌مقایسه-تاجملاتی ازمرتبهٔ x^2 وx^4 که ما درنظر گرفته‌ایم- تطابق‌کامل را نشان‌می‌دهد. جواب دومی که ازمعادله‌های (۸۳.۸) و (۹۱.۸) به دست‌آوردیم باجواب دوم استاندارد یعنی تابع نویمان $N_0(x)$، سازگاراست.

ازاین تحلیلها، نتیجه می‌گیریم که $y_2(x)$، جواب دوم معادلهٔ (۷۳.۸) را می‌توان به‌صورت زیرنوشت

$$y_2(x)=y_1(x)\ln x+\sum_{j=-n}^{\infty} d_j x^{j+\alpha} \quad (۹۸.۸\ و)$$

یعنی‌به‌صورت اولین‌جواب‌ضرب‌در $\ln x$ ویک‌سری توانی‌دیگر که با $x^{\alpha-n}$ شروع‌می‌شود. یعنی‌اینکه هرگاه ازمعادلهٔ‌اندیسی بخش۵.۸ تنها یك جواب‌سری به‌دست‌آوردیم، باید درپی یك جملهٔ لگاریتمی‌باشیم. باتشخیص جواب‌دوم به‌صورت معادلهٔ (۹۸.۸ و)، می‌توانیم آن را درمعادلهٔ دیفرانسیل‌اصلی بنشانیم و ضریبهای d_j را درست به‌طریق بخش ۵.۸ به‌دست

---

۱. N_0، تابع نویمان، بنابرتعریف عبارت است ازتابعی‌که خواص مجانبی مناسبی کسب کند (بخش ۶.۱۱ را ببینید).

آوریم. خاطرنشان می‌کنیم که نیازی به‌بسط سری $\ln x$ نیست؛ در جانشانی، $\ln x$ حذف می‌شود، ولی مشتقهایش می‌مانند.

جواب‌دوم معمولاً به‌دلیل عامل لگاریتمی و توانهای منفی x در سری، درمبدأ واگرا می‌شود. ازاین‌رو $y_2(x)$ را معمولاً جواب نامنظم می‌نامند. جواب سری نخست، $y_1(x)$، راکه معمولاً درمبدأ همگراست، جواب منظم می‌نامند. رفتار درمبدأ را به‌طورمشروحتر در فصلهای ۱۱ و ۱۲ دربارهٔ تابعهای بسل، تعدیل یافتهٔ بسل، و لژاندر بررسی می‌کنیم.

جمعبندی

دردوبخش اخیر (همراه بامسائل)، حل کامل معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ‌دوم همگن‌خطی، بافرض آنکه نقطهٔ بسط بدتراز یك‌تکینگی منظم‌نباشد، ارائه‌شد. همواره‌می‌توان دست‌کم یك‌جواب را ازطریق جانشانی سری (بخش ۵.۸) به‌دست‌آورد. جواب‌دوم مستقل‌خطی‌را می‌توان‌با استفاده از انتگرال دوگانهٔ رونسکیبی، معادلهٔ (۸۳.۸) به‌دست آورد. همهٔ جوابهای ممکن همین دوتا هستند؛ هیچ جواب مستقل خطی سومی وجود ندارد (با مسئلهٔ ۱۰.۶.۸ مقایسه کنید).

معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ‌دوم خطی ناهمگن یك‌جواب اضافی خواهد داشت: جواب ویژه. این‌جواب ویژه را می‌توان باروش وردش متغیرها، مسئلهٔ ۲۵.۶.۸، یا با تکنیکهایی مانند توابع‌گرین بخش ۷.۸ به‌دست آورد.

مسائل

۱.۶.۸ می‌دانیدکه سه‌بردار $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ متقابلا برهم‌عمودند(متعامدند). نشان‌دهیدکه $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ ازیکدیگر مستقل خطی هستند. یعنی، نشان دهیدکه هیچ رابطه‌ای به‌صورت (۶۷.۸) برای $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ وجود ندارد.

۲.۶.۸ معیار استقلال خطی سه‌بردار $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ عبارت است‌از اینکه معادلهٔ

$$a\mathbf{A}+b\mathbf{B}+c\mathbf{C}=0$$

[مانند (۶۷.۸)] هیچ جوابی‌نداشته باشد مگرجواب بدیهی $a=b=c=0$. بااستفاده‌از مؤلفه‌ها یعنی $\mathbf{A}=(A_1,A_2,A_3)$ والی‌آخر، معیار دترمینانی برای‌وجود یاعدم یك‌جواب غیربدیهی را برای ضرایب a، b، و c به‌دست‌آورید. نشان دهید که این دترمینان معادل ضرب نرده‌ای $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ است.

۳.۶.۸ بااستفاده ازدترمینان رونسکیبی، نشان‌دهیدکه مجموعهٔ توابع

$$\left\{1,\frac{x^n}{n!}(n=1,2,\cdots,N)\right\}$$

مستقل خطی‌اند.

۴.۶.۸ اگر رونسکیی دوتابع y_1 و y_2 متحد باصفر باشد، توسط انتگرالگیری مستقیم نشان دهید که

$$y_1 = c y_2$$

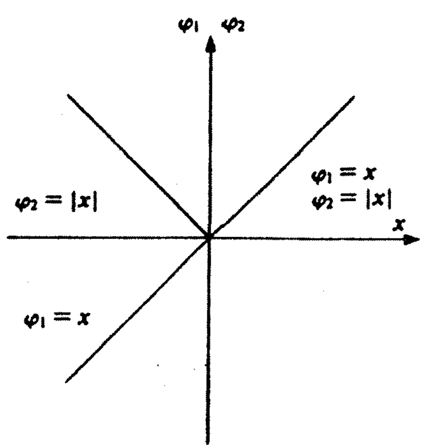
یعنی، y_1 و y_2 بهم وابسته‌اند. برای اثبات فرض کنید که دوتابع، مشتقهای پیوسته دارند و دست کم یکی از دوتابع در بازهٔ موردنظر صفر نمی‌شود.

۵.۶.۸ رونسکیی دوتابع در $x = x_0$ صفرشده است. نشان‌دهید که این رونسکیی به‌ازای همهٔ xها صفرمی‌شود وتوابع وابستهٔ خطی‌اند.

۶.۶.۸ سه‌تابع $\sin x$، e^x، و e^{-x} مستقل خطی‌اند. هیچیك را نمی‌توان به‌صورت ترکیب خطی دوتای دیگر نوشت. نشان‌دهید که رونسکیی $\sin x$، e^x، و e^{-x}، تنها درنقاطی‌منزوی، صفر می‌شود.

پاسخ. $W = 4\sin x$؛ که به‌ازای $x = \pm n\pi$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$، $W = 0$.

۷.۶.۸ دوتابع $\varphi_1 = x$ و $\varphi_2 = |x| = x\,\mathrm{sgn}^* x$ را درنظر بگیرید (شکل ۴.۸). تابع $\mathrm{sgn}\, x$ فقط همان علامت x است. ازآنجاکه $\varphi_1' = 1$ و $\varphi_2' = \mathrm{sgn}\, x$، برای هر بازه‌ای، از جمله $[-1, +1]$، داریم: $W(\varphi_1, \varphi_2) = 0$. آیا صفرشدن رونسکیی در بازهٔ $[-1, +1]$ وابستگی‌خطی φ_1 و φ_2 را اثبات می‌کند؟ روشن‌است که φ_1 و φ_2 مستقل‌خطی نیستند. اشکال موضوع درکجاست؟



شکل ۴.۸ x و $|x|$.

---

* منظوراز sgn، signum است‌که $\mathrm{sgn}\, 0 = 0$ و به‌ازای $x \neq 0$، $\mathrm{sgn}\, x = x/|x|$.

۸.۶.۸ توضیح دهید که استقلال خطی به‌منزلهٔ عدم‌هرگونه وابستگی نیست. جواب خود را به‌کمك $\cosh x$ و e^x نمایش دهید.

۹.۶.۸ معادلهٔ دیفرانسیل لژاندر

$$(۱-x^۲)y''-۲xy'+n(n+۱)y=۰$$

یك جواب منظم $P_n(x)$ ویك جواب نامنظم $Q_n(x)$ دارد. نشان دهید که رونسکیی P_n و Q_n ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$P_n(x)Q'_n(x)-P'_n(x)Q_n(x)=\frac{A_n}{۱-x^۲}$$

که در آن A_n مستقل از x است.

۱۰.۶.۸ به‌کمك رونسکیی نشان‌دهید که معادلهٔ دیفرانسیل همگن مرتبهٔ دوم خطی

$$y''(x)+P(x)y'(x)+Q(x)y(x)=۰$$

نمی‌تواند سه‌جواب مستقل‌داشته باشد. (فرض‌کنیدکه جواب‌سومی وجود دارد ونشان‌دهید که رونسکیی به‌ازای همهٔ xها صفرمی‌شود.)

۱۱.۶.۸ معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم‌خطی

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=۰$$

را با جانشانی زیر تبدیل کنید

$$y=z\exp\left[-\frac{۱}{۲}\int^x P(t)dt\right]$$

ونشان دهیدکه معادلهٔ دیفرانسیل حاصل برای تابع z به‌صورت زیراست

$$z''+q(x)z=۰$$

که در آن

$$q(x)=Q(x)-\frac{۱}{۲}P'(x)-\frac{۱}{۴}P^۲(x)$$

یادآوری. این‌جانشانی را می‌توان با تکنیك مطرح شده درمسئلهٔ ۲۴.۶.۸ استخراج کرد.

۱۲.۶.۸ با بهره‌گیری‌ازنتیجهٔ مسئلهٔ ۱۱.۶.۸ نشان‌دهید که درمختصات‌قطبی کروی، می‌توان

انتظار داشت که، قرارگرفتن $r\varphi(r)$ به‌جای $\varphi(r)$، مشتق مرتبهٔ اول را در لاپلاسی حذف کند. مسئلهٔ ۱۸.۵.۲ (ب) را هم ببینید.

۱۳.۶.۸ با مشتقگیری مستقیم و جانشانی نشان‌دهید عبارت

$$y_2(x)=y_1(x)\int^x \frac{\exp[-\int^s P(t)dt]}{[y_1(s)]^2}ds$$

درمعادلهٔ

$$y_2''(x)+P(x)y_2'(x)+Q(x)y_2(x)=0$$

صدق می‌کند.

یادآوری. فرمول لایب‌نیتس برای مشتقگیری ازیك انتگرال به‌صورت زیر است

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx=\int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)}\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx$$
$$+f[h(\alpha),\alpha]\frac{dh(\alpha)}{d\alpha}-f[g(\alpha),\alpha]\frac{dg(\alpha)}{d\alpha}$$

۱۴.۶.۸ درمعادلهٔ

$$y_2(x)=y_1(x)\int^x \frac{\exp[-\int^s P(t)dt]}{[y_1(s)]^2}ds$$

که درآن $y_1(x)$ درمعادلهٔ زیرصادق است

$$y_1''+P(x)y_1'+Q(x)y_1=0$$

وتابع $y_2(x)$ یك‌جواب دوم مستقل خطی همین معادله است. نشان‌دهیدکه افزودن حدود پایین دو انتگرال به‌هیچ چیز تازه‌ای منجر نمی‌شود، یعنی یایك ضریب کلی ویا مضربی از جواب معلوم $y_1(x)$ را اضافه می‌کند.

۱۵.۶.۸ با دراختیار داشتن جواب معادلهٔ

$$R''+\frac{1}{r}R'-\frac{m^2}{r^2}R=0$$

به‌صورت $R=r^m$، نشان دهیدکه می‌توان به‌کمك معادلهٔ (۸۳.۸) جواب دومی به‌صورت $R=r^{-m}$ پیش‌بینی کرد.

۱۶.۶.۸ بااستفاده از $y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$ به‌عنوان یك‌جواب معادلهٔ نوسانگر خطی، تحلیلی را دنبال کنید که به‌معادلهٔ (۹۸.۸ و) منتهی‌شد، ونشان دهید که $c_1=0$؛ درنتیجه جواب دوم دراین‌حالت شامل جملهٔ لگاریتمی نمی‌شود.

۱۷.۶.۸ نشان دهیدکه جواب دوم معادلهٔ بسل که ازمعادلهٔ (۸۳.۸) به‌دست‌می‌آید،هرگاه n عدد درستی نباشد. شامل جملهٔ لگاریتمی نیست.

۱۸.۶.۸ (الف)یکی‌از جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل هرمیت

$$y''-2xy'+2\alpha y=0$$

به‌ازای $\alpha=0$ عبارت است از $y_1(x)=1$. بااستفاده ازمعادلهٔ (۸۳.۸)، جواب دوم یا، $y_2(x)$، را پیداکنید. نشان‌دهیدکه جواب دوم شما معادل $y_{\text{فرد}}$ (مسئلهٔ ۱۶.۵.۸) است.

(ب) با استفاده از معادلهٔ (۸۳.۸) جواب دوم را برای حالت $\alpha=1$، که در آن $y_1(x)=x$، پیدا کنید. نشان دهیدکه جواب دوم شما معادل $y_{\text{زوج}}$ (مسئلهٔ ۶.۵.۸) است.

۱۹.۶.۸ یکی‌ازجوابهای معادلهٔ دیفرانسیل لاگر

$$xy''+(1-x)y'+ny=0$$

به‌ازای $n=0$ عبارت است‌از $y_1(x)=1$. بااستفاده ازمعادلهٔ (۸۳.۸) یك جواب مستقل خطی‌دوم به‌دست آورید. جملهٔ لگاریتمی را به‌روشنی نمایش‌دهید.

۲۰.۶.۸ برای معادلهٔ لاگر به‌ازای $n=0$، داریم

$$y_2(x)=\int^x \frac{e^s}{s}ds$$

(الف)$y_2(x)$ را به‌صورت یك‌لگاریتم به‌اضافهٔ یك‌سری توانی بنویسید.

(ب) بامشتقگیری مستقیم ازصورت انتگرالی $y_2(x)$ که دربالا داده‌شد، و نشاندن آن درمعادلهٔ دیفرانسیل، تحقیق کنیدکه$y_2(x)$ یکی‌ازجوابهای معادلهٔ لاگر($n=0$) است.

(ج) بامشتقگیری‌از $y_2(x)$ به‌صورت سری بند (الف) ونشاندن‌آن در معادلهٔ لاگر تحقیق‌کنیدکه این‌هم جواب‌معادلهٔ لاگر است.

۲۱.۶.۸ یکی‌ازجوابهای معادلهٔ چبیشف

$$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$$

به‌ازای $n=0$ عبارت است‌از $y_1=1$.

(الف) با استفاده از معادلهٔ (۸۳.۸) جواب مستقل‌خطی دیگری را به‌دست آورید.
(ب) با انتگرالگیری مستقیم از معادلهٔ چبیشف یک‌جواب دوم به‌دست آورید.
راهنمایی. قراردهید $v=y'$، آنگاه انتگرال بگیرید. نتیجه را با جواب دوم بخش ۳.۱۳ مقایسه کنید.
پاسخ. (الف) $y_{۲}=\sin^{-۱}x$، (ب) پاسخ دوم، $V_n(x)$، به‌ازای $n=۰$ تعریف‌نشده‌است.

۲۲.۶.۸ یکی‌ازجوابهای معادلهٔ چبیشف

$$(۱-x^{۲})y''-xy'+n^{۲}y=۰$$

به‌ازای $n=۱$ عبارت‌است از $y_{۱}(x)=x$. جواب انتگرال دوگانهٔ رونسکیی این معادله را بنویسید وجواب‌دوم $y_{۲}(x)$ را استخراج کنید.
پاسخ. $y_{۲}=-(۱-x^{۲})^{۱/۲}$.

۲۳.۶.۸ معادلهٔ موج شرودینگرشعاعی به‌صورت زیراست

$$\left[-\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\frac{d^{۲}}{dr^{۲}}+l(l+۱)\frac{\hbar^{۲}}{۲mr^{۲}}+V(r)\right]y(r)=Ey(r)$$

انرژی‌پتانسیل $V(r)$ را می‌توان به‌صورت زیر، حول‌مبدأ بسط داد

$$V(r)=\frac{b_{-۱}}{r}+b_{۰}+b_{۱}r+\cdots$$

(الف) نشان دهید که یک‌جواب (منظم) وجوددارد که با $r^{l+۱}$ شروع می‌شود.
(ب) به‌کمک معادلهٔ (۸۴.۸) نشان دهید که جواب نامنظم درمبدأ به‌صورت r^{-l} واگرا می‌شود.

۲۴.۶.۸ نشان دهید که اگر جواب، $y_{۲}$، را به‌صورت $y_{۲}(x)=y_{۱}(x)f(x)$ فرض کنیم، آنگاه نشاندن این‌جواب درمعادلهٔ اصلی

$$y_{۲}''+P(x)y_{۲}'+Q(x)y_{۲}=۰$$

به تابع زیر می‌انجامد

$$f(x)=\int^{x}\frac{\exp[-\int^{s}P(t)dt]}{[y_{۱}(s)]^{۲}}\,ds$$

که با معادلهٔ (۸۳.۸) سازگار است.

۲۵.۶.۸ اگر معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم خطی ما ناهمگن، یعنی به‌صورت معادلهٔ (۳۸.۸) باشد، کلیترین جواب آن عبارت است‌از

$$y(x)=y_1(x)+y_2(x)+y_p(x)$$

(y_1 و y_2 جوابهای معادلهٔ همگن‌اند.) نشان‌دهید که

$$y_p(x)=y_2(x)\int^x \frac{y_1(s)F(s)ds}{W\{y_1(s),y_2(s)\}}-y_1(x)\int^x \frac{y_2(s)F(s)ds}{W\{y_1(s),y_2(s)\}}$$

که در آن $W\{y_1(s),y_2(s)\}$ رونسکیی $y_1(s)$ و $y_2(s)$ است.

راهنمایی. مانند مسئلهٔ ۲۴.۶.۸ قرار دهید $y_p(x)=y_1(x)v(x)$، و یك معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول برای $v'(x)$ به‌دست آورید.

۲۶.۶.۸ (الف) نشان دهید که

$$y''+\frac{1-\alpha^2}{4x^2}y=0$$

دارای دو جواب زیر است

$$y_1(x)=a_0x^{(1+\alpha)/2}$$

$$y_2(x)=a_0x^{(1-\alpha)/2}$$

(ب) دو جواب مستقل‌خطی بند (الف)، به‌ازای $\alpha=0$، به $y_{10}=a_0x^{1/2}$ تقلیل پیدا می‌کنند. با استفاده ازمعادلهٔ (۸۴.۸) جواب دوم زیر را استخراج کنید

$$y_{20}(x)=a_0x^{1/2}\ln x$$

تحقیق کنید که y_{20} نیز یکی‌از جوابهاست.

(ج) نشان‌دهید که جواب‌دوم بند (ب) را می‌توان به‌صورت یك‌حالت حدی‌از دو جواب بند (الف) به‌قرار زیر به‌دست آورد

$$y_{20}(x)=\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{y_1-y_2}{\alpha}\right)$$

۷.۸ معادلهٔ ناهمگن ـ تابعهای گرین

با جانشانی سری بخش ۵.۸ وانتگرال دوگانهٔ رونسکیی بخش۶.۸ کلیترین جواب‌معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ‌دوم خطی همگن به‌دست آمد. جواب اختصاصی y_p را، که وابستهٔ خطی

جملهٔ چشمه[$F(x)$ درمعادلهٔ(۷۸.۸)]است می‌توان باروش وردش پارامترها به‌دست‌آورد (مسئلهٔ ۲۵.۶.۸). دراین بخش به‌روش حل دیگری، یعنی روش تابعهای گرین‌می‌پردازیم.

برای آشنایی مختصری باروش تابع گرین، به‌صورتی که درحل معادلهٔ دیفرانسیل جزئی ناهمگن به‌کار می‌رود، بهتر است که از شبیه الکتروستاتیکی این روش بهره‌گیریم. پتانسیل الکتروستاتیکی ψ، درحضوربارها، درمعادلهٔ ناهمگن پواسون صدق‌می‌کند(با بخش ۱۴.۱ مقایسه‌کنید)

$$\nabla^{۲}\psi=-\frac{\rho}{\varepsilon_{\circ}} \quad (\text{برحسب یکاهای } \mathrm{mks}) \tag{۹۹.۸}$$

ودرغیاب بارهای الکتریکی $(\rho=\circ)$، درمعادلهٔ همگن لاپلاس

$$\nabla^{۲}\psi=\circ \tag{۱۰۰.۸}$$

اگر بارها به‌صورت بارهای نقطه‌ای q_i باشند، می‌دانیم‌که جواب عبارت است‌از

$$\psi=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\sum_i\frac{q_i}{r_i} \tag{۱۰۱.۸}$$

که یك برهم نهی‌است ازجوابهای مربوط به‌یك بارنقطه‌ای‌که ازقانون کولن برای نیروی بین دوبارنقطه‌ای $q_۱$ و $q_۲$، یعنی

$$\mathbf{F}=\frac{q_۱q_۲\mathbf{r}_{\circ}}{۴\pi\varepsilon_{\circ}r^{۲}} \tag{۱۰۲.۸}$$

به‌دست می‌آید. پس از نشاندن یك توزیع بار هموار، با چگالی بار ρ، به جای بارهای نقطه‌ای گسسته، معادلهٔ (۱۰۱.۸) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\psi(r=\circ)=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\int\frac{\rho(\mathbf{r})}{r}d\tau \tag{۱۰۳.۸}$$

یا، برای پتانسیل درنقطهٔ $\mathbf{r}=\mathbf{r}_۱$ ازمبدأ وبار $\mathbf{r}=\mathbf{r}_۲$

$$\psi(\mathbf{r}_۱)=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{\circ}}\int\frac{\rho(\mathbf{r}_۲)}{|\mathbf{r}_۱-\mathbf{r}_۲|}d\tau_۲ \tag{۱۰۴.۸}$$

تابع دلتای دیراك

یکی‌ازشیوه‌های صوری استخراج وتعمیم این‌نتیجه بهره‌گیری از $\delta(x)$، تابع دلتای‌دیراك،

مانند بخش ۱۵.۱ (جلد اول)، است. تابع دلتای‌دیراك برای حالت یك بعدی بنابرتعریف غالباً دارای خواص زیراست

$$\delta(x)=0, \qquad x\neq 0 \tag{۱۰۵.۸}$$

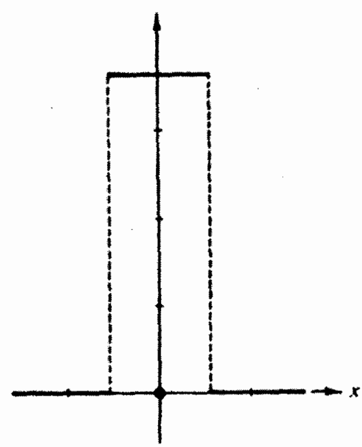
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1 \tag{۱۰۶.۸}$$

و

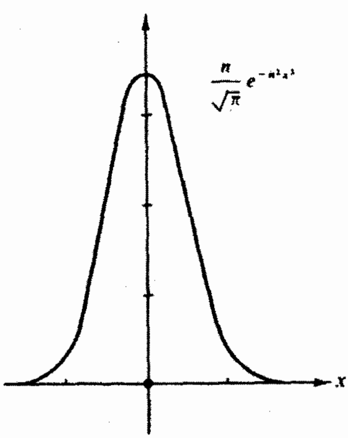
$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x)dx=f(0) \tag{۱۰۷.۸}$$

دراینجا فرض‌می‌شودکه $f(x)$ در $x=0$ پیوسته است.

$\delta(x)$، مطابق این معادلات باید معرف یك میلهٔ بینهایت بلند و بینهایت باریك باشد، مانند توصیف یك نیروی ضربه‌ای (بخش ۹.۱۵ را ببینید) یا چگالی بار یك بار نقطه‌ای.[۱] مسئله این است که، به‌معنای متداول تابع، چنین تابعی وجود ندارد. تابع دلتا را می‌توان با تقریب به‌وسیلهٔ تابعهای مختلفی، معادله‌های(۱۰۸.۸) تا (۱۱۱.۸) وشکلهای ۵.۸ تا ۸.۸، نمایش داد



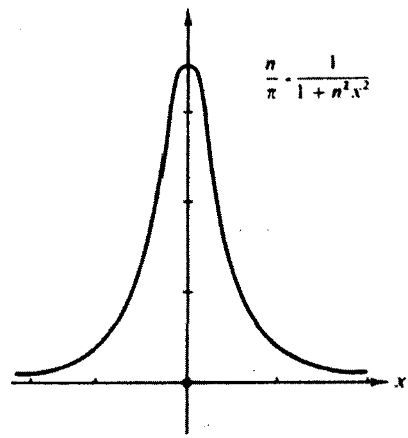
شکل ۵.۸ تابع دنبالهٔ δ.



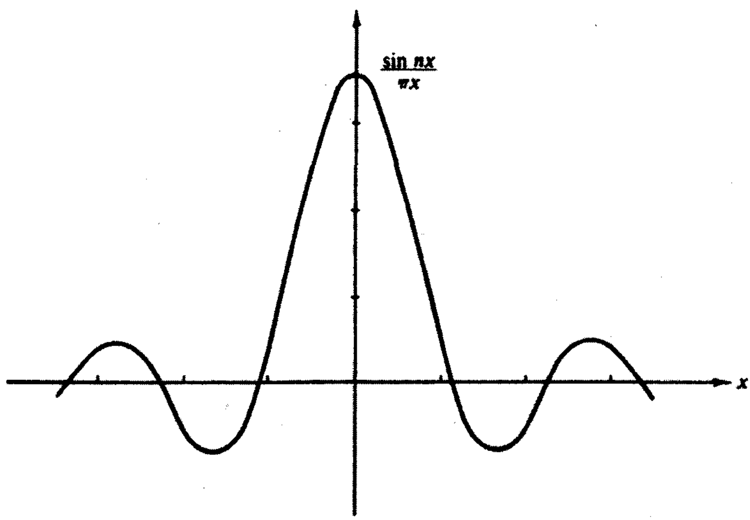
شکل ۶.۸ تابع دنبالهٔ δ.

---

۱. تابع دلتا را بارها برای توصیف نیروهای بسیار کوتاه‌برد، مانند نیروهای هسته‌ای، به‌کار می‌برند. تابع دلتا دربهنجارش تابع موجهای پیوسته درمکانیك کوانتومی نیز به‌کار می‌رود. با معادلهٔ (۲۱.۱۵ د) برای ویژه تابعهای موج تخت مقایسه کنید.



شکل ۷۰۸ تابع دنبالهٔ دلتا.



شکل ۸۰۸ تابع دنبالهٔ δ.

$$\delta_n(x)=\begin{cases} ۰, & x<-\frac{۱}{۲n} \\ n, & -\frac{۱}{۲n}<x<\frac{۱}{۲n} \\ ۰, & x>\frac{۱}{۲n} \end{cases} \tag{۱۰۸۰۸}$$

$$\delta_n(x)=\frac{n}{\sqrt{\pi}}\exp(-n^۲x^۲) \qquad (۱۰۹.۸)$$

$$\delta_n(x)=\frac{n}{\pi}\cdot\frac{۱}{۱+n^۲x^۲} \qquad (۱۱۰.۸)$$

$$\delta_n(x)=\frac{\sin nx}{\pi x}=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-n}^{n} e^{ixt}\,dt \qquad (۱۱۱.۸)$$

میزان سودمندی این تقریبها فرق می‌کند. معادلهٔ (۱۰۸.۸) در استخراج سادهٔ خاصیت انتگرالی، معادلهٔ (۱۰۷.۸)، مفید واقع می‌شود. معادلهٔ (۱۰۹.۸) برای مشتقگیری مناسب است. مشتقهای آن، چند جمله‌ایهای هرمیت، معادلهٔ (۷.۱۳)، را به دست می‌دهند. معادلهٔ (۱۱۱.۸) به‌ویژه در آنالیز فوریه وکاربردهای مکانیك کوانتومی به‌کار می‌رود. معادلهٔ (۱۱۱.۸) درنظریهٔ سری فوریه، غالباً به‌صورت (تعدیل‌یافتهٔ) هستهٔ دیریکله ظاهر می‌شود

$$\delta_n(x)=\frac{۱}{۲\pi}\,\frac{\sin[(n+\frac{۱}{۲})x]}{\sin(\frac{۱}{۲}x)} \qquad (۱۱۲.۸)$$

به‌هنگام استفاده از این تقریبها درمعادلهٔ (۱۰۷.۸) ومعادلات بعدی، فرض می‌کنیم که $f(x)$ خوشرفتار است، یعنی درمقادیر بزرگ x مشکلی پیش نمی‌آورد.

دراکثر موارد فیزیکی چنین تقریبهایی کاملا کفایت می‌کنند. ولی وضعیت از دیدگاه ریاضی هنوز رضایت‌بخش نیست. حدهای

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n(x)$$

وجود ندارد.

یکی از راههای گریز از این مشکل توسل به نظریهٔ توزیعهاست. با تشخیص اینکه معادلهٔ (۱۰۷.۸) خاصیتی بنیادی به‌شمار می‌آید، به‌جای آنکه به $\delta(x)$ توجه کنیم، نظرخود را به‌این خاصیت معطوف خواهیم کرد. معادله‌های (۱۰۸.۸) تا (۱۱۱.۸)، به ازای $n=۱,۲,۳,\ldots$، را می‌توان به‌عنوان دنباله‌ای ازتوابع بهنجار زیردرنظرگرفت

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_n(x)dx=۱ \qquad (۱۱۳.۸)$$

حد دنبالهٔ انتگرالها عبارت است‌از

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_n(x)f(x)dx=f(0) \qquad (۱۱۴.۸)$$

کاملا توجه کنید که معادلهٔ (۱۱۴.۸) حد دنبالهای از انتگرالها بهشمار میآید. باز هم در $n\to\infty$ حد $\delta_n(x)$ وجود ندارد. [این حدها برای هرچهار صورت $\delta_n(x)$ در $x=0$ واگرا میشوند.]

$\delta(x)$ را میتوانیم، چنانچه سازگار باشد، بهصورت زیر درنظر بگیریم

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_n(x)f(x)dx \qquad (۱۱۵.۸)$$

$\delta(x)$ را یك توزیع (نهیك تابع) مینامیم که، مطابقمعادلهٔ (۱۱۵.۸)، بنابرتعریف عبارت است از دنبالههای $\delta_n(x)$. تأکید میکنیم که انتگرال سمت چپ معادلهٔ (۱۱۵.۸) نهیك انتگرال ریمان[1]، بلکه یكحد است.

این توزیع $\delta(x)$ تنها یکیاز بینهایتتوزیع ممکناست، ولی همان توزیعیاست که بهاعتبار معادلهٔ (۱۰۷.۸) مورد نظرماست.

$\delta(x)$ را بارها بهکار خواهیم برد و آن را به دلایل تاریخی، تابع دلتـای دیراك[2] مینامیم. بهخاطر داشته باشیدکه $\delta(x)$ در حقیقت یكتابع نیست بلکه اساساً یکی ازموارد نمادگـذاری برای کوتـاه نویسی است که تلویحاً، بنابرمعادلهٔ (۱۱۵.۸)، به عنـوان حد انتگرالهای دنبالهٔ $\delta_n(x)$ تعریف میشود. باید دانست که تابع دلتای دیراك تنها به عنوان بخشی از انتگرالده معتبر است وهرگز یك نتیجهٔ نهایی بهشمار نمیآید. دراینقالب، تابع دلتای دیراك بیشتر بهعنوان یك عملگر، عملگـری خطی، درنظر گرفته میشود: $\delta(x-x_0)$ روی $f(x)$ عمل میکند وحاصل آن $f(x_0)$ است

$$\mathcal{L}(x_0)f(x)\equiv\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)f(x)dx=f(x_0) \qquad (۱۱۶.۸)$$

این تابع را میتوان بهعنوان یكنگاشت خطی، ویا بهبیان ساده بهعنوان یكتابع تعمیمیافته نیز ردهبنـدی کرد. با انتقال تکینگی بهنقطهٔ $x=x'$ تابع دلتـای دیراك را به صورت

---

۱. درصورت تمایل میتوان آن را یك انتگرال استیلجس گرفت. $du(x)$ را بهجای $\delta(x)dx$ مینشانیم، که درآن $u(x)$ تابع پلهای هویساید است (با مسئلهٔ ۱۳.۷.۸ مقایسهکنید).

۲. دیراك، تابع دلتا راوارد مکانیككوانتومیکرد. نشانههای تابع دلتا عملاً بهکیرشهوف،سال ۱۸۸۲ ، میرسد. برای توضیح بیشتر دراین خصوص، مراجعهکنید به:

Jammer, M., *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York (1966).

$\delta(x-x')$ می‌نویسیم. معادلهٔ (۱۰۷.۸) به‌این‌صورت درمی‌آید

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x')dx = f(x') \qquad (۱۱۷.۸)$$

برای توصیف تکینگی در $x=x'$، تابع دلتای دیراك را می‌توان به صورت $\delta(x-x')$ یا $\delta(x'-x)$ نوشت. درسه بعد وبااستفاده ازمختصات قطبی کروی داریم

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\delta(\mathbf{r})r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \iiint_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\delta(y)\delta(z)dx\,dy\,dz = 1$$
(۱۱۸.۸)

این معادله متناظر است با یك تکینگی (یا چشمه) در مبدأ. در اینجا نیز، اگر چشمه در $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1$ واقع باشد، معادلهٔ (۱۱۸.۸) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\iiint \delta(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)r_2^2 dr_2 \sin\theta_2 d\theta_2 d\varphi_2 = 1 \qquad (۱۱۹.۸)$$

همان‌گونه‌که قبلا توضیح دادیم

$$\delta(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1) = \delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) \qquad (۱۲۰.۸)$$

معادلهٔ پواسون ــ جواب تابع گرین

به‌مسئلهٔ الکتروستاتیکی خود بازگردیم، که ψ پتانسیل متناظر بایك توزیع بارمعلوم است‌و ازاین‌رو درمعادلهٔ پواسون صدق می‌کند

$$\nabla^2\psi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (۱۲۱.۸)$$

به‌یك تابع G، که آن‌را تابع گرین می‌نامیم، نیاز داریم‌که درمعادلهٔ پواسون با یك چشمهٔ نقطه‌ای درنقطهٔ $\mathbf{r}_2$، صدق کند

$$\nabla^2 G = -\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) \qquad (۱۲۲.۸)$$

پس، ازنظرفیزیکی، G عبارت است‌ازپتانسیل درنقطهٔ $\mathbf{r}_1$ متناظر با بار واحد (ε_0) در $\mathbf{r}_2$. با بهره‌گیری ازقضیهٔ گرین (بخش ۱۱.۱، جلد اول) داریم

$$\int(\psi\nabla^2 G - G\nabla^2\psi)d\tau_2 = \int(\psi\nabla G - G\nabla\psi)\cdot d\boldsymbol{\sigma} \qquad (۱۲۳.۸)$$

بافرض آنکه انتگرالــده سریعتراز r^{-2} کوچك می‌شود، می‌توانیم با در نظر گرفتن حجم چندان بزرگی که انتگرال سطحی روی آن صفر شود، مسئله را به‌صورت زیر ساده کنیم

$$\int \psi \nabla^2 G d\tau_2 = \int G \nabla^2 \psi d\tau_2 \qquad (124.8)$$

ویا ازطریق جانشانی ازمعادله‌های (۱۲۱.۸) و (۱۲۲.۸)، داریم

$$-\int \psi(\mathbf{r}_2)\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)d\tau_2 = -\int \frac{G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\rho(\mathbf{r}_2)}{\varepsilon_0}d\tau_2 \qquad (125.8)$$

از طریــق انتگرالگیری با استفاده از خاصیت معرف تابــع دلتای دیراك [معادلــهٔ (۱۰۷.۸)] به‌عبارت زیرمی‌رسیم

$$\psi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\rho(\mathbf{r}_2)d\tau_2 \qquad (126.8)$$

توجه کنیدکه ازمعادلهٔ (۱۲۲.۸) برای حذف $\nabla^2 G$ استفاده کرده‌ایم ولی‌خود تابع G هنوز نامعلوم است. دربخش ۱۴.۱، دربارهٔ قانون گاؤس، به‌این‌نتیجه رسیدیم‌که

$$\int \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)d\tau = \begin{cases} 0 \\ -4\pi \end{cases} \qquad (127.8)$$

این انتگرال در صورتی صفر است که مبدأ درآن نگنجد و در حالتی برابر -4π است کــه مبدأ در درون حجم واقع باشد. این نتیجهٔ بخش ۱۴.۱ را می‌توان به صورت زیــر بازنویسی‌کرد

$$\nabla^2\left(\frac{1}{4\pi r_{12}}\right) = -\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) \quad \text{یا} \quad \nabla^2\left(\frac{1}{4\pi r}\right) = -\delta(\mathbf{r}) \qquad (128.8)$$

که معادلهٔ سمت‌چپ با انتقال بار الکتروستاتیکی از مبدأ به‌مکان $\mathbf{r}=\mathbf{r}_2$، متناظر است. در اینجا $r_{12}=|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|$، وتابع دلتای دیراك $\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$، جزدر $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2$، صفر می‌شود. بنابراین بامقایسهٔ معادله‌های (۱۲۲.۸) و (۱۲۸.۸)، تابع G (تابع‌گرین) به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|} \qquad (129.8)$$

جواب معادلهٔ دیفرانسیل، (معادلهٔ پواسون) عبارت است از

$$\psi(\mathbf{r}_1)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}d\tau_2 \qquad (۱۳۰.۸)$$

که بامعادلهٔ (۱۰۴.۸) کاملا سازگار است. $\psi(\mathbf{r}_1)$، معادلهٔ (۱۳۰.۸)، درواقع جواب اختصاصی معادلهٔ پواسون است. می‌توان جوابهای معادلهٔ لاپلاس را به‌این جواب افزود [بامعادلهٔ (۳۹.۸) مقایسه‌کنید]. به‌اتکای این‌جوابها می‌توان میدان‌خارجی را توصیف کرد.

این نتایج‌در بخشهای ۵.۱۶و۶.۱۶ به‌معادلهٔ دیفرانسیل خطی‌مرتبهٔ دوم، ولی‌ناهمگن، زیر تعمیم داده می‌شوند

$$\mathscr{L}y(\mathbf{r}_1)=-f(\mathbf{r}_1) \qquad (۱۳۱.۸)$$

تابع‌گرین جواب معادلهٔ زیر است

$$\mathscr{L}G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=-\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) \qquad (۱۳۲.۸)$$

[شبیه معادلهٔ (۱۲۲.۸)]. پس، جواب‌اختصاصی $y(\mathbf{r}_1)$ عبارت است‌از

$$y(\mathbf{r}_1)=\int G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)f(\mathbf{r}_2)d\tau_2 \qquad (۱۳۳.۸)$$

(ممکن است بسته‌به‌شرایط مشخص‌شده، یك‌انتگرال روی‌سطح مرزی نیزوجود داشته‌باشد.)

به‌طورخلاصه، تابع گرین، که به‌یاد گرین غالباً به‌صورت $G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ نوشته می‌شود، جواب معادلهٔ (۱۲۲.۸) است. این تابع دریك‌جواب انتگرالی معادلهٔ دیفرانسیل، مانند معادلهٔ (۱۰۴.۸)، وارد می‌شود. درحالت‌ساده ولی بااهمیت الکتروستاتیکی، تابع گرین، $G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$، را به‌کمك قانون گاؤس وبامقایسهٔ معادله‌های (۱۲۲.۸) و (۱۲۸.۸) به‌دست آوردیم. سرانجام، بااستفاده ازجواب آخری [معادلهٔ (۱۳۰.۸)] می‌توان تابع‌گرین رااز نظرفیزیکی تفسیر کرد. این‌تابع به‌صورت یك‌تابع وزنی یا تابع تأثیرپدیدار می‌شود واثر عنصربار $\rho(\mathbf{r}_2)d\tau_2$ را مطابق فاصله‌اش تا $\mathbf{r}_1$، نقطهٔ میدان، افزایش یا کاهش می‌دهد. $G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$، تابع‌گرین، اثر یك چشمهٔ نقطه‌ای واحد در $\mathbf{r}_2$ را برای ایجاد پتانسیل در $\mathbf{r}_1$ به‌دست می‌دهد. تابع‌گرین به‌همین‌نحو درمعادلهٔ (۱۲۲.۸) وارد شد؛ و به‌همین‌نحو هم در معادلهٔ (۱۳۰.۸) ظاهرمی‌شود.

تقارن تابع گرین

یکی‌از خواص مهم تابع گرین تقارن دومتغیر آن است، یعنی

$$G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=G(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1) \qquad (۱۳۴.۸)$$

هرچند این‌تقارن درحالت الکتروستاتیکی که دربالا بررسی‌کردیم آشکار است، ولی‌آن را

می‌توان درشرایط بسیار کلیتری اثبات کرد. به‌جای معادلهٔ (۱۲۲.۸) فرض کنیدکه $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)$ درمعادلهٔ زیر[1] صدق کند

$$\nabla\cdot[p(\mathbf{r})\nabla G(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)]+\lambda q(\mathbf{r})G(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)=-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) \qquad (۱۳۵.۸)$$

که متناظر است با یك چشمهٔ نقطه‌ای ریاضی در $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1$. در اینجا توابع $p(\mathbf{r})$ و $q(\mathbf{r})$، توابعی خوشرفتار ولی‌اختیاری از $\mathbf{r}$ هستند. تابع‌گرین $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_2)$ نیز درهمین معادله صدق می‌کند، با این تفاوت که به‌جای شاخص پایین ۱ باید شاخص پایین ۲ را به‌کار برد

$$\nabla\cdot[p(\mathbf{r})\nabla G(\mathbf{r},\mathbf{r}_2)]+\lambda q(\mathbf{r})G(\mathbf{r},\mathbf{r}_2)=-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2) \qquad (۱۳۶.۸)$$

که درآن $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_2)$ نوعی پتانسیل است در $\mathbf{r}$، که توسط چشمهٔ نقطه‌ای واحد در $\mathbf{r}_2$ به وجود آمده‌است. معادلهٔ مربوط به $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)$ را در $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_2)$، ومعادلهٔ مربوط به $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_2)$ را در $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)$ ضرب و این دورا ازهم‌کم می‌کنیم

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_2)\nabla\cdot[p(\mathbf{r})\nabla G(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)]-G(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\nabla\cdot[p(\mathbf{r})\nabla G(\mathbf{r},\mathbf{r}_2)]$$
$$=-G(\mathbf{r},\mathbf{r}_2)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)+G(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2) \qquad (۱۳۷.۸)$$

اولین جمله درمعادلهٔ (۱۳۷.۸)، یعنی

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_2)\nabla\cdot[p(\mathbf{r})\nabla G(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)]$$

را می‌توان باعبارت زیرعوض کرد

$$\nabla\cdot[G(\mathbf{r},\mathbf{r}_2)p(\mathbf{r})\nabla G(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)]-\nabla G(\mathbf{r},\mathbf{r}_2)\cdot p(\mathbf{r})\nabla G(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)$$

جملهٔدوم را نیز می‌توان به‌همین‌ترتیب تبدیل کرد. سپس باانتگرالگیری‌روی هرنوع‌حجمی که درمسئله مطرح است، وبااستفاده ازقضیهٔ‌گرین، انتگرال سطحی زیررا به‌دست‌می‌آوریم

$$\int_S [G(\mathbf{r},\mathbf{r}_2)p(\mathbf{r})\nabla G(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)-G(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)p(\mathbf{r})\nabla G(\mathbf{r},\mathbf{r}_2)]\cdot d\sigma$$
$$=-G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)+G(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1) \qquad (۱۳۸.۸)$$

جملات سمت‌راست باانتگرالگیری حجمی ازتوابع دلتای دیراك به‌دست آمده‌اند. با این شرط که توابع‌گرین، $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)$ و $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_2)$، روی‌سطح S دارای یك‌مقدار باشند ومشتقهای

---

۱. معادلهٔ (۱۳۵.۸) یك صورت سه‌بعدی ازمعادلهٔ ویژه مقداری خود-الحاقی، یعنی معادلهٔ (۴.۹)، است.

نرمال آنها روی سطح S دارای مقداریکسانی باشند، یا این‌شرط که توابع گرین روی‌سطح S صفرشوند(شرایط مرزی‌دیریکله، بخش۱.۹ را ببینید)[1]، انتگرال‌سطحی صفر می‌شود، و

$$G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=G(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1) \qquad (۱۳۹.۸)$$

که نمایانگر متقارن بودن تابع‌گرین است. اگر ویژه‌تابعها مختلط باشند، شرایط مرزی متناظر با معادله‌های (۲۰.۹) تا (۲۲.۹)، شرایط مرزی مناسبی به‌شمار می‌آیند. معادلهٔ (۱۳۹.۸) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=G^*(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1) \qquad (۱۴۰.۸)$$

دقت‌کنیدکه این خاصیت تقارنی توابع‌گرین در همهٔ معادله‌هایی ازنوع معادلهٔ(۱۳۵.۸)، وجود دارد. درفصل۹ این نوع معادله‌ها را خود-الحاقی می‌نامیم. تقارن اساس قضیه‌های تقابل مختلفی است؛ اثر بار در $\mathbf{r}_2$ روی پتانسیل در $\mathbf{r}_1$ مانند اثر بار در $\mathbf{r}_1$ روی پتانسیل در $\mathbf{r}_2$ است.

این مورد استفاده ازتوابع‌گرین، برای حل بسیاری ازمسئله‌های مشکلتر فیزیك‌ریاضی تکنیکی قوی به‌شمارمی‌آید. درفصل۱۶، به‌هنگام بررسی معادله‌های انتگرالی بار دیگراز این روش بهره خواهیم‌گرفت.

مسائل

۱.۷.۸ داریم

$$\delta_n(x)=\begin{cases} 0, & x<-\dfrac{1}{2n} \\[2ex] n, & -\dfrac{1}{2n}<x<\dfrac{1}{2n} \\[2ex] 0, & \dfrac{1}{2n}<x \end{cases}$$

با فرض آنکه $f(x)$ در $x=0$ پیوسته است، نشان دهیدکه

---

۱. هرنوع تلاش برای‌برقراری این‌شرط که مشتقهای نرمال درسطح صفرشوند (شرایط نویمان، بخش ۱.۹ را ببینید) به‌مشکلاتی درمورد قانون گاوس می‌انجامد. این‌حالت شبیه آن است‌که وقتی نیك می‌دانیم باری‌الکتریکی دردرون سطح وجوددارد، شرط‌کنیم، $\int \mathbf{E}\cdot d\sigma=0$.

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_n(x)dx = f(۰)$$

۲.۷.۸ تحقیق کنید دنبالهٔ $\delta_n(x)$، که براساس تابع زیر تعریف می‌شود، یك دنبالهٔ دلتاست [یعنی در معادلهٔ (۱۱۴.۸) صدق می‌کند]

$$\delta_n = \begin{cases} ۰, & x<۰ \\ ne^{-nx}, & x>۰ \end{cases}$$

دقت کنید که تکینگی در $۰+$، یعنی در طرف مثبت مبدأ، قرار دارد.

راهنمایی. حدبالایی (∞) را با c/n تعویض کنیـد، c بزرگ ولی متناهی است. آنگاه ازقضیهٔ مقدارمتوسط درمحاسبهٔ انتگرالها استفاده کنید.

۳.۷.۸ بدازای

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi}\cdot\frac{۱}{۱+n^۲x^۲}$$

[معادلهٔ (۱۱۵.۸)]، نشان دهید که

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_n(x)dx = ۱$$

۴.۷.۸ با نشان‌دادن اینکه

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\frac{\sin nx}{\pi x}\,dx = f(۰)$$

نشان دهید که $\delta_n = \sin nx/\pi x$ یك توزیع دلتاست. فرض کنید کـه $f(x)$ در $x=۰$ پیوسته است ودر $x\to\pm\infty$ صفر می‌شود.

راهنمایی. x را با y/n تعویض کنید و قبل‌ازآنکه انتگرال بگیرید حد $n\to\infty$ را بیابید. انتگرال لازم در بخشهای ۲.۷ (جلد اول) و ۷.۱۵ محاسبه شده‌است.

۵.۷.۸ درروش فژه برای جمع‌کردن سریها بدتابع زیر برمی‌خوریم

$$\delta_n(t) = \frac{۱}{۲\pi n}\left[\frac{\sin(nt/۲)}{\sin(t/۲)}\right]^۲$$

نشان دهید که $\delta_n(t)$ یك‌توزیع دلتاست، بداین معنی که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi n}\int^{\infty} f(t)\left[\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right]^{2} dt = f(0)$$

۶.۷.۸ ثابت کنید که

$$\delta[a(x-x_1)] = \frac{1}{a}\delta(x-x_1)$$

یادآوری. اگر فرض شود که $\delta[a(x-x_1)]$ نسبت به x_1 زوج است، این رابطه برای مقادیر منفی a برقرار است و $1/a$ را باید با $1/|a|$ تعویض کرد.

۷.۷.۸ نشان دهید که

$$\delta[(x-x_1)(x-x_2)] = [\delta(x-x_1)+\delta(x-x_2)]/|x_1-x_2|$$

راهنمایی. از مسئلهٔ ۶.۷.۸ استفاده کنید.

۸.۷.۸ با استفاده ازدنبالهٔ دلتای (δ_n) مربوط به‌منحنی خطای گاؤس نشان دهید که

$$x\frac{d}{dx}\delta(x) = -\delta(x)$$

با $\delta(x)$ ومشتقهایش مثل معادلهٔ (۱۱۵.۸) عمل کنید.

۹.۷.۸ نشان دهید که

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(x)f(x)dx = -f'(0)$$

دراینجا فرض‌می‌کنیم که $f'(x)$ در $x=0$ پیوسته است.

۱۰.۷.۸ ثابت کنید که

$$\delta(f(x)) = \left|\frac{df(x)}{dx}\right|^{-1}\delta(x-x_0)$$

که در آن x_0 چنان انتخاب شده‌است که: $f(x_0)=0$.

راهنمایی. توجه‌کنید که $\delta(f)df = \delta(x)dx$.

۱۱.۷.۸ نشان‌دهید که تابع دلتای $\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$ درمختصات قطبی کروی $(r,\cos\theta,\varphi)$ به صورت زیردرمی‌آید

$$\frac{1}{r_1^2}\delta(r_1-r_2)\delta(\cos\theta_1-\cos\theta_2)\delta(\varphi_1-\varphi_2)$$

این نتیجه را به‌مختصات خمیده خط (q_1,q_2,q_3) بخش ۱.۲ (جلد اول) باضرایب‌مقیاس h_1، h_2، و h_3 تعمیم دهید.

۱۲.۷.۸ در بسط جامع تبدیلهای فوریه[1] به‌قضیه‌ای مبتنی بر روابط زیر بر می‌خوریم

$$\lim_{a\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_{x_1}^{x_2} f(u+x)\frac{\sin ax}{x}dx$$

$$=\begin{cases} f(u+0)+f(u-0), & x_1<0<x_2\\ f(u+0), & x_1=0<x_2\\ f(u-0), & x_1<0=x_2\\ 0, & x_1<x_2<0 \text{ یا } 0<x_1<x_2\end{cases}$$

با استفاده از تابع دلتای دیراك درستی نتایج فوق را تحقیق کنید.

۱۳.۷.۸ (الف) اگر دنباله‌ای به‌صورت $\delta_n(x)=n/(2\cosh^2 nx)$ تعریف کنیم، نشان‌دهید

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_n(x)dx=1 \qquad (\text{مستقل از } n)$$

(ب) با ادامهٔ این تحلیل نشان دهید که[2]

$$\int_{-\infty}^{x}\delta_n(x)dx=\frac{1}{2}\left[1+\tanh nx\right]\equiv u_n(x)$$

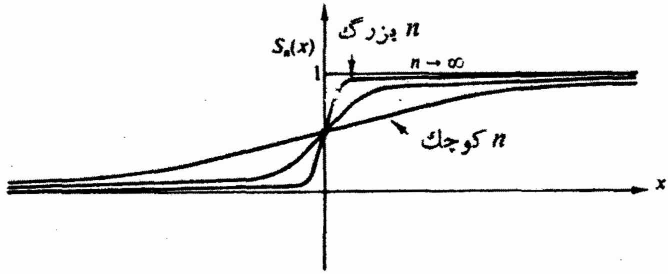
و

$$\lim_{n\to\infty}u_n(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

این تابع پله‌ای واحد هویساید است.

1. Sneddon, I. N., *Fourier Transforms*. New York: McGraw-Hill(1951).

۲. نمادهای بسیار دیگری برای‌این‌تابع به‌کاررفته است. علامت u_n از AMS-55 اقتباس شده است. u حرف اول کلمهٔ unit به‌معنای واحد است.



شکل ۹.۸ $\frac{1}{2}[1+\tanh nx]$ وتابع پله‌ای واحد هویساید.

۱۴.۷.۸ نشان‌دهیدکه تابع پله‌ای واحد $u(x)$ را می‌توان به‌صورت زیرنمایش داد

$$u(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi i}P\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}\frac{dt}{t}$$

که درآن P به‌معنای مقداراصلی‌کوشی است (بخش ۲.۷، جلد اول).

۱۵.۷.۸ رابطهٔ زیررا به‌عنوان صورت دیگری ازمعادلهٔ (۱۱۱.۸) درنظربگیرید

$$\delta_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt-|t|/n}\,dt$$

نشان دهیدکه این رابطه به $(n/\pi)\times 1/(1+n^2x^2)$، معادلهٔ (۱۰۵.۸) تبدیل‌ می‌یابد، و نیز

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_n(x)dx=1$$

یادآوری. معادلهٔ اولیه رامی‌توان برحسب تبدیلهای انتگرالی یا به‌عنوان تبدیل نمایی فوریهٔ $e^{-|t|/n}$ ویا تبدیل‌لاپلاس e^{ixt} تفسیرکرد.

۱۶.۷.۸ نشان‌دهیدکه

$$G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=\frac{e^{ik|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}}{4\pi|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}$$

تابع‌گرینی است‌که درمعادلهٔ دیفرانسیل زیرصدق می‌کند

$$(\nabla_1^2+k^2)G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=-\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$$

این‌اثبات شامل دوبخش است:

(الف)نشان دهیدکه $G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ دوراز $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2$ درمعادلهٔ دیفرانسیل‌صدق می‌کند.

(ب) نشان‌دهید که به‌ازای مقادیر به‌اندازهٔ کافی کوچک $|\mathbf{r}_۱-\mathbf{r}_۲|$ داریم

$$\int_V (\nabla_۱^۲+k^۲)G(\mathbf{r}_۱,\mathbf{r}_۲)d\tau_۱ = \begin{cases} ۰ & , \ \mathbf{r}_۲\notin V \\ -۱ & , \ \mathbf{r}_۲\in V \end{cases}$$

۸.۸ جوابهای عددی

جوابهای تحلیلی وجوابهای تقریبی معادله‌های دیفرانسیل دراین فصل ودرفصلهای بعدبرای حل‌مسئلهٔ موردنظر، به‌خصوص اگر تقارنی وجودداشته باشد، کافی خواهند بود. جوابهای سری‌توانی چگونگی رفتارشان رابه‌ازای مقادیر کوچك x نشان می‌دهند. جوابهای‌مجانبی (با بخشهای ۶.۱۱ و ۱۰.۱۲ مقایسه‌کنید) رفتار جواب را به‌ازای مقادیر بزرگ x نشان می‌دهند. این حالتهای حدی و نیز مشابهت احتمالی میان معادلهٔ دیفرانسیل ما و صورتهای استاندارد با جوابهای معلوم (فصلهای ۱۱ تا ۱۳) به‌درك رفتار کلی جوابها کمك بسیار با ارزشی می کنند.

ولی، معمولاً وضعیت به‌این‌صورت است که ما یك معادلهٔ متفاوت داریم، مثلا پتانسیل متفاوتی درمعادلهٔ موج شرودینگر، ویك جواب نسبتاً دقیق می‌خواهیم. ازاین‌رو به‌تکنیکهای عددی رو می‌آوریم.

معادله‌های دیفرانسیل مرتبهٔ اول

معادلهٔ دیفرانسیل متضمن پیوستاری ازنقاط‌است. متغیرمستقل x پیوسته است. متغیر وابستهٔ (نامعلوم)، $y(x)$ نیزپیوسته فرض می‌شود. مفهوم مشتقگیری پیوستگی را ایجاب می کند. درفرایندهای عددی، به‌جای این پیوستارها مجموعه‌های گسسته‌ای می‌نشینند. x را درنقاط زیر درنظرمی‌گیریم

$$x_۰,\ x_۰+h,\ x_۰+۲h,\ x_۰+۳h,\ \dots$$

که درآن h بازهٔ کوچکی است. علی‌الاصول، هرچه h کوچکتر باشد، تقریبمان بهتر است. ولی‌اگر h را بسیارکوچك درنظر بگیریم، لازم‌است ماشین وقت زیادی صرف‌کند و ممکن است به‌جهت خطاهای ناشی ازگردشدن‌که روی‌هم انباشته شده‌اند، دقت‌هم واقعاً کم شود. مقادیرگسستهٔ متوالی x را با x_n، $x_{n+۱}$، و الی‌آخر، و مقادیر متناظر $y(x)$ را به صورت $y(x_n)=y_n$ نشان می‌دهیم. اگر $x_۰$ و $y_۰$ معلوم باشند، مسئله عبارت خواهد بود از یافتن $y_۱$، آنگاه $y_۲$، و الی‌آخر.

جواب به‌صورت سری تایلور

معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ‌اول (احتمالا غیرخطی) معمولی زیررا، باشرط اولیهٔ $y(x_۰)=y_۰$، درنظر بگیرید

$$\frac{d}{dx}y(x)=f(x,y) \qquad (۱۴۱.۸)$$

اصولا، می‌توان به‌کمك بسط تایلور به‌صورت زیر، (و با فرض اینکه همهٔ مشتقها وجود دارند وسری تایلور همگراست) به‌یك جواب گام‌به‌گام نسبتاً دقیق برای‌معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول (۱۴۱.۸) دست یافت

$$y(x_0+h)=y(x_0)+hy'(x_0)+\frac{h^2}{2!}y''(x_0)+\cdots+\frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x_0)+\cdots$$

(۱۴۲.۸)

مقدار اولیهٔ $y(x_0)$ معلوم، و $y'(x_0)$ به‌صورت $f(x_0,y_0)$ داده شده است. علی‌الاصول. مشتقهای بالاتر را می‌توان با مشتقگیری از $y'(x)=f(x,y)$ به‌دست آورد. ممکن‌است این‌مشتقگیری عملا خسته‌کننده باشد. ولی‌امروزه این‌مشتقگیری را می‌توان به‌وسیلهٔ کامپیوتر وبااستفاده اززبانهایی مانند FORMAC انجام داد. برای معادله‌هایی به‌آن شکل که در این‌فصل باآنها مواجهیم، یك‌کامپیوتر بزرگ، ده‌مشتق یا حتی بیشتررا به‌سهولت تولید و محاسبه می‌کند.

جواب سری تایلورصورتی ازتمدید تحلیلی، بخش ۵.۶ (جلد اول)، است.

اگر سمت راست معادلهٔ (۱۴۲.۸) را پس‌ازدوجمله قطع‌کنیم، خواهیم داشت

$$y_1=y_0+hy'_0$$

(۱۴۳.۸)

$$v+hf(x_0,y_0)$$

که درآن ازجمله‌هایی بامرتبهٔ h^2 چشم پوشیده‌ایم. معادلهٔ (۱۴۳.۸) را غالباً جواب اویلر می‌گویند. آشکاراست‌که با چشمپوشی از جملاتی با مرتبهٔ h^2، دراین جواب خطایی جدی راه پیدا می‌کند.

روش رونژ-کوتا

روش رونژ-کوتا بهبود یافتهٔ روش بالاست، باخطایی ازمرتبهٔ h^5. فرمولهای مربوط به‌این روش عبارت‌اند از

$$y_{n+1}=y_n+[k_0+2k_1+2k_2+k_3]/6 \qquad (۱۴۴.۸)$$

که درآن

$$
\begin{aligned}
k_{\circ} &= hf(x_n, y_n) \\
k_{1} &= hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_{\circ}) \\
k_{2} &= hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_{1}) \\
k_{3} &= hf(x_n + h, y_n + k_{2})
\end{aligned}
\tag{۱۴۵.۸}
$$

نحوهٔ استخراج این معادلات در کتاب رالستون و ویلف[1] (فصل ۹ توسط رومانلی[2]) آمده است.

معادلات (۱۴۴.۸) و (۱۴۵.۸) روشی را که می‌توان روش مرتبهٔ چهارم کلاسیکی رونژ-کوتا نامید تعریف می‌کنند (بادقتی ازمرتبهٔ h^4). این روش در برنامهٔ SSP[3] آی.بی.ام دنبال می‌شود. روشهای رونژ-کوتای بسیار دیگری نیز وجود دارد. لاپیدوس[4] و سینفلد[5] (مراجع آخر فصل را ببینید) ضمن بررسی و مقایسهٔ امکانات مختلف یك روش مرتبهٔ پنجم مربوط به بوچر[6] را به‌عنوان روشی که نسبت به‌روش کلاسیکی اندکی برتر است، توصیه می‌کنند.

درروش فوق معادلات (۱۴۴.۸) و (۱۴۵.۸) را به‌همین شکل درنظر می‌گیرند و پارامترها را چنان تنظیم‌می‌کنند که به‌یك بسط تایلور تامرتبهٔ h^4 برازش‌دهد. ازدیدگاه این بسط تایلور، روش رونژ-کوتا نیزمثالی برای تمدید تحلیلی به‌شمارمی‌آید.

درحالت خاصی که درآن dy/dx تنها تابع x باشد [یعنی $f(x,y)$ در معادلهٔ (۱۴۱.۸) به‌صورت $f(x)$ باشد]، آخرین جملهٔ معادلهٔ (۱۴۴.۸)، مطابق‌قاعدهٔ سیمپسون[7]، به‌یك انتگرالگیری عددی‌از x_n تا x_{n+1} تقلیل می‌یابد.

روش رونژ-کوتا پایداراست، یعنی‌خطاهای کوچك درآن بزرگ نمی‌شوند. این روش خود-آغازاست، یعنی‌فقط $x_{\circ}$و$y_{\circ}$ را می‌گیریم و عملیات را ادامه می‌دهیم. ولی این روش معایبی هم‌دارد. درهرمرحله چهاربار محاسبهٔ جداگانهٔ $f(x,y)$ ضروری‌است. خطا، هرچندکه درهرمرحله ازمرتبهٔ h^5 است ولی مقدارش مشخص نیست. معمولا h را نصف می‌کنند و محاسبه را تکرار می‌کنند، اگرنتیجهٔ دوم با نتیجهٔ اول سازگار بود، آنگاه پی می‌برند h به‌اندازهٔ کافی کوچك بوده‌است.

روش رونژ-کوتا را می‌توان به‌مجموعه‌ای‌ازمعادله‌های مرتبهٔ‌اول جفت‌شده تعمیم‌داد

---

1. Ralston, A. & H.S. Wilf, eds., *Mathematical Methods for Digital Computers*, New York: Wiley (1960).
2. Romanelli, M.J.
3. Scientific Subroutine Package
4. Lapidus
5. Seinfeld
6. Butcher.
7. Simpson rule

$$\frac{du}{dx}=f_1(x,u,v)$$

$$(146.8)$$

$$\frac{dv}{dx}=f_2(x,u,v),\ldots$$

تعداد متغیرهای وابسته می‌توانـد هرچند تا باشد. معادلهٔ (۱۴۶.۸) نیزمی‌توانـد غیرخطی باشد، واین نیزیکی‌ازمزایای حل عددی است.

روشهای پیشگو ـ مصحح

به کمك روش‌دیگری برای‌حل‌معادلهٔ (۱۴۱.۸)، می‌توانیم یك‌مقدار آزمایشی به‌صورت زیر برای y_{n+1} براورد یا پیشگویی کنیم

$$\bar{y}_{n+1}=y_{n-1}+2hy'_n$$

$$(147.8)$$

$$=y_{n-1}+2hf(x_n,y_n)$$

این معادله کاملا شبیه معادلهٔ (۱۴۳.۸) نیست. درعوض می‌توان آن را به‌صورت زیرمانند مشتق تعبیرکرد

$$y'_n\approx\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2h} \qquad (148.8)$$

مانند آنکه به‌جای خط مماس، یك وتر قراردهیم. سپس، y'_{n+1} را محاسبه می‌کنیم

$$y'_{n+1}=f(x_{n+1},\ \bar{y}_{n+1}) \qquad (149.8)$$

آنگاه برای تصحیح خام‌بودن معادلهٔ (۱۴۷.۸) باز y_{n+1} را محاسبه می‌کنیم

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(\bar{y}_{n+1}+y'_n) \qquad (150.8)$$

دراینجا نسبت تفاضلهای‌متناهی $\Delta y/h$ را، تقریباً، بامقدارمتوسط دومشتق برابر گرفته‌ایم. این تکنیك، یعنی‌یك پیشگویی وسپس یك تصحیح (وتکرار تا آنجاکه سازگاری حاصل شود)، اساس روش پیشگو-مصحح را تشکیل‌می‌دهد. باید تأکیدکنیم که مجموعهٔ معادلات بالا تنها برای نمایش روش پیشگو-مصحح آورده شده‌اند. دقت این‌مجموعه (که ازمرتبهٔ h^3 است) معمولا کافی‌نیست.

تکرار [یعنی جانشانی y_{n+1} از معادلهٔ (۱۵۰.۸) در معادلهٔ (۱۴۹.۸)] و ادامهٔ این

کار تاجایی‌که y_{n+1} به‌یك مقدار حدی نزدیك شود)، ازنظر ماشین محاسب، عملی وقتگیر است. ازاین‌رو معمولا به‌جای تکرار، یك‌مرحلهٔ واسطه‌ای (مرحلهٔ تعدیل کننده) بین معادلهٔ (۱۴۷.۸) و (۱۴۹.۸) درنظر گرفته می‌شود.

این‌روش تعدیل‌یافتهٔ روش پیشگو-مصحح، نسبت به‌روش رونژ-کوتا، دارای ایــن مزیت عمده‌است‌که در آن، درهرمرحله به‌جای چهارمحاسبهٔ تنها به‌دومحاسبهٔ $f(x,y)$ نیاز است. این روش، به‌صورتی‌که درابتدا عنوان‌شد، متأسفانه ناپایدار بود؛ گرایش خطاهای کوچك(ناشی ازگردشدن اعداد وقطع سریها) درتمام محاسبه به‌انتشار وتقویت متوجه‌بود.

درروش طراحی‌شدهٔ همینگ[1] ازروش پیشگو-مصحح، وی براین مشکل بسیار جدی ناپایداری فائق‌آمده‌است. فرمولهای مربوط (که نسبتاً پیچیده‌اند)، شامل یك‌مشتق‌جزئی و دستورالعملهای مشروح برای آغاز حل، توسط رالستون (فصل ۸ کتاب رالستون و ویلف) ارائه شده‌است. دقت روش همینگ تا مرتبهٔ h^4 است. این روش برای تمام مقادیر معقول h پایداراست. و برآوردی ازخطا نیز به‌دست‌می‌دهد. برعکس روش رونژ-کوتا، این‌روش خود-آغاز نیست. مثلا، درمعادلهٔ (۱۴۷.۸) هم‌به‌مقدار y_{n-1} وهم به‌مقدار y_n نیاز پیدا می‌شود. مقادیر اولیه(y_0، y_1، y_2، y_3)، در روش پیشگو- مصحح بایك حل سری (سری توانی به‌ازای مقادیر کوچك x و سری مجانبی به‌ازای مقــادیر بزرگ x) و یا با روش رونژ-کوتا به‌دست می‌آیند.

روش پیشگو- مصحح همینگ را می‌توان به‌مجموعه‌ای ازمعادله‌های دیفرانسیل مرتبهٔ اول جفت شده، مانند معادلهٔ (۱۴۶.۸)، تعمیم‌داد.

معادله‌های دیفرانسیل مرتبهٔ دوم

هرمعادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم

$$y''(x)+P(x)y'(x)+Q(x)y(x)=F(x) \qquad (۱۵۱.۸)$$

را می‌توان بامعرفی تابع $z(x)$ به‌صورت زیر به‌دومعادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول تجزیه‌کرد

$$y'(x)=z(x) \qquad (۱۵۲.۸)$$

و

$$z'(x)+P(x)z(x)+Q(x)y(x)=F(x) \qquad (۱۵۳.۸)$$

این معادلات دیفرانسیل‌مرتبهٔ‌اول جفت‌شده را می‌توان به‌کمك یکی‌از دوتکنیك رونژ-کوتا یا پیشگو- مصحح همینگ‌که قبلا توضیح داده‌شد، حل‌کرد.

سرانجام، به‌عنوان‌حرف‌آخر بایدگفت‌که به‌کاربستن بدون ملاحظه و دوراز دقت‌این

---

1. Hamming

تکنیکهای عددی توانا درحقیقت ممکن است به‌مشکلات جدی بینجامد. حل یك معادلهٔ دیفرانسیل متفاوت جدید معمولا آمیزه‌ای از محاسبات آنالیزی و عددی را تشکیل می‌دهد. درواقع، فایده‌ای ندارد اگر بخواهیم روش رونژ-کوتا را برای یك نقطهٔ تکین، که در آن جواب واگرا است، به‌کار بریم.

مسائل

۱۰۸۰۸ روش رونژ-کوتا، معادلهٔ (۱۴۴۰۸) را برای معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول $dy/dx = f(x)$ به‌کار می‌بریم. دقت کنید که $f(x)$ مستقل از y است. نشان دهید که در این‌حالت خاص روش رونژ-کوتا به قاعدهٔ سیمپسون برای کوادراتور عددی (پیوست ۲ را ببینید) می‌انجامد.

۲۰۸۰۸ (الف) جسمی که دریك محیط مقاوم سقوط می‌کند (به‌خاطر وجود نیروی ترمزی که باسرعت متناسب است) بامعادلهٔ زیر توصیف می‌شود

$$\frac{dv}{dt} = g - av$$

ثابتها را به‌صورت زیر بگیرید

$$a = ۰٫۲\,\mathrm{s}^{-۱} \quad و \quad g = ۹٫۸۰\,\mathrm{m/s}^{۲}$$

شرایط اولیه عبارت‌اند از $t = ۰$ و $v = ۰$. از این معادله در مراحل ۰٫۱ ثانیه‌ای تا $t = ۲۰٫۰\,\mathrm{s}$ انتگرال بگیرید. مقدار سرعت در رأس هر ثانیه، $v(۱٫۰)$، $v(۲٫۰)$، و الی‌آخر، را جدولبندی کنید. اگر به‌یك برنامهٔ کامپیوتری برای ترسیم منحنی دسترسی دارید، $v(t)$ را برحسب t رسم کنید.

(ب) نسبت $v(۲۰٫۰)$ به $v(\infty)$، سرعت انتهایی، را محاسبه کنید.

مقدار آزمونی. $v(۱۰) = ۴۲٫۳۶۹\,\mathrm{m/s}$.

پاسخ. (ب) ۰٫۹۸۱۷.

۳۰۸۰۸ معادلهٔ دیفرانسیل مربوط به‌جمعیت یك دخترعنصر پرتوزا به‌صورت زیر است

$$\frac{dN_۲(t)}{dt} = \lambda_۱ \exp(-\lambda_۱ t) - \lambda_۲ N_۲$$

$\lambda_۱ \exp(-\lambda_۱ t)$ آهنگ تولید ناشی از واپاشی مادر عنصر است. $\lambda_۱ = ۰٫۱۰\,\mathrm{s}^{-۱}$، $\lambda_۲ = ۰٫۰۸\,\mathrm{s}^{-۱}$. از این معادلهٔ دیفرانسیل از $t = ۰$ تا $t = ۴۰$ ثانیه و با شرط اولیهٔ $N_۲(۰) = ۰$ انتگرال بگیرید. $N_۲(t)$ را برحسب t جدولبندی و ترسیم کنید.

۴.۸.۸ معادلهٔ تخلیهٔ واگشت زمانی سیارك به‌صورت زیراست

$$\frac{dN}{dt}=kN^{۲}$$

این‌معادله را با استفاده از برنامهٔ رونژـکوتا، یا برنامه‌ای معادل آن حل‌کنید. شرایط اولیه عبارت‌اند از

$k=۰٫۲۵\times ۱۰^{-۱۱}$ (سال)$^{-۱}$(سیارك)$^{-۱}$، $N_{۰}=۱۰۰$ سیارك، $t_{۰}=۰$ سال

روند حل خود را تا آنجاکه می‌توانید ادامه دهید. (**با نزدیك شدن** به $t=۵\times ۱۰^{۹}$ سال، مشکل پیدا خواهیدکرد.) $N(t)$ را برحسب t، با $\Delta t=۵\times ۱۰^{۷}$ سال، ترسیم کنید.

یادآوری. جواب تحلیلی در مسئلهٔ ۳.۲.۸ (که در آن $k-$ به‌جای k نشسته است) محاسبه می‌شود.

۵.۸.۸ ازمعادلهٔ لژاندر، مسئلهٔ ۵.۵.۸، از $x=۰$ تا $x=۱$، با شرایط‌اولیهٔ $y(۰)=۱$، $y'(۰)=۰$ (مربوط به‌جواب زوج) انتگرال بگیرید. $y(x)$ و dy/dx را در بازه‌های ۰٫۰۵ جدولبندی‌کنید. n را برابر ۲ بگیرید.

۶.۸.۸ معادلهٔ لین‌ـامدن در اخترفیزیك به‌صورت زیر است

$$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}+\frac{۲}{x}\frac{dy}{dx}+y^{s}=۰$$

$y(۰)$ رابرابریك و$y'(۰)$ را صفر بگیرید ورفتار $y(x)$ رابه‌ازای $s=۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶$ بررسی‌کنید. مخصوصاً اولین صفر $y(x)$ را بیابید.

راهنمایی. با استفاده ازیك جواب به‌صورت‌سری توانی‌داریم: $y''(۰)=-۱/۳$.

یادآوری. $y(x)$، به‌ازای $s=۰$ یك سهمی، و به‌ازای $s=۱$ یك تابع بسل کروی، $j_{۰}(x)$ است. با نزدیك شدن s به ۵، اولین صفر به‌طرف ∞ حرکت می‌کند، و به‌ازای $s>۵$، $y(x)$ هرگز محور x مثبت را قطع نخواهد کرد.

پاسخ. به‌ازای $y(x_s)=۰$، $x_{۰}=۲٫۴۵(\sqrt{۶})$، $x_{۱}=۳٫۱۴(\pi)$، $x_{۲}=۴٫۳۵$، $x_{۳}=۶٫۹۰$.

۷.۸.۸ برای آزمودن‌مسئلهٔ ۱۸.۶.۸(الف) ازمعادلهٔ هرمیت، از $x=۰$ تا $x=۳$، انتگرال بگیرید

$$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}-۲x\frac{dy}{dx}=۰$$

شرایط اولیه عبارت‌اند از $y(۰)=۰$، $y'(۰)=۱$. $y(۱)$ و $y(۲)$ و $y(۳)$ را جدولبندی‌کنید.

پاسخ. $y(۱)=۱٫۴۶۳$، $y(۲)=۱۶٫۴۵$، $y(۳)=۱۴۴۵$.

مراجع

Bateman, H. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*. New-York: Dover, 1944; first edition 1932.

دراین کتاب کاربردهای بیشماری برای معادلات دیفرانسیل جزئی مختلف درفیزیك کلاسیك ارائه شده‌است. همچنین نمونه‌های تابناکی از بهره‌گیری از دستگاههای مختصات مختلف، مانند مختصات بیضیوار، سهمیوار، چنبره‌ای، ومانندآنها ارائه شده‌است.

Davis, P.J. and P. Rabinowitz, *Numerical Integration*. Waltham, Mass.: Blaisdell, 1967.

مطالب زیادی دراین کتاب آمده است که به‌آسانی می‌توان آنها را مطالعه کرد. پیوست یك دراین کتاب (که توسط «ابراموویتس» دربارهٔ محاسبهٔ عملی انتگرالها، نوشته شده‌است) درمقام یك برداشت کلی، بسیار عالی است.

Hamming, R. W., *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1973.

در این کتاب، با شیوهٔ نوشتاری بسیار عالی، دربارهٔ انواع بسیاری از روشهای عددی، از صفرهای توابع تا تبدیل فوریهٔ سریع، بحث به‌میان آمده است. همهٔ مباحث با درنظرداشتن یك کامپیوتر سریع جدید، برگزیده شده وتعمیم یافته‌اند.

Ince, E.L., *Ordinary Differential Equations*. New York: Dover, 1926.

این کتاب درزمینهٔ نظریهٔ معادلات دیفرانسیل معمولی اثری کلاسیك به‌شمارمی‌آید.

Lapidus, L., and J.H. Seinfeld, *Numerical Solutions of Ordinary Differential Equations*. New York: Academic Press, 1971.

بحثی‌مشروح درباب تکنیکهای‌عددی باتأکیدی بیشتر برروشهای رونژ-کوتا وپیشگو-مصحح دراین کتاب عنوان شده است. این کتاب کار جدیدی است در خصوص بهبود مشخصه‌هایی مانند پایداری که درکمال وضوح ارائه شده‌اند.

Miller, R.K., and A.N. Michel, *Ordinary Differential Equations*. New-York: Academic Press, 1982.

Murphy, G. M., *Ordinary Differential Equations and Their Solutions*. Princeton, N.J.: Van Nostrand, 1960.

این کتاب مشتمل است بر معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی که به‌صورت کامل و نسبتاً خواندنی بررسی شده‌اند.

Ralston, A., and H. Wilf, Eds., *Mathematical Methods for Digital Computers*. New York: Wiley, 1960.

Ritger, P.D., and N. J. Rose, *Differential Equations with Applications*. New York: McGraw-Hill, 1968.

Stroud, A.H., *Numerical Quadrature and Solution of Ordinary Differential Equations*, Applied Mathematics Series, Vol. 10. New York: Springer-Verlag, 1974.

کتابی است حاوی بحث متعادل وخواندنی بسیارمفیدی درخصوص روشهای انتگرالگیری از معادلات دیفرانسیل. استرود با آثار جدید دراین زمینه نیك آشناست. مراجع جدید بیشماری را نیز دراین‌خصوص عرضه کرده است.

۹

نظریهٔ اشتورم ـ لیوویل. تابعهای متعامد

درفصل پیش دوجواب مستقل‌خطی معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم را به‌دست آوردیم و اثبات کردیم که‌جواب‌مستقل‌خطی سومی‌وجودندارد. دراین‌فصل به‌جای‌حل‌معادلهٔ‌دیفرانسیل، تأکید بیشتر برتعمیم ودرك خواص عمومی جوابهاست. دربخش ۱.۹ با مفاهیم عملگر خود-الحاقی، ویژه‌تابع، ویژه‌مقدار، و عملگر هرمیتی آشنا خواهیم شد. مفهوم عملگر الحاقی که ابتدا برحسب معادله‌های دیفرانسیل بیان می‌شود، برحسب کاربرد آن درمکانیك کوانتومی دوباره‌تعریف می‌شود. دربخش ۲.۹ ویژگیهای بسیارمهم حقیقی‌بودن ویژه‌مقدارها و تعامد ویژه‌تابعها را استنتاج می‌کنیم. در بخش ۳.۹ به بحث دربارهٔ شگرد گرام‌ـاشمیت برای تشکیل مجموعهٔ توابع متعامد می‌پردازیم. سرانجام، در بخش ۴.۹ خاصیت کلی تمامیت مجموعهٔ ویژه‌تابعها را روشن خواهیم کرد.

۱.۹ معادلات دیفرانسیل خودـالحاقی

در فصل ۸ معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم خطی متناظر با عملگرهای دیفرانسیلی مرتبهٔ دوم خطی‌را به‌صورت زیر بررسی، رده‌بندی، و حل کردیم

$$\mathcal{L}u(x)=p_0(x)\frac{d^2}{dx^2}u(x)+p_1(x)\frac{d}{dx}u(x)+p_2(x)u(x) \quad (۱.۹)$$

تابعهای $p_0(x)$، $p_1(x)$، و $p_2(x)$ را با ثابتهای p_i در بخش ۶.۸ عوضی نگیرید. با مراجعه به‌معادلهٔ (۷۳.۸) پی‌می‌بریم که $p(x)=p_1(x)/p_0(x)$ و $Q(x)=p_2(x)/p_0(x)$.

ضریبهای $p_0(x)$، $p_1(x)$، و $p_2(x)$ توابعی حقیقی از xاند و نخستین مشتقهای

$(i-۲)$ام توابع $p_i(x)$ در ناحیهٔ مورد نظر، $a\leqslant x\leqslant b$، پیوسته‌اند. به‌علاوه $p_۰(x)$ به‌ازای $a<x<b$ صفر نمی‌شود. صفرهای $p_۰(x)$ نقطه‌های تکین‌اند (بخش ۴.۸)، بنابراین گزارهٔ قبلی صرفاً به‌این معنی است که بازهٔ $[a,b]$ را چنان برمی‌گزینیم که هیچ نقطهٔ تکینی درون آن وجود نداشته باشد. ممکن است نقاط تکین روی مرزها واقع باشند و غالباً نیز همین‌طور است.

در نظریهٔ ریاضی معادله‌های دیفرانسیل بهتر است که عملگر الحاقی[1] $\bar{\mathcal{L}}$ را به‌صورت زیر تعریف کنیم

$$\bar{\mathcal{L}}u=\frac{d^۲}{dx^۲}[p_۰u]-\frac{d}{dx}[p_۱u]+p_۲u$$

$$=p_۰\frac{d^۲u}{dx^۲}-(۲p_۰'-p_۱)\frac{du}{dx}+(p_۰''-p_۱'-p_۲)u \qquad (۲.۹)$$

ازمقایسهٔ معادله‌های (۱.۹) و (۲.۹) پی می‌بریم که شرط لازم و کافی برای آنکه $\bar{\mathcal{L}}=\mathcal{L}$، آن است که

$$p_۰'(x)=\frac{dp_۰(x)}{dx}=p_۱(x) \qquad (۳.۹)$$

اگر این شرط برقرار باشد، آنگاه

$$\bar{\mathcal{L}}u=\mathcal{L}u=\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{du(x)}{dx}\right]+q(x)u(x) \qquad (۴.۹)$$

وعملگر $\mathcal{L}$ را خود-الحاقی گویند. دراینجا، برای اجتناب از شاخصهای غیرضروری، در حالت خود-الحاقی، $p(x)$ را به‌جای $p_۰(x)$ و $q(x)$ را به‌جای $p_۲(x)$ قرار داده‌ایم. اهمیت شکل معادلهٔ (۴.۹) در این است که به‌کمک آن خواهیم توانست دو انتگرالگیری جزء به‌جزء را در معادلهٔ (۲۱.۹) و در معادلهٔ بعدی انجام دهیم.[2]

از بررسی معادله‌های دیفرانسیلی که دربخش ۳.۸ با آنها آشنا شدیم، خواهیم‌دید که معادلهٔ لژاندر و معادلهٔ نوسانگرخطی خود-الحاقی‌اند، ولی سایر معادلات، مثلا معادله‌های

---

۱. بین یك عملگر الحاقی ویك ماتریس الحاقی رابطه‌ای‌نسبتاً تصنعی‌وجوددارد. ازمقایسهٔ عملگر خود-الحاقی (به‌اضافهٔ شرایط مرزی مناسب) با ماتریس خود-الحاقی به‌توجیه‌بهتری برای این‌نامگذاری دست‌می‌یابیم. خواص مهم این‌عملگرها را دربخش ۲.۹ به‌دست می‌آوریم. به‌دلیل وجود همین خواص است که عملگرهای خود-الحاقی چنین‌مورد توجه‌اند.

۲. تمامی اهمیت صورت خود-الحاقی (به اضافهٔ شرایط مرزی) در بخش ۲.۹ آشکار می‌شود. علاوه‌بر آن، صورتهای خود-الحاقی برای دستیابی به معادله‌های انتگرالی و تابعهای گرین در بخش ۵.۱۶ مورد نیازخواهند بود.

لاگر و هرمیت، خود-الحاقی نیستند. درهرصورت نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیل خود-الحاقی مرتبهٔ دوم خطی نظریه‌ای کاملا کلی است، زیرا همواره می‌توانیم عملگر غیر خود-الحاقی را به صورت خود-الحاقی لازم تبدیل کنیم. معادلهٔ (۱.۹) با $p_0' \neq p_1$ را درنظر بگیرید. اگر $\mathcal{L}$ را درجملهٔ زیرضرب کنیم[1]

$$\frac{1}{p_0(x)} \exp\left[\int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)}\, dt\right]$$

خواهیم داشت

$$\frac{1}{p_0(x)} \exp\left[\int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)}\, dt\right] \mathcal{L} u(x) = \frac{d}{dx}\left\{\exp\left[\int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)} dt\right] \frac{du(x)}{dx}\right\}$$
$$+ \frac{p_2(x)}{p_0(x)} \exp\left[\int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)} dt\right] u \qquad (۵.۹)$$

که آشکارا خود-الحاقی است. توجه‌کنید که $p_0(x)$ درمخرج کسر است. به‌همین دلیل است که لازم‌دانستیم به‌ازای $a < x < b$، داشته‌باشیم: $p_0(x) \neq 0$. درادامهٔ مطلب فرض‌خواهیم کرد که $\mathcal{L}$ را به‌صورت خود-الحاقی در آورده‌ایم.

ویژه‌تابعها، ویژه‌مقدارها

از روش جداسازی متغیرها، یا مستقیماً از یك مسئلهٔ فیزیکی، معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دومی به‌صورت زیر به‌دست آورده‌ایم

$$\mathcal{L}u(x) + \lambda w(x) u(x) = 0 \qquad (۶.۹)$$

دراینجا λ یك ثابت و $w(x)$ یك تابع معلوم از x به‌نام تابع چگالی یا وزنی است. معنای این نامگذاریها دربخشهای آتی روشن خواهدشد. شرط می‌کنیم که $w(x) > 0$، مگر احتمالا درنقاطی منزوی که در آنها $w(x) = 0$. به‌ازای یك مقدارمعلوم پارامتر λ، تابعی مانند $u_\lambda(x)$ راکه در معادلهٔ (۶.۹) و شرایط مرزی وضع شده صدق کند، ویژه‌تابع متناظر با

---

۱. اگر $\mathcal{L}$ را در $f(x)/p_0(x)$ ضرب کنیم، آنگاه قرار دهیم

$$f'(x) = \frac{f p_1}{p_0}$$

به‌طوری که عملگر جدید خود-الحاقی باشد، خواهیم داشت

$$f(x) = \exp\left[\int^x \frac{p_1(t)}{p_0(t)} dt\right]$$

λ، وثابت λ را ویژه‌مقدار می‌نامند. هیچ تضمینی وجود نداردکه به‌ازای هرگزینش‌اختیاری پارامتر λ، ویژه‌تابعی مانند $u_\lambda(x)$ وجود داشته باشد. در واقع، شرط وجـود ویژه‌تابع غالباً مقادیر قابل قبول λ را به‌مجموعهٔ گسسته‌ای محدود می‌کند. مثالهایی در این مورد را برای معادله‌های لژانـدر، هرمیت، وچبیشف در مسائل بخش ۵.۸ آورده‌ایم. در اینجا یك رهیافت ریاضی به‌فرایندکوانتش درمکانیك‌کوانتومی دراختیارداریم.

مثال عمدهٔ مربوط به‌معادلهٔ (۶.۹) درفیزیك، معادلهٔ موج شرودینگر است

$$H\psi(x)=E\psi(x)$$

که درآن عملگر دیفرانسیلی $\mathcal{L}$، هامیلتونی H است و ویژه‌مقدار $(-\lambda)$ انرژی کل دستگاه، E، به‌شمارمی‌آید. ویژه‌تابع $\psi(x)$ را معمولاً یك تابع‌موج می‌نامند. در بخش ۷.۱۷ این معادلهٔ شرودینگر را به‌روش وردشی به‌دست خواهیم آورد.

مثال ۱.۱.۹ معادلهٔ لژاندر

معادلهٔ لژاندر به‌صورت زیرداده‌می‌شود

$$(۱-x^۲)y''-۲xy'+n(n+۱)y=۰ \qquad (۷.۹)$$

ازمعادله‌های (۱.۹) و (۶.۹)

$$\begin{aligned} &p_۰(x)=۱-x^۲=p && w(x)=۱ \\ &p_۱(x)=-۲x=p' && \lambda=n(n+۱) \qquad (۸.۹)\\ &p_۲(x)=۰=q \end{aligned}$$

یادآوری می‌کنیم که جوابهای سری معادلهٔ لژاندر (بخش ۵.۸)[۱] واگرا شدند، مگرآنکه n محدود به‌یك‌عدد درست می‌شد. همین‌امر نمایانگر کوانتش ویژه مقدار λ است.

وقتی معادله‌های فصل ۸ را به‌صورت خود-الحاقی تبدیل می‌کنیم، مقادیر مندرج در جدول ۱.۹ را برای‌ضرایب وپارامترها به‌دست می‌آوریم.

$p(x)$ ضریب مشتق دوم ویژه‌تابع است و امید می‌رود که بدون هیچ‌گونه دشواری تعیین شود. ویژه‌مقـدار λ، پارامتر یا تابعی از پارامتر است کـه [در جمله‌ای به صورت $\lambda w(x)y(x)$] قابل دستیابی است. هرگـونه وابستگی به x، جز وابستگی از طریق ویژه‌تابع، **تابع‌وزنی** $w(x)$ را تشکیل می‌دهد. اگرجملهٔ دیگری هم‌وجودداشته باشدکه ویژه‌تابع (نه مشتقهای‌آن) درآن بگنجنـد، ضریب ویژه‌تابع در ایـن جملهٔ اضافی را $q(x)$ می‌گیریم. اگرچنین جمله‌ای موجود نباشد، $q(x)$ صرفاً صفراست.

---

۱. بابخشهای ۲.۵ (جلد اول) و ۱۰.۱۲ مقایسه‌کنید.

جدول ۱.۹

معادله	$p(x)$	$q(x)$	λ	$w(x)$
لژاندر	$1-x^2$	0	$l(l+1)$	1
لژاندر انتقال یافته	$x(1-x)$	0	$l(l+1)$	1
لژاندر وابسته	$1-x^2$	$-m^2/(1-x^2)$	$l(l+1)$	1
چبیشف I	$(1-x^2)^{1/2}$	0	n^2	$(1-x^2)^{-1/2}$
چبیشف انتقال یافتهٔ I	$[x(1-x)]^{1/2}$	0	n^2	$[x(1-x)]^{-1/2}$
چبیشف II	$(1-x^2)^{3/2}$	0	$n(n+2)$	$(1-x^2)^{1/2}$
فراکروی (گگن باوئر)	$(1-x^2)^{\alpha+1/2}$	0	$n(n+2\alpha)$	$(1-x^2)^{\alpha-1/2}$
بسل*	x	$-n^2/x$	a^2	x
لاگر	xe^{-x}	0	α	e^{-x}
لاگر وابسته	$x^{k+1}e^{-x}$	0	$\alpha-k$	$x^k e^{-x}$
هرمیت	e^{-x^2}	0	2α	e^{-x^2}
نوسانگر هماهنگ ساده†	1	0	n^2	1

* تعامد توابع بسل تا حدودی خاص است. برای توضیح مشروح در این باب بخش ۲.۱۱ را ببینید. در بخش ۷.۱۱ تعامد نوع دومی بررسی خواهد شد.
† این مفهوم شالودهٔ فصل چهارده، سری فوریه، را تشکیل می‌دهد.

مثال ۲.۱.۹ دوترون

به کمک یک مدل بسیار سادهٔ دوترون می‌توان مفهوم ویژه‌تابع و ویژه‌مقدار را بهتر درک کرد. برهم کنش هسته‌ای نوترون-پروتون را به کمک یک چاه پتانسیل مربعی نمایش می‌دهیم: به‌ازای $0\leqslant r<a$، $V=V_0<0$؛ و به‌ازای $r>a$، $V=0$. معادلهٔ موج شرودینگر به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{-\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi+V\psi=E\psi \tag{9.9}$$

برای $\psi=\psi(r)$، می‌توانیم بنویسیم $u(r)=r\psi(r)$، و با استفاده از مسئلهٔ ۱۸.۵.۲ (جلد اول) معادلهٔ موج، در گسترهٔ داخلی $0\leqslant r<a$، به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{d^2u}{dr^2}+k_1^2u=0 \tag{10.9}$$

که در آن

$$k_1^2 = \frac{2M}{\hbar^2}(E - V_0) > 0 \qquad (11.9)$$

در اینجا m جرم کاهش‌یافتهٔ سیستم نوترون - پروتون است. به‌ازای $a<r<\infty$، داریم

$$\frac{d^2u}{dr^2} - k_2^2 u = 0 \qquad (12.9)$$

که در آن

$$k_2^2 = -\frac{2ME}{\hbar^2} > 0 \qquad (13.9)$$

ازاین شرط مرزی‌که ψ باید متناهی بماند، نتیجه‌می‌گیریم: $u(0) = 0$ و

$$u_1(r) = \sin k_1 r, \qquad 0 \leqslant r < a \qquad (14.9)$$

درگسترهٔ خارج‌از چاه پتانسیل، ترکیبی خطی‌از دوعبارت نمایی داریم

$$u_2(r) = A \exp k_2 r + B \exp(-k_2 r), \quad a < r < \infty \qquad (15.9)$$

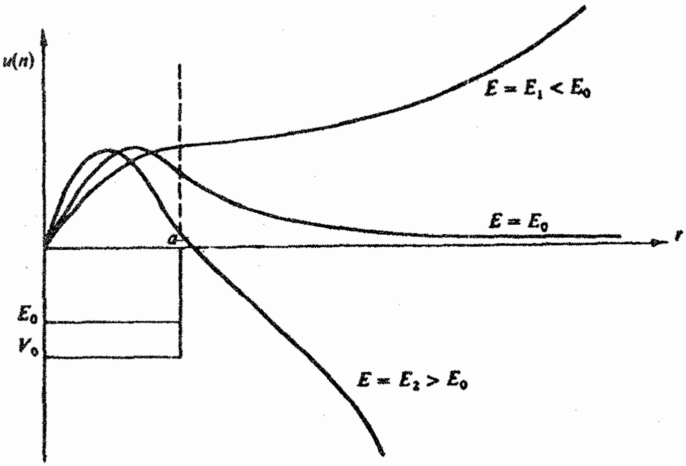
به‌علت پیوستگی جریان وچگالی‌ذره بایدداشته باشیم: $u_1(a) = u_2(a)$ و $u_1'(a) = u_2'(a)$.
ازاین شرایط وصل‌کننده خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \sin k_1 a &= A \exp k_2 a + B \exp(-k_2 a) \\ k_1 \cos k_1 a &= k_2 A \exp k_2 a - k_2 B \exp(-k_2 a) \end{aligned} \qquad (16.9)$$

این شرط که برمبنای آن در واقع تنها یك ترکیب پروتون-نوترون داریم به‌صورت $\int \psi^* \psi d\tau = 1$ بیان می‌شود. درصورتی این قید برآورده می‌شودکه شرط مرزی متناهی ماندن $\psi(r)$ به‌ازای $r \to \infty$ را وضع کنیم. واین به‌نوبهٔ خودبه‌این معناست که $A = 0$. با تقسیم دورابطهٔ قبل بریکدیگر (برای حذف B) خواهیم داشت

$$\tan k_1 a = -\frac{k_1}{k_2} = -\sqrt{\frac{E - V_0}{-E}} \qquad (17.9)$$

این‌عبارت یك‌معادلهٔ غیرجبری برای انرژی E است وفقط جوابهای گسسته دارد. اگر E طوری باشدکه درمعادلهٔ (۱۷.۹) صدق کند، جوابهای $u_1(r)$ و $u_2(r)$ می‌توانند شرایط مرزی را ارضاکنند. اگرمعادلهٔ (۱۷.۹) ارضا نشود، هیچ جواب قابل قبولی وجود ندارد. مقادیری از E ویژه‌مقدارند که به‌ازای آنها معادلهٔ (۱۷.۹) برقرار است؛ توابع متناظر



شکل ۱۰.۹ ویژه‌تابع دوترون.

u_1 و u_2 (یا ψ) ویژه‌تابعها هستند. برای مسئلهٔ واقعی دوترون یك (وتنها یك) مقدارمنفی E وجود داردکه بدازای آن معادلهٔ (۱۷.۹) صادق است. یعنی، دوترون یك وفقط یك حالت مقید دارد.

حال، اگر E در معادلهٔ (۱۷.۹) صدق نکند. یعنی اگر E یك ویژه‌مقدار نباشد، چه پیش می‌آید؟ از لحاظ شکل‌نموداری، فرض‌کنید که E ودرنتیجه k_1 کمی‌تغییر کنند.

بدازای $E = E_1 < E_0$، k_1 کوچك می‌شود، و $\sin k_1 a$ خیلی زیاد به‌طرف‌پایین برنگشته است. بنابرشرایط وصل‌کننده، یعنی معادلهٔ (۱۶.۹)، $A > 0$و تابع‌موج به‌صورت نمایی به $+\infty$ می‌گراید. بدازای $E = E_2 > E_0$، k_1 بزرگترمی‌شود، $\sin k_1 a$ زودتر به‌ستیغ خود می‌رسد ودر $r = a$ سریعتر کاهش می‌یابد. شرایط وصل‌کننده ایجاب می‌کنند که $A < 0$، و تابع‌موج به‌صورت نمایی به $-\infty$ می‌گراید. تنها بدازای $E = E_0$، یعنی یك ویژه‌مقداراست که تابع‌موج رفتار مجانبی نمایی‌منفی موردلزوم را دارد.

شرایط مرزی

در تعریف قبلی خود از ویژه‌تابع، توجه کردیم که ویژه‌تابع u_λ(۲.۹) می‌بایست در شرایط مرزی مقررشدهٔ معینی صدق‌کند. این‌شرایط مرزی می‌توانند به‌سه‌صورت باشند:

۱. شرایط مرزی کوشی. مقداریك تابع ومشتق نرمال آن درمرزمشخص می‌شود. در الکتروستاتیك این تابع به‌معنای φ، یعنی پتانسیل، و E_n مؤلفه‌های قائم میدان الکتریکی‌است.

۲. شرایط مرزی دیریکله. مقداریك تابع در مرزمشخص می‌شود.

۳. شرایط مرزی نویمان. مشتق نرمال (شیب نرمال) هر تابع در مرز مشخص می‌شود. درحالت الکتروستاتیکی این مشتق، E_n وبنا بر این متناسب با σ، چگالی بار سطحی است.

رابطهٔ بین این سه‌نوع شرط مرزی با سه نوع معادلهٔ دیفرانسیل جزئی دوبعدی به طور خلاصه درجدول ۲.۹ درج شده است. برای دستیابی به‌بحث مشروحی دربارهٔ این معادله‌های دیفرانسیل جزئی می‌توانید به‌فصل ۲ کتاب زومرفلد یا فصل ۶ کتاب مورس و فشباخ مراجعه‌کنید (مراجع عمومی را ببینید).

قسمتهایی ازجدول ۲.۹ تنها برای حفظ سازگاری متداول آورده شده است. مثلا، شرایط دیریکله برای معادلهٔ پواسون با یك سطح بسته، به‌جوابی پایدار و یکتا می‌انجامد. شرایط نویمان، جدا از شرایط دیریکله، به‌همان ترتیب جواب پایدار و یکتایی به‌دست می‌دهدکه مستقل ازجواب مربوط به‌شرایط دیریکله است. بنابراین، شرایط مرزی کوشی (یعنی شرایط نویمان به‌اضافهٔ شرایط دیریکله) ممکن‌است به‌ناسازگاری منجرشود.

واژهٔ شرایط مرزی به‌عنوان یك حالت خاص، متضمن مفهوم شرایط اولیه نیزهست. مثلا، مشخص کردن مکان اولیهٔ x_0 و سرعت اولیهٔ v_0 در یك مسئلهٔ دینامیکی متناظر است با

جدول ۲.۹

شرایط مرزی	نوع معادلهٔ دیفرانسیل جزئی		
	بیضوی	هذلولوی	سهموی
	لاپلاس، پواسون برحسب (x,y)	معادلهٔ موج برحسب (x,t)	معادلهٔ پخش برحسب (x,t)
کوشی			
سطح باز	نتایج غیرفیزیکی (ناپایداری)	جواب پایدار و یکتا	بسیار محدودکننده
سطح بسته	بسیارمحدودکننده	بسیارمحدودکننده	بسیارمحدودکننده
دیریکله			
سطح باز	غیرکافی	غیرکافی	جواب پایدار و یکتا دریك جهت
سطح بسته	جواب پایدار و یکتا	جواب غیریکتا	بسیارمحدودکننده
نویمان			
سطح باز	غیرکافی	غیرکافی	جواب پایدار و یکتا دریك جهت
سطح بسته	جواب پایدار و یکتا	جواب غیریکتا	بسیارمحدودکننده

شرایط مرزی کوشی. تنها تفاوت موجود در شرایط مرزی، که ما در اینجا در این مسائل یك بعدی به‌کار می‌گیریم، آن است که ما شرایط را روی هر دو انتهای گسترهٔ مجاز متغیر اعمال می‌کنیم.

معمولاً شکل معادلهٔ دیفرانسیل، یا شرایط مرزی مربوط به جوابها، متضمن این نکته است که درهر انتهای بازهٔ موردنظر (یعنی درمرز) حاصلضربهای زیر صفر شوند

$$p(x)v^*(x)\frac{du(x)}{dx}\bigg|_{x=a}=0$$

(۱۸.۹)

$$p(x)v^*(x)\frac{du(x)}{dx}\bigg|_{x=b}=0$$

دراینجا $u(x)$ و $v(x)$ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل خاصی‌اند [معادلهٔ (۶.۹)] که درحال مطالعهٔ آن‌هستیم. به‌هرحال، می‌توانیم بامجموعهٔ شرایط مرزی زیر که محدودیتی تا حدودی کمتر پدید می‌آورد کار کنیم

$$v^*pu'\bigg|_{x=a}=v^*pu'\bigg|_{x=b} \qquad (۱۹.۹)$$

که درآن $u(x)$ و $v(x)$ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل، متناظر با یك ویژه‌مقدار یا ویژه‌مقدارهای متفاوت‌اند. درمورد یك‌سیستم فیزیکی تناوبی مانند شبکهٔ بلور، معادلهٔ (۱۹.۹) به طورمطلوبی برقرار است.

معادله‌های (۱۸.۹) و (۱۹.۹) برحسب v^*، همیوغ مختلط، نوشته می‌شوند. اگر جوابها حقیقی باشند، $v^*=v$، ومی‌توان از ستاره چشم پوشید. ولی دربسط‌نمایی فوریه و درمکانیك‌کوانتومی، توابع مختلط خواهند بود وباید همیوغ مختلط را به‌کاربریم.

این‌خواص [معادلهٔ (۱۸.۹) یا (۱۹.۹)] برای مفهوم عملگر هرمیتی (که در دنبالهٔ مطلب می‌آید) وپیامدهای آن (بخش ۲.۹) ازچنان اهمیتی برخوردار است‌که بازهٔ (a,b) دقیقاً‌طوری برگزیده می‌شودکه مطمئناًمعادلهٔ(۱۸.۹) یا (۱۹.۹) برقرار باشد. اگرجوابهای معادلهٔ ما چند جمله‌ای باشند، ضریب $p(x)$، گسترهٔ انتگرالگیری را تعیین می‌کند. توجه کنیدکه $p(x)$ نقاط تکین معادلهٔ دیفرانسیل را نیزتعیین می‌کند (بخش ۳.۸). برای جوابهای غیرچندجمله‌ای، مثلاً $\sin nx$ و $\cos nx$ $(p=1)$، خواص جوابها، مانند مثال ۳.۱.۹، گسترهٔ انتگرالگیری را تعیین می‌کنند.

مثال ۳.۱.۹ گزینش بازهٔ انتگرالگیری، $[a,b]$

یکی‌ازمعادله‌های ویژه‌مقداری ممکن برای‌عملگر $\mathcal{L}=d^2/dx^2$ عبارت است‌از

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x)+n^2y(x)=0 \qquad (۲۰.۹)$$

با ویژه‌تابعهای

$$u_n = \cos nx$$

$$v_m = \sin mx$$

معادلهٔ (۱۹.۹) به‌صورت زیردرمی‌آید

$$-n \sin mx \ \sin nx \Big|_a^b = 0$$

یا، با تعویض u_n و v_m، خواهیم داشت

$$m \cos mx \ \cos nx \Big|_a^b = 0$$

ازآنجا که $\sin mx$ و $\cos nx$ تناوبی‌اند و دورهٔ آنها 2π است (به‌ازای مقادیر درست n و m) روشن است که معادلهٔ (۱۹.۹) به‌ازای $a = x_0$ و $b = x_0 + 2\pi$ برقرار خواهد بود.

بازه چنان برگزیده می‌شود که شرایط مرزی [معادلهٔ (۱۹.۹) و جز آن] برآورده شود. درمورد فوق (سری فوریه)، از جمله گزینشهای متداول یکی هم $x_0 = 0$ است که به بازهٔ $(0, 2\pi)$ می‌انجامد، ودیگری عبارت‌است‌از $x_0 = -\pi$ که به‌بازهٔ $(-\pi, \pi)$ منجر می‌شود. دراینجا و درطول چند فصل بعد، بازهٔ انتگرالگیری چنان برگزیده می‌شود که شرایط مرزی [معادلهٔ (۱۹.۹)] برآورده شود. بازهٔ $[a,b]$ و عامل وزنی $w(x)$ برای معادله‌های دیفرانسیل مرتبهٔ دوم متداولتر، درجدول ۳.۹ درج شده‌اند.

جدول ۳.۹

معادله	a	b	$w(x)$
لژاندر	-1	1	1
لژاندر انتقال یافته	0	1	1
لژاندر وابسته	-1	1	1
چبیشف I	-1	1	$(1-x^2)^{-1/2}$
چبیشف انتقال یافتهٔ I	0	1	$[x(1-x)]^{-1/2}$
چبیشف II	-1	1	$(1-x^2)^{1/2}$
لاگر	0	∞	e^{-x}
لاگر وابسته	0	∞	$x^k e^{-x}$
هرمیت	$-\infty$	∞	e^{-x^2}
نوسانگرهماهنگ ساده	0	2π	1
	$-\pi$	π	1

یادآوری: ۱. بازهٔ تعامد $[a,b]$ را شرایط مرزی بخش ۱.۹ تعیین می‌کنند.
۲. تابع وزنی باتبدیل معادلهٔ دیفرانسیل به‌صورت خود-الحاقی مشخص می‌شود.

عملگرهای هرمیتی

اکنون به اثبات یك خاصیت مهم ترکیب عملگر دیفرانسیلی مرتبهٔ دوم خود-الحاقی [معادلهٔ (۶.۹)]، و جوابهای $u(x)$ و $v(x)$ می‌پردازیم که‌درشرایط مرزی‌داده شده درمعادلهٔ(۱۹.۹) صدق می کنند.

با انتگرالگیری از v^* (همیوغ مختلط) ضرب در عملگر دیفرانسیلی خود-الحاقی مرتبهٔ دوم $\mathcal{L}$ (که روی u عمل می کند)، در گسترهٔ $a \leqslant x \leqslant b$، وبااستفاده ازمعادلهٔ (۴.۹) خواهیم داشت

$$\int_a^b v^* \mathcal{L} u \, dx = \int_a^b v^*(pu')' dx + \int_a^b v^* q u \, dx \qquad (۲۱.۹)$$

بااستفاده از انتگرالگیری جزءبه‌جزء، داریم

$$\int_a^b v^*(pu')' dx = v^* pu' \Big|_a^b - \int_a^b v^{*\prime} pu' dx \qquad (۲۲.۹)$$

جزء انتگرال‌گرفته‌شده، با بهره‌گیری از شرایط مرزی [معادلهٔ (۱۹.۹)]، صفرخواهد شد. باانتگرالگیری جزء به‌جزء ازانتگرال باقیمانده، داریم

$$-\int_a^b v^{*\prime} pu' dx = -v^{*\prime} pu \Big|_a^b + \int_a^b u(pv^{*\prime})' dx \qquad (۲۳.۹)$$

دراینجا نیز جزء انتگرال‌گرفته شده، با به‌کارگیری معادلهٔ (۱۹.۹) صفرمی‌شود. ازترکیب معادله‌های (۲۱.۹) تا (۲۳.۹) داریم

$$\int_a^b v^* \mathcal{L} u \, dx = \int_a^b u \mathcal{L} v^* dx \qquad (۲۴.۹)$$

این‌خاصیت که درمعادلهٔ (۲۴.۹) آمده‌است. بداین‌صورت بیان می‌شودکه عملگر $\mathcal{L}$ نسبت به‌دوتابع $u(x)$ و $v(x)$ که درشرایط مرزی مشخص شده درمعادلهٔ (۱۹.۹) صدق می‌کنند، هرمیتی است. دقت‌کنیدکه این‌خاصیت هرمیتی‌بودن ازخود-الحاقی بودن به‌اضافهٔ شرایط مرزی به‌دست می‌آید.

عملگرهای هرمیتی در مکانیك کوانتومی

تاکنون دراین بخش توجه‌مان به‌عملگرهای دیفرانسیلی مرتبهٔ دوم کلاسیکی معطوف بوده است. برای تعمیم نظریهٔ عملگر هرمیتی بصورتی که درمکانیك‌کوانتومی مورد نیاز است، تعمیم زیررا درنظرمی‌گیریم: ضرورتی‌ندارد عملگرها حتماً عملگرهای دیفرانسیلی مرتبهٔ‌دوم باشند، و نیازی هم‌نیست که حقیقی باشند. $p_x = -i\hbar(\partial/\partial x)$ یك عملگر هرمیتی خواهد بود. فقط فرض‌می‌کنیم (به‌طوری‌که در مکانیك‌کوانتومی مرسوم است) که تابع‌موجها در شرایط مرزی مناسب صادق‌اند یا دربینهایت باسرعت کافی به‌صفر میل می‌کنند و یا رفتار

دوره‌ای دارند (مانند تابع‌موج در شبکهٔ بلور، یا شدت واحد برای امواج). عملگر $\mathcal{L}$ را به‌شرطی هرمیتی می‌گوییم که

$$\int \psi_1^* \mathcal{L}\psi_2 d\tau = \int (\mathcal{L}\psi_1)^* \psi_2 d\tau \qquad (۲۵.۹)$$

این تعریف، همانند معادلهٔ (۲۴.۹) است، با این تفاوت ساده که کمیتهای مختلط را هم دربردارد.

$A^\dagger$، عملگر الحاقی عملگر A، بنابرتعریف عبارت است از

$$\int \psi_1^* A^\dagger \psi_2 d\tau = \int (A\psi_1)^* \psi_2 d\tau \qquad (۲۶.۹)$$

این تعریف باتعریف مبتنی برعملگر کلاسیکی مشتق دوم، معادلهٔ (۲.۹)، تفاوت کلی دارد. دراینجا الحاقی برحسب انتگرالی تعریف می‌شود که $A^\dagger$ بخشی ازانتگرالده آن‌است. آشکار است‌که اگر $A = A^\dagger$ (خودـالحاقی باشد)، آنگاه A هرمیتی است. عکس این موضوع را نمی‌توان به‌آسانی اثبات کرد(وهمواره هم درست نیست)، ولی در مکانیك‌کوانتومی معمولا دواصطلاح خودـالحاقی و هرمیتی را مترادف می‌گیرند (درآنالیز ماتریسی هم همین‌طور است، بخش ۵.۴، جلد اول).

مقدار انتظاری عملگر $\mathcal{L}$ بنابرتعریف عبارت است از

$$\langle \mathcal{L} \rangle = \int \psi^* \mathcal{L} \psi d\tau \qquad (\text{۲۷.۹الف})$$

در چارچوب مکانیك‌کوانتومی، $\langle \mathcal{L} \rangle$ با نتیجهٔ اندازه‌گیری یك کمیت فیزیکی متناظر است‌که با $\mathcal{L}$ نمایش داده می‌شود، واین‌هنگامی‌است‌که سیستم فیزیکی درحالتی است‌که با تابع‌موج ψ توصیف شده باشد. اگر بخواهیم $\mathcal{L}$ هرمیتی باشد، به سادگی می‌توان دیدکه $\langle \mathcal{L} \rangle$ حقیقی است (این همان چیزی است‌که در هر نظریهٔ فیزیکی ازیك اندازه‌گیری انتظار می‌رود). ازمعادلهٔ (۲۷.۹الف) همیوغ مختلط می‌گیریم، خواهیم داشت

$$\langle \mathcal{L} \rangle^* = \left[\int \psi^* \mathcal{L} \psi d\tau \right]^*$$

$$= \int \psi \mathcal{L}^* \psi^* d\tau$$

با بازآرایی عوامل درانتگرالده، داریم

$$\langle \mathcal{L} \rangle^* = \int (\mathcal{L}\psi)^* \psi d\tau$$

اکنون، با بهره‌گیری از تعریف عملگر هرمیتی، معادلهٔ (۲۵.۹)، خواهیم داشت

$$\langle \mathcal{L} \rangle^* = \int \psi^* \mathcal{L} \psi \, d\tau = \langle \mathcal{L} \rangle \qquad (۲۷.۹\text{ب})$$

یعنی $\langle \mathcal{L} \rangle$ حقیقی است. قابل توجه است که ψ لزوماً یك ویژه‌تابع $\mathcal{L}$ نیست.

مسائل

۱.۱.۹ نشان دهید که معادلهٔ لاگر را می‌توان از طریق ضرب کردن در e^{-x} به‌صورت خود-الحاقی درآورد و درآن $w(x) = e^{-x}$ تابع وزنی است.

۲.۱.۹ نشان دهید که معادلهٔ هرمیت را می‌توان به‌کمك ضرب کردن در e^{-x^2} به‌صورت خود-الحاقی درآورد و درنتیجه تابع چگالی مناسب به‌صورت $w(x) = e^{-x^2}$ درمی‌آید.

۳.۱.۹ نشان دهید که معادلهٔ چبیشف (نوع I) را می‌توان از طریق ضرب کردن در $(1-x^2)^{-1/2}$ به‌صورت خود-الحاقی درآورد و درنتیجه تابع چگالی مناسب به‌صورت $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ درمی‌آید.

۴.۱.۹ درمورد معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم خطی که به‌صورت خود-الحاقی بیان‌شده‌باشد، نشان دهید که:

(الف) رونسکیینی برابراست با یك کمیت ثابت تقسیم برضریب اولیهٔ p

$$W[y_1, y_2] = \frac{C}{p(x)}$$

(ب) جواب دوم ازعبارت زیر به‌دست می‌آید

$$y_2(x) = C y_1(x) \int^x \frac{dt}{p[y_1(t)]^2}$$

۵.۱.۹ $U_n(x)$، چندجمله‌ای چبیشف (نوع II) درمعادلهٔ دیفرانسیل زیرصدق می‌کند

$$(1-x^2)U_n''(x) - 3xU_n'(x) + n(n+2)U_n(x) = 0$$

(الف) نقاط تکینی را بیابید که در صفحهٔ متناهی پدیدار می‌شوند، و تعیین کنید که آیا منظم‌اند یا نامنظم.

(ب) این معادله رابه‌شکل خود-الحاقی درآورید.

(ج) ویژه‌مقدار کامل را شناسایی کنید.

(د) تابع وزنی را شناسایی کنید.

۶.۱.۹ در حالت بسیارخاص $\lambda = ۰$ و $q(x) = ۰$ معادلهٔ ویژه‌مقداری خود-الحاقی به صورت زیردرمی‌آید

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du(x)}{dx}\right] = ۰$$

جواب زیردراین معادله صدق می‌کند

$$\frac{du}{dx} = \frac{۱}{p(x)}$$

ازاین جواب بهره‌گیرید ویك جواب "دوم" برای هریك ازمعادلات زیر پیداکنید:

(الف) معادلهٔ لژاندر، (ب) معادلهٔ لاگر، و (ج) معادلهٔ هرمیت.

پاسخ. (الف) $u_۲(x) = \frac{۱}{۲}\ln\frac{۱+x}{۱-x}$، (ب) $u_۲(x) - u_۲(x_۰) = \int_{x_۰}^{x} e^{t}\frac{dt}{t}$،

(ج) $u_۲(x) = \int_{۰}^{x} e^{t^۲}dt$.

این جوابهای دوم ازخود رفتار واگرایی نشان می‌دهندکه معمولاًدریك جواب دوم‌موجود است.

یادآوری. درهرسه حالت: $u_۱(x) = ۱$.

۷.۱.۹ بافرض اینکه $\mathcal{L}u = ۰$ و $g\mathcal{L}u$ خود-الحاقی است، برای عملگر الحاقی $\bar{\mathcal{L}}$ نشان دهیدکه $\bar{\mathcal{L}}(gu) = ۰$.

۸.۱.۹ درمورد عملگر دیفرانسیلی مرتبهٔ دوم $\mathcal{L}$ که خود-الحاقی است، نشان دهیدکه

$$\int_{a}^{b}[y_۲\mathcal{L}y_۱ - y_۱\mathcal{L}y_۲]dx = p(y'_۱y_۲ - y_۱y'_۲)\Big|_{a}^{b}$$

۹.۱.۹ نشان دهیدکه اگرقرار باشد تابع ψ در ناحیه‌ای متناهی از فضا درمعادلهٔ لاپلاس صدق کند ونیزشرایط مرزی دیریکله را روی‌تمامی سطح مرزی بسته برآورده کند، آنگاه ψ یکتاست.

راهنمایی. بهره‌گیری از یکی از صورتهای مختلف قضیهٔ گرین، بخش ۱۱.۱، به‌حل مسئله کمك خواهدکرد.

۱۰.۱.۹ فرض‌کنید که جوابهای معادله‌های لژاندر، چبیشف، هرمیت، ولاگر چندجمله‌ای باشند. نشان دهیدگسترهٔ انتگرالگیری‌ای‌که‌برآورده شدن شرایط مرزی عملگر هرمیتی را تضمین می‌کند، در هر حالت عبارت است از: (الف) لژاندر $[-۱, ۱]$، (ب) چبیشف

$[-1,1]$، (ج) هرمیت $[-\infty,\infty]$، و (د) لاگر $[0,\infty]$.

۱۱۰۱۰۹ درچارچوب مکانیك کوانتومی [معادله‌های (۲۵.۹) و الی‌آخر]، نشان دهید که عملگرهای زیر هرمیتی‌اند:

(الف) تکانه $\mathbf{p}=-i\hbar\nabla\equiv\frac{ih}{2\pi}\nabla$،

(ب) تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{L}=-i\hbar\mathbf{r}\times\nabla\equiv i\frac{h}{2\pi}\mathbf{r}\times\nabla$.

راهنمایی. $\mathbf{L}$ دردستگاه دکارتی ترکیب خطی عملگرهای هرمیتی غیرجا به‌جا شونده است.

۱۲۰۱۰۹ (الف) A یك عملگر غیرهرمیتی است. به‌زبان معادله‌های (۲۵.۹) و (۲۶.۹) نشان دهید که

$$A+A^{\dagger} \qquad \text{و} \qquad i(A-A^{\dagger})$$

عملگرهای هرمیتی‌اند.

(ب) بااستفاده ازنتیجهٔ بند (الف) نشان دهید که هرعملگرغیرهرمیتی را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از دوعملگر هرمیتی نوشت.

۱۳۰۱۰۹ U و V دوعملگراختیاری‌اندکه ممکن‌است هرمیتی نباشند. به‌زبان معادلهٔ (۲۶.۹) نشان دهیدکه

$$(UV)^{\dagger}=V^{\dagger}U^{\dagger}$$

به‌تشابه بامعادلهٔ (۱۲۴.۴) برای ماتریسهای الحاقی توجه کنید.

راهنمایی. تعریف عملگرالحاقی، معادلهٔ (۲۶.۹)، را به‌کار ببندید.

۱۴۰۱۰۹ ثابت کنیدکه حاصلضرب دوعملگر هرمیتی نیزهرمیتی خواهد بود اگر وفقط اگر دوعملگر جا به‌جا شوند [معادلهٔ (۲۵.۹)].

۱۵۰۱۰۹ A و B عملگرهای ناجابه‌جایی‌کوانتوم مکانیکی‌اند و داریم

$$AB-BA=iC$$

نشان دهیدکه C هرمیتی است. فرض‌کنیدکه شرایط مرزی مناسب برآورده می‌شوند.

۱۶۰۱۰۹ عملگر $\mathcal{L}$ هرمیتی‌است. نشان دهید که $\langle\mathcal{L}^2\rangle\geqslant 0$.

۱۷.۱.۹ مقدار انتظاری کوانتوم مکانیکی بنا بر تعریف عبارت است از

$$\langle A\rangle = \int \psi^*(x) A\psi(x)dx$$

که در آن A یك عملگر خطی است. نشان دهید که برقرار کردن شرط حقیقی بودن $\langle A\rangle$ به‌معنای آن است که A نسبت به $\psi(x)$ باید هرمیتی باشد.

۱۸.۱.۹ با استفاده از تعریف الحاقی درمعادلهٔ (۲۶.۹)، نشان دهید که $A^{++}=A$، یعنی $\int\psi_1^* A^{++}\psi_2 d\tau = \int\psi_1^* A\psi_2 d\tau$. یعنی الحاقی‌الحاقی، خود عملگر اصلی خواهد بود.

راهنمایی. توابع ψ_1 و ψ_2 مربوط به‌معادلهٔ (۲۶.۹)، رده‌ای از توابع را نشان‌می‌دهد. شاخص پایین ۱ و ۲ را می‌توان تعویض کرد یا به‌جای آنها شاخص دیگری قرارداد.

۱۹.۱.۹ معادلهٔ موج شرودینگر برای دوترون (با پتانسیل وودز-ساکسون) به‌صورت زیر است

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi + \frac{V_0}{1+\exp[(r-r_0)/a]}\psi = E\psi$$

دراینجا $E = -2.224\,\text{MeV}$. a یك "پارامترضخامت"، به‌اندازهٔ $0.4\times 10^{-13}\,\text{cm}$ است. با بیان طول برحسب فرمی (10^{-13} سانتیمتر)، و انرژی برحسب میلیون الکترون ولت (MeV)، می‌توانیم معادلهٔ موج را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\psi) + \frac{1}{41.47}\left[E - \frac{V_0}{1+\exp\left(\frac{r-r_0}{a}\right)}\right](r\psi) = 0$$

فرض‌می‌کنیم که E ازطریق آزمایش معلوم‌است. می‌خواهیم V_0 را به‌ازای یك‌مقدارمشخص r_0، (مثلا $r_0 = 2.1$) به‌دست‌آوریم. گیریم $y(r) = r\psi(r)$، آنگاه $y(0) = 0$، و $y'(0)$ را برابریك می‌گیریم. V_0 را چنان‌بیابیدکه $y(20.0) = 0$. [این‌شرط باید برای $y(\infty)$ گذاشته شود. ولی $r = 20$ به‌اندازهٔ کافی فراتراز گسترهٔ نیروهای هسته‌ای است که بتوان آن‌را بینهایت تقریب زد.]

پاسخ. به‌ازای $a = 0.4$ و $r_0 = 2.1\,\text{fm}$، داریم $V_0 = -34.159\,\text{MeV}$.

۲۰.۱.۹ پارامتر V_0 مربوط به چاه پتانسیل هسته‌ای مسئلهٔ ۱۹.۱.۹ را، به ازای $r = 2.00(0.05)2.25$ فرمی، به‌صورت تابعی از r_0 بیان کنید.

نتیجه را به‌صورت قانون توانی زیر بنویسید

$$|V_{\circ}|r_{\circ}^{\nu}=k$$

نمای ν و ثابت k را تعیین کنید. این فرمولبندی قانون توانی برای درونیابی دقیق سودمند است.

۲۱.۱.۹ درمسئلهٔ ۱۹.۱.۹ فرض شد که ۲۰ فرمی برای بینهایت تقریب خوبی است. این فرض را ازطریق محاسبهٔ $V_{\circ}$ به‌ازای $r\psi(r)=\circ$ در (الف) $r=۱۵$، (ب) $r=۲۰$، (ج) $r=۲۵$، و(د) $r=۳۰$ بیازمایید. نتایج این‌محاسبه را ترسیم کنید. $r_{\circ}$ را برابر ۲٫۱۰ و a را برابر ۰٫۴ (فرمی) بگیرید.

۲۲.۱.۹ معادلهٔ موج‌شرودینگر، برای ذره‌ای‌کوانتومی که درچاه پتانسیل

$$V(x)=(۱/۲)m\omega^{۲}x^{۲}$$

حرکت می‌کند به‌صورت زیراست

$$-\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\frac{d^{۲}\psi(x)}{dx^{۲}}+\frac{۱}{۲}m\omega^{۲}x^{۲}\psi(x)=E\psi(x)$$

یا

$$\frac{d^{۲}\psi(z)}{dz^{۲}}-z^{۲}\psi(z)=-\frac{۲E}{\hbar\omega}\psi(z)$$

که در آن $z=(m\omega/\hbar)^{۱/۲}x$. از آنجا که این عملگر زوج است، انتظار داریم جوابهایی با پاریتهٔ معین به‌دست آوریم. به‌ازای هریك از شرایط اولیهٔ زیر، مربوط به‌معادلهٔ فوق، از مبدأ انتگرال بگیرید وکمترین مقدار ثابت $۲E/\hbar\omega$ را، که در هرحالت به $\psi(\infty)=\circ$ می‌انجامد، تعیین کنید (می‌توانید $z=۶$ را تقریبی برای بینهایت بگیرید).

(الف) برای ویژه‌تابع زوج

$$\psi(\circ)=۱,\qquad \psi'(\circ)=\circ$$

(ب) برای ویژه‌تابع فرد

$$\psi(\circ)=\circ,\qquad \psi'(\circ)=۱$$

یادآوری. جواب تحلیلی دربخش ۱.۱۳ داده شده است.

۲.۹ عملگرهای هرمیتی (خود-الحاقی)

عملگرهای هرمیتی، یا خود-الحاقی، سه‌خاصیت دارند که در فیزیك، چه کلاسیکی چه

کوانتومی، از اهمیت زیادی برخوردارند.

۱. ویژه‌مقدارهای هرعملگر هرمیتی حقیقی‌اند.

۲. ویژه‌تابعهای هرعملگرهرمیتی متعامدند.

۳. ویژه‌تابعهای هرعملگرهرمیتی یك مجموعهٔ کامل[1] تشکیل می‌دهند.

ویژه‌مقدارهای حقیقی

درادامهٔ مطلب دوخاصیت اول ازاین‌سه خاصیت را ثابت می‌کنیم. فرض کنید

$$\mathcal{L}u_i+\lambda_i w u_i=0 \qquad (۲۸.۹)$$

بافرض‌اینکه یك ویژه‌مقدار و ویژه‌تابع دیگر نیزوجود دارد، می‌نویسیم

$$\mathcal{L}u_j+\lambda_j w u_j=0 \qquad (۲۹.۹)$$

آنگاه، باهمیوغ مختلط‌گرفتن داریم

$$\mathcal{L}u_j^*+\lambda_j^* w u_j^*=0 \qquad (۳۰.۹)$$

در اینجا $\mathcal{L}$ یك عملگر حقیقی است (p و q توابعی حقیقی از x هستند) و $w(x)$ یك تابع حقیقی‌است. ولی λ_k، یعنی ویژه‌مقدار و u_k، ویژه‌تابع، را مختلط می‌گیریم. معادلهٔ (۲۸.۹) را در u_j^* ومعادلهٔ (۳۰.۹) را در u_i ضرب وسپس این‌دو را ازهم کم می‌کنیم، داریم

$$u_j^*\mathcal{L}u_i-u_i\mathcal{L}u_j^*=(\lambda_j^*-\lambda_i)wu_iu_j^* \qquad (۳۱.۹)$$

درگسترهٔ $a\leqslant x\leqslant b$، انتگرال می‌گیریم

$$\int_a^b u_j^*\mathcal{L}u_i\,dx-\int_a^b u_i\mathcal{L}u_j^*\,dx=(\lambda_j^*-\lambda_i)\int_a^b u_iu_j^*w\,dx \qquad (۳۲.۹)$$

سمت چپ، به‌سبب هرمیتی بودن $\mathcal{L}$ و بااستفاده ازمعادلهٔ (۲۶.۹)، برابرصفر است و

$$(\lambda_j^*-\lambda_i)\int_a^b u_iu_j^*w\,dx=0 \qquad (۳۳.۹)$$

---

۱. این‌خاصیت سوم عام‌نیست، ولی برای عملگرهای دیفرانسیلی مرتبهٔ دوم خطی به‌شکل اشتورم-لیوویل (خود-الحاقی) برقرار است. تمامیت را دربخش ۴.۹ تعریف و بررسی خواهیم کرد. دربخش ۸.۱۷، اثباتی‌ارائه خواهیم داد مبنی براینکه ویژه‌تابعهای معادلات دیفرانسیل خود-الحاقی مرتبهٔ دوم‌خطی، مجموعهٔ کاملی راتشکیل می‌دهند.

اگر $j=i$، انتگرال نمی‌تواند صفر شود [زیرا جز در نقاط منزوی، $w(x)>0$] مگر در حالت بدیهی $u_i=0$. ازاین‌رو ضریب $(\lambda_i^*-\lambda_i)$ باید صفر شود

$$\lambda_i^*=\lambda_i \tag{۳۴.۹}$$

که بیان ریاضی حقیقی‌بودن ویژه‌مقدار است. از آنجا که λ_i می‌تواند هریك از ویژه‌مقدارها باشد، معادلهٔ (۳۴.۹) خاصیت اول را ثابت می‌کند. این خاصیت دقیقاً شبیه ماهیت ویژه‌مقدارهای ماتریسهای حقیقی متقارن (و ماتریسهای هرمیتی) است (با بخش ۶.۴، جلد اول، مقایسه کنید).

حقیقی‌بودن ویژه‌مقدارهای عملگرهای هرمیتی، در مکانیك کوانتومی، دارای اهمیت اساسی است. ویژه‌مقدارها در مکانیك کوانتومی با کمیتهایی که دقیقاً قابل اندازه‌گیری‌اند، مانند انرژی و تکانهٔ زاویه‌ای، متناظرند. حقیقی‌بودن ویژه‌مقدارها، در نظریه‌ای که برحسب عملگرهای هرمیتی فرمولبندی شده‌است، ضامن این نکته خواهد بود که نظریه برای این کمیتهای فیزیکی قابل اندازه‌گیری، اعداد حقیقی پیش‌بینی می‌کند. دربخش ۸.۱۷ خواهیم دید که مجموعهٔ ویژه‌مقدارهای حقیقی یك کران پایین دارند.

ویژه تابعهای متعامد

حال اگر i را مخالف j بگیریم و داشته‌باشیم: $\lambda_i\neq\lambda_j$، انتگرال حاصلضرب دو ویژه‌تابع مختلف باید صفر شود

$$\int_a^b u_i u_j^* w\,dx=0 \tag{۳۵.۹}$$

این شرط، که آن‌را تعامد می‌نامند، شبیه پیوستار صفرشدن حاصلضرب نرده‌ای دو بردار است.[1] می‌گوییم که ویژه‌تابعهای $u_i(x)$ و $u_j(x)$ نسبت به‌تابع وزنی $w(x)$ دربازهٔ $[a,b]$ متعامدند. معادلهٔ (۳۵.۹)، خاصیت دوم عملگرهای هرمیتی مارا (جز دریك وضعیت خاص) ثابت می‌کند. باز هم شباهت دقیق با آنالیز ماتریسی را خاطرنشان می‌کنیم. درواقع، بین این نظریهٔ معادلات دیفرانسیل اشتورم-لیوویل و بررسی ماتریسهای هرمیتی یك تناظر یك‌به‌یك وجود دارد. از نظر تاریخی، این تناظر در اثبات این نکته اهمیت داشته‌است که

---

۱. ازتعریف انتگرال ریمان داریم

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{N} f(x_i)g(x_i)\right)\Delta x$$

که در آن $x_0=a$، $x_N=b$ و $x_i-x_{i-1}=\Delta x$. اگر $f(x_i)$ و $g(x_i)$ را مؤلفه‌های iام در بردار N مؤلفه‌ای بگیریم، آنگاه این‌مجموع (و درنتیجه این انتگرال) با حاصلضرب نرده‌ای دوبردار، معادلهٔ (۲۲.۱)، مستقیماً متناظراست. صفرشدن حاصلضرب نرده‌ای شرط تعامد دو بردار—یا دوتابع است.

مکانیك ماتریسی، که هایزنبرگ واضع آن بود، با مکانیك موجی، که شرودینگر ابداع کرد، ازنظر ریاضی معادل یکدیگرند. امروزه این دو رهیافت متمایز، درنظریهٔ مکانیك کوانتومی در کنار یکدیگر قراردارند، و برای هرمسئلهٔ آن ازفرمولبندی ریاضیی بهره می‌گیرند که برای آن مسئله مناسبتر باشد. درواقع روشهای ریاضی‌ممکن تنها منحصر بههمین دو روش نیست. معادلات انتگرالی، فصل ۱۶، رهیافت دیگری را تشکیل می‌دهند که معادل این‌دو و گاهی مناسبتر یا حتی قدرتمندتر است.

اثبات تعامد به‌طورکامل صورت نگرفت. می‌توانیم به‌ازای $i \neq j$ بازهم داشته‌باشیم: $\lambda_i = \lambda_j$. چنین حالتی را واگن می‌نامند. نمونه‌هایی از واگنی را درآخر این بخش ارائه خواهیم داد. اگر $\lambda_i = \lambda_j$، لازم نیست که انتگـرال در معادلهٔ (۳۳.۹) صفر شود. یعنی، ویژه‌تابعهای مستقل خطی متناظر به‌یك ویژه‌مقدار، به‌خودی‌خود متعامد نیستند و باید روش دیگری‌برای به‌دست آوردن یك‌مجموعهٔ متعامد جستجو کرد. اگرچه ممکن است ویژه‌تابعها برای حالت واگن متعامد نباشند، ولی همواره می‌توان آنها را متعامد کرد. یکی از راههای انجام این‌کار دربخش بعد توضیح داده خواهد شد.

در فصلهای آتی خواهیم دید که همان قدر که دراختیار داشتن یك دستگاه مختصات متعامد مفید است، دسترسی داشتن به مجموعه‌ای ازتوابـع متعامد نیز به‌همان میزان مفیـد خواهد بود. با توابع غیرمتعامد نیزمی‌توانیم کارکنیم ولی‌آنها هم‌عملا همان‌قدر درهم برهم خواهنـد بودکه دستگاه مختصات مایل.

مثال ۱.۲.۹ سری فوریه: تعامد

به‌ادامهٔ مثال ۳.۱.۹ می‌پردازیم؛ معادلهٔ ویژه‌مقداری (۲۰.۹)، یعنی

$$\frac{d^{۲}}{dx^{۲}}y(x)+n^{۲}y(x)=۰$$

می‌تواند یك‌ذرهٔ کوانتومی دریك جعبه، یا یك سیم ویلون مرتعش‌را، باویژه‌تابعهای(واگن) $\sin nx$ و $\cos nx$، توصیف‌کند.

انتگرالهای تعامد به‌ازای مقادیرحقیقی n (دراینجا آنها را عدد درست‌گرفته‌ایم) به صورت زیردرمی‌آید

الف) $$\int_{x_۰}^{x_۰+۲\pi}\sin mx\,\sin nx\,dx=C_n\delta_{nm}$$

ب) $$\int_{x_۰}^{x_۰+۲\pi}\cos mx\,\cos nx\,dx=D_n\delta_{nm}$$

ج) $$\int_{x_۰}^{x_۰+۲\pi}\sin mx\,\cos nx\,dx=۰$$

بررسی قبلی‌ما برای بازهٔ 2π، دلتای کرونکر بندهای (الف) و(ب) را می‌دهد، ولی صفر بند(ج) را پیش‌بینی‌نمی‌کند، زیرا بند(ج) شامل ویژه‌تابعهای واگن است. ولی با دقت می‌توان دیدکه بند (ج) به‌ازای همهٔ مقادیر اعداد درست m و n همواره صفرمی‌شود.

نظریهٔ اشتورم-لیوویل دربارهٔ مقادیر C_n و D_n چیزی نمی‌گوید. محاسبه عملا نشان می‌دهدکه

$$C_n=\begin{cases}\pi, & n\neq 0\\ 0, & n=0\end{cases}$$

$$D_n=\begin{cases}\pi, & n\neq 0\\ 2\pi, & n=0\end{cases}$$

این انتگرالهای تعامد مبنای سری فوریه را تشکیل می‌دهندکه در فصل ۱۴ به آنها خواهیم پرداخت.

مثال ۲.۲.۹ بسط برحسب ویژه‌تابعهای متعامد: موج مربعی

معنی خاصیت تمامیت همین‌است که رده‌های خاصی‌ازتوابع(یعنی توابع قطعه‌ای یا پاره‌پاره پیوسته) را می‌توانیم، تا هر درجه از دقت‌که بخواهیم، به‌کمك یك سری از ویژه‌تابعهای متعامد نمایش دهیم. موج مربعی زیررا درنظر بگیرید

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{h}{2}, & 0<x<\pi\\ -\dfrac{h}{2}, & -\pi<x<0\end{cases}\tag{۳۶.۹}$$

این تابع را می‌توان برحسب ویژه‌تابعهای گوناگونی، لژاندر، هرمیت، چبیشف، و مانند اینها، بسط داد. گزینش ویژه‌تابع براساس مناسب بودن آن صورت می‌گیرد. برای اینکه تکنیك این بسط را ببینیم، ویژه‌تابعهای مثال ۱.۲.۹، یعنی $\sin nx$ و $\cos nx$، رادرنظر می‌گیریم.

این سری ویژه‌تابع را به‌تناسب (و به‌طور قراردادی) چنین می‌نویسیم

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

ضرایب، بااستفاده ازانتگرالهای تعامد مثال ۱.۲.۹، به‌کمك روابط زیر بیان می‌شوند

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\, dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\, dt, \qquad n = ۰, ۱, ۲, \cdots$$

با نشاندن مستقیم $\pm h/۲$ به‌جای $f(t)$ خواهیم داشت

$$a_n = ۰$$

که از یاد تقارن موجود نیز همین انتظار می‌رفت، و

$$b_n = \frac{h}{n\pi}(۱ - \cos n\pi) = \begin{cases} ۰, & \text{زوج } n \\ \frac{۲h}{n\pi}, & \text{فرد } n \end{cases}$$

درنتیجه بسط (فوریهٔ) ویژه‌تابعی موج مربعی به‌صورت زیر است

$$f(x) = \frac{۲h}{\pi}\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{\sin(۲n+۱)x}{(۲n+۱)} \tag{۳۷.۹}$$

مثالهای دیگری، که در آنها از ویژه‌تابعهای دیگر استفاده می‌شود، در فصلهای ۱۱ و ۱۲ توصیف خواهند شد.

واگنی

قبلا بامفهوم واگنی آشنا شدیم. اگر N ویژه‌تابع مستقل، متناظر با یك ویژه‌مقدار باشد، آن ویژه‌مقدار را واگن N گانه می‌خوانیم. ویژه‌مقدارها و ویژه‌تابعهای معادلهٔ نوسانگر خطی، مثال ۱.۲.۹، واگنی را به‌صورتی ساده نمایش می‌دهند. به‌ازای هرمقداری از ویژه‌مقدار n، دو جواب ممکن وجود دارد: $\sin nx$ و $\cos nx$ (و هر گونه ترکیب خطی از این‌دو کمیت). می‌توانیم بگوییم که ویژه‌تابعها واگن‌اند یا ویژه‌مقدار واگن است.

سیستم فیزیکی شامل یك الکترون در اتم (در یك بررسی نانسبیتی، با چشمپوشی از اسپین) نمایانگر نمونهٔ پیچیده‌تری از واگنی است. درمعادلهٔ شرودینگر، معادلهٔ (۵۳.۱۳) برای‌هیدروژن، انرژی کل الکترون، ویژه‌مقدار ما به‌شمار می‌آید. می‌توانیم آن‌را بااستفاده از اعداد کوانتومی n، L، و M به‌صورت شاخص پایین، یعنی E_{nLM} نشانه‌گذاری کنیم. به‌ازای‌هرمجموعهٔ‌متمایز اعداد کوانتومی (n, L, M) یك‌ویژه‌تابع مستقل‌خطی $\psi_{nLM}(r, \theta, \varphi)$ وجود دارد. انرژی E_{nLM} برای هیدروژن از L و M مستقل است. با درنظرگرفتن اینکه $۰ \leqslant L \leqslant n-۱$ و $-L \leqslant M \leqslant L$، این ویژه‌مقدار، واگن $n^۲$ گانه‌است (شمول اسپین

الکترون، واگنی را تا $2n^2$ بالامی‌برد). دراتمهایی که بیش ازیك الکترون دارند، پتانسیل الکتروستاتیکی دیگر به‌صورت پتانسیل‌سادهٔ r^{-1} نیست. انرژی علاوه بر n به L هم‌بستگی خواهدداشت ولی تابع M نخواهد بود. E_{nLM} بازهم واگن $(2L+1)$ گانه خواهدبود. می‌توان با استفاده ازمیدان مغناطیسی موجد اثر زیمان، این واگنی را ازبین برد.

مسائل

۱.۲.۹ توابع $u_1(x)$ و $u_2(x)$ عبارت‌اند از ویژه‌تابعهای یك‌عملگر هرمیتی باویژه‌مقدارهای متمایز λ_1 و λ_2. ثابت کنیدکه $u_1(x)$ و $u_2(x)$ مستقل خطی‌اند.

۲.۲.۹ (الف) بردارهای $\mathbf{e}_n$ بریکدیگرعمودند: $\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_m = 0$ به‌ازای $n \neq m$. نشان دهید که این بردارها مستقل خطی‌اند.

(ب) توابع $\psi_n(x)$ دربازهٔ $[a,b]$ نسبت به‌تابع وزنی $w(x)$، متعامدند. نشان‌دهید که $\psi_n(x)$ها مستقل خطی‌اند.

۳.۲.۹ عبارتهای:

$$Q_0(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \text{و} \quad P_1(x)=x$$

جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل لژاندر متناظر با ویژه‌مقدارهای متفاوت‌اند.

(الف) انتگرال تعامد این‌دوجواب، یعنی انتگرال زیررا، محاسبه‌کنید

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$$

(ب) توضیح دهید که چرا این دو تابع متعامد نیستند؟ چرا اثبات تعامد در اینجا عملی نیست؟

۴.۲.۹ عبارتهای: $T_0(x)=1$ و $V_1(x)=(1-x^2)^{1/2}$ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل چبیشف متناظر با ویژه‌مقدارهای متفاوت‌اند. برحسب شرایط مرزی، توضیح دهید که چرا این‌دو تابع متعامد نیستند.

۵.۲.۹ (الف) نشان دهیدکه مشتقهای اول چندجمله‌ایهای لژاندر دریك معادلهٔ دیفرانسیل خود-الحاقی با ویژه‌مقدار $\lambda=n(n+1)-2$ صدق می‌کنند.

(ب) نشان دهید که این مشتقهای چندجمله‌ایهای لژاندر در رابطهٔ تعامد زیر صدق می‌کنند

$$\int_{-1}^{1} P'_m(x)P'_n(x)(1-x^2)dx=0, \qquad m\neq n$$

یادآوری. دربخش ۵.۱۲ تابع $(1-x^2)^{1/2}P'_n(x)$ را چندجمله‌ای وابستهٔ لژاندر، $P_n^1(x)$، خواهیم نامید.

۶.۲.۹ مجموعهٔ توابع $u_n(x)$ درمعادلهٔ اشتورم-لیوویل

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}u_n(x)\right]+\lambda_n w(x)u_n(x)=0$$

صدق می‌کنند. توابع $u_m(x)$ و $u_n(x)$ شرایطی مرزی را برآورده می‌کنندکه به تعامدآنها منجر می‌شود. ویژه‌مقدارهای λ_m و λ_n متناظر متمایزند. ثابت‌کنیدکه $u'_m(x)$ و $u'_n(x)$ با شرایط مرزی مناسب و با تابع وزنی $p(x)$، متعامدند.

۷.۲.۹ عملگرخطی A، n ویژه‌مقدار متمایزو n ویژه‌تابع متناظربا آنها دارد. $A\psi_i=\lambda_i\psi_i$. نشان دهیدکه این n ویژه‌تابع مستقل خطی‌اند. لازم نیست که A هرمیتی باشد.

راهنمایی. فرض‌کنیدکه وابستگی خطی وجود دارد، یعنی $\psi_n=\sum_{i=1}^{n-1}a_i\psi_i$. این رابطه ومعادلهٔ ویژه‌تابعی عملگر را، یك بار با یك ترتیب و باردیگر به‌ترتیب عکس به‌کار برید. نشان دهیدکه نتیجه به‌تناقض می‌انجامد.

۸.۲.۹ مجموعه‌ای ازتوابع متقابلا متعامدند. نشان دهیدکه این مجموعه خودبه‌خود مستقل خطی‌اند، یعنی تعامد خودش براستقلال خطی دلالت می‌کند.

۹.۲.۹ چندجمله‌ایهای فراکروی $C_n^{(\alpha)}(x)$ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل زیر به‌شمار می‌آیند

$$\left\{(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}-(2\alpha+1)x\frac{d}{dx}+n(n+2\alpha)\right\}C_n^{(\alpha)}(x)=0$$

(الف) این معادلهٔ دیفرانسیل را به‌صورت خود-الحاقی درآورید.

(ب) نشان دهید که $C_n^{(\alpha)}(x)$های مربوط به مقادیر مختلف n متعامدند. بازهٔ انتگرالگیری وعامل وزنی را مشخص کنید.

یادآوری. جوابها را چندجمله‌ای فرض‌کنید.

۱۰.۲.۹ برای $\mathcal{L}$ غیر خود-الحاقی داریم

$$\mathcal{L}u_i+\lambda_i w u_i=0$$

و

$$\bar{\mathcal{L}}v_j+\lambda_j w v_j=0$$

(الف) نشان دهید که

$$\int_a^b v_j \mathcal{L} u_i dx=\int_a^b u_i \bar{\mathcal{L}} v_j dx$$

به‌شرط آنکه

$$u_i p_0 v_j'\Big|_a^b=v_j p_0 u_i'\Big|_a^b$$

و

$$u_i(p_1-p_0')v_j\Big|_a^b=0$$

(ب) نشان‌دهید‌که انتگرال تعامد برای‌ویژه‌تابعهای u_i و v_j به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\int_a^b u_i v_j w dx=0 \quad (\lambda_i\neq\lambda_j)$$

۱۱.۴.۹ در مسئلهٔ ۸.۵.۸ دیدیم که جواب سری معادلهٔ چبیشف به ازای همهٔ مقادیر n همگراست. از این‌رو به‌اعتبار برهانی‌که برای معادلهٔ لژاندر به‌کار رفت (مسئلهٔ ۴.۵.۸)، n کوانتیده نیست. حاصل‌جمع سری‌چبیشف $k=0$ را به‌ازای $n=v=0{,}8, 0{,}9, 1{,}0$ و به‌ازای $x=0{,}0(0{,}1)0{,}9$ محاسبه‌کنید.

یادآوری. رابطهٔ بازگشتی سری چبیشف درمسئلهٔ ۱۶.۲.۵ آمده است.

۱۲.۴.۹ (الف) سری چبیشف متناظر با $n=v=0{,}9$ و $k=0$ را به ازای $x=0{,}98, 0{,}99, 1{,}00$ محاسبه کنید. سرعت همگرا شدن این سری در $x=1{,}00$ بسیار کند است. ممکن‌است بخواهید ازدقت دوگانه استفاده‌کنید. کران‌بالایی خطای‌محاسبه را می‌توانید به‌کمك مقایسه باحالت $v=1{,}0$ که با $(x^2-1)^{1/2}$ متناظراست، تنظیم کنید.

(ب) واضح است‌که جوابهای سری متناظر با $v=0{,}9$ و $v=1{,}0$، علی‌رغم اینکه در یك معادلهٔ ویژه‌مقداری با ویژه‌مقدارهای متفاوت صدق می‌کنند، متعامد نیستند. با استفاده ازرفتار جوابها درمجاورت $x=1{,}00$، سعی‌کنید فرضیه‌ای برای توجیه این امر فرمولبندی‌کنید‌که چرا اثبات تعامد عملی نیست.

۱۳.۲.۹ بسط فوریهٔ موج مربعی(نامتقارن) با معادلهٔ (۳۷.۹) بیان‌شده‌است. سری متناظر با $h=۲$ را به‌ازای $x=\circ(\pi/۱۸)\pi/۲$، با درنظرگرفتن (الف) ۱۰ جمله، (ب) ۱۰۰ جملهٔ سری، محاسبه کنید.

یادآوری. نمایش هندسی فوریهٔ حاصل برای ۱۰ جمله، در $x=\pi/۱۸$ (یا ۱۰°) یك برآمدگی تیز دارد. این‌نوع نمایش، همان پدیدهٔ گیبس است که در بخش ۵.۱۴ مطرح خواهد شد. برای ۱۰۰ جمله این برآمدگی به‌حدود ۱° منتقل می‌شود.

۱۴.۲.۹ موج مربعی متقارن

$$f(x)=\begin{cases} ۱, & |x|<\frac{\pi}{۲} \\ -۱, & \frac{\pi}{۲}<|x|<\pi \end{cases}$$

دارای بسط فوریه‌ای به‌قرار زیراست

$$f(x)=\frac{۴}{\pi}\sum_{n=\circ}^{\infty}(-۱)^n\frac{\cos(۲n+۱)x}{۲n+۱}$$

با استفاده از

(الف) ۱۰ جملهٔ اول،

(ب) ۱۰۰ جملهٔ اول

سری بالا را به‌ازای $x=\circ(\pi/۱۸)\pi/۲$ محاسبه کنید.

یادآوری. دراینجا هم، مثل‌مسئلهٔ ۱۳.۲.۹، پدیدهٔ گیبس درناپیوستگی ظاهرمی‌شود؛ یعنی، سری فوریه درمجاورت ناپیوستگی برای محاسبات دقیق‌عددی مناسب نیست.

۳.۹ متعامد سازی گرام-اشمیت

در روش متعامد سازی گرام-اشمیت از یك مجموعهٔ نامتعامد توابع مستقل خطی[۱]، مجموعهٔ متعامدی می‌سازندکه نسبت‌به عامل چگالی یا وزنی اختیاری، روی یك بازهٔ اختیاری واقع است. این فرایند، به‌زبان جبر خطی، معادل است با یك تبدیل ماتریسی که مجموعه‌ای از

---

۱. چنین مجموعه‌ای ازتوابع، می‌تواند درجواب یك‌معادلهٔ دیفرانسیل (جزئی) ظاهرشود که‌در آن ویژه‌مقدار از یك یا چندثابت جداسازی مستقل باشد. مثلاً، می‌توان ازمسئلهٔ اتم هیدروژن (بخشهای ۲.۹ و ۲.۱۳ را ببینید) یادکرد. ویژه‌مقدار (انرژی) هم از تکانهٔ زاویه‌ای مداری الکترون‌وهم ازتصویرآن روی‌محور z، m مستقل‌است. به‌هرحال بایدتوجه‌داشت که‌دستورالعمل متعامدسازی گرام-اشمیت به‌منشأ مجموعهٔ توابع کاری ندارد.

بردارهای (توابع) پایهٔ متعامد را به‌یك مجموعهٔ نامتعامد مربوط می‌کند. مثال‌خاصی ازاین تبدیل ماتریسی درمسئلهٔ ۱.۲.۱۲ خواهد آمد. توابعی که به‌کارمی‌روند می‌توانند حقیقی یا مختلط باشند. دراینجا برای راحتی آنها را حقیقی می‌گیریم. تعمیم نتایج به‌حالت مختلط نباید چندان دشوارباشد.

قبل ازآنکه به‌متعامدسازی بپردازیم، باید بهنجارش توابع را بررسی‌کنیم. تا اینجا هیچ بهنجارشی مشخص نشده‌است. یعنی آنکه

$$\int_a^b \varphi_i^2 w\,dx = N_i^2$$

اما هیچ توجهی هم به‌مقادیر N_i مبذول نشده است. از آنجاکه معادلهٔ اصلی ما، [معادلهٔ (۶.۹)]، خطی وهمگن است، اگرجواب را درهرثابتی ضرب کنیم بازهم یکی از جوابها خواهد بود. اکنون اگر هرجواب به‌صورت $\varphi_i(x)$ را در N_i^{-1} ضرب کنیم، مقدار جدید φ_i (بهنجار شده) درمعادلهٔ زیرصدق می‌کند

$$\int_a^b \varphi_i^2(x)w(x)\,dx = 1 \qquad (۳۸.۹)$$

یا

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)w(x)\,dx = \delta_{ij} \qquad (۳۹.۹)$$

معادلهٔ(۳۸.۹) به‌این معناست که بهنجارش به‌واحد صورت‌گرفته است. با افزودن خاصیت تعامد، به‌معادلهٔ (۳۹.۹) خواهیم رسید. توابعی که دراین معادله صدق کنند، متعامد بهنجار (اورتونرمال) خوانده‌می‌شوند. باید تأکیدکردکه بهنجارشهای دیگری نیزمیسراست، و در واقع هریك از توابع خاص فیزیك ریاضی که درفصلهای ۱۲ و ۱۳ بررسی می‌شوند، به پیروی ازقراردادهای تاریخی، به‌صورت متفاوتی بهنجار می‌شوندا

سه‌مجموعه‌ازتوابع درنظرمی‌گیریم: یك‌مجموعهٔ معین‌اصلی $u_n(x)$، $n = 0, 1, 2, \ldots$؛ یك مجموعهٔ متعامد $\psi_n(x)$ که باید بسازیم؛ ویك مجموعهٔ نهایی ازتوابع $\varphi_n(x)$ که عبارت‌اند از ψ_n های بهنجار شده. u_n های اصلی ممکن است ویژه‌تابعهای همگن باشند، ولی این‌امرالزامی نیست. خواهیم داشت

$u_n(x)$	$\psi_n(x)$	$\varphi_n(x)$
مستقل خطی	مستقل خطی	مستقل خطی
نامتعامد	متعامد	متعامد
نابهنجار	نابهنجار	بهنجار(اورتونرمال)

دستورالعمل متعامدسازی گرام‌ـاشمیت به‌این قرار است که nامین تابع $\psi(\psi_n)$ را برابر $u_n(x)$ به‌اضافهٔ یك ترکیب خطی نامعلوم از φهای پیشین بگیریم. حضور $u_n(x)$ جدید، ضامن حفظ استقلال خطی‌است. این‌شرط که $\psi_n(x)$ به‌هر یك از φهای پیشین متعامد باشد درست همان تعداد قیدایجاد می‌کندکه برای تعیین ضرایب نامعلوم لازم است. آنگاه ψ_n کاملا تعیین شده را به‌واحد بهنجار می‌کنیم و $\varphi_n(x)$ را به‌دست می‌آوریم. سپس این مراحل را برای $\psi_{n+1}(x)$ تکرار می‌کنیم.

از $n=0$ شروع می‌کنیم، داریم

$$\psi_0(x)=u_0(x) \tag{۴۰.۹}$$

هیچ φی "قبلی" نداریم‌که نگرانش باشیم. بهنجارمی‌کنیم

$$\varphi_0(x)=\frac{\psi_0(x)}{[\int\psi_0^2 w dx]^{1/2}} \tag{۴۱.۹}$$

به‌ازای $n=1$، داریم

$$\psi_1(x)=u_1(x)+a_{10}\varphi_0(x) \tag{۴۲.۹}$$

می‌خواهیم که $\psi_1(x)$ بر $\varphi_0(x)$ متعامد باشد. [دراین مرحله بهنجارش $\psi_1(x)$ اهمیتی ندارد.] این شرط تعامد به‌رابطهٔ زیرمنجر می‌شود

$$\int\psi_1\varphi_0 w dx=\int u_1\varphi_0 w dx+a_{10}\int\varphi_0^2 w dx \tag{۴۳.۹}$$
$$=0$$

ازآنجاکه φ_0 به‌واحد بهنجارشده است [معادلهٔ (۴۱.۹)]، داریم

$$a_{10}=-\int u_1\varphi_0 w dx \tag{۴۴.۹}$$

که مقدار a_{10} را تعیین می‌کند. پس‌از بهنجارش، بنابرتعریف داریم

$$\varphi_1(x)=\frac{\psi_1(x)}{(\int\psi_1^2 w dx)^{1/2}} \tag{۴۵.۹}$$

تعمیم می‌دهیم، می‌رسیم به

$$\varphi_i(x)=\frac{\psi_i(x)}{\left(\int\psi_i^2(x)w(x)dx\right)^{1/2}} \tag{۴۶.۹}$$

که درآن

$$\psi_i(x)=u_i+a_{i0}\varphi_0+a_{i,1}\varphi_1+\cdots+a_{i,i-1}\varphi_{i-1} \tag{۴۷.۹}$$

ضرایب a_{ij} ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آیند

$$a_{ij}=-\int u_i\varphi_j w\,dx \tag{۴۸.۹}$$

معادلهٔ (۴۸.۹) مربوط به بهنجارش به‌واحد است. اگر بهنجارش دیگری برگزینیم، آنگاه

$$\int_a^b[\varphi_j(x)]^2w(x)dx=N_j^2$$

و به‌جای معادلهٔ (۴۶.۹) خواهیم داشت

$$\varphi_i(x)=N_i\frac{\psi_i(x)}{\left(\int\psi_i^2w\,dx\right)^{1/2}} \tag{۴۶.۹ الف}$$

ومقادیر a_{ij} به‌صورت زیردرمی‌آیند

$$a_{ij}=-\frac{\int u_i\varphi_j w\,dx}{N_j^2} \tag{۴۸.۹ الف}$$

معادله‌های (۴۷.۹) و(۴۸.۹) را می‌توان‌برحسب عملگرهای تصویری P_j بازنویسی کرد. اگردرنظر بگیریم که $\varphi_n(x)$ یك فضای برداری خطی تشکیل می‌دهد، آنگاه‌می‌توانیم انتگرال معادلهٔ (۴۸.۹) را به عنوان تصویر u_i روی "مختصهٔ" φ_j یا مؤلفهٔ jام u_i تعبیر کنیم. با

$$P_ju_i(x)=\left\{\int u_i(t)\varphi_j(t)w(t)dt\right\}\varphi_j(x)$$

معادلهٔ (۴۷.۹) به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\psi_i(x)=\left\{1-\sum_{j=1}^{i-1}P_j\right\}u_i(x) \tag{۴۷.۹ الف}$$

کاسته شدن مؤلفه‌های jام، از $j=1$ تا $j=i-1$، $\psi_i(x)$ را برهمهٔ $\varphi_j(x)$ها متعامد می‌سازد.

دستورالعمل گرام-اشمیت یکی از روشهای ممکن برای ساختن مجموعهٔ متعامد یا متعامد بهنجار است ولی مشاهده می‌شود که توابع $\varphi_i(x)$ یکتا نیستند. به‌ازای یك بازهٔ معین و یك تابع چگالی معلوم، تعدادی نامتناهی از این مجموعه‌های متعامد بهنجار ممکن وجود دارد. برای نشان دادن آزادی موجود، دوبردار (ناموازی) $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ درصفحهٔ xy را درنظر بگیرید. می‌توانیم $\mathbf{A}$ را به‌بزرگی واحد بهنجار کنیم، آنگاه $\mathbf{B}'=a\mathbf{A}+\mathbf{B}$ راتشکیل دهیم، به‌طوری که $\mathbf{B}'$ بر $\mathbf{A}$ عمود باشد. با بهنجارش $\mathbf{B}'$، متعامدسازی گرام-اشمیت برای دو بردار تکمیل شده است. ولی می‌توانستیم هر دو بردار یکهٔ عمود برهم $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ را به‌عنوان مجموعهٔ متعامد بهنجار خود برگزینیم. باز با تعدادی نامتناهی چرخش ممکن $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ حول محور z، تعدادی نامتناهی مجموعهٔ متعامد بهنجار خواهیم داشت.

مثال ۱.۳.۹ چندجمله‌ایهای لژاندر حاصل ازمتعامدسازی گرام-اشمیت

می‌خواهیم ازمجموعهٔ توابع $u_n(x)=x^n$، $n=0,1,2,\ldots$، یك مجموعهٔ متعامد بهنجار بسازیم. بازه درانیجا عبارت است از $-1\leqslant x\leqslant 1$ وتابع چگالی به‌صورت $w(x)=1$ خواهد بود.

مطابق بافرایند متعامدسازی گرام-اشمیت که قبلا توصیف کردیم، داریم

$$u_0=1 \quad \text{و} \quad \varphi_0=\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{۴۹.۹}$$

آنگاه

$$\psi_1(x)=x+a_{10}\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{۵۰.۹}$$

و، به‌اعتبار تقارن

$$a_{10}=-\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{2}}dx=0 \tag{۵۱.۹}$$

با بهنجارش ψ_1، داریم

$$\varphi_1(x)=\sqrt{\frac{3}{2}}\,x \tag{۵۲.۹}$$

باادامهٔ فرایند گرام-اشمیت، بنابرتعریف، $\psi_2(x)$ عبارت است از

$$\psi_2(x)=x^2+a_{20}\frac{1}{\sqrt{2}}+a_{21}\sqrt{\frac{3}{2}}\,x \tag{۵۳.۹}$$

که درآن

$$a_{20}=-\int_{-1}^{1}\frac{x^{2}}{\sqrt{2}}\,dx=-\frac{\sqrt{2}}{3} \qquad (۵۴.۹)$$

وبازهم به‌دلیل تقارن

$$a_{21}=-\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{3}{2}}\,x^{3}dx=0 \qquad (۵۵.۹)$$

ازاین‌رو

$$\psi_{2}(x)=x^{2}-\frac{1}{3} \qquad (۵۶.۹)$$

وپس از بهنجارش به واحد، داریم

$$\varphi_{2}(x)=\sqrt{\frac{5}{2}}\times\frac{1}{2}(3x^{2}-1) \qquad (۵۷.۹)$$

تابع بعدی، یعنی $\varphi_{3}(x)$، عبارت است از

$$\varphi_{3}(x)=\sqrt{\frac{7}{2}}\times\frac{1}{2}(5x^{3}-3x) \qquad (۵۸.۹)$$

مراجعه به‌فصل ۱۲ نشان خواهدداد که

$$\varphi_{n}(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,P_{n}(x) \qquad (۵۹.۹)$$

که درآن $P_{n}(x)$ چندجمله‌ای لژاندر مرتبهٔ nام است. فرایند گرام‌ـاشمیت یکی‌ازراههای ممکن ولی پرزحمت برای تشکیل چندجمله‌ایهای لژاندر ارائه‌کرده است.

معادلات مربوط به‌متعامدسازی گرام‌ـاشمیت به‌دلیل کم کردنها، چندان‌مناسب نیستند. همینگ، بااستفاده ازرابطهٔ بازگشتی چندجمله‌ای، درخصوص تکنیکی برای اجتناب ازاین دشواری بحث می‌کند.[1]

در مثال ۱.۳.۹، بازهٔ تعامد $[-1,1]$، یك تابع وزنی برابر یك، ومجموعهٔ توابع x^{n} راکه یکی‌یکی و به‌ترتیب افزایش‌یابنده درنظر گرفتیم، مشخص شدند. دستورالعمل گرام‌ـاشمیت باهمهٔ این‌مشخصات معلوم یکتا خواهد بود (بایك عامل بهنجارش اختیاری و یك علامت کلی اختیاری که در دنبالهٔ مطلب در خصوص آن بحث می‌کنیم). مجموعهٔ متعامد

1. Hamming, R.W., *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill (1973).

به‌بخش ۲.۲۷ ازکتاب فوق ومراجع آن بخش مراجعه‌کنید.

حاصل، یعنی چندجمله‌ایهای لژاندر از P_0 تا P_n، برای توصیف چندجمله‌ایهای از مرتبهٔ کوچکتر یامساوی n، روی بازهٔ [۱, ۱−]، یك‌مجموعهٔ کامل‌را تشکیل می‌دهد. مفهوم‌تمامیت را به‌طور مشروح دربخش۴.۹ بررسی می‌کنیم. بسط‌توابع به‌صورت سری‌چندجمله‌ایهای لژاندر دربخش ۳.۱۲ مورد بحث قرار می‌گیرد.

چندجمله‌ایهای متعامد

این مثال خاص را صرفاً برای نشان دادن دستورالعمل گرام-اشمیت برگزیدیم. این مثال، هرچند ازاین‌مزیت برخوردار بودکه چندجمله‌ایهای لژاندر را ارائه‌کند، ولی توابع‌اصلی $u_n=x^n$ ویژه‌تابعهای واگن نبوده وجوابهای معادلهٔ لژاندرنیستند. اینها، صرفاً مجموعه‌ای ازتوابع‌اندکه ما برای تولید مجموعهٔ متعامد بهنجاری برای یك بازهٔ معین ویك‌تابع وزنی معلوم، آنها رابه‌شکل جدیدی آرایش داده‌ایم. این‌واقعیت‌که ما به‌چندجمله‌ایهای لژاندر دست یافتیم کار خارق‌العاده‌ای نبوده است، بلکه پیامد مستقیم گزینش بازه و تابع وزنی است. همان‌طورکه درجدول۴.۹ نشان‌داده‌ایم، به‌کارگیری $u_n(x)=x^n$ همراه باگزینشهای دیگر بازه وتابع وزنی، به مجموعه‌های دیگری از چندجمله‌ایهای متعامد می‌انجامد. این چندجمله‌ایها را، درفصلهای ۱۲ و ۱۳، به‌صورت جوابهای معادله‌های دیفرانسیل خاصی‌به طورمشروح بررسی خواهیم‌کرد.

وارسی این‌فرایند متعامدسازی دوخصوصیت اختیاری آن‌را آشکار می‌سازد. نخست اینکه همان‌طورکه پیشتر تأکید کردیم، ضرورتی‌نداردکه توابع‌را به‌واحد بهنجار کنیم. در مثالی‌که هم‌اکنون آوردیم می‌توانستیم قراردادکنیم که

$$\int_{-1}^{1}\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx=\frac{2}{2n+1}\delta_{nm} \qquad (۶۰.۹)$$

و مجموعهٔ حاصل عملا خود چندجمله‌ایهای لژاندر را به‌دست داده است. دوم‌اینکه، علامت φ_n همواره نامعین است. در مثال فوق علامت را به‌کمك این شرط‌که بالاترین توان x در چندجمله‌ای بایدضریب مثبت داشته‌باشد تعیین‌کردیم. درحالی‌که برای چندجمله‌ایهای لاگر ضریب بالاترین توان را برابر $(-1)^n/n!$ می‌گیریم.

مسائل

۱.۳.۹ مثال ۱.۳.۹ را دوباره حل‌کنید، این‌بار به‌جای $\varphi_n(x)$، چندجمله‌ای قراردادی لژاندر، $P_n(x)$، را به‌کاربرید

$$\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2dx=\frac{2}{2n+1}$$

جدول ۴.۹ چند جمله‌ایهای متعامدی که ازمتعامدسازی گرام‌ـاشمیت توابع $u_n(x)=x^n$، به‌ازای $n=۰, ۱, ۲, \ldots$ به‌دست می‌آیند.

چندجمله‌ای	بازه	تابع وزنی $w(x)$	بهنجارش استاندارد
لژاندر	$-۱\leqslant x\leqslant ۱$	۱	$\int_{-۱}^{۱}[P_n(x)]^۲dx=\frac{۲}{۲n+۱}$
لژاندرانتقال‌یافته	$۰\leqslant x\leqslant ۱$	۱	$\int_{۰}^{۱}[P_n^*(x)]^۲dx=\frac{۱}{۲n+۱}$
چبیشف I	$-۱\leqslant x\leqslant ۱$	$(۱-x^۲)^{-۱/۲}$	$\int_{-۱}^{۱}[T_n(x)]^۲(۱-x^۲)^{-۱/۲}dx=\begin{cases}\pi/۲, & n\neq ۰\\ \pi, & n=۰\end{cases}$
چبیشف انتقال‌یافتهٔ I	$۰\leqslant x\leqslant ۱$	$[x(۱-x)]^{-۱/۲}$	$\int_{۰}^{۱}[T_n^*(x)]^۲[x(۱-x)]^{-۱/۲}dx=\begin{cases}\pi/۲, & n>۰\\ \pi, & n=۰\end{cases}$
چبیشف II	$-۱\leqslant x\leqslant ۱$	$(۱-x^۲)^{۱/۲}$	$\int_{-۱}^{۱}[U_n(x)]^۲(۱-x^۲)^{۱/۲}dx=\frac{\pi}{۲}$
لاگر	$۰\leqslant x<\infty$	e^{-x}	$\int_{۰}^{\infty}[L_n(x)]^۲e^{-x}dx=۱$
لاگر وابسته	$۰\leqslant x<\infty$	x^ke^{-x}	$\int_{۰}^{\infty}[L_n^k(x)]^۲\,x^k\,e^{-x}dx=\frac{(n+k)!}{n!}$
هرمیت	$-\infty<x<\infty$	$e^{-x^۲}$	$\int_{-\infty}^{\infty}[H_n(x)]^۲e^{-x^۲}dx=۲^n\pi^{۱/۲}n!$

با استفاده از معادله‌های (۳۷.۹ الف)، (۴۶.۹ الف)، و (۴۸.۹ الف)، $P_{\circ}$، $P_{۱}(x)$، و $P_{۲}(x)$ را به‌دست آورید.

پاسخ. $P_{\circ}=۱$، $P_{۱}=x$، $P_{۲}=(۳/۲)\,x^{۲}-(۱/۲)$.

۲.۳.۹ با پیروی از دستورالعمل گرام-اشمیت، ازمجموعهٔ $\{x^{n}\}$، مجموعه‌ای از چندجمله‌ایهای $P_{n}^{*}(x)$ متعامد (با عامل وزنی واحد) روی بازهٔ $[\circ,۱]$ تشکیل دهید. طوری بهنجار کنید که $P_{n}^{*}(۱)=۱$.

پاسخ. $P_{\circ}^{*}(x)=۱$، $P_{۱}^{*}(x)=۲x-۱$، $P_{۲}^{*}(x)=۶x^{۲}-۶x+۱$، $P_{۳}^{*}(x)=۲\circ x^{۳}-۳\circ x^{۲}+۱۲x-۱$.

این چندجمله‌ایها چهار چندجمله‌ای لژاندر انتقال‌یافته هستند.

یادآوری. «*» به معنای همیوغ مختلط نیست، بلکه نمادی استاندارد برای "انتقال‌یافته" به‌شمارمی‌آید: $[\circ,۱]$ به‌جای $[-۱,۱]$.

۳.۳.۹ با بهره‌گیری از دستورالعمل گرام-اشمیت سه چندجمله‌ای اول لاگر را به‌دست آورید

$$u_{n}(x)=x^{n},\qquad n=\circ,۱,۲,\dots$$

$$\circ\leqslant x<\infty$$

$$w(x)=e^{-x}$$

بهنجارش متداول به‌صورت زیراست

$$\int_{\circ}^{\infty}L_{m}(x)L_{n}(x)e^{-x}dx=\delta_{mn}$$

پاسخ. $L_{\circ}=۱$، $L_{۱}=۱-x$، $L_{۲}=(۲-۴x+x^{۲})/۲$.

۴.۳.۹ این کمیتها را در اختیار داریم: (الف) مجموعه‌ای از توابع $u_{n}(x)=x^{n}$، $n=\circ,۱,۲,\dots$، (ب) بازهٔ $(\circ,\infty)$، (ج) تابع وزنی $w(x)=xe^{-x}$. از دستورالعمل گرام-اشمیت بهره‌گیرید و اولین سه تابع متعامد بهنجار را از مجموعهٔ $u_{n}(x)$ برای این بازه و این تابع‌وزنی به‌دست آورید.

پاسخ. $\varphi_{\circ}(x)=۱$، $\varphi_{۱}(x)=(x-۲)/\sqrt{۲}$، $\varphi_{۲}(x)=(x^{۲}-۶x+۶)/۲\sqrt{۳}$.

۵.۳.۹ با استفاده از دستورالعمل متعامدسازی گرام-اشمیت، سه چندجمله‌ای اول هرمیت را تشکیل دهید

$$u_n(x)=x^n,\ n=0,1,2,\cdots\quad -\infty<x<\infty,\quad w(x)=e^{-x^2}$$

بهنجارش متداول برای این‌مجموعه ازچندجمله‌ایها به‌صورت زیراست

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)w(x)dx=\delta_{mn}2^m m!\pi^{1/2}$$

پاسخ. $H_0=1$ ، $H_1=2x$ ، $H_2=4x^2-2$.

۶.۳.۹ ازطرح متعامدسازی گرام-اشمیت بهره‌گیرید وسه چندجمله‌ای اول‌چبیشف(نوع I) را تشکیل دهید

$$u_n(x)=x^n,\ n=0,1,2,\cdots\ -1\leqslant x\leqslant 1,\ w(x)=(1-x^2)^{-1/2}$$

بهنجارش را به‌صورت زیر بگیرید

$$\int_{-1}^{1} T_m(x)T_n(x)w(x)dx=\delta_{mn}\begin{cases}\pi, & m=n=0\\ \dfrac{\pi}{2}, & m=n\geqslant 1\end{cases}$$

راهنمایی. انتگرالهای موردنیاز درمسئلهٔ ۳.۴.۱۰ داده شده‌اند.

پاسخ. $T_0=1$ ، $T_1=x$ ، $T_2=2x^2-1$ ، $(T_3=4x^3-3x)$.

۷.۳.۹ شگرد متعامدسازی گرام-اشمیت را به‌کار بندید وسه چندجمله‌ای اول چبیشف (نوع II) را تشکیل دهید

$$u_n(x)=x^n,\ n=0,1,2,\cdots\ -1\leqslant x\leqslant 1,\ w(x)=(1-x^2)^{+1/2}$$

بهنجارش را به‌صورت زیر بگیرید

$$\int_{-1}^{1} U_m(x)U_n(x)w(x)dx=\delta_{mn}\frac{\pi}{2}$$

راهنمایی.

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{1/2}x^{2n}\,dx=\frac{\pi}{2}\times\frac{1\times 3\times 5\cdots(2n-1)}{4\times 6\times 8\cdots(2n+2)},\ n=1,2,3,\cdots$$

$$=\frac{\pi}{2},\ n=0$$

پاسخ. $U_0=1$، $U_1=2x$، $U_2=4x^2-1$.

۸.۳.۹ به‌عنوان پیرایشی درمسئلهٔ ۵.۳.۹، ازدستورالعمل متعامدسازی گرام-اشمیت برای مجموعهٔ $u_n(x)=x^n$، $n=0,1,2,\ldots$، $0\leqslant x<\infty$، بهره بگیرید. $w(x)$ را برابر $\exp[-x^2]$ بگیرید. دو چندجمله‌ای غیرصفر اول را پیدا کنید. چنان بهنجار کنید که‌ضریب بالاترین توان x یك شود. بازهٔ $(-\infty,\infty)$، در مسئلهٔ ۵.۳.۹ به چندجمله‌ایهای هرمیت انجامید. پاسخ این مسئله مسلماً چندجمله‌ایهای هرمیت نخواهدبود.
پاسخ. $\varphi_0=1$، $\varphi_1=x-\pi^{-1/2}$.

۹.۳.۹ بااستفاده از $u_n(x)=e^{-nx}$، $n=1,2,3,\ldots$، یك مجموعهٔ متعامد روی بازهٔ $0\leqslant x<\infty$ تشکیل‌دهید. عامل وزنی $w(x)$ را برابر یك بگیرید. این توابع جوابهای $u_n''-n^2u_n=0$ خواهند بود. روشن است که این معادله به‌صورت اشتورم-لیه ویل (خود-الحاقی) است. پس چرا مطابق نظریهٔ اشتورم-لیوویل، این توابع متعامد نیستند.

۴.۹ تمامیت ویژه‌تابعها

سومین خاصیت مهم عملگرهرمیتی به‌این قرار است که ویژه‌تابعهای آن یك مجموعهٔ کامل تشکیل می‌دهند. مفهوم این‌تمامیت آن‌است‌که هرتابع $F(x)$ خوش‌رفتار (دست‌کم پاره‌پاره پیوسته) را می‌توان با هردقت دلخواهی، به‌تقریب با سری زیرنشان داد[1]

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x) \qquad (۶۱.۹)$$

به‌عبارت دقیقتر، مجموعهٔ $\varphi_n(x)$ را درصورتی کامل[2] گوییم‌که حد خطای مربعی میانگین صفرشود

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b\left[F(x)-\sum_{n=0}^{m}a_n\varphi_n(x)\right]^2 w(x)\,dx=0 \qquad (۶۲.۹)$$

این انتگرال، از لحاظ تکنیکی، یك انتگرال لبگ[3] است. این شرط را از آن بابت وضع نکرده‌ایم که خطا دربازهٔ $[a,b]$ متحد با صفرشود، بلکه فقط انتگرال مربع خطا بایدصفر شود.

۱. اگریك مجموعهٔ متناهی داشته‌باشیم، مانند مورد بردارها، مجموعیابی روی تعداد عضوهای مستقل خطی درمجموعه صورت می‌گیرد.
۲. بسیاری ازمؤلفان دراینجا از واژهٔ بسته استفاده می‌کنند.
3. Lebesgue

این همگرایی درمیانگین درمعادلهٔ (۶۲.۹) را باید با همگرایی یکنواخت، معادلهٔ (۶۷.۵)، بخش ۵.۵، مقایسه کرد. واضح است که همگرایی یکنواخت، همگرایی درمیانگین را دربردارد، ولی عکس آن صادق نیست؛ همگرایی درمیانگین قید ضعیفتری است. درحالت خاص، توابع پاره‌پاره پیوسته، یك تعداد متناهی از ناپیوستگیهای متناهی، معادلهٔ (۶۲.۹) را ازدایرهٔ انتفاع خارج نمی‌کنند. معادلهٔ (۶۲.۹) برای مقاصد ما کاملاً کفایت می‌کند و نسبت به معادلهٔ (۶۷.۵) بسیار مناسبتر است. در واقع ازآنجاکه ما برای توصیف توابع ناپیوسته بارها از ویژه‌تابعها بهره خواهیم گرفت، همهٔ آنچه که می‌توانیم انتظار داشته باشیم همگرایی درمیانگین است.

به‌تعبیر جبرخطی، ما یك فضای خطی، یا فضای تابع، داریم. توابع متعامد بهنجار مستقل خطی $\varphi_n(x)$ پایهٔ این فضای بینهایت بعدی به‌شمار می‌آیند. معادلهٔ (۶۱.۹) بیانگر این نکته است که توابع $\varphi_n(x)$ این فضای خطی را می‌پیمایند. این فضای خطی همراه با ضرب داخلی که به‌کمك معادلهٔ (۶۴.۹) تعریف می‌شود، یك فضای هیلبرت را تشکیل می‌دهد.

مسئلهٔ تمامیت مجموعه‌ای از توابع راغالباً ازطریق مقایسه بایك سری لوران، بخش ۵.۶، تعیین می‌کنند. این کار را دربخش ۱.۱۴ برای سری فوریه انجام می‌دهیم و تمامیت این سری را تحقیق‌می‌کنیم. برای‌همهٔ چند جمله‌ایهای متعامدی که دربخش ۳.۹ برشمردیم، می‌توان یك بسط چندجمله‌ای برای هرتوان z به‌صورت زیر یافت

$$z^n=\sum_{i=0}^{n} a_i P_i(z) \tag{۶۳.۹}$$

که درآن $P_i(z)$ چندجمله‌ای i ام است. مسائل ۶.۴.۱۲، ۸.۱.۱۳، ۵.۲.۱۳، و ۲۲.۳.۱۳ مثالهای خاصی از معادلهٔ (۶۳.۹) به‌شمار می‌آیند. با استفاده ازمعادلهٔ (۶۳.۹)، می‌توانیم بسط لوران $f(z)$ را برحسب چندجمله‌ایها بنویسیم ونشان دهیم که بسط چندجمله‌ای‌وجود دارد [و وجودآن دال بر یکتایی آن است (مسئلهٔ ۱.۴.۹)]. محدودیت این روش مبتنی بر سری لوران بدین قرار است‌که دراین روش تابع باید تحلیلی باشد. معادلات (۶۱.۹) و (۶۲.۹) کلیترند. $F(x)$ تنها باید پاره‌پاره پیوسته باشد. درفصل ۱۴، به‌نمونه‌های زیادی از نمایش این‌گونه‌توابع پاره‌پاره پیوسته برمی‌خوریم (سری فوریه). درکتاب کوران و هیلبرت اثباتی برای تمامیت مجموعهٔ ویژه‌تابعهای اشتورم-لیوویل ارائه شده است.[1]

ضرایب بسط در معادلهٔ (۶۱.۹) را می‌توان از رابطهٔ زیر به‌دست‌آورد

$$a_m=\int_a^b F(x)\varphi_m(x)w(x)\,dx \tag{۶۴.۹}$$

---

۱. بخش۳ ازفصل ۶ کتابی به‌مشخصات زیر را ببینید

Courant, R. and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1 New York: Interscience Publishers (1953).

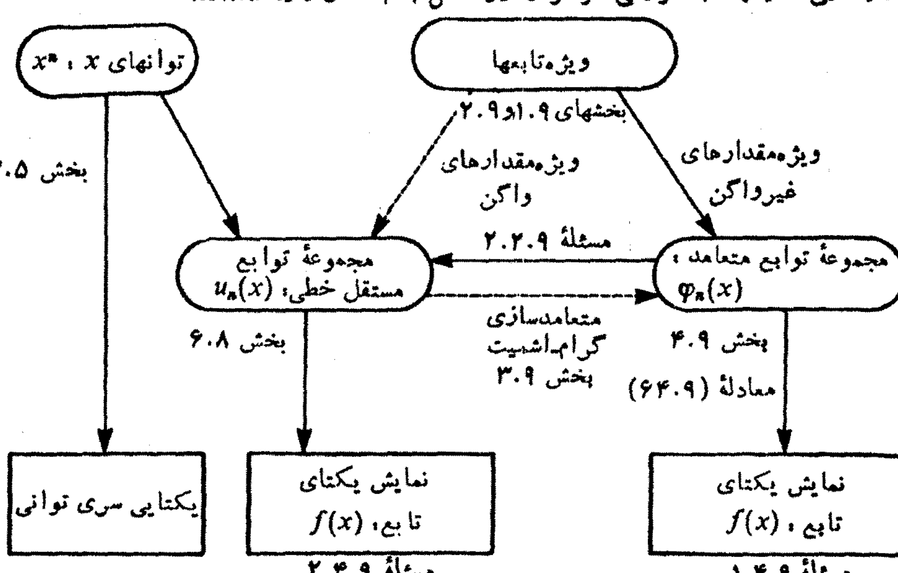
این رابطه از طریق ضرب کردن معادلهٔ (۶۱.۹) در $\varphi_m(x)w(x)$ و انتگرالگیری به‌دست می‌آید. با استفاده از تعامد ویژه‌تابعهای $\varphi_n(x)$، تنها جملهٔ mام باقی می‌ماند. اهمیت تعامد درهمین‌جا مشخص می‌شود. معادلهٔ (۶۴.۹) را می‌توان باضرب نقطه‌ای یا داخلی دوبردار دربخش ۳.۱ مقایسه‌کرد و a_m را به‌عنوان تصویر mام تابع $F(x)$ تعبیر کرد. ضریب a_m را غالباً ضریب فوریهٔ تعمیم‌یافته می‌نامند.

a_m، برای یك تابع معلوم $F(x)$، از طریق معادلهٔ (۶۴.۹) به‌صورت یك انتگرال معین به‌دست می‌آید که حتی‌اگر به‌صورت تحلیلی قابل حل نباشد، همواره می‌توان آن‌را به‌کمك کامپیوترمحاسبه کرد.

مثالهایی‌از بسط برحسب ویژه‌تابعهای به‌خصوص را می‌توان دربخشهای‌کتاب حاضر، به‌شرح زیر، جستجو کرد: سری فوریه دربخش ۲.۹ وفصل ۱۴؛ بسطهای بسل وبسل-فوریه دربخش ۲.۱۱؛ سری لژاندر دربخش ۳.۱۲؛ سری لاپلاس دربخش ۶.۱۲؛ سری‌هرمیت دربخش ۱.۱۳؛ سری لاگر دربخش ۲.۱۳؛ سری چبیشف دربخش ۳.۱۳.

بسط ویژه‌تابعی، معادلهٔ (۶۱.۹)، می‌تواند بسط یك‌تابع نامعلوم $F(x)$ برحسب یك سری از ویژه‌تابعهای معلوم $\varphi_n(x)$ باضرایب نامعلوم a_n به‌شمار آید. مثلا می‌توان توصیف تابع‌موج (نامعلوم) مولکولی را به‌صورت یك ترکیب خطی از تابع‌موجهای معلوم اتمی که درحوزهٔ شیمی‌کوانتومی معمول است، به‌عنوان نمونه درنظرگرفت. ضرایب نامعلوم a_n را به‌کمك یکی‌ازتکنیکهای وردشی به‌نام تکنیك ریلی-ریتس محاسبه می‌کنیم (بخش ۸.۱۷ را ببینید).

روابط بین ویژه‌تابعها، مجموعه‌های توابع متعامد، مجموعه‌های توابع مستقل خطی، و یکتایی نمایشها، به‌صورت طرحواره، در شکل ۲.۹ نشان داده شده‌اند.



شکل ۲.۹ استقلال خطی، تعامد، و یکتایی.

نامساوی بسل

اگرمجموعهٔ توابع $\varphi_n(x)$ یك مجموعهٔ کامل را تشکیل ندهد، مثلا به‌این دلیل صرف که‌تعداد نامتناهی عضو لازم مربوط به‌یك مجموعهٔ نامتناهی را درنظر نگرفته‌ایم، به نامساوی بسل می‌رسیم. ابتدا مورد متناهی را ازنظر می‌گذرانیم. فرض کنیدکه A یك بردار n مؤلفه‌ای به‌شرح زیر است

$$\mathbf{A}=\mathbf{e}_1 a_1+\mathbf{e}_2 a_2+\cdots+\mathbf{e}_n a_n \qquad (۶۵.۹)$$

که درآن $\mathbf{e}_i$ بردار یکه و a_i مؤلفهٔ (یا تصویر) $\mathbf{A}$، متناظر با آن، به‌شمارمی‌آید، یعنی

$$a_i=\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_i \qquad (۶۶.۹)$$

دراین صورت

$$\left(\mathbf{A}-\sum_i \mathbf{e}_i a_i\right)^2\geqslant 0 \qquad (۶۷.۹)$$

روشن است‌که اگرروی هر n مؤلفه مجموعیابی کنیم، با استفاده ازمعادلهٔ (۶۵.۹) مجموع با $\mathbf{A}$ برابرمی‌شود وتساوی برقراراست. ولی‌اگرمجموع شامل همهٔ n مؤلفه‌نباشد، یك نامساوی حاصل خواهدشد. معادلهٔ (۶۷.۹) را بسط می‌دهیم وباتوجه به‌اینکه‌بردارهای یکه دررابطهٔ تعامد زیرصدق می‌کنند

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j=\delta_{ij} \qquad (۶۸.۹)$$

داریم

$$A^2\geqslant\sum_i a_i^2 \qquad (۶۹.۹)$$

این عبارت، نامساوی بسل‌است.

درمورد توابع، انتگرال زیررا درنظرمی‌گیریم

$$\int_a^b\left[f(x)-\sum_i a_i\varphi_i(x)\right]^2 w(x)\,dx\geqslant 0 \qquad (۷۰.۹)$$

این معادله شبیه پیوستاری معادلهٔ (۶۷.۹) است، که درآن $n\to\infty$ و مجموعیابی را با انتگرال‌تعویض کرده‌ایم. باتوجه به‌اینکه $w(x)>0$، انتگرالده نامنفی‌است. به‌کمك‌معادلهٔ (۶۱.۹) پی می‌بریم که اگریك مجموعهٔ کامل داشته باشیم، انتگرال صفرمی‌شود. درغیراین صورت مثبت است. با بسط جمله‌ای که به‌توان دو رسیده، خواهیم داشت

$$\int_a^b [f(x)]^2 w(x)dx - 2\sum_i a_i \int_a^b f(x)\varphi_i(x)w(x)dx + \sum_i a_i^2 \geqslant 0$$

(۷۱.۹)

با به‌کارگیری معادلهٔ (۶۴.۹)، داریم

$$\int_a^b [f(x)]^2 w(x)dx \geqslant \sum_i a_i^2 \qquad (۷۲.۹)$$

بنابراین مجموع مربعهای ضرایب بسط، a_i، یا از انتگرال وزندار $[f(x)]^2$ کمتر ویا با آن برابراست؛ اگر وفقط اگر بسط دقیق باشد، یعنی مجموعهٔ توابع $\varphi_n(x)$ مجموعهٔ کاملی باشد، تساوی برقرار است.

درفصلهای بعد، آنجاکه ویژه‌تابعهایی راکه یك مجموعهٔ کامل تشکیل می‌دهند (ازقبیل چندجمله‌ایهای لژاندر) بررسی می‌کنیم، معادلهٔ (۷۲.۹) باعلامت مساوی را رابطهٔ پارسوال خواهیم نامید.

موارد استفادهٔ نامساوی بسل گوناگون است، از آن جمله دراثبات همگرایی سری فوریه به‌کار می‌آید.

نامساوی شوارتس

نامساوی شوارتس که بارها ازآن بهره‌می‌گیریم، شبیه نامساوی بسل‌است. معادلهٔ درجهٔدوم زیر را درنظر بگیرید

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 (x + b_i/a_i)^2 = 0 \qquad (۷۳.۹)$$

اگر b_i/a_i مساوی ثابت c باشد، آنگاه جواب عبارت است از: $x = -c$. اگر b_i/a_i ثابت نباشد، همهٔ جملات به‌ازای یك x حقیقی نمی‌توانند به‌طورهمزمان صفرشوند. درنتیجه، جواب باید مختلط باشد. با بسط‌دادن خواهیم داشت

$$x^2 \sum_i^n a_i^2 + 2x \sum_i^n a_i b_i + \sum_i^n b_i^2 = 0 \qquad (۷۴.۹)$$

و به‌دلیل آنکه x مختلط (ویا مساوی $-b_i/a_i$) است، فرمول درجهٔ دوم برای x به رابطهٔ زیرمنجرمی‌شود[1]

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \qquad (۷۵.۹)$$

---

۱. با مبین منفی (یا صفر) $b^2 - 4ac$.

تساوی وقتی حاصل می‌شود که b_i/a_i بایك ثابت برابر باشد.

بازهم، برحسب بردارها، داریم

$$(\mathbf{a}.\mathbf{b})^2 = a^2b^2\cos^2\theta \leqslant a^2b^2 \qquad (۷۶.۹)$$

که درآن θ زاویهٔ بین دوبردار است.

نامساوی شوارتس درمورد توابع به‌صورت زیراست

$$\left|\int_a^b f^*(x)g(x)dx\right|^2 \leqslant \int_a^b f^*(x)f(x)dx \int_a^b g^*(x)g(x)dx \qquad (۷۷.۹)$$

اگر وفقط اگر $g(x)=\alpha f(x)$، تساوی برقرارخواهد بود، که‌درآن α یك‌مقدارثابت به‌شمار می‌آید. برای‌اثبات‌این‌شکل‌تابعی‌نامساوی‌شوارتس[1]، تابع‌مختلط $\psi(x)=f(x)-\lambda g(x)$، را درنظربگیرید که درآن λ یك‌ثابت مختلط به‌شمارمی‌آید. توابع $f(x)$ و $g(x)$ می‌توانند هرتابعی باشند (که برای‌آنها انتگرالهاوجود داشته‌باشند). باضرب کردن درهمیوغ‌مختلط و انتگرالگیری، خواهیم داشت

$$\int_a^b \psi^*\psi dx \equiv \int_a^b f^*f dx + \lambda\int_a^b f^*g dx + \lambda^*\int_a^b g^*f dx$$

$$+\lambda\lambda^*\int_a^b g^*g\,dx \geqslant 0 \qquad (۷۸.۹)$$

علت ظاهرشدن علامت $0 \leqslant$ آن است‌که $\psi^*\psi$ نامنفی است؛ علامت مساوی ($=$) تنها وقتی برقرار خواهد بود که $\psi(x)$ با صفر متحد باشد. با توجه به‌اینکه λ و λ^* مستقل خطی‌اند، نسبت‌به یکی‌از آنها مشتق می‌گیریم و مشتق را برابر صفر قرار می‌دهیم تا $\int_a^b\psi^*\psi dx$ را کمینه‌کنیم

$$\frac{\partial}{\partial\lambda^*}\int_a^b \psi^*\psi dx = \int_a^b g^*f dx + \lambda\int_a^b g^*g dx = 0$$

و ازآن خواهیم داشت

$$\lambda = -\frac{\int_a^b g^*f dx}{\int_a^b g^*g dx} \qquad (\text{۷۹.۹ الف})$$

با همیوغ مختلط گرفتن داریم

$$\lambda^* = -\frac{\int_a^b f^*g dx}{\int_a^b g^*g dx} \qquad (\text{۷۹.۹ب})$$

۱. یکی‌از راههای دیگر برای استخراج این نامساوی، استفاده ازنامساوی زیراست

$$\iint[f(x)g(y)-f(y)g(x)]^*[f(x)g(y)-f(y)g(x)]dxdy \geqslant 0$$

بانشاندن این مقادیر λ و λ^* در معادلهٔ (۷۸.۹)، به‌معادلهٔ(۷۷.۹)، یعنی نامساوی شوارتس، دست می‌یابیم.

درمکانیك‌کوانتومی، $f(x)$ و $g(x)$، هریك می‌توانند یك حالت یا پیکربندی‌سیستم فیزیکی‌را نشان دهند. دراین‌صورت نامساوی شوارتس ضامن‌این‌نکته است‌که حاصلضرب داخلی $\int_a^b f^*(x)g(x)dx$ وجود دارد. در بعضی ازکتابها نامساوی شوارتس مرحلهٔ کلیدی استخراج اصل‌عدم قطعیت هایزنبرگ را تشکیل می‌دهد.

نمادگذاری تابع درمعادلات (۷۷.۹) و (۷۸.۹) نسبتاً پر زحمت است. در فیزیك‌ـ ریاضی پیشرفته وبه‌ویژه درمکانیك‌کوانتومی متداول است‌که نمادگذاری‌متفاوت زیر را به کار بریم

$$\langle f|g\rangle \equiv \int_a^b f^*(x)g(x)dx$$

درضمن بهره‌گیری ازاین نمادگذاری جدید،گسترهٔ انتگرالگیری، (a, b)، و هرتابع‌وزنی موجود را می‌دانیم. نامساوی شوارتس دراین نمادگذاری به‌صورت زیر درمی‌آید

$$|\langle f|g\rangle|^۲ \leqslant \langle f|f\rangle\langle g|g\rangle \qquad (۷۷.۹\text{الف})$$

اگر $g(x)$ ویژه‌تابع بهنجار$\varphi_i(x)$ باشد، به‌کمك معادلهٔ (۷۷.۹) به‌نتیجهٔ زیردست می‌یابیم [دراینجا: $w(x)=۱$]

$$a_i^*a_i \leqslant \int_a^b f^*(x)f(x)dx \qquad (۸۰.۹)$$

همین نتیجه‌را ازمعادلهٔ (۷۲.۹) نیزمی‌توانیم به‌دست بیاوریم.

تابع دلتای دیراك

فرض‌کنیدکه یك مجموعهٔ متعامد بهنجارکامل ازتوابع حقیقی $\varphi_n(x)$ داریم و ازآنها برای نمایش‌تابع دلتای‌دیراك استفاده‌می کنیم. بسطی به‌صورت زیردرنظرمی‌گیریم[معادلهٔ(۶۱.۹)]

$$\delta(x-t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\varphi_n(x) \qquad (۸۱.۹)$$

که درآن ضرایب a_n توابعی از متغیر t به‌شمار می‌آیند. با ضرب کردن در $\varphi_m(x)$ و انتگرالگیری روی بازهٔ تعامد [معادلهٔ (۶۴.۹)] داریم

$$a_m(t)=\int_a^b \delta(x-t)\varphi_m(x)dx=\varphi_m(t) \qquad (۸۲.۹)$$

یا

$$\delta(x-t)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)\varphi_n(t)=\delta(t-x) \tag{۸۳.۹}$$

(به‌ازای $w(x)\neq 1$، برای راحتی فرض می‌کنیم که تابع $\varphi_n(x)$ را از نو تعریف کرده‌ایم تا $[w(x)]^{1/2}$ نیز درآن بگنجد). بدون تردید این‌سری درمعادلهٔ (۸۳.۹) به‌طوریکنواخت همگرا نیست، ولی می‌توان آن را به‌عنوان بخشی از یك انتگرالــده به‌کار برد که پس از انتگرالگیری همگرا می‌شود (با بخش ۵.۵، جلداول، مقایسه‌کنید).

فرض کنیدکه انتگرال زیررا تشکیل دهیم

$$\int F(t)\,\delta(t-x)dx$$

وفرض‌کنیدکه $F(t)$ را بتوان به‌صورت یك‌سری ازویژه‌تابعهای $\varphi_p(t)$ بسط داد. خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\int F(t)\delta\,(t-x)dt &= \int\sum_{p=0}^{\infty} a_p\varphi_p(t)\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)\varphi_n(t)dt\\ &=\sum_{p=0}^{\infty}a_p\varphi_p(x)=F(x)\end{aligned} \tag{۸۴.۹}$$

به‌علت تعامد، انتگرال‌حاصلضرب $\varphi_p\varphi_n$ $(n\neq p)$ صفر می‌شود [معادلهٔ (۳۹.۹)]. بامراجعه به‌تعریف تابع دلتای دیراك (بخشهای ۱۵.۱، جلد اول، و ۷.۸)، می‌بینیم که نمایش سری ما، معادلهٔ (۸۳.۹)، خاصیت معرف(تعریف‌کنندهٔ) تابع دلتای دیراك را بر آورده می‌کند و بنابراین نمایشی ازآن به‌شمارمی‌آید. این‌نمایش تابع دلتای دیراك بستار نام دارد. فرض تمامیت مجموعه‌ای ازتوابع برای بسط $\delta(x-t)$، رابطهٔ بستار را به‌دست می‌دهد. مبحثی که درمسئلهٔ ۱۰.۴.۹ مطرح‌شده، به‌عکس‌این‌مفهوم، یعنی‌بستار به‌معنای‌تمامیت، ربط پیدامی‌کند.

تابع گرین

اگر تابع گرین را برحسب ویژه‌تابعهای معادلهٔ همگن نظیر آن بسط دهیم، به‌یك سری شبیه به‌سری‌که $\delta(x-t)$ را نمایش می‌دهد، دست می‌یابیم. درمعادلهٔ ناهمگن هلمهولتز داریم

$$\nabla^2\psi(\mathbf{r})+k^2\psi(\mathbf{r})=-\rho(\mathbf{r}) \tag{۸۵.۹}$$

ویژه‌تابعهای معادلهٔ همگن هلمهولتز، φ_n، دراین معادله صدق می‌کنند

$$\nabla^2\varphi_n(\mathbf{r})+k_n^2\varphi_n(\mathbf{r})=0 \tag{۸۶.۹}$$

بنابر آنچه دربخش ۷.۸ آمد، تابع‌گرین $G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ درمعادلهٔ چشمهٔ نقطه‌ای، به‌شکل زیر، صدق می‌کند

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)+k^2 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) \qquad (۸۷.۹)$$

تابع گرین را دریك سری ازویژه‌تابعهای معادلهٔ همگن (۸۶.۹) بسط می‌دهیم، یعنی

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mathbf{r}_2)\varphi_n(\mathbf{r}_1) \qquad (۸۸.۹)$$

وبا نشاندن این عبارت درمعادلهٔ (۸۷.۹)، داریم

$$-\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mathbf{r}_2)k_n^2\varphi_n(\mathbf{r}_1)+k^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\mathbf{r}_2)\varphi_n(\mathbf{r}_1) = -\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(\mathbf{r}_1)\varphi_n(\mathbf{r}_2) \qquad (۸۹.۹)$$

دراینجا به‌جای $\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$ بسط ویژه‌تابعی آن، یعنی‌معادلهٔ (۸۲.۹)، را قرارداده‌ایم. اگر برای جداکردن a_n، ازتعامد $\varphi_n(\mathbf{r}_1)$ استفاده کنیم، وسپس مقدار a_n را درمعادلهٔ (۸۸.۹) بنشانیم، تابع‌گرین به‌صورت زیر درمی‌آید

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi_n(\mathbf{r}_1)\varphi_n(\mathbf{r}_2)}{k_n^2-k^2} \qquad (۹۰.۹)$$

این‌عبارت یك‌بسط دوخطی‌است‌که همان‌طور که انتظارمی‌رفت نسبت‌به $\mathbf{r}_1$و$\mathbf{r}_2$ متقارن است. سرانجام، $\psi(\mathbf{r}_1)$، یعنی‌جواب مطلوب معادلهٔ ناهمگن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\psi(\mathbf{r}_1)=\int G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\rho(\mathbf{r}_2)d\tau_2 \qquad (۹۱.۹)$$

اگرمعادلهٔ دیفرانسیل ناهمگن خودرا به‌صورت زیرتعمیم دهیم

$$\mathcal{L}\psi+\lambda\psi=-\rho \qquad (۹۲.۹)$$

که درآن $\mathcal{L}$ عملگری هرمیتی‌است، خواهیم داشت

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi_n(\mathbf{r}_1)\varphi_n(\mathbf{r}_2)}{\lambda_n-\lambda} \qquad (۹۳.۹)$$

که درآن λ_n، ویژه‌مقدار nام و φ_n ویژه‌تابع متعامد بهنجار متناظر باآن، مربوط به‌معادلهٔ دیفرانسیل همگن زیراست

$$\mathcal{L}\varphi+\lambda\varphi=0 \qquad (۹۴.۹)$$

باردیگر دربخش ۵.۱۶ به‌تابع‌گرین برمی‌خوریم ودرآنجا آن‌را به‌طور مشروحتر بررسی می‌کنیم وبه‌معادلات انتگرالی ارتباطش می‌دهیم.

جمعبندی؛ فضاهای برداری خطی ـ تمامیت

دراینجا برخی خواص فضای برداری خطی‌را جمعبندی می‌کنیم، نخست با بردارهای این

فضا که همان بردارهای حقیقی آشنای فصل ۱ هستند وسپس با بردارهایی که توابع معمولی، یا چندجمله‌ایها، درنظر گرفته می‌شوند. مفهوم تمامیت را برای فضاهای برداری متناهی و به‌فضاهای برداری نامتناهی تعمیم می‌دهیم.

۱ب[1]. فضای برداری خطی خود را با یك مجموعه از n بردار مستقل خطی $\mathbf{e}_i$، $i=1,2,\ldots,n$، توصیف می‌کنیم. اگر $n=3$، آنگاه، $\mathbf{e}_1=\mathbf{i}$، $\mathbf{e}_2=\mathbf{j}$، و $\mathbf{e}_3=\mathbf{k}$. n بردار $\mathbf{e}_i$ فضای برداری خطی را می‌تنند.

۱ت[2]. فضای برداری خطی (تابع) خود را بامجموعه‌ای از n تابع مستقل خطی $\varphi_i(x)$، $i=0,1,\ldots,n-1$ توصیف می‌کنیم. شاخص پایین i از صفر شروع می‌شود تا با نشانه‌گذاریهای متداول در چندجمله‌ایهای کلاسیکی سازگار باشد. $\varphi_i(x)$ را یك چندجمله‌ای ازدرجهٔ i می‌گیریم. n تابع $\varphi_i(x)$، فضای خطی‌برداری (تابع) را می‌تنند.

۲ب. بردارهای فضای‌خطی برداری، در رابطه‌های زیر صدق می‌کنند (بخش ۲.۱؛ مؤلفه‌های بردارعددند):

الف) جمع برداری جابه‌جایی است $\qquad \mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

ب) جمع برداری انجمنی است $\qquad [\mathbf{u}+\mathbf{v}]+\mathbf{w}=\mathbf{u}+[\mathbf{v}+\mathbf{w}]$

ج) یك بردار صفروجود دارد $\qquad 0+\mathbf{v}=\mathbf{v}$

د) ضرب دریك اسکالر:

پخشی است $\qquad a[\mathbf{u}+\mathbf{v}]=a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$

پخشی است $\qquad (a+b)\mathbf{u}=a\mathbf{u}+b\mathbf{u}$

انجمنی است $\qquad a[b\mathbf{u}]=(ab)\mathbf{u}$

هـ) ضرب

دراسکالر واحد $\qquad 1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

در صفر $\qquad 0\mathbf{u}=0$

و) بردار منفی $\qquad (-1)\mathbf{u}=-\mathbf{u}$

۲ت. توابع فضای خطی تابع ما، خواصی را که برای بردارها برشمردیم برآورده می‌کنند. (به‌جای کلمهٔ "بردار"، "تابع" بنشانید)

$$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$$

$$[f(x)+g(x)]+h(x)=f(x)+[g(x)+h(x)]$$

$$0+f(x)=f(x)$$

$$a[f(x)+g(x)]=af(x)+ag(x)$$

---

۱. منظورحالتی است که به‌مجموعهٔ بردارهای خطی مربوط می‌شود.ـــم.

۲. منظورحالتی است که به‌مجموعهٔ توابع خطی ربط پیدا می‌کند.ـــم.

$$(a+b)f(x)=af(x)+bf(x)$$

$$a[bf(x)]=(ab)f(x)$$

$$۱.f(x)=f(x)$$

$$۰.f(x)=۰$$

$$(-۱).f(x)=-f(x)$$

۳ب. هر بردار اختیاری $\mathbf{c}$ در فضای برداری nبعدی به کمك n مؤلفه‌اش $(c_۱,c_۲, \cdots ,c_n)$ توصیف می‌شود یا

$$\mathbf{c}=\sum_{i=۱}^{n} c_i\mathbf{e}_i$$

اگر n بردار $\mathbf{e}_i$ (۱) مستقل خطی باشند و (۲) فضای برداری n بعدی را بتنند، یك پایهٔ فضا را تشکیل می‌دهند و مجموعهٔ کاملی می‌سازند.

۳ت. یك‌چندجمله‌ای‌ازدرجهٔ m، $m\leqslant n-۱$، درفضای‌تابع nبعدی به‌کمك رابطهٔ زیرتوصیف می‌شود

$$f(x)=\sum_{i=۰}^{n-۱} c_i\varphi_i(x)$$

اگر n تابع $\varphi_i(x)$: (۱) مستقل خطی باشند و (۲) فضای تابع n بعدی را بتنند، یك پایهٔ فضا ویك مجموعهٔ کامل (برای توصیف چند جمله‌ایهایی ازدرجهٔ m، $m\leqslant n-۱$) تشکیل می‌دهند.

۴ب. ضرب داخلی(ضرب نرده‌ای‌یا اسکالر، یانقطه‌ای) بنابرتعریف عبارت است‌از

$$\mathbf{c.d}=\sum_{i=۱}^{n}c_id_i$$

(اگر $\mathbf{c}$ و $\mathbf{d}$ دارای مؤلفه‌های مختلط باشند، ضرب داخلی به‌صورت $\sum_{i=۱}^{n} c_i^*d_i$ تعریف می‌شود.) خواص ضرب داخلی عبارت‌اند از:

الف) قانون پخشی جمع	$\mathbf{c.(d+e)=c.d+c.e}$
ب) ضرب دراسکالر (یا عدد)	$\mathbf{c}.a\mathbf{d}=a\mathbf{c.d}$
ج) همیوغ مختلط	$\mathbf{c.d=(d.c)}^*$

۴ت. ضرب داخلی بنابرتعریف عبارت است از

$$\langle f|g\rangle=\int_a^b f^*(x)g(x)w(x)dx$$

تابع‌وزنی $w(x)$ وبازهٔ (a, b) به‌کمك معادلهٔ دیفرانسیلی‌که $\varphi_i(x)$ درآن صدق می‌کند و

نیز شرایط مرزی تعیین می‌شوند (بخش ۱۰۹). به‌زبان ماتریسی، بخش ۲.۴، $\langle g|$ عبارت است ازیك بردارستونی، و $|f\rangle$ یك بردار سطری، الحاقی به $\langle f|$.

خواص ضرب داخلی همانهاست که درمورد بردارها برشمردیم

الف) $\langle f|g+h\rangle=\langle f|g\rangle+\langle f|h\rangle$

ب) $\langle f|ag\rangle=a\langle f|g\rangle$

ج) $\langle f|g\rangle=\langle g|f\rangle^*$

۵ب. تعامد

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j=0, \qquad i\neq j$$

اگر n بردار $\mathbf{e}_i$ خود متعامد نباشند، با استفاده ازفرایند گرام‌ـاشمیت می‌توان یك مجموعهٔ متعامد ایجاد کرد.

۵ت. تعامد

$$\langle\varphi_i|\varphi_j\rangle=\int_a^b \varphi_i^*(x)\varphi_j(x)w(x)dx=0, \quad i\neq j$$

اگر n تابع $\varphi_i(x)$ خود متعامد نباشند، با استفاده از فرایند گرام‌ـاشمیت (بخش ۳.۹) می‌توان یك مجموعهٔ متعامد ایجاد کرد.

۶ب. تعریف نرم

$$|\mathbf{c}|=(\mathbf{c}.\mathbf{c})^{1/2}=\left(\sum_{i=1}^n c_i^2\right)^{1/2}$$

بردارهای پایهٔ $\mathbf{e}_i$ را چنان درنظرمی‌گیریم که دارای نرم (طول) واحدباشند، $\mathbf{e}_i . \mathbf{e}_i=1$. مؤلفه‌های $\mathbf{c}$ ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آیند

$$c_i=\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{c}, \qquad i=1,2,\dots,n$$

۶ت. تعریف نرم

$$||f||=\langle f|f\rangle^{1/2}=\left[\int_a^b|f(x)|^2w(x)dx\right]^{1/2}$$

$$=\left[\sum_{i=0}^{n-1}|c_i|^2\right]^{1/2}$$

این تساوی آخری، اتحاد پارسوال‌است. $||f||>0$، مگر آنکه $f(x)$ با صفر متحد باشد توابع پایهٔ $\varphi_i(x)$ را می‌توان چنان برگزیدکه دارای نرم واحد باشند (بهنجارش یکه)

$$||\varphi_i||=1$$

ضرایب بسط چندجمله‌ای $f(x)$ ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آیند

$$c_i = \langle \varphi_i | f \rangle, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

۷ب. نامساوی بسل

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} \geqslant \sum_i c_i^2$$

اگر به‌ازای همهٔ $\mathbf{c}$ ها، علامت مساوی برقرارباشد، دال بر آن است که $\mathbf{e}_i$ها فضای برداری را می‌تنند، یعنی کامل‌اند.

۷ت. نامساوی بسل

$$\langle f | f \rangle = \int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx \geqslant \sum_i |c_i|^2$$

اگر به‌ازای همهٔ fهای مجازعلامت مساوی برقرارباشد، براین‌امردلالت می‌کندکه $\varphi_i(x)$ها فضای تابع را می‌تنند، یعنی کامل‌اند.

۸ب. نامساوی شوارتس

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} \leqslant |\mathbf{c}| \cdot |\mathbf{d}|$$

علامت مساوی وقتی برقرار است، که $\mathbf{c}$ مضربی از $\mathbf{d}$ باشد. اگر زاویهٔ بین $\mathbf{c}$ و $\mathbf{d}$ را با θ نشان دهیم، داریم $|\cos\theta| \leqslant 1$.

۸ت. نامساوی شوارتس

$$|\langle f | g \rangle| \leqslant \langle f | f \rangle^{1/2} \langle g | g \rangle^{1/2} = \|f\| \cdot \|g\|$$

علامت مساوی وقتی برقرار است که $f(x)$ و $g(x)$ وابستهٔ خطی‌باشند، یعنی وقتی‌که $f(x)$ مضربی از $g(x)$ باشد.

اکنون فرض کنید که n با تشکیل فضای برداری خطی بینهایت بعدی، l^2، به‌سمت بینهایت میل کند.

۹ب. بردار $\mathbf{c}$ درفضای بینهایت بعدی به‌صورت زیراست

$$\mathbf{c} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mathbf{e}_i$$

این شرط را وضع می‌کنیم که

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < \infty$$

مؤلفه‌های $\mathbf{c}$، دقیقاً مانند مورد فضای با بعد متناهی، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آیند

$$c_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{c}, \qquad i = 1, 2, \ldots, \infty .$$

با $n \to \infty$، یك فضای خطی برداری (تابع) بینهایت بعدی، L^2، تشکیل داده‌ایم. حرف L نشانگر کلمهٔ لبگ وشاخص بالای ۲ نمایندهٔ توان ۲ در $|f(x)|^2$ است. نیازی نیست که توابع ماچندجمله‌ای باشند، ولی باید دست‌کم به‌صورت پاره‌پاره پیوسته باشند (شرایط دیریکله برای سری فوریه) و نیز $\langle f|f \rangle = \int_a^b |f(x)|^2 w(x)dx$ وجود داشته باشد. این شرط دوم را غالباً به‌این صورت بیان می‌کنند که $f(x)$ باید مربعی انتگرالپذیر باشد.

۹ت. دنبالهٔ کوشی.

فرض کنید

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x)$$

اگر، وقتی‌که $n \to \infty$، آنگاه داشته‌باشیم

$$\| f(x) - f_n(x) \| \to 0$$

یا

$$\lim_{n \to \infty} \int \left| f(x) - \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x) \right|^2 w(x) dx = 0$$

درآن صورت همگرایی‌درمیانگین برقراراست. این‌شرط، مشابه معیار دنبالهٔ کوشی‌مجموع پاره‌ای بخش ۱.۵ برای‌همگرایی یك‌سری نامتناهی مطرح می‌شود.

اگرهر دنبالهٔ کوشی از بردارهای مجاز (توابع مربعی‌انتگرالپذیر وپاره‌پاره پیوسته) به‌یك بردارحدی درفضای خطی ماهمگرا شود، فضا را کامل گویند. دراین صورت، به‌مفهوم همگرایی درمیانگین داریم

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varphi_i(x) \qquad \text{(تقریباً درهمه‌جا)}$$

همان‌طورکه قبلا خاطرنشان شده است این شرط نسبت‌به همگرایی نقطه به‌نقطه (در مقدار معین x) یاهمگرایی یکنواخت، ضعیفتراست.

ضرایب بسط (فوریه)

$$c_i = \langle \varphi_i | f \rangle, \ i = 0, 1, \ldots, \infty$$

درست مانند حالتی‌که در فضای متناهی بعد پیش می‌آید. آنگاه

$$f(x)=\sum_i \langle\varphi_i|f\rangle\varphi_i(x)$$

یك فضای خطی (با ابعاد متناهی یا نامتناهی) که (۱) در آن یك ضرب داخلی ($\langle f|g\rangle$) تعریف شده باشد و (۲) کامل باشد، فضای هیلبرت است.
فضای هیلبرت بینهایت بعدی، یك چارچوب ریاضی طبیعی برای مکانیك کوانتومی نوین فراهم می‌آورد. از مکانیك کوانتومی گذشته، فضای هیلبرت زیبایی و توان ریاضی تجریدی خود را داراست ولی ضرورت کاربرد آن کاهش یافته‌است.

مسائل

۱.۴.۹ تابع $f(x)$ را در یك سری از ویژه‌تابعهای متعامد بهنجار بسط داده‌ایم

$$f(x)=\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$$

نشان دهید که بسط سری برای مجموعهٔ معینی از $\varphi_n(x)$ یکتاست. در اینجا توابع $\varphi_n(x)$ را به‌عنوان بردارهای پایه در یك فضای هیلبرت بینهایت بعدی درنظر گرفته‌ایم.

۲.۴.۹ تابع $f(x)$ را به کمك مجموعه‌ای متناهی از توابع پایهٔ $\varphi_i(x)$ نمایش داده‌ایم

$$f(x)=\sum_{i=1}^{N} c_i\varphi_i(x)$$

نشان دهید که مؤلفه‌های c_i یکتا هستند و هیچ مجموعهٔ متفاوت دیگری مانند c_i' وجودندارد.
یادآوری. توابع پایهٔ موردنظر خودبه‌خود مستقل خطی‌اند، ولی لزوماً متعامد نیستند.

۳.۴.۹ تابع $f(x)$ را به‌طورتقریبی با سری‌توانی $\sum_{i=\circ}^{n-1} c_i x^i$ روی بازهٔ $[\circ,1]$ نمایش داده‌ایم. نشان دهید که کمینه کردن خطای مربعی میانگین به مجموعهٔ معادله‌های خطی زیر منجر می‌شود

$$\mathbf{Ac}=\mathbf{b}$$

که در آن

$$A_{ij}=\int_\circ^1 x^{i+j}dx=\frac{1}{i+j+1},\quad i,j=\circ,1,2,\cdots,n-1$$

و

$$b_i=\int_\circ^1 x^i f(x)dx,\quad i=\circ,1,2,\cdots,n-1$$

یادآوری. A_{ij}ها عبارت‌اند از عناصر یك ماتریس هیلبرت مرتبهٔ n. دترمینان این ماتریس هیلبرت تابعی است از n که به سرعت نزول می‌کند. به ازای $n=5$، $\det\mathbf{A}=3.7\times10^{-12}$ و مجموعهٔ معادلات $\mathbf{Ac}=\mathbf{b}$ دارای شرایط نامطلوب و ناپایدار می‌شود.

۹.۴.۴ به‌جای آنکه تابع $F(x)$ را به‌صورت زیر بسط دهید

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$$

که در آن

$$a_n=\int_a^b F(x)\varphi_n(x)w(x)dx$$

ازتقریب سری متناهی زیر بهره‌گیرید

$$F(x)\approx\sum_{n=0}^{m} c_n\varphi_n(x)$$

نشان دهیدکه خطای مربعی میانگین

$$\int_a^b\left[\ F(x)-\sum_{n=0}^{m} c_n\varphi_n(x)\ \right]^2 w(x)dx$$

با فرض $c_n=a_n$، کمینه می‌شود.

یادآوری. مقدارضرایب ازتعداد جمله‌های سری متناهی مستقل است. این استقلال پیامدی است از تعامد، و درمورد برازش کمترین مربعهاکه درآن از توانهای x استفاده می‌شود صدق نمی‌کند.

۹.۴.۵ ازمثال ۹.۲.۲

$$f(x)=\begin{cases} h/2, & 0<x<\pi \\ -h/2, & -\pi<x<0 \end{cases}=\frac{2h}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

(الف) نشان دهیدکه

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx=\frac{\pi}{2}h^2$$

$$=\frac{4h^2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^{-2}$$

این عبارت به‌ازای حد بالای متناهی، همان نامساوی بسل خواهد بود، و به‌ازای حد بالای

∞، همان‌طور که نوشته‌شده است، اتحاد پارسوال است.
(ب) بامحاسبهٔ سری، تحقیق کنید که

$$\frac{\pi}{2} h^2 = \frac{4h^2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-2}$$

راهنمایی. این سری را می‌توان به‌صورت تابع زتای ریمان نشان داد.

۶.۴.۹ ازمعادلهٔ (۷۸.۹):

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle f|f\rangle + \lambda\langle f|g\rangle + \lambda^*\langle g|f\rangle + \lambda\lambda^*\langle g|g\rangle$$

نسبت به λ^* مشتق بگیرید و نشان‌دهید که نامساوی شوارتس، یعنی‌معادلهٔ (۷۷.۹)، را به‌دست خواهید آورد.

۷.۴.۹ نامساوی شوارتس را ازاتحاد زیر استخراج کنید

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 = \int_a^b [f(x)]^2 dx \int_a^b [g(x)]^2 dx$$
$$-\frac{1}{2}\int_a^b \int_a^b [f(x)g(y) - f(y)g(x)]^2 dx dy$$

۸.۴.۹ اگرتوابع $f(x)$ و $g(x)$ درنامساوی شوارتس، معادلهٔ (۷۷.۹)، را بتوان دریك سری ازویژه‌تابعهای $\varphi_i(x)$ بسط داد، نشان دهیدکه معادلهٔ (۷۷.۹) به معادلهٔ (۷۵.۹) تبدیل می‌شود (که درآن n ممکن‌است بینهایت شود).
دقت کنیدکه $f(x)$ را به‌صورت برداری در یك فضای تابعی توصیف کرده‌ایم، که درآن $\varphi_i(x)$ نظیر بردار یکهٔ $\mathbf{e}_i$ است.

۹.۴.۹ عملگر H هرمیتی: قطعاً مثبت‌است، یعنی

$$\int_a^b f^* H f dx > 0$$

نامساوی تعمیم یافتهٔ شوارتس، یعنی

$$\left|\int_a^b f^* H g dx\right|^2 \leqslant \int_a^b f^* H f dx \int_a^b g^* H g\, dx$$

را برای این عملگر اثبات کنید.

۱۰.۴.۹ (الف) نمایش تابع دلتای دیراك را، که درمعادلهٔ (۸۳.۹) بیان شد، یعنی

$$\delta(x-t)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)\varphi_n(t)$$

غالباً رابطهٔ بستاری می‌نامند. نشان‌دهیدکه بستاری برای‌مجموعهٔ متعامد بهنجاری از توابع، φ_n، به معنای تمامیت ایـن مجموعه است، یعنی معادلهٔ (۶۱.۹) از معـادلهٔ (۸۳.۹) نتیجه می‌شود.

راهنمایی. می‌توانید ازرابطهٔ زیر بهره‌بگیرید

$$F(x)=\int F(t)\delta(x-t)dx$$

(ب) با دنبال‌کردن راهنمایی‌بند (الف) به‌انتگرال $\int F(t)\varphi_n(t)dt$ برمی‌خورید. ازکجا می‌دانیدکه این‌انتگرال متناهی‌است؟

۱۱.۴.۹ تابع‌دلتای‌دیراك $\delta(x-t)$ را، برای بازهٔ متناهی $(-\pi, \pi)$، به‌صورت‌یك‌سری از سینوسها وکسینوسها: $\sin nx$، $\cos nx$، $n=0, 1, 2, \dots$ بسط دهید دقت کنید که هرچند این توابع متعامدند، اما به‌واحد بهنجار نشده‌اند.

۱۲.۴.۹ معادلهٔ (۹۰.۹)، یعنی‌بسط ویژه‌تابعی تابع گرین را در معادلهٔ (۹۱.۹) بنشانید، آنگاه نشان‌دهیدکه معادلهٔ (۹۱.۹) عملا یکی‌ازجوابهای معادلهٔ ناهمگن هلمهولتز (۸۵.۹) است.

۱۳.۴.۹ (الف) ازیك معادلهٔ دیفرانسیل ناهمگن یك‌بعدی [معادلهٔ (۹۲.۹)] شروع‌کنید و فرض‌کنیدکه $\psi(x)$ و $\rho(x)$ را بتوان با بسط ویژه‌تابعی نمایش داد. بدون‌استفاده از تابـع دلتای دیراك یانمایشهای آن، نشان دهیدکه

$$\psi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\int_a^b\rho(t)\varphi_n(t)dt}{\lambda_n-\lambda}\varphi_n(x)$$

دقت کنیدکه: (۱) اگر $\rho=0$، هیچ جوابی‌نخواهیم‌داشت مگرآنکه $\lambda=\lambda_n$؛ و (۲) اگر $\lambda=\lambda_n$، هیچ‌جوابی نخواهیم داشت مگرآنکه ρ نسبت‌به φ_n متعامد باشد. همین رفتار در معادله‌های انتگرالی دربخش ۴.۱۶ دوباره ظاهرخواهد شد.

(ب) با تعویض ترتیب مجموعیابی و انتگرال، نشان‌دهیـدکه تابع‌گرین متناظر با معادلهٔ (۹۳.۹) را تشکیل داده‌اید.

۱۴.۴.۹ ویژه‌تابعهای معادلهٔ شرودینگر اغلب مختلط‌اند. در این صورت انتگرال تعامـد، یعنی معادلهٔ (۳۹.۹) باانتگرال زیرتعویض می‌شود

$$\int_a^b\varphi_i^*(x)\varphi_j(x)w(x)dx=\delta_{ij}$$

به‌جای معادلهٔ (۸۳.۹) خواهیم داشت

$$\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(\mathbf{r}_1)\varphi_n^*(\mathbf{r}_2)$$

نشان دهید که تابع گرین، معادلهٔ (۹۰.۹)، به‌صورت زیر درمی‌آید

$$G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi_n(\mathbf{r}_1)\varphi_n^*(\mathbf{r}_2)}{k_n^2-k^2}$$

$$=G^*(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)$$

۱۵.۴.۹ $\psi(x)$ تابع‌موجی بهنجار است: $\psi(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$. ضرایب بسط a_n را دامنه‌های احتمال می‌نامند. می‌توانیم یك ماتریس چگالی ρ با عناصر $\rho_{ij}=a_i a_j^*$ تعریف کنیم. نشان دهید که

$$(\rho^2)_{ij}=\rho_{ij}$$

یا

$$\rho^2=\rho$$

این نتیجه، بنابر تعریف، ρ را به‌صورت یك عملگر تصویری درمی‌آورد.

راهنمایی.

$$\int\psi^*\psi\, dx=1$$

۱۶.۴.۹ نشان دهید که (الف) عملگر

$$|\varphi_i(x)\rangle\ \langle\varphi_i(t)|$$

که روی تابع

$$f(t)=\sum_j c_j|\varphi_j(t)\rangle$$

عمل کند، تابع زیر حاصل می‌شود

$$c_i|\varphi_i(x)\rangle$$

(ب)

$$\sum_i|\varphi_i(x)\rangle\ \langle\varphi_i(x)|=1$$

این عملگر یك عملگر تصویری است که $f(x)$ را روی مختصهٔ iام تصویر می‌کند و مؤلفهٔ iام $f(x)$، یعنی $c_i|\varphi_i(x)\rangle$، را برمی‌گزیند.

راهنمایی. عملگر از طریق ضرب داخلی، که تعریف شده است، عمل می‌کند.

مراجع

Byron, F. W., Jr., and R. W. Fuller, *Mathematics of Classical and Quantum Physics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1969.

Miller, K. S., *Linear Differential Equations in the Real Domain*, New York: Norton, 1963.

Titchmarsh, E.C., *Eigenfunction Expansions Associated with Second Order Differential Equations*. London: Oxford University Press, Vol. I, 2nd ed., 1962, Vol. II, 1958.

۱۰

تابع گاما (تابع فاکتوریل)

تابع گاما (تابع فاکتوریل)

تابع گاما گاهگاه درمسائل فیزیکی نظیر بهنجارش تابع‌موجهای کولنی ومحاسبهٔ احتمالها درمکانیك آماری ظاهرمی‌شود. ولی، این‌تابع به‌طورکلی‌کمتر ازمثلا تابع لژاندر یا تابع بسل، فصلهای ۱۱ و ۱۲، تعبیر وکاربرد فیزیکی دارد. درعوض، اهمیت آن از فوایدش در ایجاد سایرتوابع‌که کاربرد مستقیم فیزیکی دارند، سرچشمه می‌گیرد. ازاین‌روست‌که تابع گاما را در اینجا بررسی می‌کنیم. بحثی در بارهٔ محاسبهٔ عددی تابع گاما دربخش ۳.۱۰ ارائه خواهیم داد.

۱.۱۰ تعریفها، خواص ساده

معمولا برای تابع گاما دست‌کم سه‌تعریف متفاوت و مناسب به‌کارمی‌برند. نخستین کار ما بیان این تعریفها، عنوان‌کردن برخی پیامدهای مستقیم وسادهٔ آنها، و نمایاندن هم‌ارزیشان است.

حد نامتناهی (اویلر)

نخستین تعریف، منسوب به‌اویلر، عبارت است از

$$\Gamma(z)\equiv\lim_{n\to\infty}\frac{۱\times ۲\times ۳\times\cdots\times n}{z(z+۱)(z+۲)\cdots(z+n)}n^{z},\quad z\neq ۰,-۱,-۲,-۳,\ldots \qquad (۱.۱۰)$$

این تعریف $\Gamma(z)$، دربسط یکی‌ازصورتهای $\Gamma(z)$ به‌نام حاصلضرب نامتناهی وایرشتراوس ومعادلهٔ (۱۶.۱۰)، ودردستیابی به‌مشتق $\ln\Gamma(z)$ (بخش ۲.۱۰) مفید واقع می‌شود. z در اینجا ودرسایر مباحث فصل می‌توانـد حقیقی یا مختلط باشد. با نشاندن $z+1$ به‌جای z، خواهیم داشت

$$\Gamma(z+1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1\times2\times3\times\cdots\times n}{(z+1)(z+2)(z+3)\cdots(z+n+1)}n^{z+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{nz}{z+n+1}\times\frac{1\times2\times3\times\cdots\times n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}n^{z} \qquad (2.10)$$

$$=z\,\Gamma(z)$$

این عبارت رابطهٔ تابعی‌اساسی‌تابع‌گاما به‌شمارمی‌آید. باید توجه‌داشت‌که این یك معادلهٔ تفاضلی است. نشان داده شده است‌که تابع‌گاما یـکی‌از رده‌های کلی توابعی است‌که هیچ معادلهٔ دیفرانسیلی باضرایب‌گویا درآن صدق نمی‌کند. به‌ویژه، تابع گاما یکی‌ازچندتابعی درفیزیك ریاضی است‌که درهیچیك از دومعادلهٔ دیفرانسیل فوق‌هندسی (بخش ۵.۱۳) یا فوق هندسی همشار (بخش ۶.۱۳) صدق نمی‌کند.

همچنین، باتوجه به‌این تعریف

$$\Gamma(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1\times2\times3\times\cdots\times n}{1\times2\times3\times\cdots\times n(n+1)}n$$

$$=1 \qquad (3.10)$$

اکنون، با بهره‌گیری ازمعادلهٔ (۲.۱۰) داریم

$$\Gamma(2)=1$$

$$\Gamma(3)=2\Gamma(2)=2 \qquad (4.10)$$

$$\Gamma(n)=1\times2\times3\times\cdots\times(n-1)=(n-1)!$$

انتگرال معین (اویلر)

تعریف دیگری، که بازهم آنرا درموارد فراوانی به‌نام اویلر هم‌می‌خوانند، عبارت است‌از

$$\Gamma(z)\equiv\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt,\qquad \Re(z)>0 \qquad (5.10)$$

تحدید روی z برای اجتناب ازواگرایی انتگرال ضروری است. وقتی تابع گاما درمسائل فیزیکی می‌آید، غالباً به‌یکی‌از صورتهای زیر یاشکل تغییر یافتهٔ آنهاست

$$\Gamma(z)=2\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2z-1}dt,\quad \Re(z)>0 \tag{6.10}$$

$$\Gamma(z)=\int_0^1\left[\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{z-1}dt,\quad \Re(z)>0 \tag{7.10}$$

معادلهٔ (۶.۱۰)، به‌ازای $z=1/2$ همان تابع خطای گاؤس است. ومی‌توان به‌نتیجهٔ جالب زیر رسید

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \tag{8.10}$$

تعمیمهای معادلهٔ (۶.۱۰)، انتگرالهای گاؤسی، رادرمسئلهٔ ۱۱.۱.۱۰ بررسی خواهیم کرد. دربخش ۴.۱۰، تابع بتا با استفاده ازهمین صورت انتگرال معین $\Gamma(z)$، معادلهٔ (۵.۱۰)، به‌دست می‌آید.

برای نشان دادن هم‌ارزی این‌دو تعریف، یعنی معادله‌های (۱.۱۰) و (۵.۱۰)، تابع دومتغیرهٔ زیررا درنظر بگیرید

$$F(z,n)=\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt,\quad \Re(z)>0 \tag{9.10}$$

که درآن n یك عدد درست است.[1] بااستفاده ازتعریف تابع‌نمایی

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\equiv e^{-t} \tag{10.10}$$

ازاین رو باتوجه به‌معادلهٔ (۵.۱۰)، داریم

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}F(z,n)=F(z,\infty)&=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt\\ &\equiv\Gamma(z)\end{aligned} \tag{11.10}$$

به $F(z,n)$ باز می‌گردیم، وآن‌را ازطریق انتگرالگیریهای‌متوالی جزء به‌جزء محاسبه می‌کنیم. برای راحتی قرارمی‌دهیم $u=t/n$. آنگاه

---

۱. این صورت $F(z,n)$ به‌کمك تابع بتا بیان شده‌است [با معادلهٔ (۶۰.۱۰) مقایسه کنید].

$$F(z, n)=n^z\int_0^1(1-u)^n u^{z-1}du \qquad (۱۲.۱۰)$$

با انتگرالگیری جزء‌به‌جزء، داریم

$$\frac{F(z,n)}{n^z}=(1-u)^n\frac{u^z}{z}\Big|_0^1+\frac{n}{z}\int_0^1(1-u)^{n-1}u^z du \qquad (۱۳.۱۰)$$

جزء انتگرالگیری شده درهر دونقطهٔ پایانی هر بار صفرمی‌شود. باتکرار این‌کار، سرانجام خواهیم داشت

$$F(z,n)=n^z\frac{n(n-1)\cdots 1}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}\int_0^1 u^{z+n-1}du$$

$$(۱۴.۱۰)$$

$$=\frac{1\times 2\times 3\times\cdots\times n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}n^z$$

این عبارت به‌عبارت سمت راست معادلهٔ (۱.۱۰) شبیه است. از این‌رو، به‌کمك معادلهٔ (۱.۱۰)، داریم

$$\lim_{n\to\infty}F(z, n)=F(z, \infty)\equiv\Gamma(z) \qquad (۱۵.۱۰)$$

که اثبات را کامل می‌کند.

حاصلضرب نامتناهی (وایرشتراوس)

تعریف سوم (شکل منسوب به وایرشتراوس) عبارت است از

$$\frac{1}{\Gamma(z)}\equiv ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n} \qquad (۱۶.۱۰)$$

که درآن γ ثابت متداول اویلر-ماشرونی است

$$\gamma=0.577216\ldots \qquad (۱۷.۱۰)$$

این‌صورت حاصلضرب نامتناهی برای بسط اتحاد بازتاب، معادلهٔ (۲۳.۱۰)، مورداستفاده قرار می‌گیرد، و درمسائلی نظیر مسئلهٔ ۱۹.۱.۱۰ به‌کار می‌رود. این تعریف را می‌توان، از طریق بازنویسی تعریف اصلی [معادلهٔ (۱.۱۰)] به‌صورت زیر، استخراج کرد

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{1\times 2\times 3\times\cdots\times n}{z(z+1)\cdots(z+n)}n^{z}$$

(۱۸.۱۰)

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{z}\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{z}{m}\right)^{-1}n^{z}$$

با وارون کردن وبهره گیری ازتساوی

$$n^{-z}=e^{(-\ln n)z} \qquad (۱۹.۱۰)$$

داریم

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=z\lim_{n\to\infty}e^{(-\ln n)z}\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{z}{m}\right) \qquad (۲۰.۱۰)$$

طرفین را درعبارت

$$\exp\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)z\right]=\prod_{m=1}^{n}e^{z/m} \qquad (۲۱.۱۰)$$

ضرب و به‌آن تقسیم می‌کنیم: در نتیجه

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=z\left\{\lim_{n\to\infty}\exp\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)z\right]\right\}$$
$$\times\left[\lim_{n\to\infty}\prod_{m=1}^{n}\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{-z/m}\right] \qquad (۲۲.۱۰)$$

همان‌طور که دربخش ۲.۵ (جلد اول) نشان داده شده‌است، سری نامتناهی درنما همگراست و ثابت اویلر-ماشرونی، γ، را تعریف می‌کنـد. بدین تـرتیب معادلهٔ (۱۶.۱۰) به‌دست می‌آید.

دربخش ۱۱.۵ نشان داده شد که تعریف حاصلضرب نامتناهی وایرشتراوس $\Gamma(z)$، مستقیماً به‌اتحاد مهم زیرمی‌انجامد

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin n\pi} \qquad (۲۳.۱۰)$$

این اتحاد را می‌توان از طریق انتگرالگیری پربندی (مثال ۵.۲.۷ و مسائل ۱۸.۲.۷ و ۱۹.۲.۷، جلداول) وتابع بتا، بخش ۴.۱۰، نیز به‌دست‌آورد. با قراردادن $z=1/2$ در معادلهٔ (۲۳.۱۰)، خواهیم داشت

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \qquad (۲۴.۱۰)$$

(ریشهٔ دوم مثبت را می‌گیریم) که با معادلهٔ (۸.۱۰) سازگار است.

تعریف وایرشتراوس به وضوح نشان می‌دهد که تابع $\Gamma(z)$ به ازای $z=0, -1, -2, -3, \ldots$ دارای قطبهای ساده‌است، و $[\Gamma(z)]^{-1}$ درصفحهٔ مختلط‌متناهی قطبی ندارد، یعنی $\Gamma(z)$ صفر ندارد. این رفتار را می‌توان درمعادلهٔ (۲۳.۱۰) نیز مشاهده کرد. پی‌می‌بریم که دراین معادله $\pi/(\sin \pi z)$ هرگز صفر نمی‌شود.

تعریف حاصلضرب نامتناهی $\Gamma(z)$ را در واقع می‌توان ازقضیهٔ تجزیه به‌عوامل وایرشتراوس، یا تصریح این نکته که $[\Gamma(z)]^{-1}$ در $z=0, -1, -2, -3, \ldots$ دارای صفرهای ساده‌است، استخراج کرد. ثابت اویلر-ماشرونی به‌کمك شرط $\Gamma(1)=1$، تعیین می‌شود.

توزیع (چگالی احتمال) گاما درنظریهٔ احتمال ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases} \qquad (\text{۲۴.۱۰الف})$$

ثابت $[\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)]^{-1}$ را طوری می‌گیرند که احتمال کل (انتگرالگیری شده) برابریك‌شود. معادلهٔ (۲۴.۱۰ الف)، به‌ازای $x\to E$ (E انرژی جنبشی) و $\alpha\to 3/2$ و $\beta\to kT$، آمار کلاسیکی ماکسول-بولتزمن را می‌دهد.

نمادگذاری فاکتوریل

تا اینجا، بحث‌خودرا به‌کمك نمادهای‌کلاسیکی‌عرضه‌کرده‌ایم. همان‌طورکه جفریز وسایرین خاطرنشان کرده‌اند، کمیت $z-1$ که درنمای $z-1$ درتعریف دوم [معادلهٔ(۵.۱۰)] ظاهر می‌شود کاملا غیرضروری‌است. بنابراین معادلهٔ (۵.۱۰) را به‌صورت زیر بازنویسی‌می‌کنیم

$$\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z}dt\equiv z!, \qquad \Re(z)>-1 \qquad (۲۵.۱۰)$$

تا تابع فاکتوریل، $z!$، را تعریف کنیم، بازهم ممکن‌است گاهی به‌نمادگذاری گاؤس برای تابع فاکتوریل، $\prod(z)$، برخورد کنیم

$$\prod(z)=z! \qquad (۲۶.۱۰)$$

نماد Γ منسوب به‌لژاندر است. ناگفته پیداست که تابع‌فاکتوریل‌معادلهٔ (۲۵.۱۰) به‌صورت زیر به‌تابع گاما مربوط می‌شود

$$\Gamma(z)=(z-۱)!$$

یا

$$\Gamma(z+۱)=z! \qquad (۲۷.۱۰)$$

اگر z با عدد درست مثبت n برابر باشد، بنا بر معادلهٔ (۴.۱۰)

$$z!=n!=۱\times۲\times۳\times\cdots\times n \qquad (۲۸.۱۰)$$

که همان فاکتوریلی‌است که با آن آشناییم. ولی باید به‌دقت توجه کنیم‌که چون $z!$ اکنون از طریق معادلهٔ (۲۵.۱۰) [یا به‌طور معادل از طریق معادلهٔ (۲۷.۱۰)] تعریف می‌شود، تابع فاکتوریل دیگر محدود به مقادیر عدد درست برای شناسه‌اش نیست (شکل ۱.۱۰). رابطهٔ تفاضلی [معادلهٔ (۲.۱۰)] به‌صورت زیر درمی‌آید

$$(z-۱)!=\frac{z!}{z} \qquad (۲۹.۱۰)$$

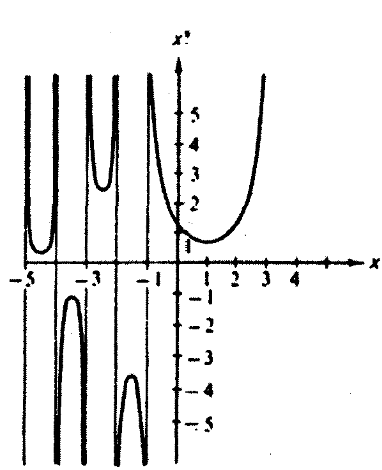
این رابطه فوراً نشان می‌دهد که

$$۰!=۱ \qquad (۳۰.۱۰)$$

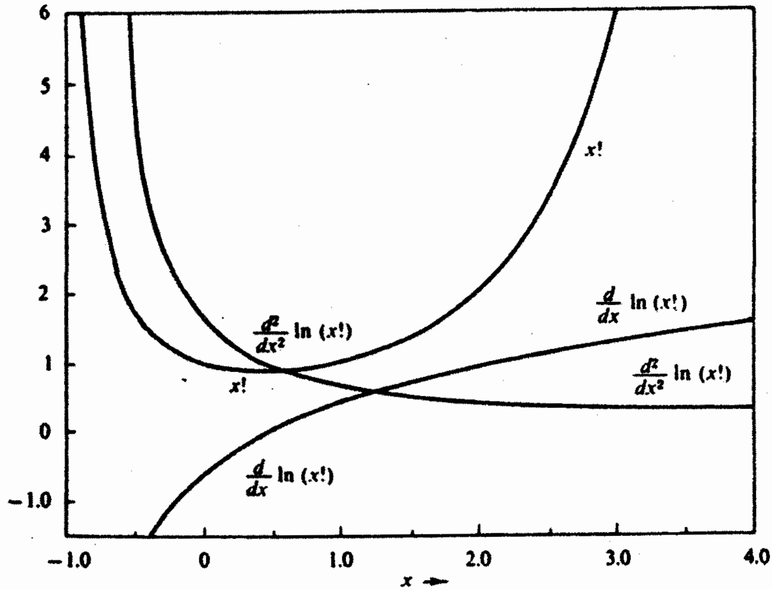
و

$$n!=\pm\infty \quad \text{به‌ازای مقادیر درست منفی } n \qquad (۳۱.۱۰)$$

معادلهٔ (۲۳.۱۰) برحسب تابع فاکتوریل به‌صورت زیر درمی‌آید



شکل ۱.۱۰ تابع فاکتوریل—تعمیم به‌شناسه‌های منفی.



شکل ۲.۱۰ تابع فاکتوریل و دو مشتق اول $\ln(x!)$.

$$z!(-z)!=\frac{\pi z}{\sin \pi z} \qquad (۳۲.۱۰)$$

اگر شناسه را به‌مقادیر حقیقی بزرگتر از ۱ــ محدودکنیم، خواهیم دیدکه $x!$ منحنی شکل ۲.۱۰ را تعریف می‌کند. کمینهٔ این منحنی عبارت است‌از

$$x!=(۰٫۴۶۱۶۳\ldots)!=۰٫۸۸۵۶۰\ldots \qquad (۳۳.۱۰\text{الف})$$

نمادگذاری فاکتوریل دوگانه

دربسیاری از مسائل فیزیك ریاضی، به‌ویژه درارتباط باچندجمله‌ایهای لژاندر (فصل ۱۲) به‌حاصلضربهایی ازاعداد درست فرد یا اعداد درست زوج برمی‌خوریم. برای راحتی کار، درمورد این حاصلضربها نمادگذاری ویژهٔ فاکتوریل دوگانه معرفی می‌شود

$$۱\times۳\times۵\times\cdots\times(۲n+۱)=(۲n+۱)!!$$

(۳۳.۱۰ب)

$$۲\times۴\times۶\times\cdots\times(۲n)=(۲n)!!$$

روشن است که این حاصلضربها به‌صورت زیر با تابعهای فاکتوریل معمولی ارتباط پیدا می‌کنند

$$(۲n)!!=۲^n n! \quad \text{و} \quad (۲n+۱)!!=\frac{(۲n+۱)!}{۲^n n!} \qquad (۳۳.۱۰\text{ج})$$

نمایش انتگرالی

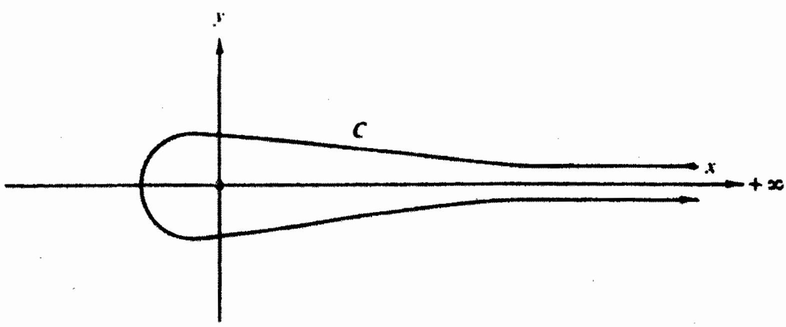
یکی‌از نمایشهای انتگرالی‌که در تشکیل سریهای مجانبی برای توابع بسل سودمند می‌افتد عبارت است از

$$\int_C e^{-z} z^{\nu} dz = (e^{2\pi i\nu} - 1)\,\nu! \qquad (۳۴.۱۰)$$

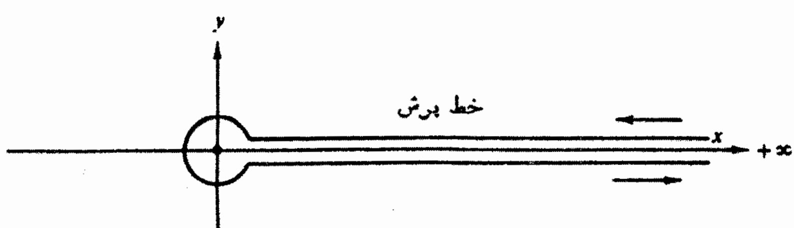
که در آن C پربند (مسیر)ی است‌که در شکل ۳.۱۰ نشان داده شده است. این نمایش انتگرال پربندی خصوصاً وقتی سودمند است‌که ν عدد درستی نباشد، که درنتیجه $z=0$ یك نقطهٔ انشعاب می‌شود. می‌توان به‌ازای $\nu > -1$ و با تغییر شکل پربند، مطابق شکل ۴.۱۰، درستی معادلهٔ (۳۴.۱۰) را به‌آسانی تحقیق کرد. انتگرال از ∞ تا مبدأ، با صفر قراردادن فاز z، برابر $(\nu!)-$ می‌شود. حاصل انتگرال از مبدأ تا ∞ (در ربع چهارم) عبارت $e^{2\pi i\nu}\nu!$ خواهد بود، فاز z در این ربع به 2π افزایش یافته است. ازآنجاکه به‌ازای $\nu > -1$، سهم مربوط به‌دایرهٔ پیرامون مبدأ درانتگرال صفراست، معادلهٔ (۳۴.۱۰) به‌دست می‌آید.

غالباً مناسبتر آن است‌که این نتیجه را به‌صورت متقارنتر زیر نشان دهیم

$$\int_C e^{-z}(-z)^{\nu} dz = 2i \sin \nu\pi\ \nu! \qquad (۳۵.۱۰)$$



شکل ۳.۱۰ پربند تابع فاکتوریل.



شکل ۴.۱۰ پربند تغییرشکل‌یافتهٔ پربند شکل ۳.۱۰.

این رابطه متناظر است با برگزیدن فاز z به‌صورتی که، درمعادلهٔ (۳۴.۱۰)، گستره‌ای از $-\pi$ تا π داشته باشد.

این تحلیل درستی معادله‌های (۳۴.۱۰) و (۳۵.۱۰) را به‌ازای $\nu > -1$ نشان می‌دهد. تعمیم این گستره به‌طوری که همهٔ مقادیر غیرعدد درست ν را نیز شامل شود نسبتاً ساده‌است. اولا به‌این‌نکته توجه‌می‌کنیم که تا آنجاکه ازمبدأ دور بمانیم، این‌انتگرال به‌ازای $\nu > -1$ وجوددارد. دوم اینکه باانتگرالگیری جزءبه‌جزء درمی‌یابیم که معادلهٔ (۳۵.۱۰) رابطهٔ آشنای تفاضلی [معادلهٔ (۲۹.۱۰)] رابه‌دست می‌دهد. اگر رابطهٔ تفاضلی را نمایانگر تابع فاکتوریل مربوط به $\nu > -1$ بگیریم، درستی معادله‌های (۳۴.۱۰) و (۳۵.۱۰) را به‌ازای همهٔ مقادیر ν (جز اعداد درست منفی) تحقیق کرده‌ایم.

مسائل

۱.۱.۱۰ با استفاده ازشکل انتگرالی اویلر [معادلهٔ (۵.۱۰)] برای تابع $\Gamma(z)$

$$\Gamma(z)=\int_{0}^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$$

رابطهٔ بازگشتی زیر را به‌دست آورید

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$$

۲.۱.۱۰ دریکی‌ازجوابهای توابع نوع‌دوم لژاندر، به‌صورت سری‌توانی، برمی‌خوریم به

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+2s-1)(n+2s)}{2\times 4\times 6\times 8\cdots(2s-2)(2s)\cdot(2n+3)(2n+5)(2n+7)\cdots(2n+2s+1)}$$

که‌درآن s عدد درست مثبتی است. این عبارت را برحسب فاکتوریلها بازنویسی کنید.

۳.۱.۱۰ نشان دهیدکه

$$\frac{(s-n)!}{(2s-2n)!}=\frac{(-1)^{n-s}(2n-2s)!}{(n-s)!}$$

دراینجا s و n اعداد درست‌اند و $n>s$. ازاین‌نتیجه‌می‌توان برای‌اجتناب ازفاکتوریلهای‌منفی درمواردی نظیر نمایشهای سری توابع‌کروی نویمان وتوابع نوع دوم لژاندر استفاده‌کرد.

۴.۱.۱۰ نشان دهیدکه $\Gamma(z)$ را می‌توان به‌صورت زیرنوشت

$$\Gamma(z)=2\int_{0}^{\infty} e^{-t^{2}}t^{2z-1}dt,\quad \mathcal{R}(z)>0$$

$$\Gamma(z)=\int_{0}^{1}\left[\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{z-1}dt,\ \mathcal{R}(z)>0$$

۵.۱.۱۰ درتوزیع ماکسولی، کسری از ذرات که سرعتشان بین v و $v+dv$ واقع است عبارت خواهد بوداز

$$\frac{dN}{N}=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp(-mv^2/2kT)v^2dv$$

که درآن N تعدادکل ذرات است. مقدار متوسط یاانتظاری v^n بنابر تعریف‌عبارت است از $\langle v^n\rangle = N^{-1}\int v^n dN$. نشان دهیدکه

$$\langle v^n\rangle=\left(\frac{2kT}{m}\right)^{n/2}\left(\frac{n+1}{2}\right)!\Big/\frac{1}{2}!$$

۶.۱.۱۰ با تبدیل انتگرال زیر به‌یك تابع گاما، نشان دهیدکه

$$-\int_0^1 x^k\ln x\,dx=\frac{1}{(k+1)^2} \qquad k>-1$$

۷.۱.۱۰ نشان دهیدکه

$$\int_0^\infty e^{-x^4}dx=\left(\frac{1}{4}\right)!$$

۸.۱.۱۰ نشان دهیدکه

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(ax-1)!}{(x-1)!}=\frac{1}{a}$$

۹.۱.۱۰ موضع قطبهای $\Gamma(z)$ را پیداکنید. نشان دهیدکه این قطبها ساده‌اند و مانده‌ها را تعیین کنید.

۱۰.۱.۱۰ نشان دهیدکه تعداد ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x!=k$، $k\neq 0$، نامتناهی‌است.

۱۱.۱.۱۰ نشان دهیدکه

(الف) $$\int_0^\infty x^{2s+1}\exp(-ax^2)dx=\frac{s!}{2a^{s+1}}$$

(ب) $$\int_0^\infty x^{2s}\exp(-ax^2)dx=\frac{(s-1/2)!}{2a^{s+1/2}}$$

$$=\frac{(2s-1)!!}{2^{s+1}a^s}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

این انتگرالهای گاؤسی درمکانیك‌آماری اهمیت اساسی دارند.

۱۲.۱.۱۰ (الف) روابط بازگشتی را برای $(2n)!!$ و $(2n+1)!!$ بسطدهید.

(ب) با استفاده از این روابط بازگشتی، $0!!$ و $(-1)!!$ را محاسبه (یا تعریف) کنید.
پاسخ. $0!!=1$، $(-1)!!=1$.

۱۳.۱.۱۰ به‌ازای یک عدد درست نامنفی s، نشان دهید که

$$(-2s-1)!!=\frac{(-1)^s}{(2s-1)!!}=\frac{(-1)^s 2^s s!}{(2s)!}$$

۱۴.۱.۱۰ ضریب nامین جمله‌از بسط $(1+x)^{1/2}$ را،
(الف) برحسب فاکتوریلهای اعداد درست،
(ب) برحسب توابع فاکتوریل دوگانه (!!)، بیان کنید.

پاسخ.
$$a_n=(-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!}{2^{2n-2}n!(n-2)!}=(-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!},$$
$$n=2,3,4,\ldots$$

۱۵.۱.۱۰ ضریب nامین جمله از بسط $(1+x)^{-1/2}$ را،
(الف)برحسب فاکتوریلهای اعداد درست،

(ب) برحسب توابع فاکتوریل دوگانه بنویسید.

پاسخ. $n=1,2,3,\ldots$ ، $a_n=(-1)^n\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}=(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

۱۶.۱.۱۰ چندجمله‌ایهای لژاندر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$P_n(\cos\theta)=2\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\Big\{\cos n\theta+\frac{1}{1}\times\frac{n}{2n-1}\cos(n-2)\theta$$
$$+\frac{1\times 3}{1\times 2}\times\frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)}\cos(n-4)\theta$$
$$+\frac{1\times 3\times 5}{1\times 2\times 3}\times\frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}\cos(n-6)\theta+\cdots\Big\}$$

به‌جای n، قرار می‌دهیم $n=2s+1$. آنگاه a_m بسط زیر را برحسب فاکتوریلها و فاکتوریلهای دوگانه تعیین کنید

$$P_n(\cos\theta)=P_{2s+1}(\cos\theta)=\sum_{m=0}^{s}a_m\cos(2m+1)\theta$$

۱۷.۱.۱۰ (الف) نشان دهید که

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)=(-1)^n\pi$$

که در آن n یك عدد درست است.

(ب) $\Gamma(1/2+n)$ و $\Gamma(1/2-n)$ را به‌طور جداگانه برحسب $\pi^{1/2}$ و یك تابع !! بیان کنید.

پاسخ. $\Gamma(\frac{1}{2}+n)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\pi^{1/2}$.

۱۸.۱.۱۰ بااستفاده ازیکی‌از تعریفهای تابع‌گاما یا فاکتوریل، نشان دهید

$$|(ix)!|^2=\frac{\pi x}{\sinh \pi x}$$

۱۹.۱.۱۰ ثابت‌کنید

$$|\Gamma(\alpha+i\beta)|=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\alpha}\prod_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{\beta^2}{(\alpha+n)^2}\right]^{-1/2}$$

این معادله درمحاسبات نظریهٔ واپاشی بتا سودمند افتاده است.

۲۰.۱.۱۰ نشان دهیدکه به‌ازای مقادیر درست مثبت n

$$|(n+ib)!|=\left(\frac{\pi b}{\sinh \pi b}\right)^{1/2}\prod_{s=1}^{n}(s^2+b^2)^{1/2}$$

۲۱.۱.۱۰ نشان دهیدکه به‌ازای همهٔ مقادیر x

$$|x!|\geqslant|(x+iy)!|$$

متغیرهای x و y حقیقی‌اند.

۲۲.۱.۱۰ نشان دهید

$$|(-\frac{1}{2}+iy)!|^2=\frac{\pi}{\cosh \pi y}$$

۲۳.۱.۱۰ چگالی‌احتمال وابسته به‌توزیع بهنجار درآمار از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$f(x)=\frac{1}{\sigma(2\pi)^{1/2}}\exp\left[-(x-\mu)^2/2\sigma^2\right]$$

که درآن گسترهٔ x عبارت است‌از $(-\infty,\infty)$؛ نشان دهید:

(الف) مقدارمیانگین x، یعنی $\langle x\rangle$، برابراست با μ.

(ب) انحراف معیار $(\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2)^{1/2}$ برابر است با σ.

۲۴.۱.۱۰ با استفاده ازتوزیع گاما در معادلهٔ (۳۳.۱۰ الف)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

نشان‌دهید (الف) $\langle x\rangle=\alpha\beta$ (میانگین)، (ب) $\sigma^2\equiv\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2=\alpha\beta^2$ (واریانس).

۲۵.۱.۱۰ تابع‌موج ذره‌ای که توسط یك‌پتانسیل‌صرفاً کولنی‌پراکنده می‌شود عبارت‌است از $\psi(r,\theta)$. تابع‌موج درمبدأ به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\psi(0)=e^{-\pi\gamma/2}\,\Gamma(1+i\gamma)$$

که در آن $\gamma=Z_1Z_2e^2/\hbar v$. نشان دهید

$$\psi^*(0)\psi(0)=\frac{2\pi\gamma}{e^{2\pi\gamma}-1}$$

۲۶.۱.۱۰ نمایش انتگرال پربندی زیررا استخراج کنید

$$2i\sin\nu\pi\ \nu!=\int_C e^{-z}(-z)^{\nu}dz$$

۲۷.۱.۱۰ یك زیر-برنامهٔ تابع $FACT(N)$ (با متغیرمستقل درنقاط ثابت) برای محاسبهٔ $N!$ بنویسید. دراین زیر-برنامه قید ردکردن و دادن پیام خطا برای Nهای منفی را نیز بگنجانید.

یادآوری. به‌ازای Nهای کوچك ضرب مستقیم ساده‌ترین کاراست. به‌ازای Nهای بزرگ، معادلهٔ (۵۵.۱۰)، یعنی سری‌استرلینگ مناسب خواهدبود.

۲۸.۱.۱۰ (الف) یك زیر-برنامهٔ تابع برای محاسبهٔ نسبت فاکتوریل دو گانهٔ $(2N-1)!!/(2N)!!$ بنویسید. قید محاسبه به‌ازای $N=0$، ونیز برای ردکردن ودادن پیام خطا برای Nهای منفی بگنجانید. این نسبت را به‌ازای $N=1(1)100$ محاسبه و جدولبندی کنید.

(ب) محاسبهٔ زیر-برنامهٔ تابع‌خود رابرای $199!!/200!!$ بامقدار حاصل‌از سری استرلینگ (بخش ۳.۱۰) بیازمایید.

پاسخ. $\dfrac{199!!}{200!!}=0{,}056348$.

۲۹.۱.۱۰ یا بااستفاده ازبرنامهٔ GAMMA ای که به‌زبان فورترن‌باشد ویا بابهره‌گیری

از زیر-برنامهٔ موجود دیگری برای $x!$ یا $\Gamma(x)$، مقداری از x را که به‌ازای آن $\Gamma(x)$ کمینه است ($۱ \leqslant x \leqslant ۲$) بیابید واین مقدار کمینهٔ $\Gamma(x)$ را تعیین کنید. توجه کنید که هر چند می‌توان مقدار کمینهٔ $\Gamma(x)$ را با دقتی حدود شش رقم معنی‌دار (دقت یگانه) به‌دست آورد، دقت مقدار متناظر x بسیار کمتر است. دلیل وجود این دقت نسبتاً کم چیست؟

۳۰۰۱۰۱۰ تابع گامایی را که به‌صورت انتگرالی مشخص شده است می‌توان به‌کمک کوادراتور گاؤس-لاگر محاسبه کرد. در پیوست ۲، مقداری از $x!$ به‌دست می‌آید که به ازای مقادیر درست x از صفر تا ۱۹، با یک فرمول تا ده رقم اعشار، با مقدار دقیق نظری برابر است. اگر x عدد درستی نباشد، چه پیش می‌آید؟ کوادراتور گاؤس-لاگر را برای محاسبهٔ $x!$، به ازای $x = ۰٫۰(۰٫۱)۲٫۰$ به‌کار برید. خطای مطلق را به صورت تابعی از x جدولبندی کنید.

مقدار آزمونی. به‌ازای $x = ۱٫۳$: $x!_{\text{کوادراتور}} - x!_{\text{دقیق}} = ۰٫۰۰۰۰۳۴$.

۲.۱۰ توابع دی‌گاما و پلی‌گاما

توابع دی‌گاما

از سه تعریفی که در بخش ۱.۱۰ ارائه شد می‌توان پی‌برد که کار کردن مستقیم با مشتقهای تابع گاما یا فاکتوریل نامناسب است. درعوض متداول است که ابتدا با گرفتن لگاریتم طبیعی از تابع فاکتوریل [معادلهٔ (۱.۱۰)]، حاصلضرب به مجموع تبدیل، آنگاه مشتق گرفته شود. یعنی

$$z! = z\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(z+۱)(z+۲)\cdots(z+n)}\, n^z \qquad (۳۶.۱۰)$$

و

$$\ln(z!) = \lim_{n\to\infty} [\ln(n!) + z\ln n - \ln(z+۱) - \ln(z+۲) - \cdots - \ln(z+n)] \qquad (۳۷.۱۰)$$

که در آن لگاریتم حد با حد لگاریتم برابر است. با مشتقگیری نسبت به z داریم

$$\frac{d}{dz}\ln(z!) \equiv \digamma(z) = \lim_{n\to\infty}\left(\ln n - \frac{۱}{z+۱} - \frac{۱}{z+۲} - \cdots - \frac{۱}{z+n}\right) \qquad (۳۸.۱۰)$$

که $\digamma(z)$، یعنی تابع دی‌گاما، را تعریف می‌کند. معادلهٔ (۳۸.۱۰) را می‌توان با استفاده از

تعریف ثابت اویلر- ماشرونی[1]، به‌صورت زیر بازنویسی کرد

$$\mathsf{F}(z)=-\gamma-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)$$

(۳۹.۱۰)

$$=-\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n(n+z)}$$

یکی از کاربردهای معادلهٔ (۳۹.۱۰)، استخراج شکل سری تابع نویمان (بخش ۳.۱۱ را ببینید) است. روشن است که

$$\mathsf{F}(0)=-\gamma=-0/577\ 215\ 664\ 901\ldots\ ^{2} \qquad (40.10)$$

عبارتی، شاید سودمندتر، برای $\mathsf{F}(z)$ در بخش ۳.۱۰ به‌دست خواهیم آورد.

تابع پلی‌گاما

با مشتقگیری پیاپی از تابع دی‌گاما می‌توان تابع پلی‌گاما را به‌دست آورد

$$\mathsf{F}^{(m)}(z)\equiv\frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}}\ln(z!)$$

(۴۱.۱۰)

$$=(-1)^{m+1}\, m!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^{m+1}},\ m=1,2,3,\ldots$$

منحنی $\mathsf{F}(x)$ و $\mathsf{F}'(x)$ درشکل ۱.۱۰ گنجانده شده است. از آنجا که سری معادلهٔ (۴۱.۱۰) تابع زتای ریمان[3] (با $z=0$) را تعریف می‌کند

$$\zeta(m)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{m}} \qquad (42.10)$$

داریم

---

۱. با بخشهای ۲.۵ و ۶.۵ (جلد اول) مقایسه کنید. $\sum_{s=1}^{n} s^{-1}$ را اضافه و کم کنید.

۲. γ تا ۱۲۷۱ رقم اعشار را نات [Knuth,D.E., *Math.Comp.* **16**,275,(1962)] و تا ۳۵۶۶ رقم اعشار را سوینی [Sweeney,D.W, *Math. Comp.* **17**,170,(1963)] محاسبه کرده‌اند. نکتهٔ جالب اینکه نسبت ۲۲۸/۳۹۵ با دقت شش رقم اعشار برابر γ است.

۳. بخش ۹.۵ (جلد اول). از این سری به‌ازای $z\neq 0$ می‌توان برای تعریف تابع زتای تعمیم یافته استفاده کرد.

$$F^{(m)}(0)=(-1)^{m+1}m!\zeta(m+1),\quad m=1,2,3,\ldots \qquad (۴۳.۱۰)$$

مقادیر توابع پلی‌گاما به‌ازای شناسه‌های عدد درست مثبت، $F^{(m)}(n)$، را می‌توان با استفاده ازمسئلهٔ ۶.۲.۱۰ محاسبه کرد.

برحسب نماد شاید متداولتر Γ داریم

$$\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\ln\Gamma(z)=\frac{d^n}{dz^n}\psi(z)=\psi^{(n)}(z) \qquad (\text{الف}۴۴.۱۰)$$

ازمعادلهٔ (۲۷.۱۰) داریم

$$\psi^{(n)}(z)=F^{(n)}(z-1) \qquad (\text{ب}۴۴.۱۰)$$

بسط مك‌لورن، محاسبه

اکنون می‌توان یکی‌ازبسطهای مك‌لورن را برای $\ln(z!)$ نوشت

$$\ln(z!)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}F^{(n-1)}(0)$$

$$(\text{ج}۴۴.۱۰)$$

$$=-\gamma z+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n}\zeta(n)$$

این سری به‌ازای $|z|<1$ همگراست، به‌ازای $z=x$، گسترهٔ همگرایی عبارت است از $-1<x\leqslant 1$. صورتهای‌دیگر این‌سری درمسئلهٔ ۱۴.۹.۵ آمده‌است. معادلهٔ (۴۴.۱۰ ج) ابزارمناسبی برای محاسبهٔ $z!$ به ازای مقادیر حقیقی یا مختلط z به‌شمار می‌آید، ولی سری استرلینگ (بخش ۳.۱۰) معمولاً بهتراست، علاوه براین‌اکنون جدولی بسیارعالی ازمقادیر تابع گاما به‌ازای شناسه‌های مختلط، براساس استفاده ازسری استرلینگ ورابطهٔ بازگشتی [معادلهٔ (۲۹.۱۰)] دراختیارداریم.[1]

مجموعیابی سریها

ازتوابع دی‌گاما و پلی‌گاما می‌توان برای مجموعیابی سریها نیز استفاده کرد. اگر جملهٔ عمومی سری به‌صورت یك کسر گویا باشد (که در آن بزرگترین توان شاخص صورت، دست کم دو واحد کمتر ازبزرگترین توان‌شاخص درمخرج باشد)، می‌توان آن‌رابه کمك‌روش کسرهای جزئی تبدیل کرد (با بخش ۸.۱۵ مقایسه کنید). آنگاه سری نامتناهی را می‌توان به‌صورت مجموعی‌متناهی ازتوابع دی‌گاما و پلی‌گاما مشخص کرد. این روش درصورتی

1. *Table of the Gamma Function for Complex Arguments*, **National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series No. 34.**

سودمند می‌افتد که جدولهای توابع دی‌گاما و پلی‌گاما را دراختیار داشته‌باشیم. این‌گونه جدولها ونمونه‌هایی ازمجموعیابی سریها درفصل ۶کتاب AMS-55 داده شده‌است.

مثال ۱.۲.۱۰ ثابت کاتالان

ثابت کاتالان، در مسئلهٔ ۲۲.۲.۵، یا $\beta(۲)$ بخش ۹.۵ (جلد اول) از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$K=\beta(۲)=\sum_{k=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^k}{(۲k+۱)^۲} \qquad (۴۴.۱۰\text{د})$$

باگروهبندی جملات مثبت ومنفی به‌طورمجزا وباشروع‌کردن ازشاخص یك [برای‌آنکه با صورت $\mathsf{F}^{(۱)}$ درمعادلهٔ (۴۱.۱۰) جورباشد]، داریم

$$K=۱+\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(۴n+۱)^۲}-\frac{۱}{۹}-\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۴n+۳)^۲}$$

اکنون بامساوی قراردادن معادله‌های (۴۱.۱۰) و (۴۴.۱۰ب)، خواهیم داشت

$$K=\frac{۸}{۹}+\frac{۱}{۱۶}\mathsf{F}^{(۱)}\left(\frac{۱}{۴}\right)-\frac{۱}{۱۶}\mathsf{F}^{(۱)}\left(\frac{۳}{۴}\right)$$

(۴۴.۱۰ه)

$$=\frac{۸}{۹}+\frac{۱}{۱۶}\psi^{(۱)}\left(۱+\frac{۱}{۴}\right)-\frac{۱}{۱۶}\psi^{(۱)}\left(۱+\frac{۳}{۴}\right)$$

بااستفاده ازمقادیر $\psi^{(۱)}$ مندرج در جدول ۱.۶ کتاب AMS-55، خواهیم داشت

$$K=۰٫۹۱۵\,۹۶۵\,۵۹\ldots$$

این‌محاسبهٔ ثابت‌کاتالان‌را بامحاسبه‌های‌فصل ۵، مجموعیابی‌مستقیم‌توسط‌ماشین ویا اصلاحاتی با استفاده از توابع زتای ریمان و سپس محاسبه‌ای (کوتاهتر) توسط ماشین، مقایسه‌کنید.

مسائل

۱.۲.۱۰ تحقیق‌کنیدکه دوصورت زیر برای تابع دی‌گاما

$$\mathsf{F}(x)=\sum_{r=۱}^{x}\frac{۱}{r}-\gamma$$

و

$$F(x)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{x}{r(r+x)}-\gamma$$

(به‌ازای مقادیر درست مثبت x) باهم برابرند.

۲.۲.۱۰ نشان دهیدکه بسط سری $F(z)$ به‌صورت زیراست

$$F(z)=-\gamma+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\zeta(n)z^{n-1}$$

۳.۲.۱۰ AMS-55 برای بسط سری $\ln(z!)$ عبارتی به‌صورت زیرمی‌دهد

$$\ln(z!)=-\ln(1+z)+z(1-\gamma)+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n[\zeta(n)-1]z^n/n$$

(الف) نشان دهیدکه این‌رابطه به‌ازای $|z|<1$ بامعادلهٔ (۴۴.۱۰ج) سازگاراست.
(ب) گسترهٔ همگرایی این عبارت جدید چیست؟

۴.۲.۱۰ نشان دهیدکه

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\pi z}{\sin\pi z}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(2n)}{2n}z^{2n},\quad |z|<1$$

راهنمایی. معادلهٔ (۳۲.۱۰) را به‌کاربرید.

۵.۲.۱۰ تعریف حاصلضرب نامتناهی وایرشتراوس را برای $\ln(z!)$ بنویسید. بدون آنکه مشتق بگیرید، نشان‌دهیدکه این‌تعریف مستقیماً به‌بسط مک‌لورن $\ln(z!)$، معادلهٔ(۴۴.۱۰ج)، می‌انجامد.

۶.۲.۱۰ رابطهٔ تفاضلی زیررا برای تابع پلی‌گاما به‌دست آورید

$$F^{(m)}(z+1)=F^{(m)}(z)+(-1)^m\frac{m!}{(z+1)^{m+1}},\quad m=0,1,2,\ldots$$

۷.۲.۱۰ نشان دهیدکه اگر

$$\Gamma(x+iy)=u+iv$$

آنگاه

$$\Gamma(x-iy)=u-iv$$

این‌عبارت حالت خاصی ازاصل انعکاس شوارتس، بخش ۵.۶ (جلد اول)، است.

۸.۲.۱۰ نماد پوکهامر، $(a)_n$، بنابرتعریف (به‌ازای مقادیر درست n) عبارت است‌از

$$(a)_n = a(a+۱)\cdots(a+n-۱)$$
$$(a)_۰ = ۱$$

(الف) $(a)_n$ را برحسب فاکتوریلها بیان کنید.

(ب) $(d/da)(a)_n$ را برحسب $(a)_n$ وتوابع دی‌گاما تعیین کنید.

پاسخ.
$$\frac{d}{da}(a)_n = (a)_n[F(a+n-۱) - F(a-۱)]$$

(ج) نشان دهیدکه

$$(a)_{n+k} = (a+n)_k \cdot (a)_n$$

۹.۲.۱۰ درستی مقادیرخاص زیررا برای شکل ψ مربوط به‌توابع دی- و پلی‌گاما تحقیق کنید.

$$\psi(۱) = -\gamma$$
$$\psi^{(۱)}(۱) = \xi(۲)$$
$$\psi^{(۲)}(۱) = -۲\xi(۳)$$

۱۰.۲.۱۰ رابطهٔ بازگشتی زیررا برای تابع پلی‌گاما استخراج‌کنید

$$\psi^{(m)}(۱+z) = \psi^{(m)}(z) + (-۱)^m m!/z^{m+۱}, \quad m = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

۱۱.۲.۱۰ تحقیق‌کنید که

(الف) $$\int_۰^\infty e^{-r}\ln r\,dr = -\gamma$$

(ب) $$\int_۰^\infty re^{-r}\ln r\,dr = ۱-\gamma$$

(ج) $$\int_۰^\infty r^n e^{-r}\ln r\,dr = (n-۱)! + n\int_۰^\infty r^{n-۱}e^{-r}\ln r\,dr, \quad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

راهنمایی. درستی‌این‌روابطرا می‌توان‌ازطریق انتگرالگیری جزءبه‌جزء، سه‌جزئی، یا مشتقگیری ازصورت انتگرالی $n!$ نسبت‌به n تحقیق‌کرد.

۱۲.۲.۱۰ تابع‌موجهای نسبیتی دیراك شامل ضرایبی نظیر $[۲(۱-\alpha^۲Z^۲)^{۱/۲}]!$ برای هیدروژن است، کــه در آن α، ثابت ساختار ریز، برابر ۱/۱۳۷ و Z عدد اتمی است. $[۲(۱-\alpha^۲Z^۲)^{۱/۲}]!$ را دریك سری ازتوانهای $\alpha^۲Z^۲$ بسط دهید.

۱۳.۲.۱۰ توصیف کوانتوم مکانیکی ذره‌ای دریك میدان کولنی مستلزم دانستن فاز تابع فاکتوریل مختلط است. فاز $(1+ib)!$ را به‌ازای مقادیر کوچك b تعیین کنید.

۱۴.۲.۱۰ انرژی کلی که ازیك جسم سیاه تابش می‌شود، ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$u=\frac{8\pi k^4T^4}{c^3h^3}\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}\,dx$$

نشان دهید انتگرال موجود در این عبارت با $3!\,\zeta(4)$، $[\zeta(4)=\pi^4/90=1.0823\ldots]$، برابر است. نتیجهٔ نهایی، قانون استفان-بولتزمن است.

۱۵.۲.۱۰ به‌عنوان تعمیم نتیجهٔ مسئلهٔ ۱۴.۲.۱۰، نشان دهید که

$$\int_0^\infty \frac{x^s dx}{e^x-1}=s!\,\zeta(s+1),\quad \mathcal{R}(s)>0$$

۱۶.۲.۱۰ چگالی انرژی نوترینو (توزیع فرمی) درآغاز پیدایش عالم ازرابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\rho_\nu=\frac{4\pi}{h^3}\int_0^\infty \frac{x^3}{\exp(x/kT)+1}\,dx$$

نشان دهید که

$$\rho_\nu=\frac{7\pi^5}{30h^3}(kT)^4$$

۱۷.۲.۱۰ ثابت کنید که

$$\int_0^\infty \frac{x^s dx}{e^x+1}=s!(1-2^{-s})\zeta(s+1),\quad \mathcal{R}(s)>0$$

مسائل ۱۵.۲.۱۰ و ۱۷.۲.۱۰ در واقع تبدیل انتگرالی ملین را تشکیل می‌دهند (با بخش ۱.۱۵ مقایسه کنید).

۱۸.۲.۱۰ ثابت کنید که

$$\psi^{(n)}(z)=(-1)^{n+1}\int_0^\infty \frac{t^n e^{-zt}}{1-e^{-t}}\,dt,\quad \mathcal{R}(z)>0$$

۱۹.۲.۱۰ بااستفاده ازتوابع دی ـ وپلی‌گاما، جمع سریهای زیررا به‌دست آورید

(الف) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$، (ب) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$.

یادآوری. برای محاسبهٔ توابع دی‌گامای موردنیاز می‌توانید ازمسئلهٔ ۶.۲.۱۰ بهره گیرید.

۲۰.۲.۱۰ نشان دهیدکه

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+a)(n+b)}=\frac{1}{(b-a)}\{\digamma(b)-\digamma(a)\}$$

$$=\frac{1}{(b-a)}\{\psi(1+b)-\psi(1+a)\}$$

$a\neq b$، و a و b هیچیك عدد درست‌منفی نیستند. مقایسهٔ این مجموعیابی باانتگرال متناظر زیر جالب خواهدبود

$$\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{b-a}\{\ln(1+b)-\ln(1+a)\}$$

رابطهٔ بین $\psi(x)$ [یا $\digamma(x)$] و $\ln x$، ازمعادلهٔ (۵۱.۱۰) بخش بعد به‌طورصریح مشخص می‌شود.

۲۱.۲.۱۰ درستی نمایش انتگرال پربندی زیررا برای $\zeta(s)$ تحقیق کنید

$$\zeta(s)=-\frac{(-s)!}{2\pi i}\int_{C}\frac{(-z)^{s-1}}{e^z-1}dz$$

پربندC مانندپربند مربوط به معادلهٔ (۳۵.۱۰)است. نقاط $z=\pm 2n\pi i$، $n=1,2,3,\ldots$، جملگی حذف شده‌اند.

۲۲.۲.۱۰ نشان دهیدکه $\zeta(s)$ درکل صفحهٔ مختلط متناهی تحلیلی است، مگردر $s=1$ که درآن دارای یك‌قطب ساده باماندهٔ $+1$ است.

راهنمایی. ازنمایش انتگرال پربندی بهره‌گیرید.

۲۳.۲.۱۰ ازامکانات برنامهٔ FORTRAN IV در مورد متغیرهای مختلط بهره‌گیرید و $\mathcal{R}(1+ib)!$، $\mathcal{I}(1+ib)!$، $|(1+ib)!|$، وفاز$(1+ib)!$رابه‌ازای$b=0.0(0.1)1.0$ محاسبه‌کنید. فاز $(1+ib)!$ را برحسب b ترسیم‌کنید.

راهنمایی. می‌توانید ازمسئلهٔ ۳.۲.۱۰ رهیافت مناسبی بگیرید. لازم است‌که $\zeta(n)$ را محاسبه‌کنید.

۳.۱۰ سری استرلینگ

محاسبهٔ $\ln(z!)$ به‌ازای مقادیر بزرگ z (در مکانیك آماری) و محاسبه‌های عددی به‌ازای مقادیر غیرعدد درست z، مستلزم یك بسط سری برای $\ln(z!)$ برحسب توانهای منفی z است. شاید روش تندترین کاهش (بخش ۴.۷، جلد اول) بهترین شیوهٔ استخراج چنین بسطی باشد. درروش زیر که کاملا مستقیم است، وبا یك فرمول انتگرالگیری عددی شروع می‌شود، به‌اطلاعاتی درمورد انتگرالگیری پربندی نیازی نیست.

استخراج به‌کمك فرمول انتگرالگیری اویلر- مك‌لورن

فرمول اویلر- مك‌لورن برای محاسبهٔ انتگرال معین[1] عبارت‌است‌از

$$\int_{0}^{n} f(x)dx=\frac{1}{2}f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+\frac{1}{2}f(n)$$

$$-b_2[f'(n)-f'(0)]-b_4[f'''(n)-f'''(0)]-\cdots \qquad (۴۵.۱۰)$$

که درآن b_{2n} با رابطهٔ زیر به‌اعداد برنولی B_{2n} مربوط‌می‌شود (با بخش ۹.۵ مقایسه کنید)

$$(2n)!b_{2n}=B_{2n} \qquad (۴۶.۱۰)$$

$$B_0=1, \qquad B_6=\frac{1}{42}$$

$$B_2=\frac{1}{6}, \qquad B_8=-\frac{1}{30} \qquad (۴۷.۱۰)$$

$$B_4=-\frac{1}{30}, \qquad B_{10}=\frac{5}{66}, \ldots$$

با بهره‌گیری ازمعادلهٔ (۴۵.۱۰) درمورد انتگرال معین زیر

$$\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{(z+x)^2}=\frac{1}{z} \qquad (۴۸.۱۰)$$

(به‌ازای مقداری از z که روی محورحقیقی منفی واقع نباشد)، خواهیم داشت

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{2z^2}+\digamma^{(1)}(z)-\frac{2!b_2}{z^3}-\frac{4!b_4}{z^5}-\cdots \qquad (۴۹.۱۰)$$

---

۱. این فرمول به‌کمك انتگرالگیری متوالی جزء‌به‌جزء به‌دست می‌آید (بخش ۹.۵،جلداول).

علت به کارگیری معادلهٔ (۴۸.۱۰) نیز همین امر است. از محاسبهٔ اویلر- مك لورن، کمیت $\mathbf{F}^{(1)}(z)$ که برابر $d^2\ln(z!)/dz^2$ است، به‌دست می‌آید.

بااستفاده از (۴۶.۱۰) وحل آن برحسب $\mathbf{F}^{(1)}(z)$ داریم

$$\mathbf{F}^{(1)}(z)=\frac{d}{dz}\mathbf{F}(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{2z^2}+\frac{B_2}{z^3}+\frac{B_4}{z^5}+\dots$$

(۵۰.۱۰)

$$=\frac{1}{z}-\frac{1}{2z^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}}{z^{2n+1}}$$

ازآنجاکه اعداد برنولی شدیداً واگرا می‌شوند، این سری همگرا نمی‌شود! این سری یك سری نیم‌همگرا یامجانبی‌است‌که علی‌رغم واگراییش برای محاسبه سودمند است (با بخش ۱۰.۵ مقایسه کنید).

با یك بارانتگرالگیری، تابع دی‌گاما را به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{F}(z)=C_1+\ln z+\frac{1}{2z}-\frac{B_2}{2z^2}-\frac{B_4}{4z^4}-\dots$$

(۵۱.۱۰)

$$=C_1+\ln z+\frac{1}{2z}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}}{2nz^{2n}}$$

با انتگرالگیری از معادلهٔ (۵۱.۱۰) نسبت به z، از $z-1$ تا z، سپس میل دادن z به بینهایت، می‌توان نشان‌دادکه C_1، ثابت انتگرالگیری، صفر می‌شود. به‌این ترتیب، عبارت دیگری برای تابع دی‌گاما یافته‌ایم که نسبت به‌معادلهٔ (۳۸.۱۰) معمولاً سودمندتر است.

سری استرلینگ

انتگرال نامعین تابع دی‌گاما [معادلهٔ (۵۱.۱۰)] عبارت است از

$$\ln(z!)=C_2+\left(z+\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{B_2}{2z}+\dots+\frac{B_{2n}}{2n(2n-1)z^{2n-1}}+\dots$$

(۵۲.۱۰)

که درآن C_2 یك ثابت انتگرالگیری دیگراست. برای یافتن C_2، بهتر است از دستورهای دوبرابر لژاندر، که دربخش ۴.۱۰ به‌دست خواهیم آورد، استفاده کنیم

$$z!(z-\frac{1}{2})!=2^{-2z}\pi^{1/2}(2z)! \qquad (۵۳.۱۰)$$

به‌ازای‌مقادیر درست‌مثبت z، این‌رابطه‌را می‌توان‌اثبات‌کرد. این کارمستقیماً بانوشتن $(2z)!$ به‌صورت‌حاصلضرب جمله‌های‌زوج ضرب درحاصلضرب جمله‌های‌فرد واستخراج‌یك‌ضریب

۲ از هر جمله (مسئلهٔ ۵.۳.۱۰) انجام می‌گیرد. با نشاندن معادلهٔ (۵۲.۱۰) در لگاریتم دستور دوبرابر، درمی‌یابیم که $C_۲$ برابر است با

$$C_۲=\frac{۱}{۲}\ln ۲\pi \qquad (۵۴.۱۰)$$

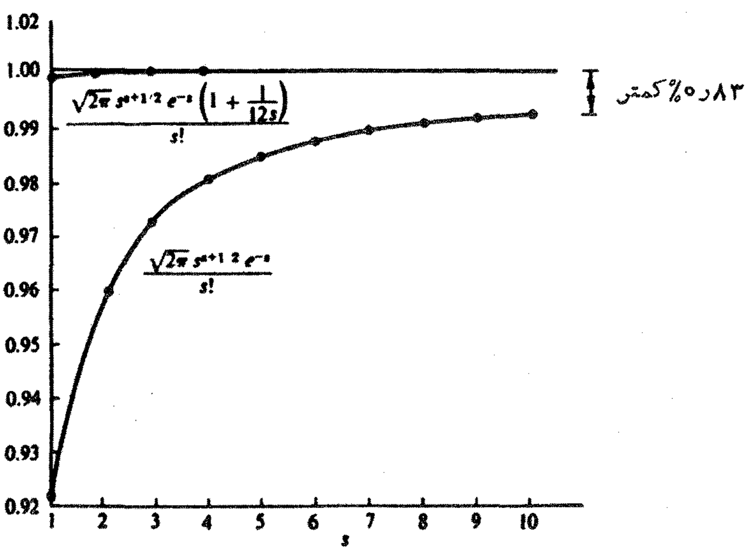
در نتیجه

$$\ln(z!)=\frac{۱}{۲}\ln ۲\pi+\left(z+\frac{۱}{۲}\right)\ln z-z+\frac{۱}{۱۲z}-\frac{۱}{۳۶۰z^۳}+\frac{۱}{۱۲۶۰z^۵}-\cdots \qquad (۵۵.۱۰)$$

بسط مجانبی سری استرلینگ همین‌است. مقدارمطلق خطا کمتر از مقدار مطلق اولین جمله‌ای است که از آن چشمپوشی کرده‌ایم.

ثابتهای انتگرالگیری $C_۱$ و $C_۲$ را می‌توان ازطریق‌مقایسه با اولین جملهٔ بسط سری حاصل ازروش "تندترین کاهش" نیز به‌دست آورد. این‌کار دربخش ۴.۷ (جلد اول) انجام شده است.

برای آنکه میزان دقت چشمگیر سری استرلینگ برای $s!$ بهتر نمایان شود، نسبت اولین جملهٔ تقریب استرلینگ به $s!$ را درشکل ۵.۱۰ ترسیم کرده‌ایم. نسبت اولین جملهٔ بسط به $s!$ ونیز نسبت دوجملهٔ اول بسط به $s!$ جدولبندی شده‌است (جدول ۱.۱۰). استخراج این روابط موضوع مسئلهٔ ۱.۳.۱۰ است.



شکل ۵.۱۰ دقت فرمول استرلینگ.

جدول ۱۰.۱۰

s	$\frac{\sqrt{2\pi}s^{s+1/2}e^{-s}}{s!}$	$\frac{\sqrt{2\pi}s^{s+1/2}e^{-s}[1+1/12s]}{s!}$
۱	۰٫۹۲۲۱۳	۰٫۹۹۸۹۸
۲	۰٫۹۵۹۵۰	۰٫۹۹۹۴۹
۳	۰٫۹۷۲۷۰	۰٫۹۹۹۷۲
۴	۰٫۹۷۹۴۲	۰٫۹۹۹۸۳
۵	۰٫۹۸۳۴۹	۰٫۹۹۹۸۸
۶	۰٫۹۸۶۲۱	۰٫۹۹۹۹۲
۷	۰٫۹۸۸۱۷	۰٫۹۹۹۹۴
۸	۰٫۹۸۹۶۴	۰٫۹۹۹۹۵
۹	۰٫۹۹۰۷۸	۰٫۹۹۹۹۶
۱۰	۰٫۹۹۱۷۰	۰٫۹۹۹۹۸

محاسبهٔ عددی

امکان استفاده از بسط مک‌لورن، معادلهٔ (۴۴.۱۰ ج)، را برای محاسبهٔ عددی تابع فاکتوریل در بخش ۲.۱۰ بیان کردیم. ولی در سری استرلینگ، معادلهٔ (۵۵.۱۰)، به‌ازای xهای بزرگ همگرایی بسیار سریعتر می‌شود. «جدول تابع گاما برای شناسه‌های مختلط»[1] براساس استفاده ازسری استرلینگ به‌ازای $z=x+iy$، $10 \leqslant x \leqslant 9$، تشکیل شده‌است. مقادیر کوچکتر x را می‌توان با رابطهٔ بازگشتی معادلهٔ (۲۹.۱۰)، منظورکرد. اکنون فرض کنید که در برنامه‌ای، در یك بزرگ کامپیوتر رقمی بسیار سریع، به مقدار عددی $x!$ به‌ازای مقدار خاصی از x نیاز باشد. چگونه به‌کامپیوتر برنامه دهیم تا $x!$ را محاسبه کند؟ سری استرلینگ وپس ازآن رابطهٔ بازگشتی یك راه‌حل مناسب است. یکی از راه‌حلهای بهتر هم این است‌که $x!$ را به‌ازای $0 \leqslant x \leqslant 1$ با استفاده از یك سری توانی کوتاه (چند جمله‌ای) برازش دهیم و سپس $x!$ را مستقیماً ازاین برازش تجربی محاسبه‌کنیم. فرض کنیم که به ماشین محاسب مقدار ضرایب چندجمله‌ای داده شده‌باشد. چنین برازشهای چند جمله‌ای را، با دقتهای متفاوت، هستینگز[2] انجام داده است. مثلا

1. *Table of the Gamma Function for Complex Arguments*. National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series No. 34.

2. Hastings, C., Jr., *Apprpximations for Digital Computers*. Princeton, NJ: Princeton University Press (1955).

$$x! = 1 + \sum_{n=1}^{8} b_n x^n + \varepsilon(x) \qquad \text{(الف ۵۶.۱۰)}$$

با

$$\begin{aligned} b_1 &= -0.577191652 & b_5 &= -0.756704078 \\ b_2 &= 0.988205891 & b_6 &= 0.482199394 \\ b_3 &= -0.897056937 & b_7 &= -0.193527818 \\ b_4 &= 0.918206857 & b_8 &= 0.035868343 \end{aligned} \qquad \text{(ب ۵۶.۱۰)}$$

با خطایی به‌مرتبهٔ بزرگی، $|\varepsilon(x)| < 3 \times 10^{-7}$، $0 \leqslant x \leqslant 1$.

این برازش یك برازش کمترین توانهای دوم نیست. هستینگز تکنیکی مبتنی بر چندجمله‌ای چبیشف را، مشابه‌آنچه دربخش ۴.۱۳ برای کمینه‌کردن مقدار بیشینهٔ $|\varepsilon(x)|$ توصیف می‌شود، به‌کارمی‌برد.

مسائل

۱.۳.۱۰ سری استرلینگ را چنان بازنویسی‌کنید‌که به‌جای $\ln(z!)$، کمیت $z!$ را بدهد.

پاسخ. $z! = \sqrt{2\pi}\, z^{z+1/2} e^{-z} \left(1 + \dfrac{1}{12z} + \dfrac{1}{288z^2} - \dfrac{139}{51840z^3} + \cdots\right)$.

۲.۳.۱۰ ازفرمول استرلینگ برای محاسبهٔ $52!$،که برابرتعداد ترتیبهای ممکن اعداد از یك تا ۵۲ است، استفاده‌کنید.

۳.۳.۱۰ با انتگرالگیری ازمعادلهٔ (۵۱.۱۰) از $z-1$ تا z وآنگاه قراردادن $z \to \infty$، ثابت C_1 درسری مجانبی تابع دی‌گامای $\digamma(z)$ را به‌دست آورید.

۴.۳.۱۰ باگرفتن لگاریتم ازدستور دوبرابر، نشان دهیدکه‌ثابت C_2 درفرمول استرلینگ عبارت است از $\frac{1}{2}\ln 2\pi$.

۵.۳.۱۰ ازطریق بسط مستقیم، دستور دوبرابر را به‌ازای $z = n + (1/2)$ تحقیق کنید. n عددی است درست.

۶.۳.۱۰ بدون استفاده ازسری استرلینگ نشان دهیدکه

(الف)
$$\ln(n!)<\int_{1}^{n+1}\ln x\,dx$$

(ب)
$$\ln(n!)>\int_{1}^{n}\ln x\,dx,\quad \text{یك عدددرست } n\geqslant 2$$

توجه کنید که میانگین عددی این دوانتگرال تقریب خوبی‌است برای سری استرلینگ.

۷.۳.۱۰ همگرایی سری زیررا بیازمایید

$$\sum_{p=0}^{\infty}\left[\frac{(p-(1/2))!}{p!}\right]^{2}\times\frac{2p+1}{2p+2}=\pi\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(2p-1)!!(2p+1)!!}{(2p)!!(2p+2)!!}$$

وقتی می‌خواهیم میدان مغناطیسی ناشی‌از یك‌حلقهٔ جریان و محصور درآن را توصیف‌کنیم، این سری پدید می‌آید.

۸.۳.۱۰ نشان دهیدکه

$$\lim_{x\to\infty}x^{b-a}\frac{(x+a)!}{(x+b)!}=1$$

۹.۳.۱۰ نشان دهیدکه

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}n^{1/2}=\pi^{-1/2}$$

۱۰.۳.۱۰ ضرایب دوجمله‌ای $\binom{2n}{n}$ را به‌ازای $n=10,20,30$ تا شش رقم بامعنی محاسبه کنید. مقادیر حاصل را (الف) با یك تقریب سری استرلینگ تا جمله‌های برحسب n^{-1}، (ب) بایك‌محاسبهٔ دقت مضاعف بیازمایید.

پاسخ.
$$\binom{20}{10}=1{,}84756\times10^{5}$$

$$\binom{40}{20}=1{,}37846\times10^{11}$$

$$\binom{60}{30}=1{,}18264\times10^{17}$$

۱۱.۳.۱۰ برنامه (یا زیر-برنامه)ای بنویسیدکه $\log_{10}(x!)$ را مستقیماً توسط سری

استرلینگ محاسبه کند. فرض کنید $x \geqslant ۱۰$. (مقادیر کوچکتر را می‌توان ازطریق رابطهٔ بازگشتی فاکتوریل محاسبه کرد.) کمیت $\log_{۱۰}(x!)$ را برحسب x به‌ازای $x = ۱۰(۱۰)۳۰۰$ جدولبندی کنید. نتیجه‌ای را که به‌دست آورده‌اید درمقایسه با کتاب AMS-55 ویا به‌کمك ضرب مستقیم (به‌ازای $n = ۱۰, ۲۰, ۳۰$) بیازمایید.

مقدار آزمونی. $\log_{۱۰}(۱۰۰!) = ۱۵۷٫۹۷$.

۱۴.۳.۱۰ بااستفاده ازامکانات محاسبهٔ مختلط FORTRAN IV، زیر-برنامه‌ای برای محاسبهٔ $\ln(z!)$ براساس سری استرلینگ به‌ازای مقادیر مختلط z بنویسید. یك آزمون و یك پیام خطای مناسب برای‌حالتهایی‌که z به‌یك عدد درست حقیقی منفی خیلی نزدیك‌شود، دربرنامه منظور کنید. زیر-برنامه‌ای را که نوشته‌اید ازطریق مقایسه با محاسبه‌های دیگر به‌ازای z حقیقی، z موهومی محض و $z = ۱ + ib$ (مسئلهٔ ۲۳.۲.۱۰) بیازمایید.

مقادیر آزمونی. $|(i۰٫۵)!| = ۰٫۸۲۶۱۸$

فاز $(i۰٫۵)! = -۰٫۲۴۴۰۶$

۴.۱۰ تابع بتا

با استفاده ازتعریف انتگرالی [معادلهٔ (۲۵.۱۰)]، حاصلضرب دو فاکتوریل را به‌صورت حاصلضرب دوانتگرال می‌نویسیم. برای آنکه امکان تغییر متغیر فراهم شود انتگرالها را روی‌گستره‌ای متناهی می‌گیریم

$$m!n! = \lim_{a^۲ \to \infty} \int_۰^{a^۲} e^{-u} u^m du \int_۰^{a^۲} e^{-v} v^n dv, \quad \begin{matrix} \Re(m) > -۱ \\ \Re(n) > -۱ \end{matrix} \qquad (\text{۵۷.۱۰الف})$$

به‌جای u کمیت $x^۲$ و به‌جای v کمیت $y^۲$ را می‌نشانیم، خواهیم داشت

$$m!n! = \lim_{a \to \infty} ۴ \int_۰^a e^{-x^۲} x^{۲m+۱} dx \int_۰^a e^{-y^۲} y^{۲n+۱} dy \qquad (\text{۵۷.۱۰ب})$$

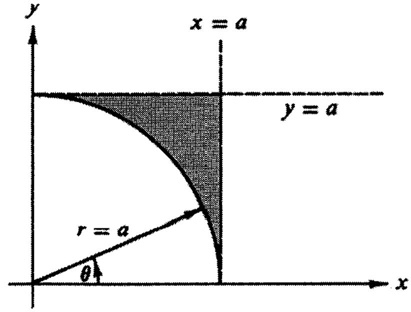
با تبدیل به‌مختصات قطبی‌خواهیم داشت

$$m!n! = \lim_{a \to \infty} ۴ \int_۰^a e^{-r^۲} r^{۲m+۲n+۳} dr \int_۰^{\pi/۲} \cos^{۲m+۱}\theta \sin^{۲n+۱}\theta \, d\theta$$

$$(۵۸.۱۰)$$

$$= (m+n+۱)! \, ۲ \int_۰^{\pi/۲} \cos^{۲m+۱}\theta \sin^{۲n+۱}\theta \, d\theta$$

دراینجا عنصر مساحت $r\,dr\,d\theta$ به‌جای عنصر مساحت دکارتی $dx\,dy$ نشسته است (شکل ۶.۱۰). تساوی‌آخر درمعادلهٔ (۵۸.۱۰) از مسئلهٔ ۱۱.۱.۱۰ حاصل می‌شود.



شکل ۶.۱۰ تبدیل از مختصات دکارتی به‌قطبی.

این انتگرال معین باضریب ۲ را تابع بتا می‌نامند

$$B(m+1,\ n+1) \equiv 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2m+1}\theta \sin^{2n+1}\theta \, d\theta$$

(۵۹.۱۰الف)

$$= \frac{m!n!}{(m+n+1)!} = B(n+1,\ m+1)$$

و هم‌ارز آن، برحسب تابع گاما داریم

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad \text{(۵۹.۱۰ب)}$$

تنها علت برگزیدن $m+1$ و $n+1$ به جای m و n به عنوان شناسه‌های تابع B، حفظ سازگاری با تعریف قراردادی اولیه برای تابع بتاست.

تبدیل ازمختصات دکارتی به‌مختصات قطبی که دراین عملیات انجام‌شد نیاز به‌توجیه دارد. همان‌گونه که از شکل ۶.۱۰ پیداست، ازبخش سایه زده شده چشمپوشی شده است. ولی، مقدار بیشینهٔ انتگرالده دراین ناحیه عبارت است از $e^{-a^2}a^{2m+2n+3}$، که با نزدیک شدن a به‌بینهایت، باچنان شدتی صفرمی‌شود که انتگرال روی ناحیهٔ چشمپوشی‌شده را صفر می‌کند.

صورتهای دیگر انتگرالهای معین

تابع بتا درمحاسبهٔ اشکال‌متنوعی ازانتگرالهای معین‌سودمند است. با جانشانی $t = \cos^2\theta$، معادلهٔ (۵۹.۱۰الف) به‌صورت زیر درمی‌آید[1]

---

۱. قضیهٔ پیچش (همگردش) تبدیل لاپلاس روش دیگری برای استخراج معادلهٔ (۶۰.۱۰الف) ارائه می کند. با مسئلهٔ ۲.۱۱.۱۵ مقایسه کنید.

$$B(m+1, n+1)=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}=\int_0^1 t^m(1-t)^n dt \qquad \text{(۶۰.۱۰ الف)}$$

با نشاندن x^2 به‌جای t، داریم

$$\frac{m!n!}{2(m+n+1)!}=\int_0^1 x^{2m+1}(1-x^2)^n dx \qquad \text{(۶۰.۱۰ ب)}$$

با جانشانی $t=u/(1+u)$ درمعادلهٔ (۶۰.۱۰ الف) به‌شکل مفید دیگری می‌رسیم

$$\frac{m!n!}{(m+n+1)!}=\int_0^\infty \frac{u^m}{(1+u)^{m+n+2}}du \qquad \text{(۶۱.۱۰)}$$

تابع بتا به صورت یك انتگرال معین در دستیابی به نمایشهای انتگرالی تابع بسل (مسئلهٔ ۱۸.۱.۱۱) وتابع فوق هندسی (مسئلهٔ ۷.۵.۱۳) به‌کارمی‌آید.

تحقیق دررابطهٔ $\pi a/\sin \pi a$

اگربگیریم $m=a$ و $n=-a$، $-1<a<1$، آنگاه

$$\int_0^\infty \frac{u^a}{(1+u)^2}du=a!(-a)! \qquad \text{(۶۲.۱۰)}$$

می‌توان به‌کمك انتگرال پربندی نشان‌داد که انتگرال بالا با عبارت $\pi a/\sin \pi a$ برابراست (مسئلهٔ ۱۸.۲.۷، جلد اول)، و به‌این ترتیب به‌روش‌دیگری برای‌دستیابی به‌معادلهٔ (۳۲.۱۰) دست یافته‌ایم.

استخراج دستور دوبرابر لژاندر

بنابر صورتبندی معادلهٔ (۵۹.۱۰) تابع بتا می‌تواند در استخراج دستور دوبرابر، که در بخش قبل مورد استفاده قرار گرفت، مفید واقع شود. با قرار دادن $m=n=z$، $\mathcal{R}(z)>-1$ درمعادلهٔ (۶۰.۱۰ الف) داریم

$$\frac{z!z!}{(2z+1)!}=\int_0^1 t^z(1-t)^z dt \qquad \text{(۶۳.۱۰)}$$

پس‌از جانشانی $t=(1+s)/2$ داریم

$$\frac{z!z!}{(2z+1)!}=2^{-2z-1}\int_{-1}^1 (1-s^2)^z ds$$

$$\text{(۶۴.۱۰)}$$

$$=2^{-2z}\int_0^1 (1-s^2)^z ds$$

علت درستی تساوی اخیر زوج بودن انتگرالده آن است. با محاسبهٔ این انتگرال به‌صورت یك تابع بتا (معادلهٔ ۶۰.۱۰ب)

$$\frac{z!z!}{(2z+1)!}=2^{-2z-1}\frac{z!(-\frac{1}{2})!}{\left(z+\frac{1}{2}\right)!} \qquad (۶۵.۱۰)$$

پس‌از بازآرایی جمله‌ها ویادآوری این‌نکته‌که $(-1/2)!=\pi^{1/2}$ این معادله‌ها را سریعاً به‌یکی ازصورتهای دستور دوبرابر تبدیل می‌کنیم

$$z!\left(z+\frac{1}{2}\right)!=2^{-2z-1}\pi^{1/2}(2z+1)! \qquad (۶۶.۱۰\ \text{الف})$$

با تقسیم بر $z+(1/2)$، به‌صورت دیگری ازدستور دوبرابر دست پیدا می‌کنیم

$$z!\left(z-\frac{1}{2}\right)!=2^{-2z}\pi^{1/2}(2z)! \qquad (۶۶.۱۰\ \text{ب})$$

هرچند در این روش از انتگرالهایی استفاده‌کردیم‌که فقط به‌ازای $\mathcal{R}(z)>-1$ تعریف شده‌اند، اما نتایج حاصل [معادله‌های، (۶۶.۱۰الف) و (۶۶.۱۰ب)] ازطریق تمدیدتحلیلی به‌ازای همهٔ zها برقرار است.[1]

بااستفاده ازنماد فاکتوریل دوگانه (بخش۱.۱۰) معادلهٔ (۶۶.۱۰الف) رابه‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم (با $z=n$، که n عددی درست‌است)

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)!=\pi^{1/2}(2n+1)!!/2^{n+1} \qquad (۶۶.۱۰\ \text{ج})$$

غالباً برای حذف فاکتوریلهای کسرها ازاین رابطه بهره می‌گیرند.

تابع بتای ناکامل

درست به‌همان ترتیب‌که تابع گامای ناکامل وجود دارد (بخش ۵.۱۰)، تابع بتای ناکامل نیزهست

$$B_x(p,q)=\int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt, \quad 0\leqslant x\leqslant 1$$

$$p>0 \qquad (۶۷.۱۰)$$

$$q>0\ (\text{اگر}\ x=1)$$

ناگفته پیداست‌که $B_{x=1}(p,q)$ همان تابع بتای (کامل) منظم، معادلهٔ (۶۰.۱۰)، است. بسط سری‌توانی $B_x(p,q)$ موضوع مسائل۱۸.۲.۵ و ۸.۷.۵ (جلداول)است. درخصوص رابطهٔ این‌تابع با توابع فوق هندسی، دربخش ۵.۱۳ بحث خواهیم‌کرد.

---

۱. اگر $2z$ یك عدد درست منفی باشد، به‌نتیجهٔ معتبر اما مبهم $\infty=\infty$ می‌رسیم.

تابع بتای ناکامل در نظریهٔ احتمال، در هنگام محاسبهٔ احتمال آنکه در n آزمایش مستقل حداکثر k مورد با توفیق قرین باشد[1]، نیز ظاهر می‌شود.

مسائل

۱۰۴۰۱۰ دستور دوبرابر مربوط به‌تابع فاکتوریل را ازطریق انتگرالگیری از $(\sin ۲\theta)^{۲n+۱}=(۲\sin\theta\cos\theta)^{۲n+۱}$ (واستفاده ازتابع بتا) استخراج کنید.

۲۰۴۰۱۰ درستی اتحادهای زیر را دربارهٔ تابع بتا تحقیق کنید

(الف) $$B(a,b)=B(a+۱,b)+B(a,b+۱)$$

(ب) $$B(a,b)=\frac{a+b}{b}B(a,b+۱)$$

(ج) $$B(a,b)=\frac{b-۱}{a}B(a+۱,b-۱)$$

(د) $$B(a,b)B(a+b,c)=B(b,c)B(a,b+c)$$

۳۰۴۰۱۰ (الف) نشان دهید

$$\int_{-۱}^{۱}(۱-x^{۲})^{۱/۲}x^{۲n}dx=\begin{cases}\pi/۲ & n=۰\\ \pi\dfrac{(۲n-۱)!!}{(۲n+۲)!!}, & n=۱,۲,۳,\dots\end{cases}$$

(ب) نشان دهید

$$\int_{-۱}^{۱}(۱-x^{۲})^{-۱/۲}x^{۲n}dx=\begin{cases}\pi & n=۰\\ \pi\dfrac{(۲n-۱)!!}{(۲n)!!}, & n=۱,۲,۳,\dots\end{cases}$$

۴۰۴۰۱۰ نشان دهید

$$\int_{-۱}^{۱}(۱-x^{۲})^{n}dx=\begin{cases}۲^{۲n+۱}\dfrac{n!n!}{(۲n+۱)!}, & n>-۱\\ ۲\dfrac{(۲n)!!}{(۲n+۱)!!}, & n=۰,۱,۲,\dots\end{cases}$$

---

1. Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, 3rd ed., Section VI. 10. New York: Wiley (1968).

۵.۴.۱۰ انتگرال $\int_{-1}^{1}(1+x)^a(1-x)^b dx$ را برحسب تابع بتا محاسبه کنید.
پاسخ. $2^{a+b+1}B(a+1, b+1)$

۶.۴.۱۰ به‌کمك تابع بتا نشان دهید

$$\int_t^z \frac{dx}{(z-x)^{1-\alpha}(x-t)^\alpha} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}, \quad 0<\alpha<1$$

ازاین نتیجه دربخش ۲.۱۶ برای حل معادلهٔ انتگرالی تعمیم‌یافتهٔ آبل بهره می‌گیرند.

۷.۴.۱۰ درمورد انتگرال دیریکله نشان دهید

$$\iint x^p y^q dA = \frac{p!q!}{(p+q+2)!} = \frac{B(p+1, q+1)}{p+q+2}$$

که درآن گسترهٔ انتگرالگیری به محورهای x و y مثبت وخط $x+y=1$ محدود می‌شود.

۸.۴.۱۰ نشان دهید

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2+2xy\cos\theta)}\, dx\, dy = \frac{\theta}{2\sin\theta}$$

حدود θ کدامند؟

راهنمایی. مختصات xy مایل را درنظر بگیرید.
پاسخ. $-\pi<\theta<\pi$.

۹.۴.۱۰ روابط زیررا (با استفاده ازتابع بتا) به‌دست آورید

(الف)
$$\int_0^{\pi/2} \cos^{1/2}\theta\, d\theta = \frac{(2\pi)^{3/2}}{16[(1/4)!]^2}$$

(ب)
$$\int_0^{\pi/2} \cos^n\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^n\theta\, d\theta = \frac{\sqrt{\pi}[(n-1)/2]!}{2(n/2)!}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{به‌ازای } n \text{ فرد} \\[2ex] \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{به‌ازای } n \text{ زوج} \end{cases}$$

۱۰.۴.۱۰ انتگرال $\int_0^1(1-x^4)^{-1/2}dx$ را به‌عنوان یك تابع بتا محاسبه کنید.
پاسخ. $\frac{[(1/4)!]^2\times 4}{(2\pi)^{1/2}} = 1/311028777$.

۱۱.۴.۱۰ فرض کنید

$$J_\nu(z)=\frac{2}{\pi^{1/2}(\nu-\frac{1}{2})!}\left(\frac{z}{2}\right)^2\int_0^{\pi/2}\sin^{2\nu}\theta\cos(z\cos\theta)d\theta,\ \Re(\nu)>-\frac{1}{2}$$

به‌کمك توابع بتا، نشان دهیدکه این تساوی به‌سری بسل زیر تقلیل پیدا می‌کند

$$J_\nu(z)=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{1}{s!(s+\nu)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2s+\nu}$$

که در نتیجه J_ν اولیـه را می‌توان نمایشی انتگرالی برای تابـع بسل J_ν دانست (بخش ۱.۱۱ را ببینید).

۱۲.۴.۱۰ بادرنظر گرفتن چندجمله‌ای وابستهٔ لژاندر $P_m^m(x)=(2m-1)!!(1-x^2)^{m/2}$، بخش ۵.۱۲، نشان دهید

(الف) $$\int_{-1}^{1}[P_m^m(x)]^2dx=\frac{2}{(2m+1)}(2m)!,\quad m=0,1,2,\cdots$$

(ب) $$\int_{-1}^{1}[P_m^m(x)]^2\frac{dx}{1-x^2}=2\times(2m-1)!,\ m=1,2,3,\cdots$$

۱۳.۴.۱۰ نشان دهید

(الف) $$\int_0^1(x^2)^{s+1/2}(1-x^2)^{-1/2}dx=\frac{(2s)!!}{(2s+1)!!}$$

(ب) $$\int_0^1(x^2)^p(1-x^2)^q\,dx=\frac{1}{2}\,\frac{(p-\frac{1}{2})!q!}{(p+q+\frac{1}{2})!}$$

۱۴.۴.۱۰ ذره‌ای به‌جرم m دریك پتانسیل متقارن‌که تساوی $V(x)=A|x|^n$ آن را کاملا توصیف می‌کند درحال حرکت است. انرژی کل ذره عبارت است‌از

$$\frac{1}{2}m(dx/dt)^2+V(x)=E$$

باحل‌این معادله برحسب dx/dt و انتگرالگیری ازآن، دورهٔ تناوب حرکت را بِه‌صورت زیر به‌دست خواهیم آورد

$$\tau=2\sqrt{2m}\int_0^{x_{\max}}\frac{dx}{(E-Ax^n)^{1/2}}$$

که در آن x_{max} یك نقطهٔ عطف کلاسیکی است که ازرابطهٔ $Ax_{max}^n=E$ به‌دست می‌آید. نشان دهید

$$\tau=\frac{2}{n}\sqrt{\frac{2\pi m}{E}}\left(\frac{E}{A}\right)^{1/n}\frac{\Gamma(1/n)}{\Gamma(1/n+\frac{1}{2})}$$

۱۵.۴.۱۰ با مراجعه به‌مسئلهٔ ۱۴.۴.۱۰

(الف) حد عبارت زیر را به‌ازای $n\to\infty$ تعیین کنید

$$\frac{2}{n}\sqrt{\frac{2\pi m}{E}}\left(\frac{E}{A}\right)^{1/n}\frac{\Gamma(1/n)}{\Gamma(1/n+\frac{1}{2})}$$

(ب) $\lim_{n\to\infty}\tau$ را ازرفتار انتگرالده، $(E-Ax^n)^{-1/2}$ به‌دست آورید.

(ج) رفتاراین سیستم فیزیکی (چاه پتانسیل)را در $n\to\infty$ بررسی‌کنید. با بررسی این سیستم فیزیکی حدی، دورهٔ تناوب را تعیین کنید.

۱۶.۴.۱۰ نشان دهید که

$$\int_0^\infty\frac{\sinh^\alpha x}{\cosh^\beta x}dx=\frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha+1}{2},\ \frac{\beta-\alpha}{2}\right),\quad -1<\alpha<\beta$$

راهنمایی. قرار دهید $\sinh^2 x=u$.

۱۷.۴.۱۰ چگالی احتمال توزیع بتا درنظریهٔ احتمال به‌این قراراست

$$f(x)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

که در آن x به‌بازهٔ $(0,1)$ محدود می‌شود. نشان دهیدکه

(الف) $\langle x\rangle=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ (میانگین)

(ب) $\sigma^2\equiv\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2=\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta-1)}$ (واریانس)

۱۸.۴.۱۰ ازعبارت

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\theta d\theta}{\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}\theta d\theta}=1$$

فرمول والیس را برای π به‌دست آورید

$$\frac{\pi}{۲}=\frac{۲\times۲}{۱\times۳}\times\frac{۴\times۴}{۳\times۵}\times\frac{۶\times۶}{۵\times۷}\times\cdots$$

۱۹.۴.۱۰ تابع بتا $B(p, q)$ را به‌ازای ۰٫۲(۰٫۱)۱٫۰ $=p, q$ (p و q مستقل از یکدیگر) جدولبندی کنید.

مقدار آزمونی. $B(۱٫۳, ۱٫۷)=۰٫۴۰۷۷۴$.

۲۰.۴.۱۰ (الف) زیر-برنامه‌ای بنویسید که تابع ناکامل $B_x(p, q)$ را محاسبه کند. به‌ازای $۰٫۵<x\leqslant ۱$ پی می‌برید که استفاده از رابطهٔ زیر مناسبتر است

$$B_x(p, q)=B(p, q)-B_{۱-x}(q, p)$$

(ب) $B_x(۳/۲, ۳/۲)$ را جدولبندی کنید. نتایج حاصل را درچندین نقطه با استفاده از کوادراتور گاؤس-لژاندر بیازمایید.

۵.۱۰ توابع گامای ناکامل و توابع مربوط به‌آنها

با تعمیم تعریف اویلر برای تابع گاما [معادلهٔ (۵.۱۰)]، توابع گامای ناکامل را از طریق انتگرالهای با حد متغیر تعریف می‌کنیم

$$\gamma(a, x)=\int_{۰}^{x}e^{-t}t^{a-۱}dt,\ \ \Re(a)>۰$$

(۶۸.۱۰)

$$\Gamma(a, x)=\int_{x}^{\infty}e^{-t}t^{a-۱}dt$$

روشن است که این دو تابع به‌هم مربوط‌اند، زیرا

$$\gamma(a, x)+\Gamma(a, x)=\Gamma(a) \qquad (۶۹.۱۰)$$

انتخاب $\gamma(a, x)$ یا $\Gamma(a, x)$ صرفاً به‌مناسبت مطلب بستگی دارد. اگر پارامتر a عدد درست مثبتی باشد، می‌توان ازمعادله‌های (۶۸.۱۰) به‌طور کامل انتگرال گرفت. در نتیجه

$$\gamma(n, x)=(n-۱)!\left(۱-e^{-x}\sum_{s=۰}^{n-۱}\frac{x^s}{s!}\right)$$

(۷۰.۱۰)

$$\Gamma(n,x)=(n-۱)!e^{-x}\sum_{s=۰}^{n-۱}\frac{x^s}{s!},\quad n=۱,۲,\ldots$$

برای مقادیر غیردرست a، یك بسط سری توانی از $\gamma(a,x)$ به‌ازای مقادیر کوچك x ویك بسط مجانبی‌از $\Gamma(a, x)$ را دربخشهای ۷.۵ و ۱۰.۵ ، جلد اول، انجام داده‌ایم.

$$\gamma(a, x)=x^a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!(a+n)}$$

$$\Gamma(a, x)=x^{a-1}e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-1)!}{(a-1-n)!} \times \frac{1}{x^n} \qquad (۷۱.۱۰)$$

$$=x^{a-1}e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n-a)!}{(-a)!} \times \frac{1}{x^n}$$

این توابع گامای ناکامل را می‌توان برحسب توابع فوق‌هندسی همشار نیز باظرافت تمام بیان‌کرد (با بخش ۶.۱۳ مقایسه‌کنید).

انتگرالهای نمایی

هرچند درمسائل فیزیکی به‌ندرت به‌تابع گامای ناکامل $\Gamma(a,x)$ به‌صورت کلی‌آن [معادلهٔ (۶۸.۱۰)] برمی‌خوریم، ولی یکی‌ازصورتهای خاص‌آن کاملا متداول وبسیارسودمند است. انتگرال‌نمایی بنابرتعریف عبارت است از[1]

$$-Ei(-x) \equiv \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt = E_1(x) \qquad (۷۲.۱۰)$$

(شکل ۷.۱۰ را ببینید). برای یافتن بسط سری به‌ازای مقادیر کوچك x به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم. داریم

$$E_1(x)=\Gamma(0, x) \qquad (۷۳.۱۰)$$

$$=\lim_{a\to 0} [\Gamma(a)-\gamma(a, x)]$$

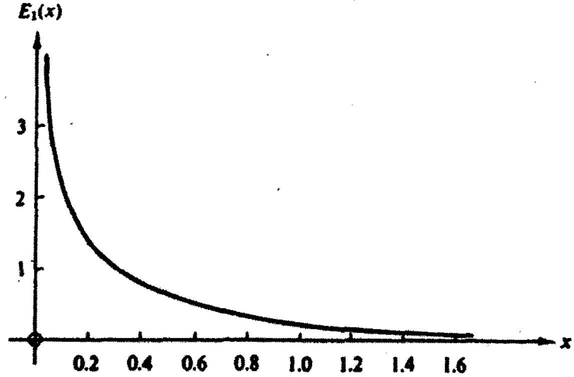
دراینجا باید دقت زیادی مبذول داریم، زیرا انتگرال معادلهٔ (۷۲.۱۰) به‌ازای $x\to 0$ به صورت لگاریتمی واگرا می‌شود. جملهٔ واگرا را می‌توانیم، به کمك یك بسط سری برای $\gamma(a,x)$، تجزیه‌کنیم

$$E_1(x)=\lim_{a\to 0}\left[\frac{a\Gamma(a)-x^a}{a}\right]-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n\times n!} \qquad (۷۴.۱۰)$$

با استفاده‌از قاعدهٔ هوپیتال (مسئلهٔ ۹.۶.۵، جلد اول) وعبارت

---

۱. ظهور دو علامت منفی در $-Ei(-x)$ یك کج‌سلیقگی تاریخی است. کتاب AMS-55 این انتگرال را با $E_1(x)$ نشان می‌دهد.



شکل ۷.۱۰ انتگرال نمایی $E_1(x) = -Ei(-x)$.

$$\frac{d}{da}\{a\Gamma(a)\} = \frac{d}{da}a! = \frac{d}{da}e^{\ln(a!)} = a!\mathsf{F}(a) \tag{الف۷۴.۱۰}$$

و آنگاه با بهره‌گیری ازمعادلهٔ (۴۰.۱۰)[1]، خواهیم داشت

$$E_1(x) = -\gamma - \ln x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n \times n!} \tag{۷۵.۱۰}$$

که به‌ازای مقادیر کوچك x مفید است. دربخش ۱۰.۵ یك بسط مجانبی داده شده است.

صورتهای خاص دیگری که به‌انتگرال نمایی مربوط می‌شوند عبارت‌اند از انتگرال سینوسی و انتگرال کسینوسی (شکل ۸.۱۰) و انتگرال لگاریتمی، که بنا برتعریف به‌صورت زیرند[2]

$$si(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

$$Ci(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt \tag{۷۶.۱۰}$$

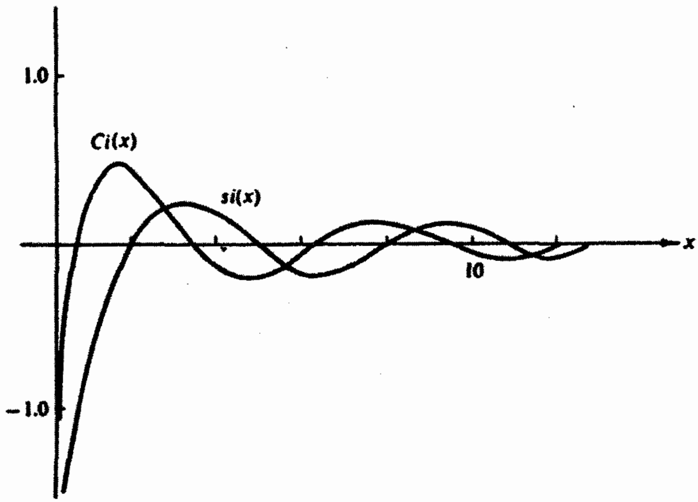
$$li(x) = \int_0^x \frac{du}{\ln u} = Ei(\ln x)$$

با تبدیل ازشناسه‌های حقیقی به‌شناسه‌های موهومی، می‌توانیم نشان دهیم که

---

۱. $dx^a/da = x^a \ln x$.

۲. یك انتگرال سینوسی دیگر با رابطهٔ $Si(x) = si(x) + \pi/2$ تعریف می‌شود.



شکل ۸۰۱۰ انتگرالهای سینوسی و کسینوسی.

$$si(x)=\frac{1}{2i}[Ei(ix)-Ei(-ix)]=\frac{1}{2i}[E_1(ix)-E_1(-ix)] \qquad (۷۷۰۱۰)$$

و

$$Ci(x)=\frac{1}{2}[Ei(ix)+Ei(-ix)]=-\frac{1}{2}[E_1(ix)+E_1(-ix)], \quad |\arg x|<\frac{\pi}{2} \qquad (۷۸۰۱۰)$$

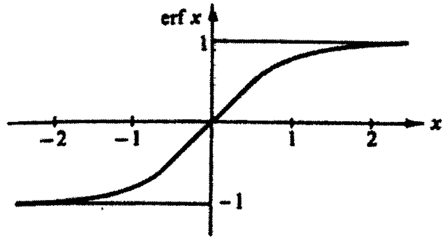
برای آنکه نشان دهیم رابطهٔ بین این انتگرالها دقیقاً مشابه رابطه‌ای است که بین e^{ix}، $\cos x$، و $\sin x$ وجود دارد دورابطهٔ بالا را باهم جمع می‌کنیم، خواهیم داشت

$$Ei(ix)=Ci(x)+i\,si(x) \qquad (۷۹۰۱۰)$$

برحسب E_1، داریم

$$E_1(ix)=-Ci(x)+i\,si(x)$$

بسطهای مجانبی $Ci(x)$ و $si(x)$ دربخش ۱۰۰۵ ،جلد اول، انجام شده‌اند. بسطهای سری توانی حول مبدأ برای $Ci(x)$، $si(x)$، و $li(x)$ را می‌توان به‌کمك بسط انتگرال نمایی $E_1(x)$، یا ازطریق انتگرالگیری مستقیم مسئلهٔ ۱۰۰۵۰۱۰ به‌دست آورد. انتگرالهای نمایی، سینوسی، و کسینوسی درفصل ۵ کتاب AMS-55 جدولبندی شده‌اند.



شکل ۹.۱۰ تابع خطا، $\operatorname{erf} x$.*

انتگرالهای خطا

انتگرالهای خطای زیر، بخش ۱۰.۵ (شکل ۹.۱۰)

$$\operatorname{erf} z=\frac{۲}{\sqrt{\pi}}\int_{۰}^{z}e^{-t^{۲}}dt$$

(۸۰.۱۰ الف)

$$\operatorname{erfc} z=۱-\operatorname{erf} z=\frac{۲}{\sqrt{\pi}}\int_{z}^{\infty}e^{-t^{۲}}dt$$

طوری بهنجارشده‌اند که $\operatorname{erf}\infty=۱$. صورت مجانبی‌این‌انتگرالها را درآن بخش‌مطرح کردیم. از صورت کلی انتگرالده‌ها ومعادلهٔ (۶.۱۰)، انتظار داریم‌که $\operatorname{erf} z$ و $\operatorname{erfc} z$ را بتوان به‌صورت توابع گامای ناکامل با $a=۱/۲$ نوشت. این رابطه‌ها عبارت‌اند از

$$\operatorname{erf} z=\pi^{-۱/۲}\gamma(\tfrac{۱}{۲}, z^{۲})$$

(۸۰.۱۰ ب)

$$\operatorname{erfc} z=\pi^{-۱/۲}\Gamma(\tfrac{۱}{۲}, z^{۲})$$

بسط سری توانی $\operatorname{erf} z$ مستقیماً ازمعادلهٔ (۷۱.۱۰) به‌دست می‌آید.

مسائل

۱.۵.۱۰ (الف) ازطریق انتگرالگیری جزء‌به‌جزء پیاپی، (ب) ازطریق تبدیل به معادلهٔ (۷۱.۱۰)، نشان دهید

$$\gamma(a, x)=e^{-x}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(a-۱)!}{(a+n)!}x^{a+n}$$

۲.۵.۱۰ نشان دهید

* منظور از کوته‌نوشت erf ، تابع خطاست.

$$\frac{d^m}{dx^m}[x^{-a}\gamma(a, x)] = (-1)^m x^{-a-m}\gamma(a+m, x) \quad \text{(الف)}$$

$$\frac{d^m}{dx^m}[e^x\gamma(a, x)] = e^x \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-m)}\gamma(a-m, x) \quad \text{(ب)}$$

۳.۵.۱۰ نشان دهیدکه $\gamma(a, x)$ و $\Gamma(a, x)$ در روابط بازگشتی زیرصدق می‌کنند

$$\gamma(a+1, x) = a\gamma(a, x) - x^a e^{-x} \quad \text{(الف)}$$

$$\Gamma(a+1, x) = a\Gamma(a, x) + x^a e^{-x} \quad \text{(ب)}$$

۴.۵.۱۰ پتانسیل ناشی ازیك الکترون $1s$ هیدروژن (مسئلۀ ۶.۸.۱۲ را ببینید) از رابطۀ زیر به‌دست می‌آید

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a_0}\left\{\frac{1}{2r}\gamma(3, 2r) + \Gamma(2, 2r)\right\}$$

(الف) به‌ازای $r \ll 1$ نشان دهید

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a_0}\left\{1 - \frac{2}{3}r^2 + \dots\right\}$$

(ب) به‌ازای $r \gg 1$ نشان دهید

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a_0} \times \frac{1}{r}$$

دراینجا r عبارت ازیك عددمطلق، یعنی تعداد شعاعهای بور، a_0، خواهد بود.

یادآوری. برای محاسبه به ازای مقادیر متوسط r، معادله‌های (۷۰.۱۰) مناسب‌اند.

۵.۵.۱۰ پتانسیل یك الکترون $2p$ هیدروژن ازرابطۀ زیر بەدست می‌آید (مسئلۀ ۷.۸.۱۲ را ببینید)

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q}{24a_0}\left\{\frac{1}{r}\gamma(5, r) + \Gamma(4, r)\right\}$$

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q}{120a_0}\left\{\frac{1}{r^3}\gamma(7, r) + r^2\Gamma(2, r)\right\}P_2(\cos\theta)$$

دراینجا r برحسب واحد a_0، شعاع بور، بیان می‌شود. $P_2(\cos\theta)$ یك‌چندجمله‌ای لژاندر است (بخش ۱.۱۲ را ببینید).

(الف) به‌ازای $r \ll 1$، نشان دهید

$$V(\mathbf{r})=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{۰}}\times\frac{q}{a_{۰}}\left\{\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۱۲۰}r^{۲}P_{۲}(\cos\theta)+\cdots\right\}$$

(ب) بدازای $r\gg ۱$، نشان دهید

$$V(\mathbf{r})=\frac{۱}{۴\pi\varepsilon_{۰}}\times\frac{q}{a_{۰}r}\left\{۱-\frac{۶}{r^{۲}}P_{۲}(\cos\theta)+\cdots\right\}$$

۶.۵.۱۰ ثابت کنید که انتگرال نمایی عبارت است از

$$\int_{x}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt=-\gamma-\ln x-\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n}x^{n}}{n\times n!}$$

γ ثابت اویلر-ماشرونی است.

۷.۵.۱۰ نشان دهید که $E_{۱}(z)$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$E_{۱}(z)=e^{-z}\int_{۰}^{\infty}\frac{e^{-zt}}{۱+t}dt$$

همچنین نشان دهید که باید شرط $|\arg z|\leqslant\pi/۲$ را وضع کنیم.

۸.۵.۱۰ تابع زیر با یك تغییرمتغیر ساده بدانتگرال نمایی [معادلهٔ (۷۲.۱۰)] مربوط‌می‌شود

$$E_{n}(x)=\int_{۱}^{\infty}\frac{e^{-xt}}{t^{n}}dt$$

نشان دهید که $E_{n}(x)$ دررابطهٔ بازگشتی زیرصدق می کند

$$E_{n+۱}(x)=\frac{۱}{n}e^{-x}-\frac{x}{n}E_{n}(x),\ \ n=۱,۲,۳,\ \cdots$$

۹.۵.۱۰ برای $E_{n}(x)$ که‌درمسئلهٔ ۸.۵.۱۰ تعریف‌شد، نشان‌دهید که $E_{n}(۰)=۱/(n-۱)$، $n>۱$.

۱۰.۵.۱۰ سریهای توانی زیر را بسط دهید

(الف) $$si(x)=-\frac{\pi}{۲}+\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^{n}x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)(۲n+۱)!}$$

(ب) $$Ci(x)=\gamma+\ln x+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n}x^{۲n}}{۲n(۲n)!}$$

۱۱۰۵۰۱۰ تحلیل رفتار یك آنتن‌خطی با تغذیهٔ مرکزی به‌عبارت زیرمی‌انجامد

$$\int_{\circ}^{x} \frac{1-\cos t}{t}\, dt$$

نشان دهید که این‌عبارت برابر است با $\gamma+\ln x-Ci(x)$.

۱۲۰۵۰۱۰ با استفاده ازرابطهٔ

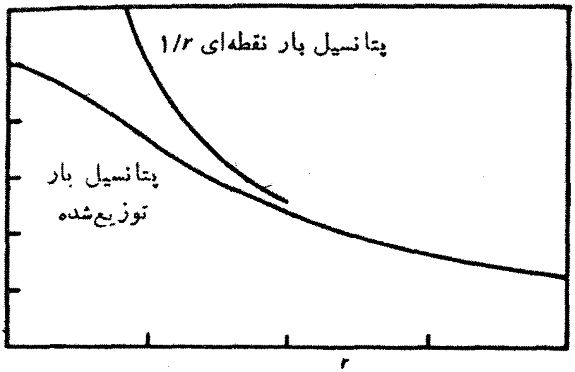
$$\Gamma(a)=\gamma(a, x)+\Gamma(a, x)$$

نشان دهید که اگر $\gamma(a, x)$ در روابط مسئلهٔ ۲.۵.۱۰ صدق کند، آنگاه $\Gamma(a, x)$ نیز باید درهمان روابط صدق کند.

۱۳۰۵۰۱۰ (الف) زیر-برنامه‌ای بنویسید که توابع گامای ناکامل $\gamma(n, x)$ و $\Gamma(n, x)$ را به‌ازای n، عدد درست مثبت محاسبه کند. $\Gamma(n, x)$ را در چند نقطه به‌کمك کوادراتور گاؤس-لاگر، پیوست ۲، بیازمایید.

(ب) $\gamma(n, x)$ و $\Gamma(n, x)$ را به ازای ۰ر۱(۱ر۰)۰ر۰ $=x$ و $n=۱, ۲, ۳$ جدولبندی کنید.

۱۴۰۵۰۱۰ پتانسیل ناشی‌از الکترون $1s$ اتم هیدروژن را محاسبه کنید (مسئلهٔ ۴.۵.۱۰؛ شکل ۱۰.۱۰). $V(r)/(q/4\pi\varepsilon_{\circ}a_{\circ})$ را به‌ازای ۰ر۴(۱ر۰)۰ر۰ $=x$ جدولبندی کنید. محاسبات خود را به‌ازای $r \ll 1$ و به‌ازای $r \gg 1$ از طریق محاسبهٔ صورتهای حدی مسئلهٔ ۴.۵.۱۰ بیازمایید.



شکل ۱۰۰۱۰ پتانسیل بارتوزیع شدهٔ ناشی‌از یك‌الکترون $1S$ اتمهیدروژن؛ مسئلهٔ ۱۴.۵.۱۰.

۱۵.۵.۱۰ با استفاده از معادله‌های (۲۰۴.۵) و (۷۵.۱۰)، انتگرال نمایی $E_1(x)$ را به‌ازای (الف) ۱٫۰(۰٫۲)۰٫۲ = x، (ب) ۱۰٫۰(۲٫۰)۶٫۰ = x محاسبه کنید. برنامهٔ محاسباتی مربوط را خودتان بنویسید، ولی هرمقدار را با استفاده از یك زیر-برنامهٔ موجود درحافظهٔ ماشین (درصورت موجود بودن) بیازمایید. همچنین محاسبات خود را در هر نقطه با یك کوادراتور گاؤس-لاگر بیازمایید.

پی می‌برید که سری توانی سریعاً همگرا می‌شود و به‌ازای مقادیر کوچك x با دقت زیادی همراه است. سری مجانبی، حتی به‌ازای ۱۰ = x، از دقت نسبتاً کمی برخوردار است.

مقادیرآزمونی. $E_1(۱٫۰) = ۰٫۲۱۹۳۸۴$، $E_1(۱۰٫۰) = ۴٫۱۵۶۹۷ \times ۱۰^{-۶}$.

۱۶.۵.۱۰ دوعبارت مربوط به $E_1(x)$، یکی معادلهٔ (۲۰۴.۵)، یعنی یك سری مجانبی، و دیگری معادلهٔ (۷۵.۱۰)، یعنی یك‌سری توانی همگرا، وسیله‌ای برای محاسبهٔ با دقت زیاد γ، ثابت اویلر-ماشرونی، فراهم می‌کند. با بهره‌گیری ازدقت مضاعف، $E_1(x)$ را ازمعادلهٔ (۲۰۴.۵) به‌دست آورید، سپس γ را با این مقدار $E_1(x)$ ازمعادلهٔ (۷۵.۱۰) محاسبه کنید.

راهنمایی. به‌عنوان یك گزینهٔ مناسب، x را در گسترهٔ ۱۰ تا ۲۰ برگزینید.(گزینش x، حدی بر روی دقت نتایج پدید خواهدآورد.) برای آنکه خطاها را کمینه کنید، در سری متناوب معادلهٔ (۷۵.۱۰)، جمله‌های مثبت ومنفی را مجزا ازهم جمع کنید.

پاسخ. به‌ازای ۱۰ = x و "دقت مضاعف"، $\gamma = ۰٫۵۷۷۲۱۵۶۶$.

مراجع

AMS-55, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series-55, M. Abramowitz and I.A. Stegun, Eds.

فصلهای ۴ تا ۶ این کتاب حاوی داده‌های زیادی دربارهٔ توابع گاما، توابع گامای ناکامل، انتگرالهای نمایی، توابع خطا، و توابع مربوطه است.

Artin, Emil, *The Gamma Function*. Translated by Michael Butler. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1964.

در این کتاب نمایش داده شده است که اگر تابع $f(x)$ هموار (لگا-کوژ) باشد و به ازای $x = n$ برابر $(n-۱)!$ شود، این تابع، تابع گاماست.

Davis, H.T., *Tables of the Higher Mathematical Functions*. Bloomington, Ind.: Principia Press, 1933.

جلد ۱ این کتاب حاوی داده‌های گسترده‌ای دربارهٔ تابع گاما وتوابع پلی‌گاماست.

Luke, Y.L., *The Special Functions and Their Approximations*, Vol. I. New York and London: Academic Press, 1969.

Luke, Y.L., *Mathematical Functions and Their Approximations*, New York: Academic Press, 1975.

این کتاب متممی است روزآمد شده بر کتاب

Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables (AMS_55).

درفصل ۱ تابع گاما مورد بحث قرار می‌گیرد. درفصل ۴ تابع گامای ناکامل و بسیاری از توابع مربوط به‌آنها را مورد بررسی قرارمی‌دهد.

۱۱

توابع بسل

۱.۱۱ توابع نوع اول بسل، $J_\nu(x)$

توابع بسل در مسائل فیزیکی بسیار گوناگونی ظاهر می‌شوند. در بخش ۶.۲، جدا سازی معادلهٔ هلمهولتز یامعادلهٔ موج درمختصات استوانه‌ای به‌معادلهٔ بسل انجامید. دربخش ۷.۱۱ خواهیم‌دید که معادلهٔ هلمهولتز درمختصات قطبی کروی‌نیز به‌صورتی‌ازمعادلهٔ بسل‌می‌انجامد. توابع بسل‌ممکن‌است به‌صورت‌انتگرالی، نمایشهای‌انتگرالی، نیز پدیدارشوند. این‌صورتها ممکن است حاصل تبدیلهای انتگرالی (فصل ۱۵) ویا این روش ظریف ریاضی باشند، که بررسی توابع بسل را باتوابع هنکل، بخش ۴.۱۱، شروع می‌کنند.

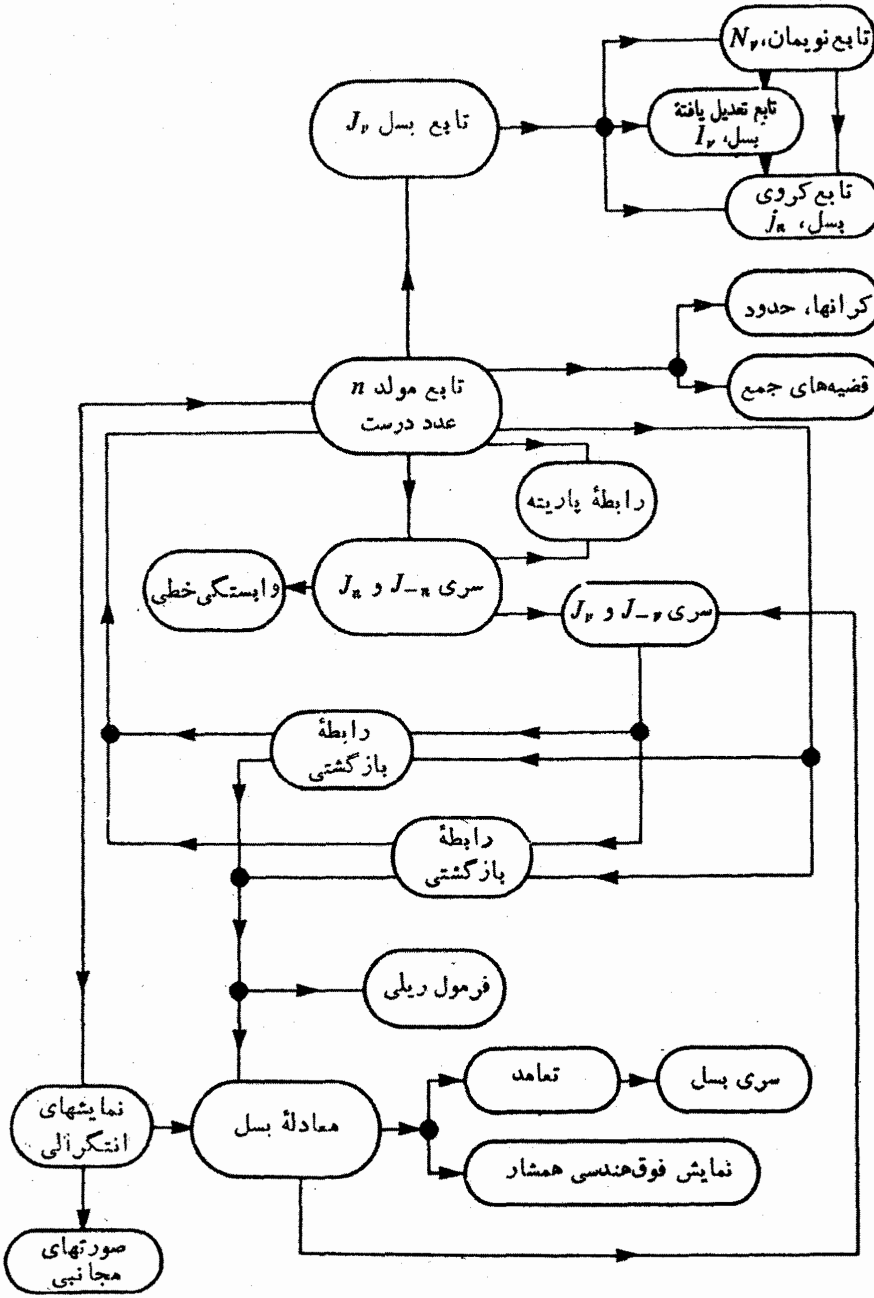
توابع بسل و توابعی‌که باآنها ارتباط تنگاتنگی دارند، **حوزه‌ای غنی در آنالیز** ریاضی تشکیل می‌دهند، که با بسیاری نمایشها، خاصیتهای سودمند وجالب، وروابط متقابل فراوان قرین‌اند. بعضی از این روابط متقابـل‌که دربخش ۱.۱۱ و در بخشهای بعد به‌آنها می‌پردازیم، درشکل ۱.۱۱ جمعبندی شده‌اند. توجه کنیدکه توابع بسل منحصر به‌فصل ۱۱ نیستند. به‌صورتهای مجانبی‌آنها در بخش ۴.۷ و نیز دربخش ۶.۱۱ پرداخته‌ایم. نمایشهای فوق هندسی همشار دربخش ۶.۱۳ خواهندآمد.

تابع مولد، مرتبهٔ درست، $J_n(x)$

هرچند‌توابع بسل عمدتاً به‌عنوان جواب معادله‌های دیفرانسیل اهمیت‌دارند، ولی پرداختن به‌آنها ازرهیافتی‌کاملا متفاوت، یعنی بارهیافت تابع مولد[1]، بهتر و آموزنده‌ترخواهد بود.

---

۱. توابع مولد قبلا در فصل ۵ به‌کار رفته‌انـد. تابع مولد $(1+x)^n$، در بخش ۶.۵، ضرایب دوجمله‌ای را تولید کرد. دربخش ۹.۵، تابع مولد $x(e^x-1)^{-1}$، اعداد برنولی را تولید کرد.



شکل ۱۰۱۱ روابط متقابل تابع بسل.

مزیت این رهیافت، به‌این ترتیب است که در آن بیشتر توجه به‌خود توابع معطوف است تا معادلات دیفرانسیلی که در آنها صدق می‌کنند. خطوط کلی پدیدآمدن تابع بسل و توابع مربوط به‌آن از تابع مولد درشکل ۱.۱۱ نشان داده شده‌است. تابع دومتغیرهٔ زیررا معرفی می‌کنیم

$$g(x,t)=e^{(x/۲)(t-۱/t)} \qquad (۱.۱۱)$$

با بسط این تابع دریك سری لوران (بخش ۵.۶)، داریم

$$e^{(x/۲)(t-۱/t)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n \qquad (۲.۱۱)$$

ضریب t^n، یعنی $J_n(x)$، بنا به‌تعریف تابع نوع اول بسل ازمرتبهٔ درست n است. با بسط نماییها، به ترتیب برحسب $xt/۲$ و $-x/۲t$، حاصلضرب دو سری ملك‌لورن عبارت است از

$$e^{xt/۲}\times e^{-x/۲t}=\sum_{r=۰}^{\infty}\left(\frac{x}{۲}\right)^r\frac{t^r}{r!}\sum_{s=۰}^{\infty}(-۱)^s\left(\frac{x}{۲}\right)^s\frac{t^{-s}}{s!} \qquad (۳.۱۱)$$

به‌ازای یك مقدارمعین s، t^n $(n\geqslant ۰)$ را ازجملهٔ مربوط به $r=n+s$ به‌دست می‌آوریم

$$\left(\frac{x}{۲}\right)^{n+s}\frac{t^{n+s}}{(n+s)!}(-۱)^s\left(\frac{x}{۲}\right)^s\frac{t^{-s}}{s!} \qquad (۴.۱۱)$$

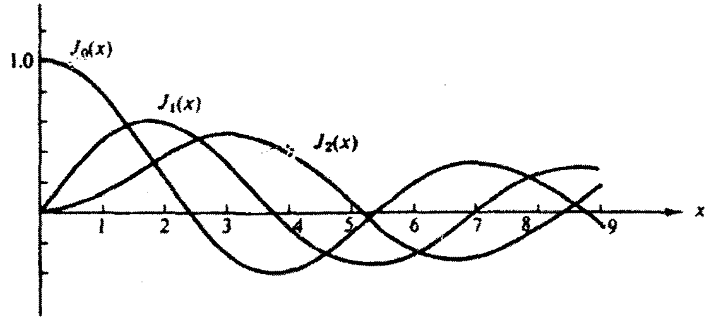
بنابراین ضریب t^n عبارت است از[1]

$$J_n(x)=\sum_{s=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^s}{s!(n+s)!}\left(\frac{x}{۲}\right)^{n+۲s}=\frac{x^n}{۲^n n!}-\frac{x^{n+۲}}{۲^{n+۲}(n+۱)!}+\dots \qquad (۵.۱۱)$$

این صورت سری نمایانگر، رفتارتابع بسل، $J_n(x)$، به‌ازای مقادیر کوچك x است، و محاسبهٔ عددی $J_n(x)$ را میسر می‌سازد. نتایج مربوط به $J_۰$، $J_۱$، و $J_۲$ در شکل ۲.۱۱ نشان داده شده‌است. خطای حاصل از به‌کارگیری تعداد زیادی جمله درمحاسبهٔ عددی، با استفاده ازبخش ۳.۵، نسبت به‌اولین جملهٔ چشمپوشی شده کوچکتر است. مثلاً، اگر $J_n(x)$ را بادقت $\pm۱\%$ بخواهیم، به شرط آنکه نسبت دومین جمله به‌جملهٔ اول (از نظر بزرگی) کوچکتر از ۱% باشد، یا $x<۰٫۲(n+۱)^{۱/۲}$، جملهٔ اول درمعادلهٔ (۵.۱۱) به تنهایی کفایت خواهدکرد. توابع بسل نوسان می‌کنند ولی دوره‌ای نیستند ــ مگر درحد $x\to\infty$ (بخش ۶.۱۱). دامنهٔ $J_n(x)$ ثابت نیست وبه‌صورت مجانبی مانند $x^{-۱/۲}$ کوچك می‌شود.

---

۱. ازمراحلی که به‌این سری انجامید و از مشخصات همگرایی آن باید روشن باشد که این‌سری را می‌توان به‌جای x برای z نیز به‌کاربرد، z عبارت ازهر نقطه ازصفحهٔ مختلط متناهی‌است.



شکل ۲.۱۱ توابع بسل: $J_\circ(x)$، $J_\backslash(x)$، و $J_\Upsilon(x)$.

معادلهٔ (۵.۱۱) عملا به‌ازای $n<\circ$ نیز برقرار است، یعنی

$$J_{-n}(x)=\sum_{s=\circ}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!(s-n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s-n} \qquad (۶.۱۱)$$

که ازطریق تعویض n با $-n$ درمعادلهٔ (۵.۱۱) به‌دست می‌آید. از آنجا که n (دراینجا) یك عدد درست است، به‌ازای $s=\circ,\ldots,(n-1)$ داریم: $(s-n)!\to\infty$. از این‌رو می‌توان سری را از $s=n$ آغاز کرد. از طریق تعویض s با $s+n$، داریم

$$J_{-n}(x)=\sum_{s=\circ}^{\infty}\frac{(-1)^{s+n}}{s!(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s} \qquad (۷.۱۱)$$

بلافاصله ازاین رابطه پی‌می‌بریم که $J_n(x)$ و $J_{-n}(x)$ نسبت به‌هم مستقل نیستند و ربط آنها به‌صورت زیر است

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x) \qquad (n \text{ عدد درست}) \qquad (۸.۱۱)$$

اگر در این عبارتهای سری [معادله‌های (۵.۱۱) و (۶.۱۱)]، n را با ν تعویض کنیم، می‌توانیم ازآنها برای تعریف $J_\nu(x)$ و $J_{-\nu}(x)$ به‌ازای مقادیر غیردرست ν استفاده‌کنیم (با مسئلهٔ ۷.۱.۱۱ مقایسه‌کنید).

روابط بازگشتی

همهٔ روابط بازگشتی $J_n(x)$ و مشتقهای آن را می‌توان از طریق عمل‌کردن روی سری معادلهٔ (۵.۱۱) به‌دست آورد، که این البته به اندکی تیز بینی (و با مقدار زیادی آزمون و خطا) نیاز دارد. تحقیق درستی روابط بازگشتی معلوم، سرراست است (مسئلهٔ ۷.۱.۱۱). دراینجا، بهتراست که آنها را ازتابع مولد $g(x,t)$ به‌دست آوریم. بامشتقگیری جزئی از معادلهٔ (۱.۱۱) نسبت به t، خواهیم داشت

$$\frac{\partial}{\partial t} g(x, t) = \frac{۱}{۲} x\left(۱ + \frac{۱}{t^{۲}}\right) e^{(x/۲)(t-۱/t)}$$

(۹.۱۱)

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n(x) t^{n-۱}$$

و با نشاندن از معادلهٔ (۲.۱۱) به‌جای عبارت نمایی، ومساوی قرار دادن ضرایب توانهای مساوی t[۱]، خواهیم داشت

$$J_{n-۱}(x) + J_{n+۱}(x) = \frac{۲n}{x} J_n(x) \qquad (۱۰.۱۱)$$

این عبارت یك رابطهٔ بازگشتی سه‌جمله‌ای است. مثلاً، با داشتن $J_۰$ و $J_۱$، می‌توان $J_۲$ (و هر J_n ازمرتبهٔ درست) را محاسبه‌کرد.

با امکاناتی‌که کامپیوترهای رقمی نوین فراهم‌می‌کنند (وشرایطی‌که پیش می‌آورند)، معادلهٔ (۱۰.۱۱) کاربرد جدید وجالبی یافته است. برای محاسبهٔ مقدار عددی $J_N(x_۰)$ به ازای یك مقدار معین $x_۰$، می‌توان برای مقادیر کوچك x ازمعادلهٔ (۵.۱۱)، وبرای مقادیر بزرگ x از صورت مجانبی معادلهٔ (۱۴۴.۱۱) بخش ۶.۱۱ استفاده کرد. ولی راه بهتر، هم‌ازنظر دقت وهم از نظر بهره‌برداری از ماشین، آن است‌که از رابطهٔ بازگشتی معادلهٔ (۱۰.۱۱) استفاده وبه‌سوی شاخصهای کمتر حرکت‌کنیم.[۲] با $n \gg N$ و $n \gg x_۰$، فرض کنیدکه

$$J_{n+۱}(x_۰) = ۰ \quad \text{و} \quad J_n(x_۰) = \alpha$$

که درآن α عدد کوچکی است. آنگاه ازمعادلهٔ (۱۰.۱۱)، $J_{n-۱}(x_۰)$، $J_{n-۲}(x_۰)$، الی آخر، وسرانجام $J_۰(x_۰)$ بەدست خواهند آمد. از آنجاکه α اختیاری است، مقادیر J_n همگی با یك‌ضریب مشترك ازمقداراصلی خود انحراف پیدا می‌کنند. این‌ضریب را به‌کمك شرط زیرتعیین می‌کنیم

$$J_۰(x_۰) + ۲\sum_{m=۱}^{\infty} J_{۲m}(x_۰) = ۱ \qquad (\text{۱۰.۱۱الف})$$

(درمعادلهٔ ۲.۱۱، قراردهید $t = ۱$). دقت این‌محاسبه، ازطریق تکرارآن‌با $n' = n + ۳$،

---

۱. این نکته برپایهٔ یکتا بودن نمایش سری توانی استوار است (بخشهای ۷.۵ و ۵.۶).

2. Stegun, I. A., M. Abramowitz, "Generation of Bessel functions on high speed computers," *Mathematical Tables and Other Aids for Computation*, **11**, 255–257 (1957.)

آزموده می‌شود. این تکنیک، $J_N(x_\circ)$ موردنظر وهمهٔمقادیر J باشاخص عدددرست کوچکتر از N، تا $J_\circ$ را به‌دست می‌دهد. این همان تکنیکی‌است که در زیر-برنامهٔ BESJ برای فورترن SSP به‌کارمی‌رود.

محاسبه‌های عددی خیلی دقیق وخیلی سریع‌کمابیش یك‌هنراست. سال‌به‌سال‌برای‌این تکنیك وسایر تکنیکهای عددی، اصلاحات و ریزه‌کاریهای جدیدی پیشنهاد می‌شود. دانشجو، برای آنکه از وضعیت جاری این هنر آگاهی یابد، باید به‌نوشته‌ها و دردرجهٔ اول به‌مجلهٔ ریاضیات محاسبه[1] مراجعه کند.

به‌کمك مشتقگیری جزء‌به‌جزء از معادلهٔ (۱.۱۱) نسبت به x داریم

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x,t)=\frac{۱}{۲}\left(۱-\frac{۱}{t}\right)e^{(x/۲)(t-۱/t)}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n'(x)t^n \qquad (۱۱.۱۱)$$

باز با نشاندن معادلهٔ (۲.۱۱) به‌جای عبارت نما و با مساوی قراردادن ضرایب توانهای مساوی t، خواهیم داشت

$$J_{n-۱}(x)-J_{n+۱}(x)=۲J_n'(x) \qquad (۱۲.۱۱)$$

به‌عنوان یك مورد خاص ازاین رابطهٔ بازگشتی‌کلی داریم

$$J_\circ'(x)=-J_۱(x) \qquad (۱۳.۱۱)$$

معادله‌های (۱۰.۱۱) و (۱۲.۱۱) را با یکدیگر جمع وسپس بر ۲ تقسیم می‌کنیم، داریم

$$J_{n-۱}(x)=\frac{n}{x}J_n(x)+J_n'(x) \qquad (۱۴.۱۱)$$

در x^n ضرب می‌کنیم، پس‌از بازآرایی جمله‌ها خواهیم داشت

$$\frac{d}{dx}[x^nJ_n(x)]=x^nJ_{n-۱}(x) \qquad (۱۵.۱۱)$$

باکم‌کردن معادلهٔ (۱۲.۱۱) از (۱۰.۱۱) وتقسیم کردن بر ۲، داریم

$$J_{n+۱}(x)=\frac{n}{x}J_n(x)-J_n'(x) \qquad (۱۶.۱۱)$$

---

1. *Mathematics of Computation*

ازطریق ضرب کردن در x^{-n} وبازآرایی جمله‌ها، خواهیم داشت

$$\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)] = -x^{-n}J_{n+1}(x) \qquad (۱۷.۱۱)$$

معادلهٔ دیفرانسیل بسل

مجموعه‌ای از توابع $Z_\nu(x)$ را درنظر بگیریم کـه روابط بازگشتی اساسی [معادله‌های (۱۰.۱۱) و (۱۲.۱۱)] درآنها صدق کنند، ولی ν لزوماً یك عدد درست نباشد و Z_ν نیز ضرورتاً ازسری معادلهٔ (۵.۱۱) به‌دست نیاید. می‌توان معادلهٔ (۱۴.۱۱) را به‌صورت زیر بازنویسی کرد $(n\to\nu)$

$$xZ'_\nu(x) = xZ_{\nu-1}(x) - \nu Z_\nu(x) \qquad (۱۸.۱۱)$$

نسبت به x مشتق می‌گیریم

$$xZ''_\nu(x) + (\nu+1)Z'_\nu - xZ'_{\nu-1} - Z_{\nu-1} = 0 \qquad (۱۹.۱۱)$$

در x ضرب وآن را از حاصلضرب ν درمعادلهٔ (۱۸.۱۱) کم می‌کنیم، درنتیجه

$$x^2Z''_\nu + xZ'_\nu - \nu^2Z_\nu + (\nu-1)xZ_{\nu-1} - x^2Z'_{\nu-1} = 0 \qquad (۲۰.۱۱)$$

اینك معادلهٔ (۱۶.۱۱) را بازنویسی می‌کنیم و درآن به‌جای n، مقدار $\nu-1$ راقرارمی‌دهیم

$$xZ'_{\nu-1} = (\nu-1)Z_{\nu-1} - xZ_\nu \qquad (۲۱.۱۱)$$

از این معادله برای حذف $Z_{\nu-1}$ و $Z'_{\nu-1}$ از معادلهٔ (۲۰.۱۱) بهره‌می‌گیریم و خواهیم داشت

$$x^2Z''_\nu + xZ'_\nu + (x^2-\nu^2)Z_\nu = 0 \qquad (۲۲.۱۱)$$

این، همان معادلهٔ بسل است. از این‌رو هر تابع $Z_\nu(x)$ که روابـط بازگشتی [معادله‌های (۱۰.۱۱)، (۱۲.۱۱)، (۱۴.۱۱)، و (۱۶.۱۱)، یا (۱۵.۱۱) و (۱۷.۱۱)] در آن صدق کنند، معادلهٔ بسل را ارضا می‌کند؛ یعنی مقادیر نامعلوم Z_ν، توابع بسل به‌شمار می‌آینـد. به‌خصوص نشان داده‌ایم که توابع $J_n(x)$ که آنها را به‌کمك تابع مولد تعریف‌کردیم، در معادلهٔ بسل صدق می‌کننـد. اگر شناسه به‌جای x، کمیت $k\rho$ باشد، معـادلهٔ (۲۲.۱۱) به صورت زیر درمی‌آید

$$\rho^2\frac{d^2}{d\rho^2}Z_\nu(k\rho) + \rho\frac{d}{d\rho}Z_\nu(k\rho) + (k^2\rho^2-\nu^2)Z_\nu(k\rho) = 0 \qquad (۲۲.۱۱\text{الف})$$

نمایشهای انتگرالی

به‌کارگرفتن نمایشهای انتگرالی در بررسی توابع بسل روشی سودمند و کارآمد است. اگر

به‌تابع مولد [معادلهٔ (۲.۱۱)] بازگردیم وقراردهیم $t=e^{i\theta}$، آنگاه

$$e^{ix\sin\theta}=J_0(x)+2(J_2(x)\cos 2\theta+J_4(x)\cos 4\theta+\cdots)$$
$$+2i(J_1(x)\sin\theta+J_3(x)\sin 3\theta+\cdots) \qquad (۲۳.۱۱)$$

که در آن ازروابط زیر بهره‌گرفته‌ایم

$$J_1(x)e^{i\theta}+J_{-1}(x)e^{-i\theta}=J_1(x)(e^{i\theta}-e^{-i\theta})$$
$$=2iJ_1(x)\sin\theta, \qquad (۲۴.۱۱)$$
$$J_2(x)e^{2i\theta}+J_{-2}(x)e^{-2i\theta}=2J_2(x)\cos 2\theta, \cdots$$

با نمادگذاری مجموعیابی و مساوی قراردادن اجزای حقیقی و موهومی، داریم

$$\cos(x\sin\theta)=J_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(x)\cos(2n\theta)$$
$$(۲۵.۱۱)$$
$$\sin(x\sin\theta)=2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n-1}(x)\sin[(2n-1)\theta]$$

خاطر نشان می‌شود زاویهٔ θ (برحسب رادیان) بدون بعد است. به‌همین ترتیب $\sin\theta$ هم بعدی ندارد و درستی تابع $\cos(x\sin\theta)$ ازنقطه نظرابعادی کاملا محقق است.

با بهره‌گیری ازخواص تعامد کسینوس و سینوس[1]

$$\int_0^{\pi}\cos n\theta\cos m\theta\, d\theta=\frac{\pi}{2}\delta_{nm} \qquad (۲۶.۱۱\text{الف})$$

$$\int_0^{\pi}\sin n\theta\sin m\theta\, d\theta=\frac{\pi}{2}\delta_{nm} \qquad (۲۶.۱۱\text{ب})$$

که در آن n و m اعداد درست مثبت‌اند (صفرمستثنی شده است)[2]، داریم

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta)\cos n\theta\, d\theta=\begin{cases}J_n(x), & n \text{ زوج}\\ 0, & n \text{ فرد}\end{cases} \qquad (۲۷.۱۱)$$

---

۱. این دو، ویژه‌تابعهای یك معادلهٔ خود-الحاقی‌اند (معادلهٔ نوسانگرخطی)، و شرایط مرزی مناسب درآنها صدق می‌کنند (با بخش ۲.۹ و ۱.۱۴ مقایسه کنید).

۲. معادله‌های (۲۶.۱۱ الف وب) به‌ازای‌هرm یا n برابرصفر، برقرارند. اگر هر دو مقدار m و n صفرشوند، ثابت معادلهٔ (۲۶.۱۱ الف)، برابر π وثابت معادلهٔ (۲۶.۱۱ ب)، برابر صفرمی‌شود.

$$\frac{1}{\pi}\int_{\circ}^{\pi} \sin(x\sin\theta)\sin n\theta d\theta=\begin{cases}\circ, & n \text{ زوج}\\ J_n(x), & n \text{ فرد}\end{cases} \qquad (۲۸.۱۱)$$

اگر این دومعادله را باهم جمع کنیم، داریم

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\circ}^{\pi}[\cos(x\sin\theta)\cos n\theta+\sin(x\sin\theta)\sin n\theta]d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\circ}^{\pi}\cos(n\theta-x\sin\theta)d\theta, \quad n=\circ,1,2,3,\dots \qquad (۲۹.۱۱)$$

به‌عنوان یك حالت خاص

$$J_{\circ}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\circ}^{\pi}\cos(x\sin\theta)d\theta \qquad (۳۰.۱۱)$$

باتوجه به‌اینکه $\cos(x\sin\theta)$ درهرچهارربع ($\theta_1=\theta$، $\theta_2=\pi-\theta$، $\theta_3=\pi+\theta$، و $\theta_4=-\theta$) خودرا تکرار می کند، می‌توانیم معادلهٔ (۳۰.۱۱) را به‌صورت زیر بنویسیم

$$J_{\circ}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\circ}^{2\pi}\cos(x\sin\theta)d\theta \qquad (\text{۳۰.۱۱ الف})$$

ازسوی دیگر، $\sin(x\sin\theta)$ در ربعهای سوم و چهارم علامت خود را عوض می‌کند، به طوری که

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\circ}^{2\pi}\sin(x\sin\theta)d\theta=\circ \qquad (\text{۳۰.۱۱ ب})$$

معادلهٔ (۳۰.۱۱الف) رابا حاصلضرب i درمعادلهٔ (۳۰.۱۱ب)جمع می‌کنیم، نمایش‌نمایی مختلط زیر را به‌دست می‌آوریم

$$J_{\circ}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\circ}^{2\pi}e^{ix\sin\theta}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\circ}^{2\pi}e^{ix\cos\theta}\,d\theta \qquad (\text{۳۰.۱۱ ج})$$

این نمایش انتگرالی [معادلهٔ (۲۹.۱۱)] را می‌توان بااستفاده از انتگرال پربندی به‌روشی

مستقیمتر به‌دست آورد (با مسئلهٔ ۱۶.۱.۱۱ مقایسه کنید).[۱] تعداد زیادی نمایش انتگرالی دیگر نیز وجود دارد (با مسئلهٔ ۱۸.۱.۱۱ مقایسه کنید).

مثال ۱۰.۱.۱۱ پراش فرانهوفر، دهانهٔ دایره‌ای

در نظریهٔ پراش از میان یك دهانهٔ دایره‌ای، برای Φ، دامنهٔ موج پراشیده، به انتگرال زیر برمی‌خوریم[۲]

$$\Phi \sim \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{ibr\cos\theta}\, d\theta\, r\, dr \qquad (۳۱.۱۱)$$

در اینجا θ زاویهٔ سمتی در صفحهٔ دهانهٔ دایره‌ای به‌شعاع a، و α زاویه‌ای است بین خط واصل میان مرکز دهانه به‌نقطه‌ای روی پردهٔ زیر دهانه وخط عمودی که ازمرکز دهانه‌می‌گذرد. پارامتر b ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$b = \frac{2\pi}{\lambda}\sin\alpha \qquad (۳۲.۱۱)$$

که درآن λ طول موج موج‌فرودی است. سایر نمادها درشکل ۳.۱۱ تعریف شده‌اند. از معادلهٔ (۳۰.۱۱ج)، خواهیم داشت[۳]

$$\Phi \sim 2\pi \int_0^a J_0(br)\, r\, dr \qquad (۳۳.۱۱)$$

با استفاده ازمعادلهٔ (۱۵.۱۱)، فوراً می‌توان از معادلهٔ (۳۳.۱۱) انتگرال گرفت و رابطهٔ زیررا به‌دست آورد

$$\Phi \sim \frac{2\pi ab}{b^2} J_1(ab) \sim \frac{\lambda a}{\sin\alpha} J_1\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\sin\alpha\right) \qquad (۳۴.۱۱)$$

شدت نور درنقش پراش با Φ^2 متناسب است و

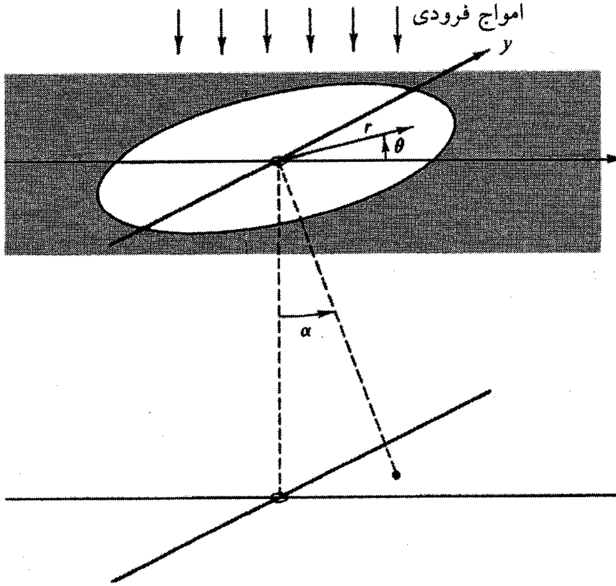
$$\Phi^2 \sim \left\{\frac{J_1[(2\pi a/\lambda)\sin\alpha]}{\sin\alpha}\right\}^2 \qquad (۳۵.۱۱)$$

---

۱. به‌ازای $n=0$، یك انتگرالگیری ساده روی θ از 0 تا 2π معادلهٔ (۲۳.۱۱) را به‌معادلهٔ (۳۰.۱۱ج) تبدیل می‌کند.

۲. نمای $ibr\cos\theta$ فازموج را روی پرده‌ای دور از دهانه، درزاویهٔ α، نسبت به‌فازموج فرودی بردهانه درنقطهٔ (θ, r) به‌دست می‌دهد. صورت موهومی عبارت نما در انتگرالده به‌این‌معناست که انتگرال ازنظر تکنیکی یك تبدیل فوریه است (فصل ۱۵). نقش‌پراش فرانهوفر، معمولا به کمك تبدیل فوریهٔ دهانه به‌دست می‌آید.

۳. می‌توانستیم به‌مسئلهٔ ۱۶.۱.۱۱(ب) نیز ارجاع دهیم.



شکل ۳.۱۱ پراش فرانهوفر ــ دهانهٔ دایره‌ای.

جدول ۱.۱۱ صفرهای توابع بسل و مشتقهای مرتبهٔ اول آنها.

شمارهٔ صفر	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$
۱	۲ر۴۰۴۸	۳ر۸۳۱۷	۵ر۱۳۵۶	۶ر۳۸۰۲	۷ر۵۸۸۳	۸ر۷۷۱۵
۲	۵ر۵۲۰۱	۷ر۰۱۵۶	۸ر۴۱۷۲	۹ر۷۶۱۰	۱۱ر۰۶۴۷	۱۲ر۳۳۸۶
۳	۸ر۶۵۳۷	۱۰ر۱۷۳۵	۱۱ر۶۱۹۸	۱۳ر۰۱۵۲	۱۴ر۳۷۲۵	۱۵ر۷۰۰۲
۴	۱۱ر۷۹۱۵	۱۳ر۳۲۳۷	۱۴ر۷۹۶۰	۱۶ر۲۲۳۵	۱۷ر۶۱۶۰	۱۸ر۹۸۰۱
۵	۱۴ر۹۳۰۹	۱۶ر۴۷۰۶	۱۷ر۹۵۹۸	۱۹ر۴۰۹۴	۲۰ر۸۲۶۹	۲۲ر۲۱۷۸
	$J'_0(x)$	$J'_1(x)$	$J'_2(x)$	$J'_3(x)$		
۱	۳ر۸۳۱۷	۱ر۸۴۱۲	۳ر۰۵۴۲	۴ر۲۰۱۲		
۲	۷ر۰۱۵۶	۵ر۳۳۱۴	۶ر۷۰۶۱	۸ر۰۱۵۲		
۳	۱۰ر۱۷۳۵	۸ر۵۳۶۳	۹ر۹۶۹۵	۱۱ر۳۴۵۹		

یادآوری. $J'_0(x) = -J_1(x)$.

ازجلول ۱.۱۱ که صفرهای توابع بسل ومشتقهای مرتبهٔ اول آنها درآن درج شده است[1]، پی می‌بریم که عبارت (۳۵.۱۱) درنقطهٔ زیردارای یك صفراست

$$\frac{۲\pi a}{\lambda}\sin\alpha = ۳٫۸۳۱۷\ldots \qquad (۳۶.۱۱)$$

یا

$$\sin\alpha = \frac{۳٫۸۳۱۷\lambda}{۲\pi a} \qquad (۳۷.۱۱)$$

برای نورسبز $\lambda = ۵٫۵\times ۱۰^{-۵}\,\mathrm{cm}$. ازاین‌رو اگر $a = ۰٫۵\,\mathrm{cm}$، آنگاه

$$\alpha \approx \sin\alpha = ۶٫۷\times ۱۰^{-۵}(\text{رادیان}) \qquad (۳۸.۱۱)$$
$$\approx ۱۴\ \text{ثانیهٔ کمان}$$

که بیانگر آن است که خمش یا پاشیدگی پرتو نور خیلی ناچیز است. اگر این تحلیل در قرن هفدهم شناخته شده‌بود، برهانهای مخالف نظریهٔ موجی‌نور جملگی باطل می‌شدند.

دراواسط قرن بیستم درست همین نقش پراش درپراکندگی ذرات هسته‌ای ازطریق هسته‌های اتمی پدیدار می‌شود که نمایش چشمگیر خواص موجی ذرات هسته‌ای به‌شمار می‌آید.

کاواك مشدد الکترومغناطیسی درمثال ۲.۱.۱۱ و درمثال ومسائل بخش ۲.۱۱، نمونهٔ دیگری ازکاربرد توابع بسل وریشه‌های آنها را دراختیار ما می‌گذارد.

مثال ۲.۱.۱۱ کاواك مشدد استوانه‌ای

امواج الکترومغناطیسی، درون کاواك مشدد با وابستگی زمانی $e^{-i\omega t}$، نوسان می‌کنند. از معادله‌های ماکسول، برای بخش‌فضایی میدان الکتریکی، به‌معادلهٔ زیرمی‌رسیم

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{E} = \alpha^۲\mathbf{E}$$

که درآن $\alpha^۲ = \omega^۲\varepsilon_\circ\mu_\circ$ (مثال ۲.۹.۱). با $\nabla\cdot\mathbf{E} = ۰$ (خلأ، بدون بار) داریم

$$\nabla^۲\mathbf{E} + \alpha^۲\mathbf{E} = ۰$$

---

۱. سایرریشه‌های توابع بسل ومشتقهای مرتبهٔ اول آنها را می‌توان درکتابی بامشخصات زیر و درتکنگاری بل به‌شمارهٔ ۳۰۵۵ یافت

Beattie, C. L., "Table of First 700 Zeros of Bessel Functions," *Bell Tech. J.*, **37**, 689, 1958.

با جداسازی متغیرها درمختصات استوانه‌ای (بخش ۴.۲، جلداول)، پی‌می‌بریم که مؤلفهٔ z (E_z، تنها بخش فضایی‌آن) درمعادلهٔ نرده‌ای هلمهولتز صدق می‌کند

$$\nabla^2 E_z+\alpha^2 E_z=0 \qquad (۳۹.۱۱)$$

که در آن $\alpha^2=\omega^2\varepsilon_0\mu_0=\omega^2/c^2$. به‌علاوه

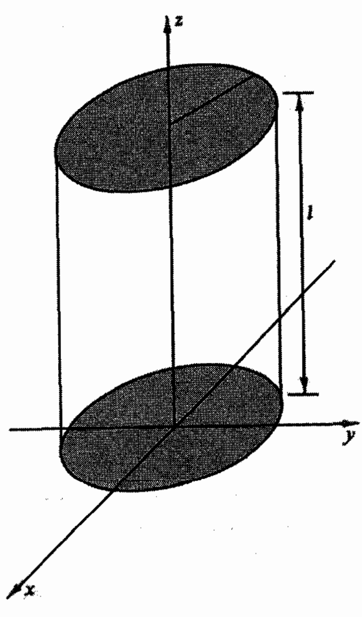
$$(E_z)_{mnk}=\sum_{m,n}J_m(\gamma_{mn}\rho)e^{\pm im\varphi}[a_{mn}\sin kz+b_{mn}\cos kz] \qquad (۴۰.۱۱)$$

پارامتر k یك ثابت‌جداسازی است که درهنگام جداکردن وابستگی به z در $E_z(\rho, \varphi, z)$ وارد می‌شود. m هم درجداکردن وابستگی به φ وارد می‌شود. γ به‌صورت α^2-k^2 وارد می‌شود، وبا این‌شرط که γa ریشه‌ای از تابع بسل J_m [معادلهٔ (۴۳.۱۱) که بعداً می‌آید] باشد، کوانتیده می‌شود. ازاین‌رو n در γ_{mn}، nامین ریشهٔ J_m را مشخص می‌کند.

برای سطوح کناری در $z=0$ و در $z=l$ (مانند شکل ۴.۱۱)، قرار می‌دهیم $a_{mn}=0$ و

$$k=\frac{p\pi}{l}, \quad p=0,1,2,\dots \qquad (۴۱.۱۱)$$

دراین‌صورت معادله‌های ماکسول ضامن این‌معنی هستند که‌میدانهای الکتریکی مماسی E_ρ



شکل ۴.۱۱ کاواك مشدد استوانه‌ای.

و E_φ در $z=\circ$ و $z=l$ صفر می‌شوند. این مفهوم، مد مغناطیسی عرضی، یا مد TM، نوسان است. داریم

$$\gamma^{2}=\frac{\omega^{2}}{c^{2}}-k^{2}$$
$$=\frac{\omega^{2}}{c^{2}}-\frac{p^{2}\pi^{2}}{l^{2}} \qquad (۴۲.۱۱)$$

ولی این شرط مرزی معمولی را نیز داریم که $E_z(\rho=a)=\circ$. ازاین‌رو باید قراردهیم

$$\gamma_{mn}=\frac{\alpha_{mn}}{a} \qquad (۴۳.۱۱)$$

که درآن α_{mn}، nامین صفر J_m به‌شمارمی‌آید.

نتیجهٔ دوشرط مرزی وثابت جداسازی m^2 آناست‌که بسامد زاویه‌ای نوسان به‌سه پارامتر گسسته بستگی خواهد داشت

$$\omega_{mnp}=c\sqrt{\frac{\alpha_{mn}^{2}}{a^{2}}+\frac{p^{2}\pi^{2}}{l^{2}}},\quad \begin{cases} m=\circ,\,1,\,2,\,\cdots \\ n=1,\,2,\,3,\,\cdots \\ p=\circ,\,1,\,2,\,\cdots \end{cases} \qquad (۴۴.۱۱)$$

اینها بسامدهای تشدیـدی مجاز مد TMاند. مد TE مـربوط به ارتعاش، موضوع مسئلهٔ ۲۶.۱.۱۱ را تشکیل می‌دهد.

رهیافتهای دیگر

دراینجا به‌کمك تابع مولد، معادلهٔ(۲.۱۱)، باتوابع بسل آشناشدیم. بافهرستبندی امکانهای مختلف دستیابی به‌رهیافتهای دیگری نیز میسر است.

۱. تابع مولد (جادوگری) معادلهٔ (۲.۱۱).
۲. جواب معادلهٔ دیفرانسیل بسل به‌صورت سری (بخش ۵.۸).
۳. انتگرالهای پربندی: برخی مؤلفان تـرجیح می‌دهند بررسی درایـن زمینه را با تعریف انتگرال پربندی تابعهای هنکل، بخشهای ۴.۷ و۴.۱۱ شروع‌کنند وتابع بسل$J_\nu(x)$ را به‌کمك توابع هنکل پدیدآورند.
۴. حل مستقیم مسائل‌فیزیکی: مثال ۱.۱.۱۱، پراش فرانهوفر از یك دهانهٔ دایره‌ای نمایشگر ایـن رهیافت است. تصـادفاً، در صـورت تمایل می‌تـوانیم معادلـهٔ

(۳۱.۱۱) را، از طریق بسط سری نیز بررسی کنیم. فاینمن[1] توابع بسل را از طریق بررسی مشددهای کاواکی تشکیل می‌دهد.

در صورتی که تابع مولد بیش از حد اختیاری به‌نظر رسد، می‌توان آن را از طریق یك انتگرال پربندی، مسئلهٔ ۱۶.۱.۱۱، یا به‌کمك روابط بازگشتی تابع بسل مسئلهٔ ۶.۱.۱۱ به‌دست آورد.

توابع بسل از مرتبهٔ غیرعدد درست

این رهیافتهای مختلف دقیقاً با یکدیگر هم‌ارز نیستند. رهیافت تابع مولد برای استخراج دو رابطهٔ بازگشتی، معادلهٔ دیفرانسیل بسل، نمایشهای انتگرالی، قضایای جمع (مسئلهٔ ۲.۱.۱۱)، وکرانهای بالا وپایین (مسئلهٔ ۱.۱.۱۱) **بسیارمناسب است.** ولی‌شاید خواننده خود پی‌برده باشدکه تابع مولد، فقط توابع بسل بامرتبهٔ عدد درست، J_0، J_1، J_2، وجزاینها راتعریف کرده‌است. برای رهیافت تابع‌مولد این‌محدودیت بزرگی به‌شمارمی‌آید. ولی‌با بهره‌گیری از سری معادلهٔ (۵.۱۱) به‌عنوان یك تعریف‌جدید می‌توان تابع نوع اول بسل $J_\nu(x)$ را به‌ازای ν غیرعدد درست نیز به‌آسانی تعریف کرد.

درستی روابط بازگشتی را می‌توان با نشاندن در صورت سری $J_\nu(x)$ تحقیق کرد (مسئلهٔ ۷.۱.۱۱). از این روابط، معادلهٔ بسل به‌دست می‌آید. در واقع اگر ν عدد درستی نباشد، عملا ساده‌سازی مهمی دراختیارداریم. دیده می‌شودکه $J_\nu(x)$ و $J_{-\nu}(x)$ مستقل‌اند، زیرا، رابطه‌ای به‌صورت معادلهٔ (۸.۱۱) وجود ندارد. از سوی دیگر به‌ازای $\nu=n$، که عدد درستی‌است، به‌یك جواب دیگر نیاز داریم. بسط این جواب دوم و بررسی خواص‌آن بحث بخش ۳.۱۱ را تشکیل می‌دهد.

مسائل

۱.۱.۱۱ به‌کمك حاصلضرب توابع مولد $g(x,t)\cdot g(x,-t)$ نشان دهید

$$1=[J_0(x)]^2+2[J_1(x)]^2+2[J_2(x)]^2+\cdots$$

و بنابراین نشان دهیدکه به‌ازای $n=1,2,3,\ldots$ داریم:

$$|J_0(x)|\leqslant 1 \quad \text{و} \quad |J_n(x)|\leqslant 1/\sqrt{2}$$

راهنمایی. ازیکتایی سری توانی، بخش ۷.۵ (جلد اول)، بهره‌گیرید.

۲.۱.۱۱ با استفاده از یك تابع مولد $g(x,t)=g(u+v,t)=g(u,t)\cdot g(v,t)$، نشان دهید

---

1. Feynman, R.P., R.B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol II, Chap. 23 Reading, Mass.: Addison-Wesley (1964).

$$J_n(u+v)=\sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(u)\times J_{n-s}(v) \quad \text{(الف)}$$

$$J_0(u+v)=J_0(u)J_0(v)+2\sum_{s=1}^{\infty} J_s(u)J_{-s}(v) \quad \text{(ب)}$$

این دوعبارت، قضایای جمع برای توابع بسل به‌شمارمی‌آیند.

۳.۱.۱۱ تنها با استفاده ازتابع مولد

$$e^{(x/2)(t-1/t)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$$

وبدون استفاده ازصورت صریح سری $J_n(x)$، نشان دهیـدکه $J_n(x)$، برحسب اینکه n زوج یا فرد باشد، دارای پاریتهٔ زوج یافرد است، یعنی[1]

$$J_n(x)=(-1)^n J_n(-x)$$

۴.۱.۱۱ بسط ژاکوبی-آنژه را استخراج کنید

$$e^{iz\cos\theta}=\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(z)e^{im\theta}$$

این عبارت بسط یك موج تخت به‌صورت یك سری ازامواج استوانه‌ای است.

۵.۱.۱۱ نشان دهیدکه

$$\cos x=J_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(x) \quad \text{(الف)}$$

$$\sin x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} J_{2n+1}(x) \quad \text{(ب)}$$

۶.۱.۱۱ برای‌آنکه تابع مولد از قلمرو جادوگری بیرون آید، نشان دهیدکه می‌توان‌آن را از رابطهٔ بازگشتی، معادلهٔ (۱۰.۱۱)، استخراج کرد.

راهنمایی. ۱. تابع مولدی به‌صورت زیرفرض کنید

$$g(x,t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)t^m$$

---

۱. این خاصیت را می‌توان با بهره‌گیری ازصورت سری [معادلهٔ (۵.۱۱)] به‌آسانی نشان داد.

۲. معادلهٔ (۱۰.۱۱) را در t^n ضرب کنید و روی n جمع بزنید.
۳. نتیجه را به‌صورت زیر بنویسید

$$\left(t+\frac{۱}{t}\right) g(x, t)=\frac{۲t}{x} \frac{\partial g(x, t)}{\partial t}$$

۴. انتگرال بگیرید و تابع انتگرالگیری (تابعی‌از x) را چنان تنظیم کنید‌که ضریب t° برابر مقداری چون $J_{\circ}(x)$ باشد که ازمعادلهٔ(۵.۱۱) به‌دست می‌آید.

۷.۱.۱۱ با مشتقگیری مستقیم نشان دهید که دورابطهٔ بازگشتی

$$J_{\nu-۱}(x)+J_{\nu+۱}(x)=\frac{۲\nu}{x} J_{\nu}(x)$$

$$J_{\nu-۱}(x)-J_{\nu+۱}(x)=۲J_{\nu}'(x)$$

ومعادلهٔ دیفرانسیل بسل

$$x^۲J_{\nu}''(x)+xJ_{\nu}'(x)+(x^۲-\nu^۲)J_{\nu}(x)=\circ$$

در عبارت $J_{\nu}(x)=\sum_{s=\circ}^{\infty}\frac{(-۱)^s}{s!(s+\nu)!}\left(\frac{x}{۲}\right)^{\nu+۲s}$ صدق می‌کنند.

۸.۱.۱۱ ثابت‌کنید

$$\text{(الف)}\quad \frac{\sin x}{x}=\int_{\circ}^{\pi/۲} J_{\circ}(x\cos\theta)\cos\theta\, d\theta$$

$$\text{(ب)}\quad \frac{۱-\cos x}{x}=\int_{\circ}^{\pi/۲} J_{۱}(x\cos\theta)\, d\theta$$

راهنمایی. انتگرال معین زیر سودمند واقع خواهدشد

$$\int_{\circ}^{\pi/۲}\cos^{۲s+۱}\theta\, d\theta=\frac{۲\times۴\times۶\cdots(۲s)}{۱\times۳\times۵\cdots(۲s+۱)}$$

۹.۱.۱۱ نشان دهید

$$J_{\circ}(x)=\frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{۱}\frac{\cos xt}{\sqrt{۱-t^۲}}\, dt$$

این انتگرال تبدیلی به صورت کسینوس فوریه است (با بخش ۳.۱۵ مقایسه کنید). تبدیل سینوس فوریهٔ متناظر، یعنی

$$J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{\sin xt}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$$

در بخش ۴.۱۱، با استفاده از نمایش انتگرالی تابع هنکل بهدست میآید.

۱۰.۱.۱۱ رابطهٔ زیر را استخراج کنید

$$J_n(x)=(-1)^n x^n\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n J_0(x)$$

راهنمایی. از استقرای ریاضی بهره گیرید.

۱۱.۱.۱۱ نشان دهیدکه بین هر دو صفر متوالی تابع $J_n(x)$، فقط وفقط یك صفر برای $J_{n+1}(x)$ وجود دارد.

راهنمایی. معادلههای (۱۵.۱۱) و (۱۷.۱۱) سودمند خواهندبود.

۱۲.۱.۱۱ تحلیل نقشهای تابشیآنتن که بهسیستمی با دهانهٔ دایرهای مربوط باشند، شامل معادلهٔ زیراست

$$g(u)=\int_0^1 f(r)J_0(ur)r\,dr$$

اگر $f(r)=1-r^2$، نشان دهیدکه

$$g(u)=\frac{2}{u^2}J_2(u)$$

۱۳.۱.۱۱ سطح مقطع دیفرانسیلی در یك آزمایش پراکندگی هستهای از رابطهٔ $d\sigma/d\Omega=|f(\theta)|^2$ بهدست میآید. یك بررسی تقریبی بهرابطهٔ زیرمیانجامد

$$f(\theta)=\frac{-ik}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^R \exp[ik\rho\sin\theta\sin\varphi]\rho\,d\rho\,d\varphi$$

دراینجا θ زاویهای استکه ذرهٔ پراکنده، تحت آن پراکنده میشود. R شعاع هسته است. نشان دهیدکه

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=(\pi R^2)\frac{1}{\pi}\left[\frac{J_1(kR\sin\theta)}{\sin\theta}\right]^2$$

۱۴.۱.۱۱ مجموعه‌ای از توابع، $C_n(x)$، در روابط بازگشتی زیر صدق می‌کنند

$$C_{n-1}(x)-C_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}C_n(x)$$

$$C_{n-1}(x)+C_{n+1}(x)=2C'_n(x)$$

(الف) $C_n(x)$ها در کدام معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم صدق می‌کنند؟

(ب) این معادلهٔ دیفرانسیل را با یك تغییر متغیر به‌معادلهٔ بسل تبدیل کنید. این کار نشان می‌دهد که $C_n(x)$ را می‌توان برحسب توابع بسل با شناسهٔ تبدیل‌یافته مشخص کرد.

۱۵.۱.۱۱ ذره‌ای (به‌جرم m) دریك جعبهٔ استوانه‌ای توخالی قائم به شعاع R و ارتفاع H قرار دارد. ذره با تابع‌موجی توصیف می‌شود که در معادلهٔ موج شرودینگر

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\rho,\varphi,z)=E\psi(\rho,\varphi,z)$$

صدق کند و این شرط را برآورد که تابع‌موج روی سطح جعبه صفر شود. کمترین انرژی مجاز (انرژی نقطهٔ صفر) را محاسبه کنید.

پاسخ. $E=\frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(\frac{z_{pq}}{R}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{H}\right)^2\right]$.

که درآن z_{pq}، qامین صفر J_p است، شاخص پایین p را وابستگی سمتی تعیین می‌کند

$$E_{\min}=\frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(\frac{2/405}{R}\right)^2+\left(\frac{\pi}{H}\right)^2\right]$$

۱۶.۱.۱۱ (الف)ازطریق مشتق‌گیری مستقیم وجانشانی، نشان دهید که معادلهٔ

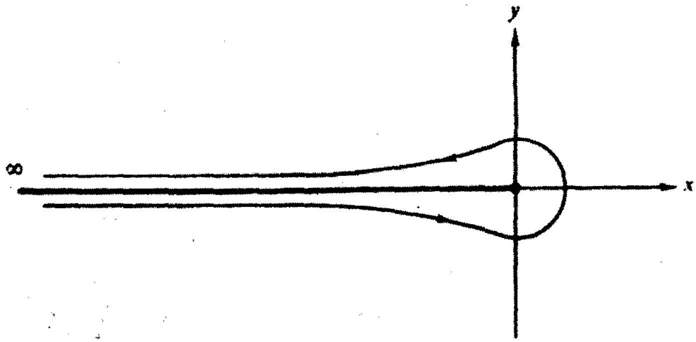
$$J_\nu(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_c e^{(x/2)(t-1/t)}\,t^{-\nu-1}\,dt$$

یا معادلهٔ هم‌ارز آن، یعنی

$$J_\nu(x)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\int e^{s-x^2/4s}\,s^{-\nu-1}ds$$

درمعادلهٔ بسل صدق می‌کند. C پربندی است که درشکل ۵.۱۱ نشان داده شده‌است. محور حقیقی منفی خط برش‌است.

راهنمایی. (پس‌از نشاندن درمعادلهٔ دیفرانسیل بسل) نشان دهید که تمامی انتگرالده را می‌توان به‌صورت مشتق کامل زیرنوشت



شکل ۵۰۱۱ پربند تابع بسل.

$$\frac{d}{dt}\left\{\exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]t^{-\nu}\left[\nu+\frac{x}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]\right\}$$

(ب) نشان دهید که اولین انتگرال (به‌ازای عدد درستی مانند n) را می‌توان به صورت زیر تبدیل کرد

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(x\sin\theta-n\theta)}d\theta$$

$$=\frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(x\cos\theta+n\theta)}\,d\theta$$

۱۷۰۱۰۱۱ پربند C در مسئلهٔ ۱۶۰۱۰۱۱ به‌مسیر $\infty-$ تا $1-$، دایرهٔ به شعاع واحد از $e^{-i\pi}$ تا $e^{i\pi}$، وسرانجام از $1-$ تا $\infty-$، تغییر داده می‌شود. نشان دهید که

$$J_\nu(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\nu\theta-x\sin\theta)\,d\theta-\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^{\infty}e^{(-\nu\theta-x\sinh\theta)}\,d\theta$$

این عبارت، انتگرال بسل است.

راهنمایی. مقادیرمنفی متغیر انتگرالگیری، u، رامی‌توان باتغییرمتغیرزیر بررسی کرد

$$u=te^{\pm i\pi}$$

۱۸۰۱۰۱۱ (الف) نشان دهید که

$$J_\nu(x)=\frac{2}{\pi^{1/2}(\nu-\frac{1}{2})!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\int_0^{\pi/2}\cos(x\sin\theta)\cos^{2\nu}\theta\,d\theta$$

که درآن $\nu > -1/2$.

راهنمایی. دراینجا می‌توان از بسط سری و انتگرالگیری جمله به‌جمله استفاده‌کرد. فرمولهای بخش ۴.۱۰ دراین مورد مفید واقع می‌شوند.

(ب) انتگرال بند (الف) را به‌صورت زیر تبدیل کنید

$$J_\nu(x)=\frac{1}{\pi^{1/2}(\nu-\frac{1}{2})!}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\int_0^\pi \cos(x\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta\, d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi^{1/2}(\nu-\frac{1}{2})!}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\int_0^\pi e^{\pm ix\cos\theta}\sin^{2\nu}\theta\, d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi^{1/2}(\nu-\frac{1}{2})!}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\int_{-1}^{1} e^{\pm ipx}(1-p^2)^{\nu-1/2}dp$$

این عبارتها نمایشهای انتگرالی مختلف برای $J_\nu(x)$ به‌شمارمی‌آیند.

۱۹.۱۰۱۱ (الف) از

$$J_\nu(x)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\int t^{-\nu-1}e^{t-x^2/4t}\, dt$$

رابطهٔ بازگشتی زیررا استخراج کنید

$$J'_\nu(x)=\frac{\nu}{x}J_\nu(x)-J_{\nu+1}(x)$$

(ب) از

$$J_\nu(x)=\frac{1}{2\pi i}\int t^{-\nu-1}e^{(x/2)(t-1/t)}dt$$

رابطهٔ بازگشتی زیررا استخراج کنید

$$J'_\nu(x)=\frac{1}{2}J_{\nu-1}(x)-\frac{1}{2}J_{\nu+1}(x)$$

۲۰.۱۰۱۱ نشان دهیدکه رابطهٔ بازگشتی

$$J'_n(x)=\frac{1}{2}[J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)]$$

مستقیماً با مشتقگیری از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(n\theta-x\sin\theta)d\theta$$

۲۱۰۱۰۱۱ انتگرال زیر را حساب‌کنید

$$\int_{0}^{\infty}e^{-ax}J_0(bx)dx,\quad a,b>0$$

نتیجه در واقع به‌ازای $a\geqslant 0$ و $-\infty<b<\infty$ برقرار است. این، تبدیل لاپلاس J_0 است.

راهنمایی. ازیك نمایش انتگرالی J_0 یا یك بسط سری بهره‌گیرید.

۲۲۰۱۰۱۱ بااستفاده ازصورتهای مثلثاتی، تحقیق کنید که

$$J_0(br)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}e^{ibr\sin\theta}d\theta$$

۲۳۰۱۰۱۱ (الف) شدت [Φ^2 درمعادلهٔ(۳۵۰۱۱)] را به‌صورت تابعی‌از $(\sin\alpha/\lambda)$ در امتداد یك قطر نقش پراش دایره‌ای، ترسیم کنید. مکان دوکمینهٔ اول را تعیین‌کنید.

(ب) چه‌کسری‌ازکل شدت نور در بیشینهٔ مرکزی فرود می‌آید؟

راهنمایی. کمیت $[J_1(x)]^2/x$ را می‌شود به‌صورت یك مشتق نوشت و انتگرال سطحی شدت را محاسبه‌کرد.

۲۴۰۱۰۱۱ کسری ازنورفرودی بریك دهانهٔ دایـره‌ای (فرود قائم) که گسیـل می‌یابد از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$T=2\int_{0}^{2ka}J_2(x)\frac{dx}{x}-\frac{1}{2ka}\int_{0}^{2ka}J_2(x)dx$$

دراینجا a شعاع دهانه و k عدد موج، یعنی $2\pi/\lambda$، است. نشان دهیدکه

(الف) $T=1-\frac{1}{ka}\sum_{n=0}^{\infty}J_{2n+1}(2ka)$،

(ب) $T=1-\frac{1}{2ka}\int_{0}^{2ka}J_0(x)dx$.

۲۵۰۱۰۱۱ دامنهٔ، $U(\rho, \varphi, t)$، یک‌غشای دایره‌ای مرتعش به‌شعاع a، درمعادلهٔ موج زیر صدق می‌کند

$$\nabla^2 U - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

دراینجا V سرعت فازموج است که بااستفاده از ثابتهای‌کشسانی و عامل‌میران موجود تعیین می‌شود.

(الف)نشان دهید یکی‌ازجوابها عبارت است از

$$U(\rho, \varphi, t) = J_m(k\rho)(a_1 e^{im\varphi} + a_2 e^{-im\varphi})(b_1 e^{i\omega t} + b_2 e^{-i\omega t})$$

(ب) بااستفاده ازشرط مرزی دیریکله، $J_m(ka) = 0$، مقادیرمجازطول موج λ را به‌دست آورید $(k = 2\pi/\lambda)$.

یادآوری. علاوه‌بر J_m، توابع بسل دیگری نیزوجود دارد ولی همهٔ‌آنها در $\rho = 0$ واگرا می‌شوند. این‌نکته را صریحاً دربخش۳۰۱۱ نشان می‌دهیم. درواقع این رفتار واگرا به‌صورت ضمنی درمعادلهٔ (۶۰۱۱) پیداست.

۲۶۰۱۰۱۱ مدهای TM به‌عنوان نوسان‌کاواکی الکترومغناطیسی درمثال۲۰۱۰۱۱ توصیف شدند. مدهای عرضی الکتریکی (TE) این تفاوت را دارند که درمورد آنها با مؤلفهٔ z القای مغناطیسی $\mathbf{B}$ کارمی‌کنیم

$$\nabla^2 B_z + \alpha^2 B_z = 0$$

با این شرایط مرزی که

$$B_z(0) = B_z(l) = 0 \quad \text{و} \quad \left.\frac{\partial B_z}{\partial \rho}\right|_{\rho=a} = 0$$

نشان دهیدکه بسامدهای مشدد TE ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آیند

$$\omega_{mnp} = c\sqrt{\frac{\beta_{mn}^2}{a^2} + \frac{p^2\pi^2}{l^2}}, \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

۲۷۰۱۰۱۱ سه‌بسامد ازپایینترین بسامدهای تشدیدی زاویه‌ای TM وسه‌بسامد ازپایینترین بسامدهای تشدیدی زاویه‌ای TE، ω_{mnp}، را به‌صورت تابعی از نسبت شعاع تقسیم برطول (a/l) به‌ازای $0 \leqslant a/l \leqslant 1.5$ ترسیم کنید.

راهنمایی. ω^2 (برحسب واحد c^2/a^2) را برحسب $(a/l)^2$ ترسیم کنید. آیا دلیل این انتخاب را می‌دانید؟

۲۸.۱.۱۱ یک‌قرص رسانای‌نازک به‌شعاع a حامل‌بار q است. نشان دهید پتانسیل با رابطهٔ زیر توصیف می‌شود

$$\varphi(r, z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_0^\infty e^{-k|z|}J_0(kr)\frac{\sin ka}{k}dk$$

که درآن J_0 تابع بسل معمولی است و r و z همـان مختصات استوانه‌ای‌انـد که با آنها آشناییم.

یادآوری. این مسئله دشوار است. یکی‌از رهیافتهای ممکن، بهره‌گیری از تبدیلهای فوریه، به‌شکل‌مسئلهٔ ۱۱.۳.۱۵، است. بحث‌دربارهٔ این‌مسئلهٔ فیزیکی را می‌توانید درکتاب جکسون (*Classical Electrodynamics*) بیابید.

۲۹.۱.۱۱ نشان دهید

$$\int_0^a x^m J_n(x)dx, \quad m\geqslant n\geqslant 0$$

(الف) به‌ازای $m+n$ فرد، برحسب توابع‌بسل و توانهای x انتگرالپذیراست[مانند $a^p J_q(a)$].

(ب) به‌ازای $m+n$ زوج، می‌توان آن‌را به جملات انتگرالگیری شده به اضافهٔ $\int_0^a J_0(x)dx$ تقلیل داد.

۳۰.۱.۱۱ نشان دهیدکه

$$\int_0^{\alpha_{0n}}\left(1-\frac{y}{\alpha_{0n}}\right)J_0(y)y\,dy=\frac{1}{\alpha_{0n}}\int_0^{\alpha_{0n}} J_0(y)dy$$

در اینجا α_{0n}، عبارت است از nامین ریشهٔ $J_0(y)$. این رابطه در محاسبه با ماشین به‌کار می‌آید (مسئلهٔ ۱۱.۲.۱۱). عبارت سمت راست راآسانتر وسریعتر ـ وبسیاردقیقتر ـ می‌شود محاسبه کرد. با درنظر گرفتن تفاضل دوجملهٔ عبارت سمت چپ خطای نسبی زیادی ایجاد می‌شود.

۳۱.۱.۱۱ برنامه‌ای بنویسیدکه ریشه‌های متوالی تابع بسل $J_n(x)$، یعنی α_{ns} مربوط به $J_n(\alpha_{ns})=0$، را محاسبه‌کند. پنج ریشهٔ اول J_0، J_1، و J_2 را جدولبندی کنید.

راهنمایی. برای تکنیکهای ریشه‌یابی وتوصیه‌هایی دراین باره پیوست ۱ را ببینید.

مقدار آزمونی. $\alpha_{12}=7{,}01559$.

۳۲.۱.۱۱ دامنهٔ پراش دهانهٔ دایره‌ای، Φ، در معادلهٔ (۳۵.۱۱)، متناسب است با $f(z)=J_1(z)/z$. دامنهٔ پراش تک‌شکافی متناظر متناسب است با $g(z)=\sin z/z$.
(الف) $f(z)$ و $g(z)$ را به‌ازای $z=0.0\,(0.2)\,12.0$ محاسبه و ترسیم کنید.
(ب) دومقدار از کمترین‌مقادیر z $(z>0)$ راکه به‌ازای آنها $f(z)$ یک مقدار فرین می‌یابد، پیدا کنید. مقادیرمتناظر $f(z)$ را محاسبه کنید.
(ج) دومقدار از کمترین مقادیر z $(z>0)$ راکه به‌ازای آنها $g(z)$ یک‌مقدارفرین می‌یابد پیدا کنید. مقادیر متناظر $g(z)$ را محاسبه کنید.

۳۳.۱.۱۱ پتانسیل الکتروستاتیکی یک قرص باردار، $\varphi(r,z)/(q/4\pi\varepsilon_0 a)$، را به‌کمک صورت‌انتگرالی مسئلهٔ ۲۸.۱.۱۱ محاسبه‌کنید. پتانسیل را به‌ازای $r/a=0.0\,(0.5)\,2.0$ و $z/a=0.25\,(0.25)\,1.25$ محاسبه کنید. چرا $z/a=0$ حذف شده است؟ مسئلهٔ ۱۷.۳.۱۲، همین مسئله است به‌روایت هماهنگهای کروی.
راهنمایی. یک کوادراتور گاؤس-لاگر، پیوست ۲، را به‌کار بگیرید.

۲.۱۱ تعامد

اگرمعادلهٔ بسل، معادلهٔ (۲۲.۱۱الف)، را بر x تقسیم کنیم، خود-الحاقی می‌شود. ازاین‌رو، بنابر نظریهٔ اشتورم-لیوویل، بخش ۲.۹، انتظار می‌رود اگر بتوانیم ترتیبی اتخاذ کنیم که شرایط مرزی مناسب در مسئله صدق کنند، جوابها متعامد باشند. برای برقراری شرایط مرزی دربازهٔ متناهی $[0,a]$، پارامترهای a و $\alpha_{\nu m}$ را در شناسهٔ J_ν وارد می‌کنیم تا $J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a)$ را به‌دست آوریم. a دراینجا حدبالای مختصهٔ شعاعی استوانه‌ای، ρ، است. ازمعادلهٔ (۲۲.۱۱الف) داریم

$$\rho\frac{d^2}{d\rho^2}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)+\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)+\left(\frac{\alpha_{\nu m}^2\rho}{a^2}-\frac{\nu^2}{\rho}\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)=0$$

(۴۵.۱۱)

پس از نشاندن پارامتر $\alpha_{\nu n}$ به‌جای $\alpha_{\nu m}$، می‌بینیم که $J_\nu(\alpha_{\nu n}\rho/a)$ در رابطهٔ زیر صدق می‌کند

$$\rho\frac{d^2}{d\rho^2}J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)+\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)+\left(\frac{\alpha_{\nu n}^2\rho}{a^2}-\frac{\nu^2}{\rho}\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)=0$$

(۴۵.۱۱الف)

در ادامهٔ کار، مانند بخش ۲.۹، معادلهٔ (۴۵.۱۱) را در $J_\nu(\alpha_{\nu n}\rho/a)$ و معادلهٔ (۴۵.۱۱ الف) را در $J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a)$ ضرب و از هم کم می‌کنیم، درنتیجه

$$J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right]-J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\right]$$

$$=\frac{\alpha_{\nu n}^2-\alpha_{\nu m}^2}{a^2}\rho\,J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\quad(۴۶.۱۱)$$

از $\rho=0$ تا $\rho=a$ انتگرال می‌گیریم، داریم

$$\int_0^a J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right]d\rho$$

$$-\int_0^a J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\right]d\rho$$

$$=\frac{\alpha_{\nu n}^2-\alpha_{\nu m}^2}{a^2}\int_0^a J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\rho\,d\rho\qquad(۴۷.۱۱)$$

با انتگرالگیری جزء‌به‌جزء می‌بینیم که سمت چپ معادلهٔ (۴۷.۱۱) عبارت خواهد بود از

$$\left|\rho J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right|_0^a-\left|\rho J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\frac{d}{d\rho}J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\right|_0^a$$
(۴۸.۱۱)

به‌ازای $\nu\geqslant 0$، عامل ρ وجود صفری را درحد پایین، $\rho=0$، تضمین می‌کند. درواقع حد پایین ν را می‌توان تا $\nu>-1$ پایین آورد (مسئلهٔ ۴.۲.۱۱).[1] در $\rho=a$، اگر هریك از پارامترهای $\alpha_{\nu n}$ و $\alpha_{\nu m}$ را چنان برگزینیم که صفرها یا ریشه‌های J_ν باشند، یعنی $J_\nu(\alpha_{\nu m})=0$، آنگاه هریك از عبارتها صفر خواهند شد. با این تعریف مفهوم شاخصهای پایین روشن می‌شود: $\alpha_{\nu m}$ عبارت است‌از mامین صفر J_ν.

سمت‌چپ، با این گزینهٔ پارامترها صفرمی‌شود (شرایط‌مرزی اشتورم‌-لیوویل بر آورده می‌شوند) و به‌ازای $m\neq n$

$$\int_0^a J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right)\rho d\rho=0\qquad(۴۹.۱۱)$$

این عبارت، تعامد روی بازهٔ $[0\,,\,a]$ را نشان می‌دهد.

---

۱. حالت $\nu=-1$ به $\nu=+1$ برمی‌گردد [معادلهٔ (۸.۱۱)].

بهنجارش

انتگرال بهنجارش را می‌توان با قراردادن $\alpha_{\nu n}=\alpha_{\nu m}+\varepsilon$ درمعادلهٔ (۴۸.۱۱) و گرفتن حد $\varepsilon \to 0$ تشکیل داد (با مسئلهٔ ۲.۲.۱۱ مقایسه کنید). با کمك رابطهٔ بازگشتی، می‌توان معادلهٔ (۱۶.۱۱) حاصل را به‌صورت زیر نوشت

$$\int_0^a \left[J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\right]^2 \rho\, d\rho = \frac{a^2}{2}[J_{\nu+1}(\alpha_{\nu m})]^2 \qquad (۵۰.۱۱)$$

سری بسل

اگرمجموعهٔ توابع بسل $J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a)$ (ν معین، $m=1, 2, 3, \ldots$) را کامل فرض کنیم، آنگاه هر تابع خوشرفتار، و از هرنظر دیگری اختیاری، $f(\rho)$ را می‌شود به صورت یك سری بسل (بسل-فوریه یا فوریه-بسل) بسط داد

$$f(\rho)=\sum_{m=1}^{\infty} c_{\nu m} J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right),\ \ 0 \leqslant \rho \leqslant a,\ \ \nu > -1 \qquad (۵۱.۱۱)$$

ضرایب $c_{\nu m}$، بااستفاده ازمعادلهٔ (۵۰.۱۱) تعیین می‌شوند

$$c_{\nu m}=\frac{2}{a^2[J_{\nu+1}(\alpha_{\nu m})]^2}\int_0^a f(\rho) J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}\right)\rho\, d\rho \qquad (۵۲.۱۱)$$

مسائل ۳.۲.۱۱و۶.۲.۱۱(ب) شامل بسط سری‌مشابهی‌اند برحسب: $J_\nu(\beta_{\nu m}\rho/a)$، با $(d/d\rho)J_\nu(\beta_{\nu m}\rho/a)|_{\rho=a}=0$.

مثال ۱.۲.۱۱ پتانسیل الکتروستاتیکی در استوانهٔ توخالی

جواب معادلهٔ لاپلاس در مختصات استوانه‌ای، با استفاده از جدول ۲.۸ دربخش ۳.۸ (و نشاندن k به‌جای α)، ترکیبی خطی‌است‌از توابع زیر

$$\psi_{km}(\rho, \varphi, z)=P_{km}(\rho)\Phi_m(\varphi)Z_k(z)$$

$$= J_m(k\rho)\cdot[a_m \sin m\varphi + b_m \cos m\varphi]\cdot[c_1 e^{kz}+c_2 e^{-kz}] \qquad (۵۳.۱۱)$$

ترکیب خطی موردنظر به‌کمك شرایطی مرزی‌که باید برآورده شوند، معین می‌شود.

شعاع استوانهٔ ما a و ارتفاع آن l است. توزیع پتانسیل بخش انتهایی بالایی‌آن به صورت $\psi(\rho, \varphi)$ است. پتانسیل در هرجای دیگری روی سطح صفر است.[1] اینك، مسئله عبارت است از یافتن پتانسیل الکتروستاتیکی، درهرجای درون استوانه، به‌صورت

---

۱. اگر به‌ازای $z=0, l$، داشته باشیم $\psi=0$، ولی به‌ازای $\rho=a$ داشته‌باشیم: $\psi \neq 0$، توابع تعدیل‌یافتهٔ بسل، بخش ۵.۱۱، را خواهیم داشت.

$$\psi(\rho, \varphi, z)=\sum_{k, m} \psi_{km}(\rho, \varphi, z) \qquad (۵۴.۱۱)$$

برای راحتی، مختصات استوانه‌ای را به‌صورتی که در شکل ۴.۱۱ نشان داده شد درنظر می‌گیریم. از آنجاکه $\psi(\rho, \varphi, 0)=0$، می‌گیریم $c_1=-c_2=1/2$. وابستگی به z به‌صورت $\sinh kz$ درمی‌آید که در $z=0$ صفر می‌شود. شرط $\psi=0$ روی سطح جانبی استوانه، با درنظرگرفتن ثابت جداسازی k به‌صورت زیر، صدق می‌کند

$$k=k_{mn}=\alpha_{mn}/a \qquad (۵۵.۱۱)$$

که درآن اولین شاخص پایین، شاخص‌تابع بسل‌را به‌دست می‌دهد، ودومین شاخص‌پایین، صفر به‌خصوصی‌از J_m را مشخص می‌کند.

پتانسیل الکتروستاتیکی به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\psi(\rho, \varphi, z)=\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\alpha_{mn} \frac{\rho}{a}\right) \cdot\left[a_{mn} \sin m\varphi+b_{mn} \cos m\varphi\right] \cdot \sinh\left(a_{mn} \frac{z}{a}\right) \qquad (۵۶.۱۱)$$

معادلهٔ (۵۶.۱۱) یك سری دوگانه است: یك سری بسل برحسب ρ و یك سری فوریه برحسب φ.

به‌ازای $z=l$، داریم $\psi=\psi(\rho, \varphi)$، یعنی تابع معلومی‌از ρ و φ. ازاین‌رو

$$\psi(\rho, \varphi)=\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\alpha_{mn} \frac{\rho}{a}\right) \cdot\left[a_{mn} \sin m\varphi+b_{mn} \cos m\varphi\right] \cdot \sinh\left(\alpha_{mn} \frac{l}{a}\right) \qquad (۵۷.۱۱)$$

ثابتهای a_{mn} و b_{mn}، با استفاده از معادله‌های (۴۹.۱۱) و (۵۰.۱۱) و معادله‌های متناظر برای $\sin\varphi$ و $\cos\varphi$ [مثال ۱.۲.۹ و معادله‌های (۷.۱۴) تا (۹.۱۴)]، محاسبه می‌شوند. خواهیم یافت[1]

$$\left.\begin{array}{l}a_{mn} \\ b_{mn}\end{array}\right\}=2\left[\pi a^2 \sinh\left(\alpha_{mn} \frac{l}{a}\right) J_{m+1}^2(\alpha_{mn})\right]^{-1}$$

$$\cdot \int_0^{2\pi} \int_0^a \psi(\rho, \varphi) J_m\left(\alpha_{mn} \frac{\rho}{a}\right)\left\{\begin{array}{l}\sin m\varphi \\ \cos m\varphi\end{array}\right\} \rho\, d\rho\, d\varphi \qquad (۵۸.۱۱)$$

اینها، انتگرالهایی معین هستند، یعنی عددند. بانشاندن درمعادلهٔ (۵۶.۱۱)، سری مشخص و پتانسیل $\psi(\rho, \varphi, z)$ تعیین می‌شود. بدینسان مسئله حل‌شده است.

---

۱. اگر $m=0$، آنگاه ضریب ۲ حذف می‌شود [با معادلهٔ (۸.۱۴) مقایسه‌کنید].

صورت پیوستاری

سری بسل، معادلهٔ (۵۱.۱۱) و مسئلهٔ ۶.۲.۱۱، برای بسط روی یك بازهٔ متناهی $[0, a]$ به‌کارمی‌رود. اگر $a\to\infty$، آنگاه می‌توان انتظارداشت که صورتهای سری به‌انتگرال بدل شوند. ریشه‌های گسستهٔ $\alpha_{\nu m}$ به‌متغیر پیوستهٔ α تبدیل می‌شوند. همین وضعیت درمورد سری فوریهٔ بخش۲.۱۴ نیز پیش‌می‌آید. بسط انتگرال بسل ازسری بسل به‌عنوان مسئلهٔ ۸.۲.۱۱ مطرح شده‌است.

معادلهٔ بستاری تابع بسل به‌این قرار

$$\int_0^\infty J_\nu(\alpha\rho)J_\nu(\alpha'\rho)\rho\, d\rho=\frac{1}{\alpha}\delta(\alpha-\alpha'),\quad \nu>-\frac{1}{2} \qquad (59.11)$$

برای عملیاتی که به پیوستاری از توابع بسل، $J_\nu(\alpha\rho)$، مربوط می‌شود، رابطه‌ای کلیدی است. درستی‌این رابطه را می‌توان بااستفاده از تبدیلهای هنکل، بخش ۱.۱۵، اثبات‌کرد. رهیافت مورس و فشباخ چیزی دیگراست‌که‌آغاز آن رابطه‌ای‌شبیه به‌معادلهٔ(۸۲.۹)،بخش ۴.۹، است.

تعامـد نوع دومی را (با شاخصهای متغیر) برای توابع‌کروی بسل در بخش ۷.۱۱ مطرح خواهیم‌کرد.

مسائل

۱.۲.۱۱ (الف)نشان دهید

$$(a^2-b^2)\int_0^P J_\nu(ax)J_\nu(bx)x\, dx=P[bJ_\nu(aP)J'_\nu(bP)-aJ'_\nu(aP)J_\nu(bP)]$$

که درآن

$$J'_\nu(aP)=\frac{d}{d(ax)}J_\nu(ax)\Big|_{x=P}$$

(ب)

$$\int_0^P[J_\nu(ax)]^2x\,dx=\frac{P^2}{2}\left\{[J'_\nu(aP)]^2+\left(1-\frac{\nu^2}{a^2P^2}\right)[J_\nu(aP)]^2\right\},\ \nu>-1$$

این‌دوعبارت را معمولا انتگرالهای اول ودوم لومل می‌نامند.

راهنمایی. بسط تعامد توابع بسل‌را، به‌عنوان یك شبیه، دراختیارداریم.

۲.۲.۱۱ نشان دهیدکه

$$\int_{\circ}^{a}[J_\nu(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a})]^{۲}\rho\,d\rho=\frac{a^{۲}}{۲}[J_{\nu+۱}(\alpha_{\nu m})]^{۲},\quad \nu>-۱$$

دراینجا $\alpha_{\nu m}$ عبارت است از mامین صفر J_ν.

راهنمایی. با واردکردن $\alpha_{\nu n}=\alpha_{\nu m}+\varepsilon$، تابع $J_\nu[(\alpha_{\nu m}+\varepsilon)\rho/a]$ را ازطریق بسط تایلور حول $\alpha_{\nu m}\rho/a$، بسط دهید.

۳.۲.۱۱ (الف) اگر $\beta_{\nu m}$ صفر شمارهٔ mام $(d/d\rho)J_\nu(\beta_{\nu m}\rho/a)$ باشد، نشان دهید که توابع بسل روی بازهٔ $[\circ, a]$، نسبت به انتگرال تعامد زیر، متعامدند

$$\int_{\circ}^{a}J_\nu(\beta_{\nu m}\frac{\rho}{a})J_\nu(\beta_{\nu n}\frac{\rho}{a})\rho\,d\rho=\circ,\quad m\neq n,\ \nu>-۱$$

(ب) انتگرال بهنجارش متناظر را استخراج کنید $(m=n)$.

پاسخ. $\frac{a^{۲}}{۲}\left(۱-\frac{\nu^{۲}}{\beta_{\nu m}^{۲}}\right)[J_\nu(\beta_{\nu m})]^{۲},\quad \nu>-۱$

۴.۲.۱۱ تحقیق کنید که معادلهٔ تعامد، معادلهٔ (۴۹.۱۱)، و معادلهٔ بهنجارش، معادلهٔ (۵۰.۱۱)، به‌ازای $\nu>-۱$ معتبر است.

راهنمایی. با استفاده از بسط سری توانی رفتار معادلهٔ (۴۸.۱۱) را در $\rho\to\circ$ بیازمایید.

۵.۲.۱۱ به‌کمك معادلهٔ (۴۹.۱۱) این نکته را اثبات کنید که $J_\nu(z)$، به‌ازای $\nu>-۱$، دارای ریشهٔ مختلط نیست.

راهنمایی. (الف) ازشکل سری $J_\nu(z)$ بهره گیرید تا ریشه‌های موهومی محض حذف شوند.

(ب) $\alpha_{\nu m}$ را مختلط بگیرید و فرض کنید $\alpha_{\nu n}=\alpha_{\nu m}^{*}$.

۶.۲.۱۱ (الف) دربسط سری

$$f(\rho)=\sum_{m=۱}^{\infty}c_{\nu m}J_\nu(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a}),\quad \circ\leqslant\rho\leqslant a,\ \nu>-۱$$

با $J_\nu(\alpha_{\nu m})=\circ$، نشان دهید که باتکیه بر رابطهٔ زیرضرایب به‌دست می‌آیند

$$c_{\nu m}=\frac{۲}{a^{۲}[J_{\nu+۱}(\alpha_{\nu m})]^{۲}}\int_{\circ}^{a}f(\rho)\,J_\nu(\alpha_{\nu m}\frac{\rho}{a})\rho\,d\rho$$

(ب) دربسط سری

$$f(\rho)=\sum_{m=1}^{\infty} d_{\nu m} J_\nu(\beta_{\nu m}\frac{\rho}{a}), \quad 0\leqslant\rho\leqslant a, \quad \nu>-1$$

درآن $(d/d\rho)J_\nu(\beta_{\nu m}\rho/a)|_{\rho=a}=0$، نشان دهیدکه ضرایب ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آیند

$$d_{\nu m}=\frac{2}{a^2(1-\nu^2/\beta_{\nu m}^2)[J_\nu(\beta_{\nu m})]^2}\int_0^a f(\rho)J_\nu(\beta_{\nu m}\frac{\rho}{a})\rho\, d\rho$$

۷.۳.۱۱ پتانسیل الکتروستاتیکی هر یك از دوسر یك استوانهٔ قائم دوار عبارت است از $\psi(\rho,\varphi)$. پتانسیل روی سطح خمیدهٔ استوانه‌ای صفراست. پتانسیل را درتمام نقاط داخل آن بیابید.

راهنمایی. دستگاه مختصات را انتخاب و وابستگی به z را طوری تنظیم کنیدکه از تقارن موجود درپتانسیل بهرهٔ کامل بگیرید.

۸.۳.۱۱ نشان دهیدکه معادله‌های (۵۱.۱۱) و(۵۲.۱۱) درمورد پیوستار با معادلات زیر تعویض می‌شوند

$$f(\rho)=\int_0^\infty a(\alpha)J_\nu(\alpha\rho)d\alpha$$

$$a(\alpha)=\alpha\int_0^\infty f(\rho)J_\nu(\alpha\rho)\rho\, d\rho$$

راهنمایی. مورد متناظر برای سینوسها و کسینوسها دربخش ۲.۱۵ حل شده است. این توابع، تبدیلهای هنکل‌اند. یکی ازروشهای استخراج برای حالت‌خاص $\nu=0$، موضوع مسئلهٔ ۱.۱.۱۵ است.

۹.۳.۱۱ تابع $f(x)$ به‌صورت یك‌سری بسل مشخص شده‌است

$$f(x)=\sum_{n=1} a_n J_m(\alpha_{mn}x)$$

که درآن α_{mn} ریشهٔ nام J_m است. رابطهٔ پارسوال

$$\int_0^1 [f(x)]^2 x\, dx=\frac{1}{2}\sum_{n=1} a_n^2[J_m \quad (\alpha_{mn})]^2$$

را اثبات کنید.

۱۰.۳.۱۱ ثابت کنیدکه

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{mn})^{-2}=\frac{1}{4(m+1)}$$

راهنمایی. x^m را به‌صورت سری بسل بسط دهید و از رابطهٔ پارسوال بهره‌گیرید.

۱۱.۲.۱۱ پتانسیل استوانهٔ قائم دواری به‌طول l عبارت است از

$$\psi(z=\pm l/2)=100(1-\rho/a)$$

که در آن a شعاع است. پتانسیل روی سطح خمیده (جانبی) صفر است. با استفاده از سری بسل مسئلهٔ ۷.۲.۱۱، پتانسیل الکتروستاتیکی را به ازای $\rho/a=0.0(0.2)1.0$ ، و $z/l=0.0(0.1)0.5$ محاسبه کنید. a/l را برابر ۰٫۵ بگیرید.

راهنمایی. از مسئلهٔ ۳۰.۱.۱۱، داریم

$$\int_0^{\alpha_{0n}}\left(1-\frac{y}{\alpha_{0n}}\right)J_0(y)y\,dy$$

نشان دهید که این عبارت برابر است با

$$\frac{1}{\alpha_{0n}}\int_0^{\alpha_{0n}}J_0(y)dy$$

محاسبهٔ عددی این عبارت جدید نسبت به عبارت قبلی هم سریعتر، و هم دقیقتر است.

یادآوری. همگرایی به‌ازای $\rho/a=0.0$ و $z/l=0.5$ کند است، با به حساب آوردن ۲۰ جمله، به‌جای ۱۰۰ صرفاً کمیت ۹۸٫۴ را به‌دست می‌آوریم.

مقدار آزمونی. به‌ازای $\rho/a=0.4$ و $z/l=0.3$، $\psi=24.558$.

۳.۱۱ توابع نویمان، توابع نوع دوم بسل، $N_\nu(x)$

به‌اتکای نظریهٔ معادلات دیفرانسیل می‌دانیم که معادلهٔ بسل دوجواب مستقل دارد. درواقع قبلا برای مرتبه‌های غیرعدد درست ν، با استفاده از سری نامتناهی [معادلهٔ (۵.۱۱)]، این دوجواب را یافته و آنهارا با $J_\nu(x)$ و $J_{-\nu}(x)$ مشخص کرده‌ایم. مشکل اینجاست که‌وقتی ν عدد درست است، معادلهٔ (۸.۱۱) برقراراست وفقط یك جواب داریم. جواب دوم را می‌توان به‌کمك روشهای بخش ۶.۸ به‌دست آورد. به‌کمك این روش یك‌جواب مطلوب دیگر را برای معادلهٔ بسل به دست می‌آوریم، ولی جوابی نیست که به‌شکل استاندارد معمولی باشد.

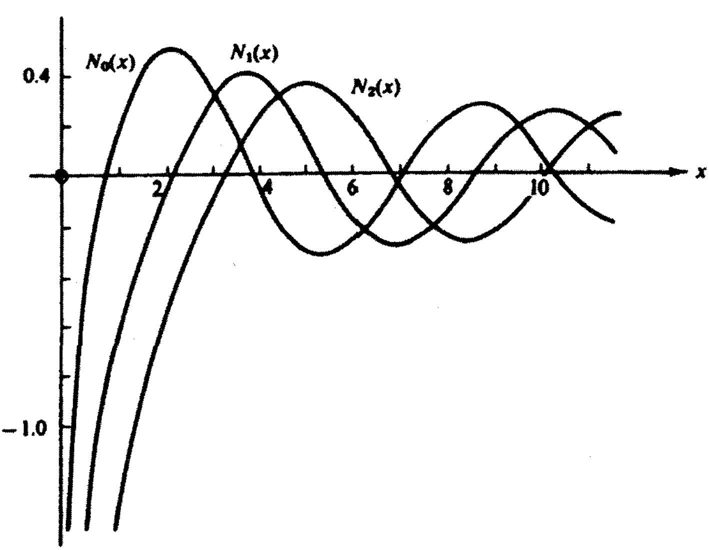
تعریف

به عنوان رهیافتی دیگر برای یافتن جواب دوم، ترکیبی خطی از $J_\nu(x)$ و $J_{-\nu}(x)$ را درنظر می‌گیریم

$$N_\nu(x)=\frac{\cos\nu\pi J_\nu(x)-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \qquad (۶۰.۱۱)$$

این تابع نویمان (شکل ۶.۱۱) است.[1] روشن است که $N_\nu(x)$ به ازای ν های غیرعدد درست درمعادلهٔ بسل صدق می‌کند، زیرا عبارت‌است از ترکیب خطی دوجواب معلوم یعنی $J_\nu(x)$ و $J_{-\nu}(x)$. ولی به ازای ν عدد درست، $\nu=n$، معادلهٔ (۸.۱۱) برقرار است و معادلهٔ (۶۰.۱۱) مبهم می‌شود. تعریف $N_\nu(x)$، عملا به دلیـل همین خاصیت مبهم بودن اختیار می‌شود. $N_n(x)$ را به کمك دستور هوپیتال برای صورتهای مبهم محاسبه می‌کنیم، درنتیجه

$$\begin{aligned}
N_n(x) &= \left.\frac{(d/d\nu)[\cos\nu\pi J_\nu(x)-J_{-\nu}(x)]}{(d/d\nu)\sin\nu\pi}\right|_{\nu=n} \\
&= \left.\frac{-\pi\sin n\pi J_n(x)+[\cos n\pi\,\partial J_\nu/\partial\nu-\partial J_{-\nu}/\partial\nu]}{\pi\cos n\pi}\right|_{\nu=n} \qquad (۶۱.۱۱)\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu}-(-1)^n\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right]\Bigg|_{\nu=n}
\end{aligned}$$



شکل ۶.۱۱ توابع نویمان، $N_0(x)$، $N_1(x)$، و $N_2(x)$.

---

۱. این تابع در AMS-55 ودر بسیاری از جدولهای ریاضی با $Y_\nu(x)$ مشخص شده است.

صورت سری

از بسط سری[1] به‌نتیجهٔ نامتناسب زیر می‌رسیم

$$N_n(x)=\frac{2}{\pi}J_n(x)\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{1}{r!(n+r)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}[\mathbf{F}(r)+\mathbf{F}(n+r)]-\frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(n-r-1)!}{r!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r} \tag{۶۲.۱۱}$$

که نمایانگرهمان وابستگی لگاریتمی است که انتظارش را داشتیم. البته، این رابطه استقلال J_n و N_n را ثابت می‌کند. $\mathbf{F}(r)$ تابع دی‌گامایی‌است که ازمشتقگیری‌فاکتوریلها درمخرج $J_\nu(x)$ به‌دست‌می‌آید [با بخش ۲.۱۵ وخصوصاً معادلهٔ (۳۹.۱۵) مقایسه‌کنید]. با استفاده از خواص تابع دی‌گاما، معادلهٔ (۶۲.۱۱) را به صورت زیر، که عدم تناسب آن اندکی کمتراست، می‌نویسیم

$$N_n(x)=\frac{2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\gamma-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}p^{-1}\right]J_n(x)-\frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{(x/2)^{n+2r}}{r!(n+r)!}\sum_{p=1}^{r}\left[\frac{1}{p}+\frac{1}{p+n}\right]-\frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(n-r-1)!}{r!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r} \tag{۶۳.۱۱}$$

به‌ازای $n=0$، به‌مقدار حدی زیرمی‌رسیم

$$N_0(x)=\frac{2}{\pi}(\ln x+\gamma-\ln 2)+O(x^2) \tag{۶۴.۱۱}$$

وبه‌ازای $\nu>0$

$$N_\nu(x)=-\frac{(\nu-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu+\dots,^* \tag{۶۵.۱۱}$$

---

۱. بااستفاده از $(d/d\nu)x^\nu=x^\nu\ln x$.

* توجه کنید که این صورت حدی هم به‌ازای مقادیر عدد درست و هم به‌ازای مقادیر غیرعدد درست شاخص ν به‌کار می‌رود.

$N_\nu(x)$ هم مانند سایر توابع بسل دارای نمایشهای انتگرالی است. به‌ازای $N_0(x)$

$$N_0(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(x\cosh t)dt$$

(۶۵.۱۱الف)

$$= -\frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{\cos(xt)}{(t^2-1)^{1/2}}dt, \qquad x>0$$

این صورتها را می‌توان به‌عنوان جزء موهومی نمایشهای هنکل، مسئلهٔ ۵.۴.۱۱، استخراج کرد. صورت دوم یك تبدیل کسینوس فوریه است.

برای تحقیق اینکه $N_\nu(x)$، تابع نویمان (شکل ۶.۱۱) یا تابع نوع دوم بسل، عملا به‌ازای مقادیر درست n درمعادلهٔ بسل صدق می‌کند یا خیر، می‌توانیم به‌ترتیب زیر اقدام کنیم. با مشتقگیری ازمعادلهٔ بسل مربوط به $J_{\pm\nu}(x)$ نسبت به ν، خواهیم داشت

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial J_{\pm\nu}}{\partial\nu}\right)+x\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial J_{\pm\nu}}{\partial\nu}\right)+(x^2-\nu^2)\frac{\partial J_{\pm\nu}}{\partial\nu}=2\nu J_{\pm\nu} \quad (۶۶.۱۱)$$

[همان‌گونه که در معادلهٔ (۶۱.۱۱) داریم] معادلهٔ مربوط به $J_{-\nu}$ را در $(-1)^\nu$ ضرب وازمعادلهٔ مربوط به J_ν کم، آنگاه حد $\nu\to n$ را محاسبه می‌کنیم، خواهیم داشت

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}N_n+x\frac{d}{dx}N_n+(x^2-n^2)N_n=\frac{2n}{\pi}[J_n-(-1)^nJ_{-n}] \quad (۶۷.۱۱)$$

سمت‌راست، به‌ازای $\nu=n$، عدددرست، وبااستفاده ازمعادلهٔ (۸.۱۱) صفرمی‌شود، ومشاهده می‌شود که $N_n(x)$ یکی‌از جوابهای معادلهٔ بسل است. بنابراین کلیترین جواب به‌ازای هر ν را می‌توان به‌صورت زیرنوشت

$$y(x)=AJ_\nu(x)+BN_\nu(x) \quad (۶۸.۱۱)$$

ازمعادلهٔ (۶۲.۱۱) برمی‌آیدکه N_n دست‌کم به‌صورت لگاریتمی واگرا می‌شود. ازاین‌رو هرشرط مرزی‌که متناهی‌بودن جواب را در مبدأ ایجاب کند [مثل غشای دایره‌ای مرتعش (بخش ۱.۱۱)] به‌طور خودبه‌خود $N_n(x)$ را کنار می‌گذارد. برعکس، در غیاب چنین شرطی، $N_n(x)$ را باید منظورکرد.

تعریف تابع نویمان $N_n(x)$ تا حدودی اختیاری است. معادلهٔ (۶۳.۱۱) حاوی جملاتی به‌صورت $a_nJ_n(x)$ است. آشکار است‌که هرمقدار متناهی ثابت a_n، یك جواب دیگرمعادلهٔ بسل‌را ارائه می‌کند. پس‌چرا a_n باید مقدار خاصی راکه در معادلهٔ (۶۳.۱۱) نشان داده‌شده است، داشته‌باشد؟ پاسخ این پرسش به‌وابستگی مجانبی ارتباط پیدا می‌کند

که دربخش ۶.۱۱ مطرح خواهدشد. اگر J_n با یك موج کسینوسی متناظر باشد، آنگاه N_n نظیر یك موج سینوسی خواهد بود. این رابطهٔ فاز مجانبی ساده و مناسب، پیامد همین نحوهٔ خاص درآمیختن J_n در N_n است.

روابط بازگشتی

با نشاندن معادلهٔ (۶۰.۱۱) به‌ازای $N_\nu(x)$ (ν غیرعدددرست) یا معادلهٔ (۶۱.۱۱)(ν عدد درست) در روابط بازگشتی [معادلات (۱۰.۱۱) و (۱۲.۱۱)] به‌ازای $J_n(x)$، بی‌درنگ پی‌می‌بریم که $N_\nu(x)$ درهمین‌روابط بازگشتی‌صدق‌می‌کند. این‌نکته، عملا خود دلیل‌دیگری است براینکه N_ν یکی‌از جوابهاست. به‌خوبی دقت کنیدکه عکس این‌نکته لزوماً واقعیت ندارد. ضرورتی ندارد که همهٔ جوابها در روابط بازگشتی یکسانی‌صدق‌کنند. نمونه‌ای از این نوع مشکل دربخش ۵.۱۱ مطرح خواهد شد.

فرمولهای رونسکیی

با توجه به‌بخش ۶.۸ و مسئلهٔ ۴.۱.۹، فرمول **رونسکیی**[1] برای جوابهای معادلهٔ بسل را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$u_\nu(x)v_\nu'(x)-u_\nu'(x)v_\nu(x)=\frac{A_\nu}{x} \qquad (۶۹.۱۱)$$

که درآن A_ν پارامتری است‌که به‌توابع بسل‌خاص $u_\nu(x)$ و $v_\nu(x)$ که تحت‌بررسی‌اند، بستگی دارد. A_ν ثابت، یعنی مستقل از x است. حالت‌خاص زیر را درنظربگیرید

$$u_\nu(x)=J_\nu(x), \quad v_\nu(x)=J_{-\nu}(x) \qquad (۷۰.۱۱)$$

$$J_\nu J'_{-\nu}-J'_\nu J_{-\nu}=\frac{A_\nu}{x} \qquad (۷۱.۱۱)$$

از آنجاکه A_ν مقداری است ثابت، می‌توان آن‌را در هرنقطهٔ مناسب نظیر $x=0$ محاسبه کرد. با استفاده از نخستین جمله‌ها در بسطهای سری [معادله‌های (۵.۱۱) و (۶.۱۱)] خواهیم داشت

$$\begin{aligned} &J_\nu \to \frac{x^\nu}{2^\nu \nu!}, \qquad J_{-\nu}\to \frac{2^\nu x^{-\nu}}{(-\nu)!} \\ &J'_\nu \to \frac{\nu x^{\nu-1}}{2^\nu \nu!}, \qquad J'_{-\nu}\to \frac{-\nu 2^\nu x^{-\nu-1}}{(-\nu)!} \end{aligned} \qquad (۷۲.۱۱)$$

---

۱. این‌نتیجه پیامد مساوی‌بودن $P(x)$ دربخش ۵.۸ با $p'(x)/p(x)$، ضریب متناظر درمعادلهٔ خود-الحاقی بخش ۱.۹، است.

با نشاندن درمعادلهٔ (۶۹۰۱۱) داریم

$$J_\nu(x)J'_{-\nu}(x)-J'_\nu(x)J_{-\nu}(x)=\frac{-2\nu}{x\nu!(-\nu)!}$$

$$=-\frac{2\sin\nu\pi}{\pi x} \qquad (73.11)$$

با استفاده از معادلهٔ (۳۲۰۱۰) داریم

$$\nu!(-\nu)!=\frac{\pi\nu}{\sin\pi\nu}$$

دقت کنیدکه A_ν به‌ازای هرکمیت درستی چون ν صفر می‌شودکه همین‌طور هم باید باشد زیرا صفرنشدن رونسکیی آزمونی برای استقلال دوجواب به‌شمار می‌آید. ازمعادلهٔ (۷۳۰۱۱)، روشن می‌شودکه J_n و J_{-n} وابستهٔ خطی‌اند.

بااستفاده ازروابط بازگشتی قبلی می‌توانیم به‌آسانی تعداد زیادی ازصورتهای دیگر این روابط را ایجادکنیم، ازآن‌جمله

$$J_\nu J_{-\nu+1}+J_{-\nu}J_{\nu-1}=\frac{2\sin\nu\pi}{\pi x} \qquad (74.11)$$

$$J_\nu J_{-\nu-1}+J_{-\nu}J_{\nu+1}=-\frac{2\sin\nu\pi}{\pi x} \qquad (75.11)$$

$$J_\nu N'_\nu-J'_\nu N_\nu=\frac{2}{\pi x} \qquad (76.11)$$

$$J_\nu N_{\nu+1}-J_{\nu+1}N_\nu=-\frac{2}{\pi x} \qquad (77.11)$$

وچندین رابطهٔ بازگشتی دیگررا نیزمی‌توان درمراجعی یافت‌که آنها را معرفی‌کرده‌ایم.

یادآوری می‌کنیم که رونسکیی درفصل ۸ از دوبابت باارزش است: (۱) درتعیین استقلال خطی یا وابستگی خطی جوابهای معادلات دیفرانسیل، و (۲) در پدیدآوردن یك صورت انتگرالی برای جواب دوم. دراینجا، صورتهای خاص رونسکیی وترکیب توابع بسل مستخرج ازرونسکیی، برای نمایش رفتارعام توابع بسل مختلف از اهمیت اساسی برخوردارند. رونسکییها برای آزمون جدولهای توابع بسل بسیار مفیدند. درفصل ۱۶، رونسکییها باز در ارتباط با توابع گرین ظاهرمی‌شوند.

مثال ۱۰.۳.۱۱ موجبرهای هم‌محور

امواج الکترومغناطیسی محبوس بین‌سطوح استوانه‌ای رسانای هم‌مرکز، $\rho=a$ و $\rho=b$، را درنظر بگیرید. قسمت اعظم روابط ریاضی مربوط به‌این مبحث دربخش ۶.۲ و درمثال ۲.۱.۱۱ بررسی‌شده‌است. برای آنکه موج ایستاده درمثالهای بالا را به‌موج پیشروندهٔ این مثال تبدیل کنیم، درمعادلهٔ (۴۰.۱۱) قرارمی‌دهیم: $a_{mn}=ib_{mn}$، آنگاه داریم

$$E_z=\sum_{m,n} b_{mn}J_m(\gamma\rho)e^{\pm im\varphi}e^{i(kz-\omega t)} \qquad (۷۸.۱۱)$$

سایرخواص مؤلفه‌های موج الکترومغناطیسی در موجبراستوانه‌ای ساده درمسائل ۹.۳.۱۱ و ۱۰.۳.۱۱ آمده‌اند. در مورد موجبر هم‌محور به‌یك تعمیم نیاز داریم. در این حالت مبدأ $\rho=0$ حذف شده‌است ($0<a\leqslant\rho\leqslant b$). ازاین‌رو تابع نویمان $N_m(\gamma\rho)$ را نمی‌توان حذف کرد. $E_z(\rho, \varphi, z, t)$ به‌صورت زیردرمی‌آید

$$E_z=\sum_{m,n}[b_{mn}J_m(\gamma\rho)+c_{mn}N_m(\gamma\rho)]e^{\pm im\varphi}e^{i(kz-\omega t)} \qquad (۷۹.۱۱)$$

با این‌شرط که

$$H_z=0 \qquad (۸۰.۱۱)$$

معادلهٔ اصلی مربوط به‌یك موج TM (مغناطیسی عرضی) را به‌دست می‌آوریم.

میدان الکتریکی (مماسی) باید روی سطوح رسانا صفر شود (شرط مرزی دیریکله)، یا

$$b_{mn}J_m(\gamma a)+c_{mn}N_m(\gamma a)=0 \qquad (۸۱.۱۱)$$

$$b_{mn}J_m(\gamma b)+c_{mn}N_m(\gamma b)=0 \qquad (۸۲.۱۱)$$

این معادلات غیرجبری را می‌توان حل کرد و $\gamma(\gamma_{mn})$ ونسبت c_{mn}/b_{mn} را به‌دست آورد. ازمثال ۲.۱.۱۱ داریم

$$k^2=\omega^2\mu_0\varepsilon_0-\gamma^2=\frac{\omega^2}{c^2}-\gamma^2 \qquad (۸۳.۱۱)$$

از آنجاکه k^2 باید برای یك موج حقیقی مثبت باشد، بسامد کمینه‌ای‌که (دراین مد TM) منتشرمی‌شود عبارت است از

$$\omega=\gamma c \qquad (۸۴.۱۱)$$

که درآن γ ازطریق شرایط مرزی، معادله‌های (۸۱.۱۱) و(۸۲.۱۱)، تعیین می‌شود. این کمیت عبارت است از بسامد قطع موجبر.

یك مد TE (الکتریکی عرضی) نیز وجود داردکه درآن $E_z=0$، و H_z به‌کمك

معادلهٔ (۷۹.۱۱) به‌دست‌می آید. دراین‌صورت، به‌جای معادله‌های (۸۱.۱۱) و(۸۲.۱۱)، شرایط مرزی نویمان‌را در اختیارداریم. سرانجام، برای موجبر هم‌محور (نه برای‌موجبر استوانه‌ای ساده، $a=0$) یك مد TEM (الکترومغناطیسی عرضی) $E_z=H_z=0$ نیز امکانپذیر است. این‌مد بایك موج تخت، مانند وضعیت درخلاً، متناظر است.

حالتهای ساده‌تر(بدون توابع نویمان، شرایط مرزی ساده‌تر) موجبر مدور درمسائل ۹.۳.۱۱ و ۱۰.۳.۱۱ مطرح شده‌اند.

درخاتمهٔ این بحث پیرامون توابع نویمان، دلایل زیر را برای معرفی تابع نویمان، $N_\nu(x)$، برمی‌شماریم:

۱. این تابع جواب مستقل دوم معادلهٔ بسل‌است‌که جواب‌کلی راکامل می‌کند.
۲. این تابع در مسائل فیزیکی خاصی مانند امواج الکترومغناطیسی در موجبرهای هم‌محورمورد نیازاست.
۳. تابع‌گرین معادلهٔ بسل (بخشهای ۵.۱۶ و ۶.۱۶) ازاین تابع به‌دست می‌آید.
۴. این تابع مستقیماً به‌دو تابع هنکل (بخش ۴.۱۱) منجرمی‌شود.

مسائل

۱.۳.۱۱ درستی بسطهای زیررا (فقط تا جملهٔ پیشرو) تحقیق‌کنید

$$N_0(x)\to\frac{2}{\pi}(\ln x+\gamma-\ln 2)$$

$$N_\nu(x)\to-\frac{(\nu-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu, \qquad \begin{matrix}\nu>0\\ x\ll 1\end{matrix}$$

به‌ازای $N_0(x)$ ازتعریفی‌که درمعادلهٔ (۶۱.۱۱) برای تابع نویمان بیان شده است، مشتق بگیرید.

۲.۳.۱۱ ثابت‌کنیدکه توابع نویمان N_n (n عدد درست) در روابط بازگشتی زیر صدق می‌کننـد

$$N_{n-1}(x)+N_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}N_n(x)$$

$$N_{n-1}(x)-N_{n+1}(x)=2N_n'(x)$$

راهنمایی. این‌روابط را می‌توان از طریق مشتقگیری از روابط بازگشتی J_ν، یا با استفاده ازصورت حدی N_ν ولی نه تقسیم‌کردن برصفر، به‌دست‌آورد.

۳.۳.۱۱ نشان دهیدکه

$$N_{-n}(x)=(-1)^n N_n(x)$$

۴.۳.۱۱ نشان دهید

$$N'_0(x)=-N_1(x)$$

۵.۳.۱۱ اگر Y و Z دوجواب معادلهٔ بسل باشند، نشان دهید

$$Y_\nu(x)Z'_\nu(x)-Y'_\nu(x)Z_\nu(x)=\frac{A_\nu}{x}$$

که در آن A_ν می‌تواند وابسته به ν ولی مستقل‌از x باشد. این‌مطلب درواقع حالت خاصی ازمسئلهٔ ۴.۱.۹ به‌شمارمی‌آید.

۶.۳.۱۱ درستی فرمولهای رونسکیی زیررا تحقیق‌کنید

$$J_\nu(x)J_{-\nu+1}(x)+J_{-\nu}(x)J_{\nu-1}(x)=\frac{2\sin\nu\pi}{\pi x}$$

$$J_\nu(x)N'_\nu(x)-J'_\nu(x)N_\nu(x)=\frac{2}{\pi x}$$

۷.۳.۱۱ درمحاسبهٔ ثابت رونسکیی به‌جای‌آنکه x رابه‌سوی صفرمیل دهیم، می‌توانیم از یکتایی سری توانی (بخش ۷.۵) استفاده کنیم. در نتیجه ضریب x^{-1} در بسط سری $u_\nu(x)v'_\nu(x)-u'_\nu(x)v_\nu(x)$ عبارت است‌از A_ν. به‌کمك بسط سری نشان دهیدکه هریك ازضرایب x^0 و x^1 دربسط $J_\nu(x)J'_{-\nu}(x)-J'_\nu(x)J_{-\nu}(x)$ برابرصفراست.

۸.۳.۱۱ (الف) ازطریق مشتقگیری ونشاندن درمعادلهٔ دیفرانسیل بسل نشان دهید عبارت

$$\int_0^\infty \cos(x\cosh t)\,dt$$

یکی ازجوابهاست.

راهنمایی. انتگرال‌آخری را می‌توانید به‌صورت زیر بازآرایی‌کنید

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}\{x\sin(x\cosh t)\sinh t\}\,dt$$

(ب) نشان دهید عبارت زیر نسبت‌به $J_0(x)$ مستقل خطی‌است

$$N_\circ(x) = -\frac{۲}{\pi}\int_\circ^\infty \cos(x \cosh t)dt$$

۹.۳.۱۱ شعاع یك موجبر استوانه‌ای $r_\circ$ است. مؤلفه‌های غیر صفر میدانهای الکتریکی و مغناطیسی‌را برای (الف) $TM_{\circ۱}$، موج مغناطیسی عرضی ($H_z = H_\rho = E_\varphi = \circ$)، (ب) $TE_{\circ۱}$، موج الکتریکی‌عرضی ($E_z = E_\rho = H_\varphi = \circ$)، بیابید. شاخص پایین ۰۱ نشانگر آن است‌که مولفهٔ طولی (E_z یا H_z) متضمن $J_\circ$ است و اولین صفر $J_\circ$ یا $J'_\circ$ در شرط مرزی صدق می‌کند.

راهنمایی. تمام مؤلفه‌های موج دارای عامل یکسان $\exp i(kz-\omega t)$ هستند.

۱۰.۳.۱۱ بسامد کمینه‌ای که ازیك موجبر استوانه‌ای مدور (به‌شعاع $r_\circ$) می‌گذرد، برای یك مد نوسان معلوم عبارت است‌از

$$\nu_{\min} = \frac{c}{\lambda_c}$$

که λ_c را شرط مرزی زیر تعیین می‌کند

$$J_n\left(\frac{۲\pi r_\circ}{\lambda_c}\right) = \circ \quad TM_{nm} \text{ برای مد}$$

$$J'_n\left(\frac{۲\pi r_\circ}{\lambda_c}\right) = \circ \quad TE_{nm} \text{ برای مد}$$

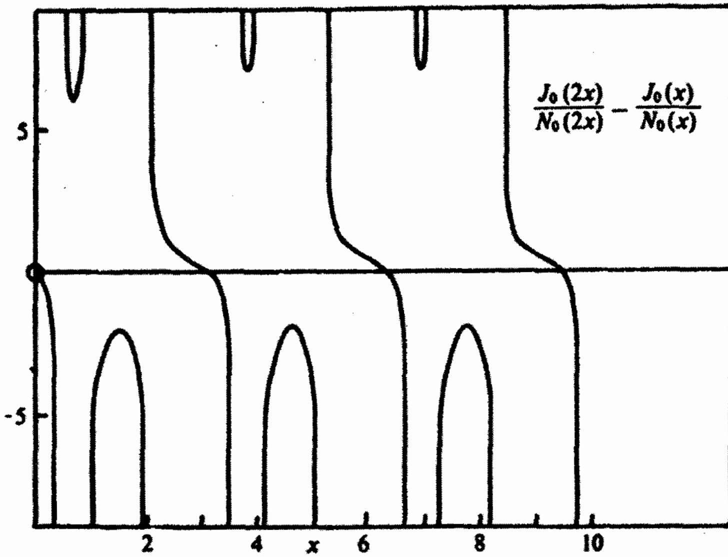
شاخص پایین n، مرتبهٔ تابع بسل، و m صفر به‌کاررفته را نشان می‌دهد. این‌طول موج‌قطع، λ_c، را برای سه‌مد TM و سه‌مد TE، که بلندترین طول‌موجهای قطع را دارند، پیداکنید. نتیجهٔ حاصل را برحسب نمودار $J_\circ$، $J_۱$، و $J_۲$ (شکل ۲.۱۱) توضیح دهید.

۱۱.۳.۱۱ برنامه‌ای بنویسید که ریشه‌های متوالی تابع نویمان $N_n(x)$، یعنی α_{ns} در $N_n(\alpha_{ns}) = \circ$، را محاسبه کنید. پنج ریشهٔ اول $N_\circ$، $N_۱$، و $N_۲$ را جدولبندی کنید. مقادیری را که برای ریشه‌ها یافته‌اید با مقادیری‌که در AMS-55 (فصل ۹) فهرستبندی شده، بیازمایید.

راهنمایی. برای شگردهای ریشه‌یابی وتوصیه‌هایی دراین‌مورد، به‌پیوست ۱ رجوع کنید.

مقدار آزمونی. $\alpha_{۱۲} = ۵٫۴۲۹۶۸$.

۱۲.۳.۱۱ شرایط مرزی موجبر هم‌محور برای حالت $m = \circ$، $a = ۱$، و $b = ۲$ به‌رابطهٔ زیرمنجر می‌شود (شکل ۷.۱۱)



شکل ۷.۱۱

$$f(x)=\frac{J_\circ(۲x)}{N_\circ(۲x)}-\frac{J_\circ(x)}{N_\circ(x)}$$

(الف) $f(x)$ را به‌ازای ۰ر۰(۱ر۰)۰ر۱۰ $=x$ محاسبه و آن را برحسب x رسم کنید تا محل تقریبی ریشه‌ها را بیابید.

(ب) ازیك زیر-برنامهٔ ریشه‌یاب برای تعیین دقیقتر سه‌ریشهٔ اول استفاده‌کنید.

پاسخ. ۹ر۴۱۸۲، ۶ر۲۷۳۴، ۳ر۱۲۳۰.

یادآوری. می‌توان انتظارداشت‌که ریشه‌های بالاتر **پس از بازه‌هایی ظهورکنندکه طول آن بازه‌ها به π نزدیك شود.** چرا اینطوراست؟ دربخش ۵.۹ از AMS-55، یك فرمول‌تقریبی برای‌این‌ریشه‌ها داده‌می‌شود.تابع $g(x)=J_\circ(x)N_\circ(۲x)-J_\circ(۲x)N_\circ(x)$ بسیارخوش‌رفتارتر ازتابع $f(x)$ است‌که قبلا مورد بحث قرارگرفت.

۴.۱۱ توابع هنکل

بسیاری از مؤلفان ترجیح می‌دهندکه توابع هنکل را به کمك نمایشهای انتگرالی تعریف کنند، آنگاه ازآنها برای‌تعریف تابع‌نویمان $N_\nu(z)$ بهره‌گیرند. طرحی‌کلی‌ازاین‌رهیافت درانتهای این بخش مطرح می‌شود

تعریفها

از آنجاکه ماقبلا تابع نویمان‌را ازطریق شگردهای مقلماتیتر (و ضعیفتر) به‌دست آورده‌ایم، می‌توانیم از آن برای تعریف توابع هنکل $H_\nu^{(1)}(x)$ و $H_\nu^{(2)}(x)$ استفاده‌کنیم

$$H_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x)+i\,N_\nu(x) \tag{۸۵.۱۱}$$

و

$$H_\nu^{(2)}(x)=J_\nu(x)-iN_\nu(x) \tag{۸۶.۱۱}$$

این عبارت دقیقاً شبیه آن است که بگیریم

$$e^{\pm i\theta}=\cos\theta\pm i\sin\theta \tag{۸۷.۱۱}$$

$H_\nu^{(1)}$ و $H_\nu^{(2)}$ به ازای شناسه‌های حقیقی، همیوغ مختلط یکدیگر‌ند. میزان این شباهت را با درنظر گرفتن شکلهای مجانبی (بخش ۶.۱۱) بهتر می‌توان مشاهده کرد. درواقع توابع هنکل به‌دلیل رفتار مجانبی‌شان مفید واقع‌می‌شوند.

بسط سری $H_\nu^{(1)}(x)$ و $H_\nu^{(2)}(x)$ را می‌توان باترکیب‌کردن معادله‌های (۵.۱۱) و (۶۳.۱۱) به‌دست آورد. اغلب اوقات تنها جملهٔ اول موردنظر است؛ این جمله عبارت است از

$$H_0^{(1)}(x)\approx i\frac{2}{\pi}\ln x+1+i\frac{2}{\pi}(\gamma-\ln 2)+\cdots \tag{۸۸.۱۱}$$

$$H_\nu^{(1)}(x)\approx -i\,\frac{(\nu-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu+\cdots,\quad \nu>0 \tag{۸۹.۱۱}$$

$$H_0^{(2)}(x)\approx -i\frac{2}{\pi}\ln x+1-i\frac{2}{\pi}(\gamma-\ln 2)+\cdots \tag{۹۰.۱۱}$$

$$H_\nu^{(2)}(x)\approx i\frac{(\nu-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu+\cdots,\quad \nu>0 \tag{۹۱.۱۱}$$

ازآنجاکه توابع هنکل‌عبارت‌اند ازترکیب خطی (باضرایب ثابت) J_ν و N_ν، در روابط بازگشتی یکسانی [معادلهٔ (۱۰.۱۱) و (۱۲.۱۱)] صدق می‌کنند

$$H_{\nu-1}(x)+H_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}H_\nu(x) \tag{۹۲.۱۱}$$

$$H_{\nu-1}(x)-H_{\nu+1}(x)=2H'_\nu(x) \tag{۹۳.۱۱}$$

برای هردوتابع $H_\nu^{(1)}(x)$ و $H_\nu^{(2)}(x)$.

می‌توان انواع گوناگونی ازفرمولهای رونسکیی را به‌دست آورد

$$H_\nu^{(2)}H_{\nu+1}^{(1)}-H_\nu^{(1)}H_{\nu+1}^{(2)}=\frac{4}{i\pi x} \qquad (۹۴.۱۱)$$

$$J_{\nu-1}H_\nu^{(1)}-J_\nu H_{\nu-1}^{(1)}=\frac{2}{i\pi x} \qquad (۹۵.۱۱)$$

$$J_\nu H_{\nu-1}^{(2)}-J_{\nu-1}H_\nu^{(2)}=\frac{2}{i\pi x} \qquad (۹۶.۱۱)$$

مثال ۱۰۴.۱۱ امواج پیشروندهٔ استوانه‌ای

به‌عنوان نمونه‌ای ازکاربردهای توابع‌هنکل، مسئلهٔ موج دوبعدی مشابه‌با غشای مدورمرتعش مسئلهٔ ۲۵.۱.۱۱ را درنظربگیرید. حال فرض‌کنیدکه امواج در $r=0$ تولید می‌شوند و تا بینهایت به‌برونسو می‌روند . به‌جای امواج ایستاده امواج پیشرونـده را می‌نشانیم. معادلهٔ دیفرانسیل به‌همان صورت قبل‌باقی می‌ماند ولی شرایط مرزی تغییرمی‌کنند. حال برای‌آنکه جواب، یك موج برونرونده را توصیف‌کند، قرارداد می‌کنیم که به‌ازای مقادیر بزرگ r، جواب مانند

$$U \rightarrow e^{i(kr-\omega t)} \qquad (۹۷.۱۱)$$

رفتارکند. k مانند قبل عدد موج است. برای سادگی فرض می‌شودکه هیچ وابستگی سمتی وجود ندارد، یعنی یاتکانهٔ زاویه‌ای صفر است یا $m=0$. در بخشهای ۴.۷ و ۶.۱۱ نشان داده‌ایم ونشان خواهیم دادکه رفتار مجانبی $H_0^{(1)}(kr)$ به‌صورت زیراست

$$H_0^{(1)}(kr) \rightarrow e^{ikr} \qquad (۹۸.۱۱)$$

درنتیجه شرط مرزی دربینهایت، جواب موجی‌ما را به‌صورت زیر تعیین می‌کند

$$U(r,t)=H_0^{(1)}(kr)e^{-i\omega t} \qquad (۹۹.۱۱)$$

این‌جواب در $r \rightarrow 0$ واگرا می‌شود، که درست همان رفتاری‌است‌که به‌دلیل وجودچشمه در مبدأ انتظارش را داشتیم.

انتخاب یك مسئلهٔ موج دو بعدی‌برای نمایش تابع هنکل $H_0^{(1)}(z)$ امری اتفاقی‌نبوده است. توابع بسل به‌طرق گوناگون، مثلا درجداسازی مختصات مخروطی، ظاهرمی‌شوند. ولی از همه متداولتر، یافتن این توابـع به‌کمك معادله‌هـای شعاعی حاصل از جداسازی متغیرهای معادلهٔ هلمهولتز در مختصات استوانه‌ای و قطبی کروی است . ما درنمایش فوق صورت واگنی از مختصات استوانه‌ای را درنظر گرفته‌ایم. اگر مختصات قطبی کروی را به‌کار برده بودیم (امواج کروی)، می‌باید با شاخص پایین $\nu=n+(1/2)$، که n عددی

درست است، روبه‌رو می‌شدیم. این مقادیر خاص، توابع کروی بسل راکه در بخش ۷.۱۱ مطرح می‌شوند، ارائه می‌کنند.

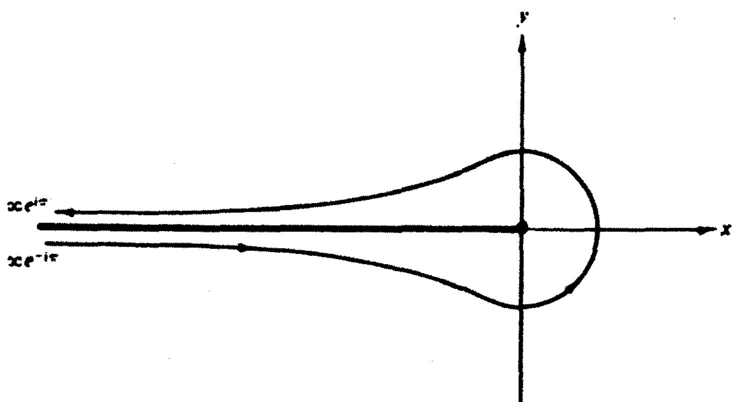
نمایش انتگرالی پربندی توابع هنکل

نمایش انتگرالی (انتگرال اشلافلی)

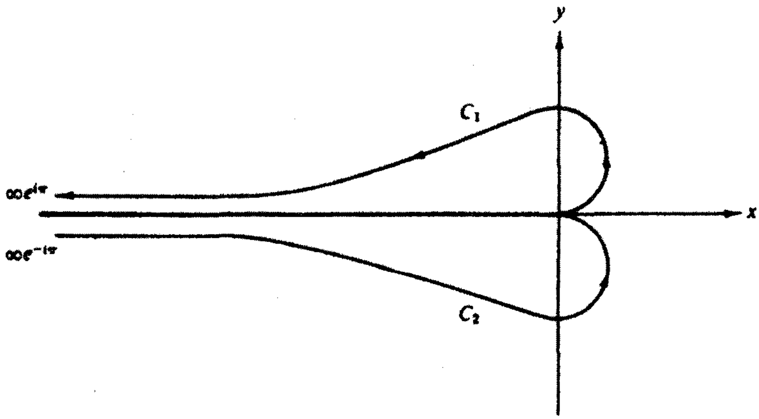
$$J_\nu(x)=\frac{1}{2\pi i}\int e^{(x/2)(t-1/t)}\,\frac{dt}{t^{\nu+1}} \qquad (100.11)$$

را می‌توان به‌آسانی به‌ازای $\nu=n$، n عدددرست، اثبات کرد(با توجه به‌این‌نکته‌که‌صورت کسر، همان تابع مولد [معادلۀ (۱.۱۱)] است وانتگرال پیرامون مبدأ گرفته می‌شود). اگر ν عدد درست نباشد، انتگرالده تك‌مقدار نیست و به‌یك‌خط برش درصفحۀ مختلط نیازاست. با برگزیدن محور حقیقی منفی به‌عنوان خط برش و بااستفاده ازپربندی که درشکل ۸.۱۱ نشان داده‌شده‌است، می‌توانیم معادلۀ(۱۰۰.۱۱) را به νهای غیرعدد درست نیز بسط دهیم. بانشاندن معادلۀ(۱۰۰.۱۱) درمعادلۀ دیفرانسیل بسل، می‌توانیم انتگرالده مرکب را به‌کمك یك دیفرانسیل کامل که در $t\to\infty e^{\pm i\pi}$ صفر می‌شود نمایش دهیم (با مسئلۀ ۱۶.۱.۱۱ مقایسه‌کنید).

حال پربند را، همان‌گونه که در شکل ۹.۱۱ نشان داده شده است، چنان تغییرشکل می‌دهیم که درامتداد محورحقیقی مثبت به‌مبدأ نزدیك شود. این رهیافت خاص تضمین‌می‌کند که دیفرانسیل کاملی که ذکرشد به‌دلیل وجود عامل $e^{-x/2t}$ در $t\to 0$ صفرشود. درنتیجه هر یك از اجزای مجزای از $\infty e^{-i\pi}$ تا ۰ و از ۰ تا $\infty e^{i\pi}$ یکی از جوابهای معادلۀ بسل به‌شمار می‌آید. توابع زیررا تعریف می‌کنیم



شکل ۸.۱۱ پربند تابع بسل.



شکل ۹.۱۱ پربندهای تابع هنکل.

$$H_\nu^{(1)}(x)=\frac{1}{\pi i}\int_0^{\infty e^{i\pi}} e^{(x/2)(t-1/t)}\frac{dt}{t^{\nu+1}} \tag{۱۰۱.۱۱}$$

$$H_\nu^{(2)}(x)=\frac{1}{\pi i}\int_{\infty e^{-i\pi}}^{0} e^{(x/2)(t-1/t)}\frac{dt}{t^{\nu+1}} \tag{۱۰۲.۱۱}$$

این عبارتها به‌طور خاصی مناسب‌اند، زیرا آنها را می‌توان از طریق روش تندترین کاهش (بخش ۴.۷، جلد اول) بررسی کرد. $H_\nu^{(1)}(x)$ در $t=+i$ یك نقطهٔ زینی دارد، در حالی که $H_\nu^{(2)}(x)$ در $t=-i$ دارای یك نقطهٔ زینی است.

این مسئله باقی ماند که معادله‌های (۱۰۱.۱۱) و (۱۰۲.۱۱) را به‌تعریف قبلی تابع هنکل [معادله‌های (۸۵.۱۱) و (۸۶.۱۱)] مربوط کنیم. از آنجا که با بازبینی ترکیب معادله‌های (۱۰۰.۱۱) تا (۱۰۲.۱۱)، خواهیم داشت

$$J_\nu(x)=\frac{1}{2}\left[H_\nu^{(1)}(x)+H_\nu^{(2)}(x)\right] \tag{۱۰۳.۱۱}$$

فقط باید نشان دهیم که

$$N_\nu(x)=\frac{1}{2i}\left[H_\nu^{(1)}(x)-H_\nu^{(2)}(x)\right] \tag{۱۰۴.۱۱}$$

این کاررا می‌توان درمراحل زیر انجام داد:

۱. باتغییرمتغیرهای $t=e^{i\pi}/s$ برای $H_\nu^{(1)}$ و $t=e^{-i\pi}/s$ برای $H_\nu^{(2)}$، داریم

$$H_\nu^{(1)}(x)=e^{-i\nu\pi}H_{-\nu}^{(1)}(x) \tag{۱۰۵.۱۱}$$

$$H_\nu^{(2)}(x)=e^{i\nu\pi}H_{-\nu}^{(2)}(x) \tag{۱۰۶.۱۱}$$

۲. ازمعادله‌های (۱۰۳.۱۱) $(\nu\to-\nu)$، (۱۰۵.۱۱)، و (۱۰۶.۱۱) داریم

$$J_{-\nu}(x)=\frac{1}{2}\left[e^{i\nu\pi}H_{\nu}^{(1)}(x)+e^{-i\nu\pi}H_{\nu}^{(2)}(x)\right] \qquad (۱۰۷.۱۱)$$

۳. سرانجام J_ν [معادلهٔ (۱۰۳.۱۱)] و $J_{-\nu}$ [معادلهٔ (۱۰۷.۱۱)] را در معادلهٔ معرف N_ν، معادلهٔ (۶۰.۱۱) می‌نشانیم. درنتیجه معادلهٔ (۱۰۴.۱۱) به‌دست می‌آید وانتگرالهای پربندی معادلهٔ (۱۰۱.۱۱) و (۱۰۲.۱۱) به‌عنوان توابع هنکل تثبیت می‌شوند.

قبلا هم بانمایشهای انتگرالی برخورد داشته‌ایم: معادلهٔ (۳۵.۱۰) برای $\Gamma(z)$، و نمایشهای مختلف $J_\nu(z)$ دربخش ۱.۱۱. اینك پس از اینکه نمایش انتگرالی توابع هنکل رابه‌دست آورده‌ایم، شاید به‌جا باشد بپرسیم چرا این‌نمایشهای انتگرالی‌را جستجومی‌کنیم؟ دست‌کم چهار دلیل برای این کار وجود دارد. دلیل اول، صرفاً، جذابیت توأم باظرافت این نمایشهاست، برای‌گروهی از دست‌اندرکاران، این نمایشها بسیار جالب‌اند. دوم‌اینکه، نمایشهای انتگرالی به‌ماکمك می‌کنند تا دوجواب مستقل خطی‌را از یکدیگر تمیز دهیم. در شکل ۷.۱۱، پربندهای C_1 و C_2 از نقاط زینی متفاوتی می‌گذرند (بخش ۴.۷). در مورد توابع لژاندر، پربند مربوط به $P_n(z)$ (شکل ۹.۱۲) و پربند مربوط به $Q_n(z)$ نقاط تکین متفاوتی را دور می‌زنند.

سوم اینکه، نمایشهای‌انتگرالی، کارکردن باتوابع خاص مختلف، تجزیه‌وتحلیل آنها، وایجاد روابطی میان آنهارا میسر می‌سازد. دلیل چهارم و شاید مهمترین دلیل آن است که نمایشهای انتگرالی درگسترش بسطهای مجانبی بسیار مفید واقع می‌شوند. یکی از رهیافتها یعنی روش تندترین کاهش در بخش ۴.۷ آمده است. رهیافتی دیگر، یعنی بسط مستقیم یك نمایش انتگرالی دربخش ۶.۱۱ برای تابع تعدیل‌یافته بسل $K_\nu(z)$ ارائه شده است. همین روش‌را می‌توان برای‌دستیابی به‌بسطهای مجانبی توابع‌فوق هندسی همشار M و U به‌کاربرد (مسئلهٔ ۱۳.۶.۱۳).

درنتیجه، معرفی توابع هنکل به‌دلایل زیرصورت‌پذیرفته است:

۱. این‌توابع مشابه با $e^{\pm ix}$، برای توصیف امواج پیشرونده مفید واقع می‌شوند.
۲. تعریفی دیگر (انتگرال‌پربندی) وظریف برای توابع بسل ارائه می‌کنند.
۳. $H_\nu^{(1)}$ برای تعریف تابع تعدیل‌یافتهٔ بسل K_ν دربخش ۵.۱۱ به‌کارمی‌رود.

مسائل

۱.۴.۱۱ درستی فرمولهای **رونسکیی** زیررا تحقیق کنید

$$J_\nu(x)H_\nu^{(1)\prime}(x)-J_\nu'(x)H_\nu^{(1)}(x)=\frac{2i}{\pi x} \qquad \text{(الف)}$$

(ب)
$$J_\nu(x)H_\nu^{(2)\prime}(x)-J'_\nu(x)H_\nu^{(2)}(x)=\frac{-i\times 2}{\pi x}$$

(ج)
$$N_\nu(x)H_\nu^{(1)\prime}(x)-N'_\nu(x)H_\nu^{(1)}(x)=\frac{-2}{\pi x}$$

(د)
$$N_\nu(x)H_\nu^{(2)\prime}(x)-N'_\nu(x)H_\nu^{(2)}(x)=\frac{-2}{\pi x}$$

(ه)
$$H_\nu^{(1)}(x)H_\nu^{(2)\prime}(x)-H_\nu^{(1)\prime}(x)H_\nu^{(2)}(x)=\frac{-i\times 4}{\pi x}$$

(و)
$$H_\nu^{(2)}(x)H_{\nu+1}^{(1)}(x)-H_\nu^{(1)}(x)H_{\nu+1}^{(2)}(x)=\frac{4}{i\pi x}$$

(ز)
$$J_{\nu-1}(x)H_\nu^{(1)}(x)-J_\nu(x)H_{\nu-1}^{(1)}(x)=\frac{2}{i\pi x}$$

۲.۴.۱۱ نشان دهید که صورتهای انتگرالی

(الف)
$$\frac{1}{i\pi}\int_{0\,C_1}^{\infty e^{i\pi}} e^{(x/2)(t-1/t)}\,\frac{dt}{t^{\nu+1}}=H_\nu^{(1)}(x)$$

(ب)
$$\frac{1}{i\pi}\int_{\infty e^{-i\pi}\,C_2}^{0} e^{(x/2)\,(t-1/t)}\frac{dt}{t^{\nu+1}}=H_\nu^{(2)}(x)$$

در معادلهٔ دیفرانسیل بسل صدق می‌کنند. پربندهای C_1 و C_2 در شکل ۹.۱۱ نشان داده شده‌اند.

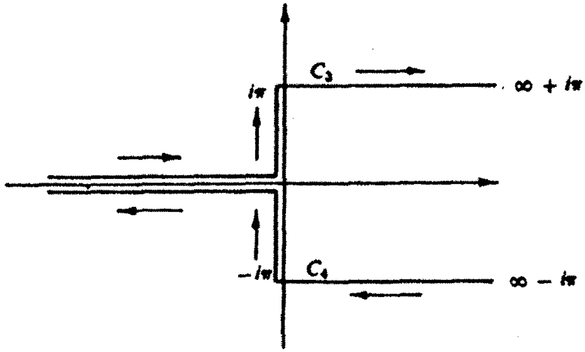
۳.۴.۱۱ بااستفاده ازانتگرالها و پربندهای مسئلهٔ ۲.۴.۱۱، نشان دهید

$$\frac{1}{2i}\left[\,H_\nu^{(1)}(x)-H_\nu^{(2)}(x)\,\right]=N_\nu(x)$$

۴.۴.۱۱ نشان دهید که باتبدیل انتگرالهای مسئلهٔ ۲.۴.۱۱ می‌توان به‌عبارتهای زیر رسید (شکل ۱۰.۱۱ را ببینید).

(الف)
$$H_\nu^{(1)}(x)=\frac{1}{\pi i}\int_{C_3} e^{x\sinh\gamma-\nu\gamma}\,d\gamma$$

(ب)
$$H_\nu^{(2)}(x)=\frac{1}{\pi i}\int_{C_4} e^{x\sinh\gamma-\nu\gamma}\,d\gamma$$



شکل ۱۰۰۱۱ پربندهای تابع هنکل.

۵۰۴۰۱۱ (الف) $H_0^{(1)}(x)$ درمعادلهٔ (۱۰۱۰۱۱) را به‌صورت زیر تبدیل کنید

$$H_0^{(1)}(x)=\frac{1}{i\pi}\int_C e^{ix\cosh s}ds$$

که در آن پربند C از $-\infty-i\pi/2$ تا $\infty+i\pi/2$ ادامه دارد و از مبدأ صفحهٔ s می‌گذرد.

(ب) درستی بازنویسی $H_0^{(1)}(x)$ به‌صورت زیررا تحقیق کنید

$$H_0^{(1)}(x)=\frac{2}{i\pi}\int_0^{\infty+i\pi/2} e^{ix\cosh s}ds$$

(ج) تحقیق کنیدکه این‌نمایش انتگرالی عملا درمعادلهٔ دیفرانسیل بسل صدق‌می‌کند. (وجود $i\pi/2$ درحد بالا امری اساسی نیست، به‌عنوان یك ضریب همگرایی ازآن استفاده می‌شود. می‌توانیم به‌جای‌آن $ia\pi/2$ را بنشانیم و حد بگیریم.)

۶۰۴۰۱۱ بااستفاده ازعبارت

$$H_0^{(1)}(x)=\frac{2}{i\pi}\int_0^{\infty} e^{ix\cosh s}ds$$

نشان دهید

(الف) $$J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin(x\cosh s)ds$$

(ب) $$J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_1^{\infty}\frac{\sin(xt)}{\sqrt{t^2-1}}dt$$

نتیجهٔ اخیر یکی از تبدیلهای سینوسی فوریه است.

۷.۴.۱۱ بااستفاده از

$$H_0^{(1)}(x)=\frac{2}{i\pi}\int_0^\infty e^{ix\cosh s}ds$$

نشان دهید

(الف) $$N_0(x)=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(x\cosh s)ds$$

(ب) $$N_0(x)=-\frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{\cos(xt)}{\sqrt{t^2-1}}dt$$

اینها همان معادلات (۶۵.۱۱ الف) هستند.

نتیجهٔ اخیر یك تبدیل کسینوسی فوریه‌است.

۵.۱۱ توابع تعدیل‌یافتهٔ بسل، $I_\nu(x)$ و $K_\nu(x)$

با تفکیك معادلهٔ هلمهولتز

$$\nabla^2\psi+k^2\psi=0$$

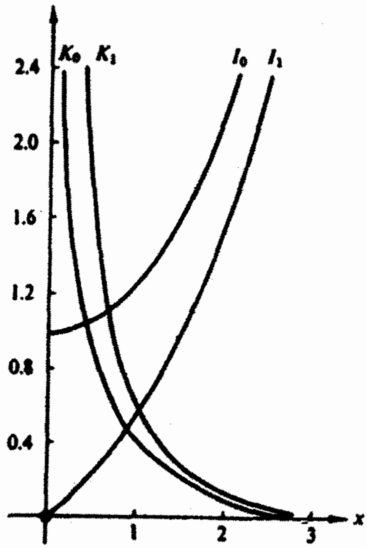
درمختصات استوانه‌ای، معادلهٔ (۲۲.۱۱ الف)، یا معادلهٔ بسل، را به‌دست می‌آوریم. توابع بسل $J_\nu(k\rho)$، ونویمان $N_\nu(k\rho)$ و هر ترکیب خطی‌آنها نظیر توابع هنکل $H_\nu^{(1)}(k\rho)$ و $H_\nu^{(2)}(k\rho)$ درمعادلهٔ (۲۲.۱۱ الف) صدق می‌کنند. دراینجا معادلهٔ هلمهولتز بخش فضایی پدیدهٔ موجی‌را توصیف‌می‌کند. اگر به‌جای این، یك‌مسئلهٔ پخش داشتیم، آنگاه به‌جای معادلهٔ هلمهولتز معادلهٔ زیر می‌نشست

$$\nabla^2\psi-k^2\psi=0 \qquad (۱۰۸.۱۱)$$

و شبیه‌معادلهٔ (۲۲.۱۱ الف)، به‌صورت زیر درمی‌آمد

$$\rho^2\frac{d^2}{d\rho^2}Y_\nu(k\rho)+\rho\frac{d}{d\rho}Y_\nu(k\rho)-(k^2\rho^2+\nu^2)Y_\nu(k\rho)=0 \qquad (۱۰۹.۱۱)$$

معادلهٔ هلمهولتزرا می‌توان ازطریق تبدیل $k\rightarrow ik$ به‌معادلهٔ پخش تبدیل کرد. به‌همین ترتیب، تبدیل $k\rightarrow ik$، معادلهٔ (۲۲.۱۱ الف) را به‌معادلهٔ (۱۰۹.۱۱) تبدیل می‌کند ونشان می‌دهد که



شکل ۱۱۰۱۱ توابع تعدیل‌یافتهٔ بسل.

$$Y_\nu(k\rho) = Z_\nu(ik\rho)$$

جوابهای معادلهٔ (۱۰۹.۱۱)، عبارت‌اند از توابع بسل با شناسهٔ موهومی. برای دستیابی به‌جوابی که درمبدأ منظم باشد، Z_ν را برابر تابع منظم بسل J_ν می‌گیریم. متداول(ومناسب) است‌که بهنجارش‌را چنان برگزینیم که

$$Y_\nu(k\rho) = I_\nu(x) \equiv i^{-\nu} J_\nu(ix) \qquad (۱۱۰.۱۱)$$

(دراینجا برای‌سادگی، متغیر $k\rho$ را با x تعویض کرده‌ایم.) این تابع‌را غالباً به‌صورت زیر می‌نویسند

$$I_\nu(x) = e^{-\nu\pi i/۲} J_\nu(xe^{i\pi/۲}) \qquad (۱۱۱.۱۱)$$

$I_\circ$ و $I_۱$ درشکل ۱۱.۱۱ نشان داده شده‌اند.

صورت سری

این تابع، برحسب بسط سری، معادل آن است که علامت $(-۱)^s$ را در معادلهٔ (۵.۱۱) برداریم وبنویسیم

$$I_\nu(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!(s+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu}$$
(۱۱۲.۱۱)
$$I_{-\nu}(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{s!(s-\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s-\nu}$$

افزودن ضریب بهنجارش $i^{-\nu}$، درهر جمله i^ν را حذف و $I_\nu(x)$ را حقیقی‌می‌کند. درنتیجه به‌ازای‌عدد درست ν

$$I_n(x)=I_{-n}(x) \qquad (۱۱۳.۱۱)$$

روابط بازگشتی

روابط بازگشتی‌راکه $I_\nu(x)$ درآنها صدق‌می‌کند، می‌توان ازبسطهای سری به‌دست‌آورد، ولی شاید ساده‌تر باشدکه باروابط بازگشتی موجود برای $J_\nu(x)$ کارکنیم. اگر به‌جای x کمیت $ix-$ را بنشانیم ومعادلهٔ (۱۱۰.۱۱) را به‌صورت زیربازنویسی کنیم

$$J_\nu(x)=i^\nu I_\nu(-ix) \qquad (۱۱۴.۱۱)$$

آنگاه، معادلهٔ (۱۰.۱۱) به‌صورت زیر در می‌آید

$$i^{\nu-1}I_{\nu-1}(-ix)+i^{\nu+1}I_{\nu+1}(-ix)=\frac{2\nu}{x}i^\nu I_\nu(-ix)$$

به‌کمك تعویض x با ix، رابطهٔ بازگشتی زیررا برای $I_\nu(x)$ داریم

$$I_{\nu-1}(x)-I_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}I_\nu(x) \qquad (۱۱۵.۱۱)$$

معادلهٔ (۱۲.۱۱) به‌معادلهٔ زیرتبدیل می‌شود

$$I_{\nu-1}(x)+I_{\nu+1}(x)=2I'_\nu(x) \qquad (۱۱۶.۱۱)$$

اینها روابطی بازگشتی‌اندکه درمسئلهٔ ۱۴.۱.۱۱ مورد استفاده قرارگرفتند.

لازم به‌تذکراست‌که هرچند دو رابطهٔ بازگشتی، معادلات(۱۱۵.۱۱) و(۱۱۶.۱۱)، یا مسئلهٔ ۷.۵.۱۱، یك معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم را مشخص می کنند ، عکس این موضوع صادق نیست. یعنی‌معادلهٔ دیفرانسیل، روابط‌بازگشتی‌را به‌طوریکتا تعیین نمی‌کند معادلات (۱۱۵.۱۱) و(۱۱۶.۱۱) ومسئلهٔ ۷.۵.۱۱ این مطلب‌را نشان می‌دهند.

ازمعادلهٔ (۱۱۳.۱۱) مشاهده می‌شودکه هرگاه ν عددی درست باشد، تنها یك‌جواب مستقل داریم، درست مانند توابع بسل J_ν. انتخاب یك جواب مستقل دیگر برای معادلهٔ (۱۵۸.۱۱) براساس تناسب بامبحث تحت بررسی صورت می‌گیرد. جواب دیگری که در اینجا می‌آوریم، براساس رفتار مجانبی، به‌صورتی‌که دربخش بعد نشان می‌دهیم، برگزیده

شده است. درهم برهمی گزینه‌ها و نمادهـای مربوط به این جواب شاید نسبت به‌هر مورد دیگر در این زمینه بیشتر باشد.[1] بسیاری ازمؤلفان[2] ترجیح می‌دهند که جواب دوم‌را برحسب تابع هنکل $H_\nu^{(1)}(x)$ به‌صورت زیر تعریف کنند

$$K_\nu(x)\equiv\frac{\pi}{2}\, i^{\nu+1}H_\nu^{(1)}(ix)$$

$$=\frac{\pi}{2}\, i^{\nu+1}[J_\nu(ix)+iN_\nu(ix)] \qquad (117.11)$$

ضریب $i^{\nu+1}$، کمیت $K_\nu(x)$ را به ازای مقادیر حقیقی x، حقیقی می‌سازد. بـا استفاده از معادله‌های (۶۰.۱۱) و (۱۱۰.۱۱) می‌توانیم معادلۀ (۱۱۷.۱۱) را به‌صورت زیر تبدیل کنیم[3]

$$K_\nu(x)=\frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)}{\sin\nu\pi} \qquad (118.11)$$

که شبیه معادلۀ (۶۰.۱۱) بـرای $N_\nu(x)$ است. انتخاب معادلۀ (۱۱۷.۱۱) به‌عنوان یك تعریف تاحدودی نامتناسب است، زیرا تابع $K_\nu(x)$ به‌این‌ترتیب درهمان‌روابط بازگشتی $I_\nu(x)$ صدق نمی‌کند (با مسائل ۷.۵.۱۱ و ۸.۵.۱۱ مقایسه کنید). مؤلفان[4] دیگـر برای اجتناب از این دردسر، یك ضریب اضافی کسینوس $n\pi$ وارد کرده‌انـد. این اقدام باعث می‌شود که K_ν درهمان روابط بازگشتی I_ν صدق کند، ولی این‌اشکال راهم‌دارد که K_ν را به‌ازای $\nu=1/2,\ 3/2,\ 5/2,\ \ldots$، صفرمی‌کند.

بسط سری $K_\nu(x)$ مستقیماً از صورت سری $H_\nu^{(1)}(ix)$ به‌دست می‌آیـد. جملات باکمترین توان عبارت‌اند از

$$K_0(x)=-\ln x-\gamma+\ln 2+\cdots$$

$$K_\nu(x)=2^{\nu-1}(\nu-1)!\,x^{-\nu}+\cdots \qquad (119.11)$$

ازآنجاکه رابطۀ بین‌تابع تعدیل‌یافتۀ بسل، I_ν، باتابع بسل J_ν، بسیار به‌رابطۀ بین sinh و سینوس شبیه است، گـاهی I_ν و جواب دوم K_ν را توابع هذلولوی (هیپربولیك) بسل می‌خوانند.

نمایشهای انتگرالی $I_0(x)$ و $K_0(x)$ عبارت‌اند از

$$I_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cosh\,(x\cos\theta)\,d\theta \qquad (120.11)$$

---

۱. دراین‌باره بحث ومقایسه‌ای از نمادها در "MTAC 1,207_308(1944)" آمده است.

2. Watson, Morse and Fsehbach, Jeffreys and Jeffreys(without the $\pi/2$).

۳. برای شاخص پایین عدد درست n، حد $\nu\to n$ را حساب می‌کنیم.

4. Whittaker and Watson

$$K_0(x)=\int_0^\infty \cos(x\sinh t)\,dt=\int_0^\infty \frac{\cos(xt)\,dt}{(t^2+1)^{1/2}},\quad x>0 \quad (۱۲۱.۱۱)$$

معادلهٔ (۱۲۰.۱۱) را می‌شود از معادلهٔ (۳۰.۱۱) به‌ازای $J_0(x)$ استخراج کرد ویا در مسئلهٔ ۴.۵.۱۱ آن‌را حالت خاص $\nu=0$ دانست. نمایش انتگرالی K_0، معادلهٔ (۱۲۱.۱۱)، یك تبدیل فوریه است، و می‌توان آن را، با استفاده از تبدیلهای فوریهٔ فصل ۱۵، و یا توابع گرین بخش ۶.۱۶ به‌بهترین وجهی استخراج کرد. سایر صورتهای گوناگون نمایشهای انتگرالی (شامل $\nu\neq 0$) درمسائل ظاهر می‌شوند. این نمایشهای انتگرالی درایجاد صورتهای مجانبی (بخش ۶.۱۱) و در ارتباط باتبدیلهای فوریهٔ فصل ۱۵ سودمند واقع می‌شوند.

برای آنکه درزمینهٔ توابع تعدیل‌یافتهٔ بسل $I_\nu(x)$ و $K_\nu(x)$ به‌چشم‌انداز درستی‌رسیده باشیم، آنها را به‌دلایل زیر دراینجا آورده‌ایم:

۱. این توابع جوابهای معادلهٔ بسیارمتداول تعدیل‌یافتهٔ بسل هستند.
۲. درمسائل فیزیکی خاصی چون مسائل پخش، به‌این توابع نیازداریم.
۳. از $K_\nu(x)$ یك تابع گرین حاصل می‌شود (بخش ۶.۱۶ را ببینید).
۴. $K_\nu(x)$ تعیین رفتارمجانبی‌را به‌طورمناسبی میسرمی‌سازد (بخش ۶.۱۱).

مسائل

۱.۵.۱۱ نشان دهید

$$e^{(x/2)(t+1/t)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x)t^n$$

یعنی تابع مولد توابع تعدیل‌یافتهٔ بسل $I_n(x)$ را یافته‌ایم.

۲.۵.۱۱ درستی اتحادهای زیر را تحقیق کنید

(الف)
$$1=I_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_{2n}(x)$$

(ب)
$$e^x=I_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(x)$$

(ج)
$$e^{-x}=I_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n(x)$$

(د)
$$\cosh x=I_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty} I_{2n}(x)$$

$$\sinh x = ۲\sum_{n=۱}^{\infty} I_{۲n-۱}(x) \qquad (ه)$$

۳۰۵۰۱۱ (الف) بااستفاده از تابع مولد مسئلهٔ ۱۰۵۰۱۱، نشان دهید

$$I_n(x) = \frac{۱}{۲\pi i}\oint \exp[(x/۲)(t+۱/t)]\frac{dt}{t^{n+۱}}$$

(ب) نشان‌دهید نمایش‌انتگرالی بالا را، به‌ازای $n=\nu$، که ν عددی غیر درست است، می‌شود به‌صورت زیر تعمیم داد

$$I_\nu(x) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_C \exp[(x/۲)(t+۱/t)]\frac{dt}{t^{\nu+۱}}$$

پربند C، همان پربند مربوط به $J_\nu(x)$ در شکل ۸۰۱۱ است.

۴۰۵۰۱۱ نشان دهیدکه $I_\nu(z)$ به‌ازای $\nu>-۱/۲$ را می‌توان به‌صورت زیر نمایش‌داد

$$I_\nu(z) = \frac{۱}{\pi^{۱/۲}(\nu-\frac{۱}{۲})!}\left(\frac{z}{۲}\right)^\nu \int_۰^\pi e^{\pm z\cos\theta}\sin^{۲\nu}\theta\, d\theta$$

$$= \frac{۱}{\pi^{۱/۲}(\nu-\frac{۱}{۲})!}\left(\frac{z}{۲}\right)^\nu \int_{-۱}^{۱} e^{\pm zp}(۱-p^۲)^{\nu-۱/۲}dp$$

$$= \frac{۲}{\pi^{۱/۲}(\nu-\frac{۱}{۲})!}\left(\frac{z}{۲}\right)^\nu \int_۰^{\pi/۲}\cosh(z\cos\theta)\sin^{۲\nu}\theta\, d\theta$$

۵۰۵۰۱۱ شعاع یك کاواك استوانه‌ای a و ارتفـاع آن l است (شکل ۴۰۱۱). دو انتهای $z=۰$ و $z=l$ آن درپتانسیل صفر قراردارد. پتانسیل دیواره‌های‌استوانه، $\rho=a$، عبارت است از $V=V(\varphi, z)$.

(الف) نشان دهید که پتانسیل الکتـروستاتیکی $\Phi(\rho,\varphi,z)$ به‌صورت تابعی زیـر است

$$\Phi(\rho,\varphi,z) = \sum_{m=۰}^{\infty}\sum_{n=۱}^{\infty} I_m(k_n\rho)\sin k_n z\cdot(a_{mn}\sin m\varphi + b_{mn}\cos m\varphi)$$

که در آن $k_n = n\pi/l$.

(ب) نشان دهید که ضرایب a_{mn} و b_{mn} از روابط زیر به‌دست می‌آیند[1]

$$\left.\begin{matrix} a_{mn} \\ b_{mn} \end{matrix}\right\} = \frac{۲}{\pi l I_m(k_n a)} \int_{\circ}^{۲\pi} \int_{\circ}^{l} V(\varphi, z) \sin k_n z \cdot \left\{\begin{matrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{matrix}\right\} dz\, d\varphi$$

راهنمایی. $V(\varphi, z)$ را به‌صورت یک‌سری دوگانه بسط دهید و از تعامد توابع‌مثلثاتی استفاده کنید.

۶.۵.۱۱ تحقیق کنید که $K_\nu(x)$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{۲} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \nu\pi}$$

و با استفاده از آن نشان دهید

$$K_\nu(x) = K_{-\nu}(x)$$

۷.۵.۱۱ نشان‌دهید $K_\nu(x)$ در روابط بازگشتی زیر صدق می‌کند

$$K_{\nu-۱}(x) - K_{\nu+۱}(x) = -\frac{۲\nu}{x} K_\nu(x)$$

$$K_{\nu-۱}(x) + K_{\nu+۱}(x) = -۲K'_\nu(x)$$

۸.۵.۱۱ اگر $\mathcal{K}_\nu = e^{\nu\pi i} K_\nu$، نشان دهید $\mathcal{K}_\nu$ درهمان روابط بازگشتی I_ν صدق می‌کند.

۹.۵.۱۱ نشان دهید $K_\nu(z)$ را، به‌ازای $\nu > -۱/۲$، می‌شود به‌صورت زیر نمایش داد

$$K_\nu(z) = \frac{\pi^{۱/۲}}{\left(\nu - \frac{۱}{۲}\right)!} \left(\frac{z}{۲}\right)^\nu \int_{\circ}^{\infty} e^{-z\cosh t} \sinh^{۲\nu} t\, dt, \quad -\frac{\pi}{۲} < \arg z < \frac{\pi}{۲}$$

$$= \frac{\pi^{۱/۲}}{\left(\nu - \frac{۱}{۲}\right)!} \left(\frac{z}{۲}\right)^\nu \int_{۱}^{\infty} e^{-zp} (p^۲ - ۱)^{\nu - ۱/۲} dp$$

۱۰.۵.۱۱ نشان دهید $I_\nu(x)$ و $K_\nu(x)$ در رابطهٔ **رونسکیی** زیر صدق می‌کنند

---

۱. اگر $m = \circ$، آنگاه ۲ درصورت کسر به‌جای ۱ می‌نشیند.

$$I_\nu(x)K'_\nu(x)-I'_\nu(x)K_\nu(x)=-\frac{1}{x}$$

از این رابطه در بخش ۶.۱۶ درتشکیل تابع‌گرین استفاده شده‌است.

۱۱.۵.۱۱ اگر $r=(x^2+y^2)^{1/2}$، ثابت کنید

$$\frac{1}{r}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(xt)K_0(yt)\,dt$$

این تبدیل کسینوس فوریهٔ K_0 است.

۱۲.۵.۱۱ (الف) تحقیق کنید

$$I_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cosh(x\cos\theta)\,d\theta$$

درمعادلهٔ تعدیل‌یافتهٔ بسل، به‌ازای $\nu=0$، صدق می‌کند.

(ب) نشان دهیدکه این انتگرال حاوی هیچ آمیزه‌ای از $K_0(x)$، یعنی جواب دوم نامنظم، نیست.

(ج) ضریب بهنجارش، $1/\pi$، را به‌دست آورید.

۱۳.۵.۱۱ ازطریق جانشانی مستقیم درمعادله، تحقیق کنیدکه نمایشهای انتگرالی

$$I_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{z\cos t}\cos(nt)\,dt$$

$$K_\nu(z)=\int_0^\infty e^{-z\cosh t}\cosh(\nu t)dt,\quad \Re(z)>0$$

درمعادلهٔ تعدیل‌یافتهٔ بسل صدق می‌کنند. چگونه می‌توانید نشان‌دهید که صورت اول حاوی هیچ‌آمیزه‌ای از K_n و نیز صورت دوم حاوی هیچ آمیزه‌ای از I_ν نیست؟ چگونه می‌توانید بهنجارش‌را بیازمایید؟

۱۴.۵.۱۱ نمایش انتگرالی‌زیررا استخراج کنید

$$I_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{x\cos\theta}\cos(n\theta)\,d\theta$$

راهنمایی ـ کار خود را بانمایش انتگرالی متناظر برای $J_n(x)$ شروع کنید. معادلهٔ (۱۲۰.۱۱) حالت خاصی ازاین نمایش است.

۱۵.۵.۱۱ نشان دهید

$$K_\circ(z)=\int_\circ^\infty e^{-z\cosh t}\,dt$$

درمعادلهٔ تعدیل‌یافتهٔ بسل صدق می‌کند. چگونه می‌توانید ثابت‌کنید که این صورت، نسبت به $I_\circ(z)$ مستقل خطی‌است؟

۱۶.۵.۱۱ نشان دهید

$$e^{ax}=I_\circ(a)T_\circ(x)+۲\sum_{n=۱}^{\infty}I_n(a)T_n(x),\qquad -۱\leqslant x\leqslant ۱$$

$T_n(x)$ چندجمله‌ای مرتبهٔ nام چبیشف (بخشهای ۳.۱۳ و ۴.۱۳ را ببینید) است.
راهنمایی. یك بسط سری چبیشف‌را در نظر بگیرید. بااستفاده از تعامد و بهنجارش $T_n(x)$ها، ضرایب سری چبیشف‌را به‌دست آورید.

۱۷.۵.۱۱ (الف) زیر-برنامه‌ای بادقت مضاعف، برای محاسبهٔ $I_n(x)$ تا ۱۲ رقم‌اعشار، به‌ازای ... ,۳ ,۲ ,۱ ,۰ $=n$ و $۰\leqslant x\leqslant ۱$ بنویسید. مقادیری را که به‌دست آورده‌اید باارقامی‌که تاده رقم اعشاردرجدول ۹.۱۱، در AMS-55، آمده مقایسه‌کنید.
(ب) بامراجعه به‌مسئلهٔ ۱۶.۵.۱۱، ضرایب بسطهای چبیشف $\cosh x$ و $\sinh x$ را محاسبه کنید.
یادآوری. محاسبهٔ این‌ضرایب باروشی متفاوت، یکی‌ازمباحث بخش ۴.۱۳ را تشکیل می‌دهد.

۱۸.۵.۱۱ پتانسیل موجود در دیوارهٔ استوانه‌ای‌کاواك استوانه‌ای مسئلهٔ ۵.۵.۱۱ به‌صورت زیر است

$$V(z)=\begin{cases}۱۰۰z/l, & ۰\leqslant z/l\leqslant ۱/۲\\ ۱۰۰(۱-z/l), & ۱/۲\leqslant z/l\leqslant ۱\end{cases}$$

برای نسبت‌شعاع به‌ارتفاع به‌مقدار ۵ر۰ $=a/l$، پتانسیل‌را به‌ازای ۵ر۰(۱ر۰)۱ر۰ $=z/l$ و ۰ر۱(۲ر۰)۰ر۰ $=\rho/a$ محاسبه کنید.
مقدار آزمونی. به‌ازای ۳ر۰ $=z/l$ و ۸ر۰ $=\rho/a$، ۳۹۶ر۲۶ $=V$.

۶.۱۱ بسطهای مجانبی

درمسائل فیزیکی بارها لازم می‌آیدکه ازرفتارتابع تعدیل‌یافتهٔ بسل به‌ازای مقادیر بزرگ شناسه، یعنی رفتارمجانبی این‌تابع، آگاهی یابیم. این یکی از مواردی است‌که از کامپیوتر کمك چندانی برنمی‌آید. یکی ازرهیافتهای ممکن آن است‌که مانند بخش ۵.۸، یك‌جواب سری، ولی این‌بار باتوانهای منفی، برای‌معادلهٔ دیفرانسیل به‌دست‌آوریم. این شگرد روش استوکس (مسئلهٔ ۵.۶.۱۱) است. محدودیت این‌روش آنجاست که، باشروع از یك مقدار مثبت شناسه (به‌خاطرهمگرایی سری)، نمی‌دانیم چه‌آمیزه‌ای ازجوابها ویا چه‌مضربی ازیك جواب معلوم را داریم. مسئله عبارت از آن است که سری مجانبی را (که به‌ازای مقادیر بزرگ متغیرمفید است) به‌سری توانی یاتعریف مربوط به‌آن (که بـه‌ازای مقادیر کوچك متغیرسودمند است) مربوط سازیم. این‌ارتباط را می‌توان، ازطریق واردکردن یك نمایش انتگرالی مناسب، وسپس، بااستفاده ازروش تندترین‌کاهش یادشده دربخش ۴.۷(جلداول)، ویا بسط مستقیم به‌صورتی‌که دراین بخش مطرح خواهد شد، برقرارکرد.

بسط یك نمایش انتگرالی، $K_\nu(z)$

به‌عنوان یك رهیافت مستقیم، نمایش انتگرالی زیررا درنظربگیرید (مسئلهٔ ۹.۵.۱۱)

$$K_\nu(z)=\frac{\pi^{1/2}}{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)!}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_1^\infty e^{-zx}(x^2-1)^{\nu-1/2}dx,\quad \nu>-\frac{1}{2} \qquad (۱۲۲.۱۱)$$

هرچند می‌توان معادلهٔ (۱۳۶.۱۱) را برای مقادیر حقیقی z به‌ازای

$$(\mathcal{R}(z)>0)\quad -\pi/2<\arg z<\pi/2$$

نیز اثبات‌کرد، ولی فعلا z را حقیقی بگیرید. سه مسئله در پیش‌رو داریم: (۱) نشان بدهیم کـه K_ν به‌صورتی کـه در معادلهٔ (۱۲۲.۱۱) داده شده است در معادلـهٔ تعدیل‌یافتهٔ بسل (۱۰۸.۱۱) صدق‌می‌کند؛ (۲) نشان دهیم‌که جواب منظم I_ν غایب است؛ و(۳) نشان دهیم که معادلهٔ (۱۲۲.۱۱) دارای بهنجارش درستی است.

۱. این واقعیت‌را می‌توان ازطریق جانشانی مستقیم اثبات‌کردکه معادلهٔ(۱۲۲.۱۱) یکی از جوابهای معادلهٔ تعدیل‌یافتهٔ بسل است. خواهیم داشت

$$z^{\nu+1}\int_1^\infty\frac{d}{dx}\,[e^{-zx}(x^2-1)^{\nu+1/2}]\,dx=0$$

که‌انتگرالده مرکب‌را به‌مشتق یك‌تابع‌که درهردونقطهٔ‌انتهایی صفرمی‌شود، تبدیل می‌کند. درنتیجه ثابت می‌شودکه انتگرال بالا ترکیبی است خطی از I_ν و K_ν.

۲. نفی این امکان که این جواب حاوی I_ν باشد، موضوع مسئلهٔ ۱.۶.۱۱ است.

۳. بهنجارش‌را می‌توان ازطریق تغییرمتغیر $x=1+t/z$ به‌صورت زیرتحقیق‌کرد

$$\frac{\pi^{1/2}}{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\int_{1}^{\infty}e^{-zx}(x^{2}-1)^{\nu-1/2}dx$$

$$=\frac{\pi^{1/2}}{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}e^{-z}\int_{0}^{\infty}e^{-t}\left(\frac{t^{2}}{z^{2}}+\frac{2t}{z}\right)^{\nu-1/2}\frac{dt}{z}$$

(۱۲۳.۱۱ الف)

$$=\frac{\pi^{1/2}}{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)!}\frac{e^{-z}}{2^{\nu}z^{\nu}}\int_{0}^{\infty}e^{-t}t^{2\nu-1}\left(1+\frac{2z}{t}\right)^{\nu-1/2}dt$$

(۱۲۳.۱۱ ب)

که در انتگرالده آخری از یك عامل t^{2}/z^{2} فاکتور گرفته‌ایم. این تغییر متغیر، حدود انتگرالگیری را به گسترهٔ مناسبتری تبدیل و وابستگی نمایی منفی e^{-z} را مجزا کرده است. انتگرال معادلهٔ (۱۲۳.۱۱ ب) را می‌شود به‌ازای $z=0$ محاسبه کرد که کمیت $(2\nu-1)!$ به‌دست‌می‌آید. آنگاه با استفاده از دستورهای دوبرابر (بخش ۴.۱۰)، داریم

$$\lim_{z\to 0}K_{\nu}(z)=\frac{(\nu-1)!\,2^{\nu-1}}{z^{\nu}},\quad \nu>0 \qquad (۱۲۴.۱۱)$$

که بامعادلهٔ (۱۱۹.۱۱) سازگاراست، در نتیجه بهنجارش را امتحان کرده‌ایم.[۱]

اکنون در راستای تشکیل یك سری مجانبی برای $K_{\nu}(z)$، می‌توان (۱۲۳.۱۱ الف) را به‌صورت زیر بازنویسی کرد

$$K_{\nu}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,\frac{e^{-z}}{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)!}\int_{0}^{\infty}e^{-t}t^{\nu-1/2}\left(1+\frac{t}{2z}\right)^{\nu-1/2}dt \qquad (۱۲۵.۱۱)$$

(که در آن ازعامل $2t/z$ فاکتورگرفته‌ایم).

$(1+t/2z)^{\nu-1/2}$ را به‌کمك قضیهٔ دوجمله‌ای بسط می‌دهیم، در نتیجه

$$K_{\nu}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,\frac{e^{-z}}{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)!}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)!}{r!\left(\nu-r-\frac{1}{2}\right)!}(2z)^{-r}\int_{0}^{\infty}e^{-t}t^{\nu+r-1/2}dt$$

(۱۲۶.۱۱)

---

۱. این انتگرال به‌ازای $\nu=0$ به صورت لگاریتمی واگرا می‌شود که با واگرایی لگاریتمی $K_{0}(z)$ (بخش ۵.۱۱) سازگار است.

انتگرالگیری جمله به‌جمله (که درمورد سریهای مجانبی صادق است)، بسط مجانبی‌مطلوب برای $K_\nu(z)$ را به‌دست می‌دهد

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{۲z}}\, e^{-z}\left[۱+\frac{(۴\nu^۲-۱^۲)}{۱!۸z}+\frac{(۴\nu^۲-۱^۲)(۴\nu^۲-۳^۲)}{۲!(۸z)^۲}+\dots\right]$$

(۱۲۷.۱۱)

هر چند انتگرالگیری روی محور حقیقی در معادلهٔ (۱۲۲.۱۱) تنها به ازای $-\pi/۲<\arg z<\pi/۲$ همگرا بود، معادلهٔ (۱۲۷.۱۱) را می‌توان تا $-۳\pi/۲<\arg z<۳\pi/۲$ بسط داد. معادلهٔ (۱۲۷.۱۱) به عنوان یك سری نامتناهی عملا واگراست.[۱] ولی این‌سری مجانبی‌است؛ بداین معناکه به‌ازای مقادیر بزرگ z، مقدار $K_\nu(z)$ را باهر دقت معینی می‌توان به‌طور تقریبی محاسبه کرد. (باتعریف سری مجانبی و بحث دربارهٔ آن دربخش ۱۰.۵ مقایسه‌کنید.)

خوب است که معادلهٔ (۱۲۷.۱۱) را به‌صورت زیر بازنویسی‌کنیم

$$K_\nu(z)=\sqrt{\frac{\pi}{۲z}}\, e^{-z}[P_\nu(iz)+iQ_\nu(iz)] \qquad (۱۲۸.۱۱)$$

که در آن

$$P_\nu(z) \sim ۱-\frac{(\mu-۱)(\mu-۹)}{۲!(۸z)^۲}+\frac{(\mu-۱)(\mu-۹)(\mu-۲۵)(\mu-۴۹)}{۴!\,(۸z)^۴}-\dots$$

(۱۲۹.۱۱الف)

$$Q_\nu(z) \sim \frac{\mu-۱}{۱!(۸z)}-\frac{(\mu-۱)(\mu-۹)(\mu-۲۵)}{۳!\,(۸z)^۳}+\dots \qquad (۱۲۹.۱۱ب)$$

و

$$\mu=۴\nu^۲$$

باید خاطر نشان ساخت که هر چند علامتهای $P_\nu(z)$ در معادلهٔ (۱۲۹.۱۱ الف) و $Q_\nu(z)$ درمعادلهٔ (۱۲۹.۱۱ب) یك درمیان مثبت و منفی‌اند، ولی علامت جملات سریهای مربوط به $P_\nu(iz)$ و $Q_\nu(iz)$ در معادلهٔ (۱۲۸.۱۱) جملگی مثبت است. سرانجام، به‌ازای مقادیر بزرگ z، P_ν غالب است.

---

۱. بسط دوجمله‌ای‌مافقط به‌ازای $t<۲z$ صادق است، وما تا t به‌سوی‌بینهایت انتگرال گرفته‌ایم. کاهش‌نمایی انتگرالده از وقوع یك پیشامد ناگوار جلوگیری می‌کند، ولی سری حاصل هنوز فقط یك سری مجانبی است و همگرا نیست. باتوجه به‌جدول ۳.۸ می‌بینیم که $z=\infty$ یکی‌از تکینگیهای اساسی معادلهٔ بسل (و تعدیل‌یافتهٔ بسل) است. قضیهٔ فوش داشتن یك جواب سری همگرا را تضمین نمی‌کند و ما نیزیك سری همگرا به‌دست نمی‌آوریم.

اکنون با دردست داشتن این صورت مجانبی برای $K_\nu(z)$، معادلهٔ (۱۲۸.۱۱)، می‌توانیم با استفاده از روابط معرف زیر، بسطهایی برای سایر توابع بسل وهذلولوی بسل به‌دست آوریم:

۱. از عبارت

$$\frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(iz) = K_\nu(z) \qquad (۱۳۰.۱۱)$$

داریم

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp i\left[z - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cdot[P_\nu(z) + iQ_\nu(z)], \quad -\pi < \arg z < 2\pi \qquad (۱۳۱.۱۱)$$

۲. تابع دوم هنکل (برای شناسه‌های حقیقی) همیوغ مختلط تابع اول است

$$H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp -i\left[z - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cdot[P_\nu(z) - iQ_\nu(z)], \quad -2\pi < \arg z < \pi \qquad (۱۳۲.۱۱)$$

روش دیگری برای استخراج رفتارمجانبی توابع هنکل تحت عنوان کاربرد روش تندترین کاهش، در بخش ۴.۷ (جلد اول) مطرح شده است.

۳. $J_\nu(z)$ جزء حقیقی $H_\nu^{(1)}(z)$ است، پس

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{P_\nu(z)\cos\left[z - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]\right.$$

$$\left.- Q_\nu(z)\sin\left[z - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]\right\}, -\pi < \arg z < \pi \ (۱۳۳.۱۱)$$

۴. تابع نویمان جزء موهومی $H_\nu^{(1)}(z)$ است، درنتیجه

$$N_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{P_\nu(z)\sin\left[z - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]\right.$$

$$\left.+ Q_\nu(z)\cos\left[z - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]\right\}, -\pi < \arg z < \pi \ (۱۳۴.۱۱)$$

۵. سرانجام، تابع تعدیل‌یافته یا هذلولوی منظم بسل، $I_\nu(z)$، ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

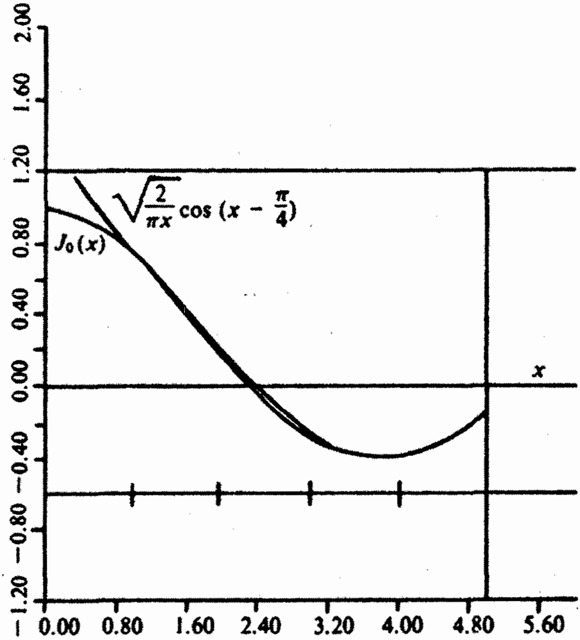
$$I_\nu(z)=i^{-\nu}J_\nu(iz) \qquad (۱۳۵.۱۱)$$

یا

$$I_\nu(z)=\frac{e^z}{\sqrt{۲\pi z}}[P_\nu(iz)-iQ_\nu(iz)], \quad -\frac{\pi}{۲}<\arg z<\frac{\pi}{۲} \qquad (۱۳۶.۱۱)$$

به‌این ترتیب، تعیین بسطهای مجانبی‌کامل می‌شود. درهر حال شاید برخی مشخصه‌های اساسی این بسطها شایان ذکر باشند. J_ν و N_ν، جدا از عامل همه‌جا حاضر $z^{-۱/۲}$، به‌ترتیب مثل کسینوس وسینوس رفتارمی‌کنند. صفرهای آنها تقریباً به‌طور موزونی به‌فاصلهٔ π ازیکدیگر قرار دارند؛ این فاصله در حد $z\to\infty$ درست برابر π می‌شود. توابع هنکل بنابر تعریف عبارت‌اند از توابعی که مثل نماییهای موهومی رفتار می‌کنند و توابع تعدیل‌یافتهٔ بسل، I_ν و K_ν، به‌نماییهای مثبت و منفی تبدیل می‌شوند. همین رفتارمجانبی ممکن است برای حذف فوری یکی از این توابع به‌عنوان جواب یك مسئلهٔ فیزیکی کفایت کند. همچنین باید گفت که سریهای مجانبی $P_\nu(z)$ و $Q_\nu(z)$، معادله‌های (۱۲۹.۱۱ الف و ب) به ازای $\nu=\pm۱/۲, \pm۳/۲, \ldots$ متناهی‌اند و به چندجمله‌ای (با توانهای منفی z) تبدیل می‌شوند. تقریبهای مجانبی به‌ازای این‌مقادیر خاص ν به‌جوابهای دقیق مبدل می‌شوند.

دقت موجود درصورتهای مجانبی جالب توجه است، مثلا اگرفقط جملهٔ اول را در نظربگیریم (شکل ۱۲.۱۱) داریم



شکل ۱۲.۱۱ تقریب مجانبی $J_0(x)$.

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{۲}{\pi x}} \cos\left[x - \left(n+\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{\pi}{۲}\right)\right] \qquad (۱۳۷.۱۱)$$

آشکار است که شرط برقراری معادلهٔ (۱۳۷.۱۱) آن‌است که جملهٔ سینوسی چشم‌پوشیدنی باشد؛ یعنی

$$۸x \gg ۴n^۲ - ۱ \qquad (۱۳۸.۱۱)$$

ناحیهٔ مجانبی ممکن است به‌ازای ۱<(n یا ν) بسیاردور باشد.

به‌همان ترتیبی که در بخش ۳.۱۱ گفتیم، از صورتهای مجانبی می‌توان برای محاسبهٔ فرمولهای رونسکیی مختلف استفاده کرد (با مسئلهٔ ۳.۶.۱۱ مقایسه کنید).

محاسبهٔ عددی

هنگامی که دریك ماشین‌محاسب بزرگ بسیارسریع، برنامه‌ای به‌یکی‌ازتوابع بسل یاتوابع تعدیل‌یافتهٔ بسل نیازپیداکند، برنامه‌نویس دوراه درپیش‌دارد: یکی‌اینکه همهٔ توابع بسل‌را درحافظهٔ ماشین ذخیره کند وبه‌کامپیوتر بگویدکه چگونه محل مقدارمورد نیاز را بیابد؛ و دیگر اینکه‌مقدارمورد نیازرا محاسبه‌کند. درانتخاب اول سرعت‌کارنسبتاً کند است وبه‌جای زیادی برای‌حافظه نیازدارد. ازاین‌رو برنامه‌نویس "شق دوم" یعنی محاسبهٔ مقدارلازم، را برمی‌گزینند.

محاسبهٔ $J_n(x)$ را با استفاده از رابطهٔ بازگشتی، معادلهٔ (۱۰.۱۱)، دربخش ۱.۱۱ مطرح کردیم. برای N_n، I_n، و K_n، به‌ازای مقادیرکوچك x استفاده از سریها، و به‌ازای مقادیربزرگ x، بهره‌گیری ازصورتهای‌مجانبی(باتعداد زیادی‌جمله درسری توانهای‌منفی) روشهای برتر به‌شمار می‌آیند. ضابطهٔ بزرگ وکوچك بودن ممکن است، مطابق جدول ۲.۱۱، مورد به‌مورد فرق کند.

جدول ۲.۱۱ معادلات مربوط به‌محاسبهٔ کامپیوتری توابع نویمان وتعدیل‌یافتهٔ بسل.

	سری توانی		سری مجانبی	
$N_n(x)$	معادلهٔ (۶۳.۱۱)	$x \leqslant ۴$	معادلهٔ (۱۳۴.۱۱)	$x > ۴$
$I_n(x)$	معادلهٔ (۱۱۲.۱۱)	$x \leqslant ۱۲$ یا $n \leqslant$	معادلهٔ (۱۳۶.۱۱)	$x > ۱۲$ و $n >$
$K_n(x)$	معادلهٔ (۱۱۹.۱۱)	$x \leqslant ۱$	معادلهٔ (۱۲۷.۱۱)	$x > ۱$

در عمل پی‌می‌بریم که اگر محاسبهٔ کامپیوتری سری (توانی یا مجانبی) مربوط به $N_n(x)$ و $K_n(x)$ را به $n=$ ۰، ۱ محدودکنیم، بهتر است. آنگاه $N_n(x)$ را به‌ازای $n \geqslant ۲$، را بااستفاده از رابطهٔ بازگشتی، معادلهٔ(۱۰.۱۱)، محاسبه‌کنیم. $K_n(x)$ به‌ازای $n \geqslant ۲$ با استفاده از روابط بازگشتی مسئلهٔ ۷.۵.۱۱ محاسبه می‌شود. هرگاه بخواهیم می‌توانیم $I_n(x)$ را به‌همین روش محاسبه کنیم، ولی‌کاربرد مستقیم سری توانی یا مجانبی نیز به‌ازای همهٔ مقادیر n و x میسراست.

مسائل

۱۰۶۰۱۱ برای آزمون بهنجارش نمایش انتگرالی $K_\nu(z)$ [معادلهٔ (۱۲۲۰۱۱)] فرض کردیم که $I_\nu(z)$ حضور نداشته باشد. از کجا بدانیم که نمایش انتگرالی[معادلهٔ(۱۲۲۰۱۱)]، عبارت $K_\nu(z)+\varepsilon I_\nu(z)$ را با $\varepsilon \neq 0$ به‌دست نمی‌دهد؟

۲۰۶۰۱۱ (الف) نشان دهید که عبارت

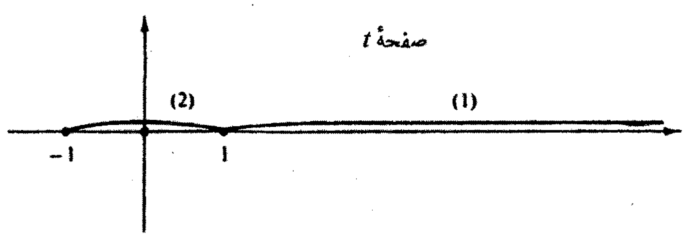
$$y(z)=z^\nu \int e^{-zt}(t^2-1)^{\nu-1/2}\, dt$$

درمعادلهٔ تعدیل‌یافتهٔ بسل صدق می‌کند، مشروط بر آنکه پربند را چنان اختیارکنیم که

$$e^{-zt}(t^2-1)^{\nu+1/2}$$

درنقاط ابتدایی وانتهایی پربند مقداریکسانی داشته باشد.

(ب) تحقیق کنید که پربندهای نمایش‌یافته‌درشکل ۱۳۰۱۱، برای‌این‌مسئله‌مناسب‌اند.



شکل ۱۳۰۱۱ پربندهای تابع تعدیل‌یافتهٔ بسل.

۳۰۶۰۱۱ بااستفاده از بسطهای مجانبی، درستی فرمولهای **رونسکیی** زیر را تحقیق کنید

(الف) $$J_\nu(x)J_{-\nu-1}(x)+J_{-\nu}(x)J_{\nu+1}(x)=-\frac{2\sin \nu\pi}{\pi x}$$

(ب) $$J_\nu(x)N_{\nu+1}(x)-J_{\nu+1}(x)N_\nu(x)=-\frac{2}{\pi x}$$

(ج) $$J_\nu(x)H^{(2)}_{\nu-1}(x)-J_{\nu-1}(x)H^{(2)}_\nu(x)=\frac{2}{i\pi x}$$

(د) $$I_\nu(x)K'_\nu(x)-I'_\nu(x)K_\nu(x)=-\frac{1}{x}$$

(ه) $$I_\nu(x)K_{\nu+1}(x)+I_{\nu+1}(x)K_\nu(x)=\frac{1}{x}$$

۴.۶.۱۱ صورت مجانبی $H_\nu^{(1)}(z)$، معادلهٔ (۱۳۱.۱۱)، را به‌کمك صورت مجانبی $K_\nu(z)$، معادلهٔ (۱۲۷.۱۱)، استخراج کنید. مخصوصاً فاز $(\nu+1/2)\pi/2$ را موردتوجه قراردهید.

۵.۶.۱۱ روش استوکس.

(الف) درمعادلهٔ بسل، به‌جای تابع بسل عبارت $x^{-1/2}y(x)$ را بنشانید ونشان دهید که $y(x)$ درمعادلهٔ زیرصدق می‌کند

$$y''(x)+\left(1-\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right)y(x)=0$$

(ب) یکی از جوابهای سری توانی با توانهای منفی x را، به صورت فرضی زیر تشکیل دهید

$$y(x)=e^{ix}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{-n}$$

رابطهٔ بازگشتی را تعیین کنیدکه a_{n+1} را برحسب a_n مشخص می‌کند. نتیجه‌ای را که به‌دست آورده‌اید با سری مجانبی معادلهٔ (۱۳۱.۱۱) مقایسه کنید.

(ج) ضریب اولیهٔ a_0 را بااستفاده ازنتایج بخش ۴.۷ تعیین کنید.

۶.۶.۱۱ پانزده مجموع جزئی اول $P_0(x)$ و $Q_0(x)$ در معادلات (۱۲۹.۱۱ الف) و (۱۲۹.۱۱ب) را محاسبه کنید. x را باپله‌های واحد از ۴تا۱۰ تغییردهید. تعدادجملاتی‌را بیابیدکه بایدبرای دست‌یافتن به‌بیشترین دقت منظورکرد؛ همچنین‌دقت حاصل‌را به‌صورت تابعی‌ازx، تعیین‌کنید. خصوصاً تعیین‌کنیدکه x را تا چه‌مقدار می‌توان‌کوچك‌گرفت بدون آنکه خطا از 3×10^{-6} بیشترشود؟

پاسخ. $x_{\text{کمینه}}=6$.

۷.۶.۱۱ (الف) با استفاده از (مجموعهای جزئی) سری مجانبی $P_0(x)$ و $Q_0(x)$ که در مسئلهٔ ۶.۶.۱۱ تعیین‌شده‌اند، زیر-برنامهٔ تابع FCT(X) رابرای محاسبهٔ $J_0(x)$، به‌ازای مقادیرحقیقی x و $x_{\text{کمینه}}\leqslant x$ بنویسید.

(ب) تابع حاصل‌را با$J_0(x)$ (ازجدولها یا ازمجموعهٔ زیر-برنامه‌های کامپیوتری) به‌ازای $x=x_{\text{کمینه}}(10)x_{\text{کمینه}}+10$ بیازمایید.

یادآوری. یك‌صورت مجانبی دقیقتروشاید ساده‌تر $J_0(x)$ درمعادلهٔ ۳.۴.۹ در AMS-55 ارائه شده‌است.

۷.۱۱ توابع کروی بسل

وقتی معادلهٔ هلمهولتز را درمختصات کروی تفکیك می‌کنیم، معادلهٔ شعاعی به‌صورت زیر به دست می‌آید

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}+[k^2r^2-n(n+1)]R=0 \qquad (۱۳۹.۱۱)$$

این عبارت، معادلـهٔ (۹۱.۲) از **بخش ۶.۲، جلد اول** است. پارامتر k از معادلهٔ اصلی هلمهولتز آمده و $n(n+1)$ یك ثابت جداسازی است. از رفتار تابع زاویهٔ قطبی (معادلهٔ لژاندر، بخشهای ۵.۸ و ۷.۱۲ را ببینید) چنین برمی‌آید که ثابت جداسازی باید چنان باشد که در آن n یك عدد **درست نامنفی باشد.** معادلهٔ(۱۳۹.۱۱) خود-الحاقی است، ولی ناگفته پیداست که معادلهٔ بسل نیست. به‌هرحال، اگرقرار دهیم

$$R(kr)=\frac{Z(kr)}{(kr)^{1/2}}$$

معادلهٔ (۱۳۹.۱۱) به‌معادلهٔ زیر که همان معادلهٔ بسل است، تبدیل می‌شود

$$r^2\frac{d^2Z}{dr^2}+r\frac{dZ}{dr}+[k^2r^2-(n+\frac{1}{2})^2]Z=0 \qquad (۱۴۰.۱۱)$$

Z تابع بسل مرتبهٔ $n+(1/2)$ (n عدد درست) است. موارد پیش‌آمدن این ترکیب

$$\frac{Z_{n+1/2}(kr)}{(kr)^{1/2}}$$

به‌دلیل اهمیتی که مختصات کروی دارند، خیلی زیاد است.

تعریفها

خوب است که این توابع را با نام توابع کروی بسل مشخص کنیم و برای تعریف آنها از معادلات زیر بهره گیریم

$$j_n(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,J_{n+1/2}(x)$$

$$n_n(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}N_{n+1/2}(x)=(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{-n-1/2}(x)^{*}$$

(۱۴۱.۱۱)

---

* علت امکانپذیربودن آن این است که $\cos(n+\frac{1}{2})\pi=0$.

$$h_n^{(۱)}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{۲x}}H_{n+۱/۲}^{(۱)}(x)=j_n(x)+in_n(x)$$

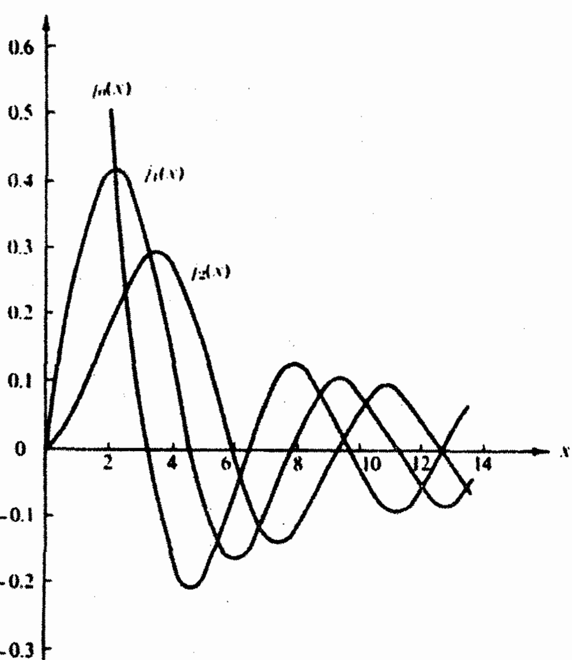
$$h_n^{(۲)}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{۲x}}H_{n+۱/۲}^{(۲)}(x)=j_n(x)-in_n(x)$$

این توابع کروی بسل (شکلهای ۱۴.۱۱ و ۱۵.۱۱) را می‌توان با استفاده از سری مربوط به J_n [معادلهٔ (۵.۱۱)]، و با تعویض n با $n+(۱/۲)$، به‌صورت سری مشخص کرد

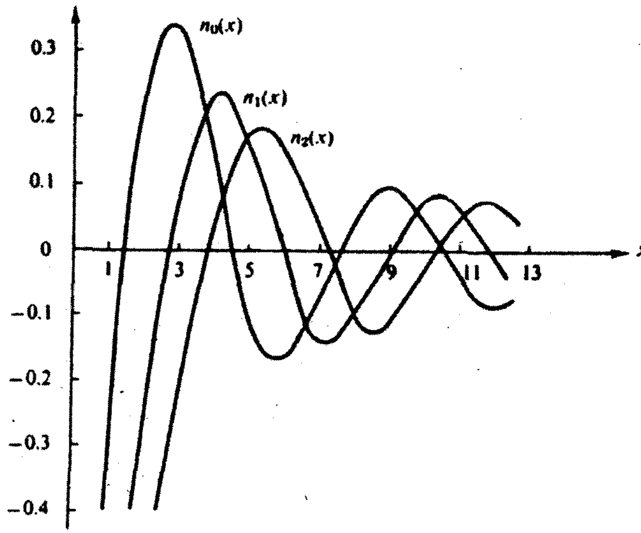
$$J_{n+۱/۲}(x)=\sum_{s=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^s}{s!(s+n+\frac{۱}{۲})!}\left(\frac{x}{۲}\right)^{۲s+n+۱/۲} \qquad (۱۴۲.۱۱)$$

بااستفاده از دستور دوبرابر لژاندر به‌صورت زیر

$$z!(z+\frac{۱}{۲})!=۲^{-۲z-۱}\pi^{۱/۲}(۲z+۱)! \qquad (۱۴۳.۱۱)$$



شکل ۱۴.۱۱ توابع کروی بسل.



شکل ۱۵.۱۱ توابع کروی نویمان.

داریم

$$j_n(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s 2^{2s+2n+1}(s+n)!}{\pi^{1/2}(2s+2n+1)!s!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n+1/2}$$

$$=2^n x^n\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s(s+n)!}{s!(2s+2n+1)!}x^{2s} \qquad (۱۴۴.۱۱)$$

اینک داریم: $N_{n+1/2}(x)=(-1)^{n+1}J_{-n-1/2}(x)$، و با استفاده از معادلهٔ (۵.۱۱) پی می‌بریم که

$$J_{-n-1/2}(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!(s-n-\frac{1}{2})!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s-n-1/2} \qquad (۱۴۵.۱۱)$$

درنتیجه

$$n_n(x)=(-1)^{n+1}\frac{2^n\pi^{1/2}}{x^{n+1}}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!(s-n-\frac{1}{2})!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \qquad (۱۴۶.۱۱)$$

وباز بااستفاده ازدستور دوبرابر لژاندر

$$n_n(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{2^n x^{n+1}}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s(s-n)!}{s!(2s-2n)!}x^{2s} \qquad (۱۴۷.۱۱)$$

این صورتهای سری، معادلات (۱۴۴.۱۱) و (۱۴۷.۱۱)، درسه مورد به‌کار می‌آیند: (۱) درتعیین مقادیرحدی در $x\to 0$، (۲) درهنگام به‌دست آوردن نمایشهای به‌صورت بسته به ازای $n=0$، و به عنوان تعمیم‌آن، (۳) در ارائهٔ دلیلی مبنی براینکه توابع کروی بسل با سینوس وکسینوس‌رابطهٔ نزدیکی دارند.

برای حالت خاص $n=0$، ازمعادلهٔ (۱۴۴.۱۱) می‌یابیم که

$$j_0(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{(2s+1)!}x^{2s} =\frac{\sin x}{x} \qquad (۱۴۸.۱۱)$$

درحالی‌که به‌ازای n_0، ازمعادلهٔ (۱۴۷.۱۱)، داریم

$$n_0(x)=-\frac{\cos x}{x} \qquad (۱۴۹.۱۱)$$

بنابرتعریف، توابع کروی هنکل [معادلهٔ (۱۴۱.۱۱)]، داریم

$$h_0^{(1)}(x)=\frac{1}{x}(\sin x-i\cos x)=-\frac{i}{x}e^{ix}$$
$$h_0^{(2)}(x)=\frac{1}{x}(\sin x+i\cos x)=\frac{i}{x}e^{-ix} \qquad (۱۵۰.۱۱)$$

ازمعادله‌های (۱۴۸.۱۱) و (۱۴۹.۱۱) این‌طور برمی‌آید که توابع‌کروی بسل را می‌توان به‌صورت ترکیبهایی‌ازسینوس وکسینوس بیان‌کرد. ترکیب مناسب را می‌توان با استفاده از جواب سری توانی، معادله‌های (۱۴۴.۱۱) و(۱۴۷.۱۱)، به‌دست آورد؛ ولی این‌روش پردردسراست. این‌شکلهای مثلثاتی درواقع به‌صورت بسط مجانبی دربخش ۱.۶۱ آمده‌اند. ازمعادله‌های (۱۳۱.۱۱) و (۱۲۹.۱۱ الف) داریم

$$h_n^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}H_{n+1/2}^{(1)}(z) =(-i)^{n+1}\frac{e^{iz}}{z}\{P_{n+1/2}(z)+iQ_{n+1/2}(z)\} \qquad (۱۵۱.۱۱)$$

حال $P_{n+1/2}$ و $Q_{n+1/2}$، چندجمله‌ای‌اند. یعنی، معادلهٔ (۱۵۱.۱۱) فقط یک تقریب مجانبی نیست و از نظر ریاضی دقیق است. خواهیم داشت

$$h_n^{(1)}(z)=(-i)^{n+1}\frac{e^{iz}}{z}\sum_{s=0}^{n}\frac{i^s}{s!(8z)^s}\frac{(2n+2s)!!}{(2n-2s)!!}$$

$$=(-i)^{n+1}\frac{e^{iz}}{z}\sum_{s=0}^{n}\frac{i^s}{s!(2z)^s}\frac{(n+s)!}{(n-s)!} \qquad (۱۵۲.۱۱)$$

غالباً از ترکیب یک عامل $(-i)^n=(e^{-i\pi/2})^n$ با e^{iz} عبارت $e^{i(z-n\pi/2)}$ به‌دست می‌آید. **به‌ازای مقادیر حقیقی z با جزء حقیقی این عبارت و $j_n(z)$، $n_n(z)$ با جزء موهومی، و $h_n^{(2)}(z)$ با همیوغ مختلط آن، برابر است.**

به‌خصوص داریم

$$h_1^{(1)}(x)=e^{ix}\left(-\frac{1}{x}-\frac{i}{x^2}\right) \qquad (۱۵۳.۱۱\text{الف})$$

$$h_2^{(1)}(x)=e^{ix}\left(\frac{i}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{3i}{x^3}\right) \qquad (۱۵۳.۱۱\text{ب})$$

$$j_1(x)=\frac{\sin x}{x^2}-\frac{\cos x}{x}$$

$$j_2(x)=\left(\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x}\right)\sin x-\frac{3}{x^2}\cos x \qquad (۱۵۴.۱۱)$$

$$n_1(x)=-\frac{\cos x}{x^2}-\frac{\sin x}{x} \qquad (۱۵۵.۱۱)$$

$$n_2(x)=-\left(\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x}\right)\cos x-\frac{3}{x^2}\sin x,\ \cdots$$

مقادیر حدی

ازمعادله‌های (۱۴۴.۱۱) و (۱۴۷.۱۱)، به‌ازای $x\ll 1$ داریم[1]

۱. درواقع شرط آنکه برای $j_n(x)$، جملهٔ دوم سری در مقایسهٔ با جملهٔ اول چشم‌پوشیدنی باشد، عبارت است از $x\ll 2[(2n+2)(2n+3)/(n+1)]^{1/2}$.

$$j_n(x)\approx\frac{2^n n!}{(2n+1)!}x^n=\frac{x^n}{(2n+1)!!} \qquad (۱۵۶.۱۱)$$

$$n_n(x)\approx\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\times\frac{(-n)!}{(-2n)!}x^{-n-1}$$
$$=-\frac{(2n)!}{2^n n!}x^{-n-1}=-(2n-1)!!x^{-n-1} \qquad (۱۵۷.۱۱)$$

برای تبدیل فاکتوریلهای عبارت مربوط به $n_n(x)$، از مسئلهٔ ۳.۱.۱۰ استفاده می‌کنیم. مقادیرحدی توابع کروی هنکل مانند $\pm i n_n(x)$ خواهند بود.

مقادیرمجانبی j_n، n_n، $h_n^{(1)}$، و $h_n^{(2)}$ را می‌توان بااستفاده از صورتهای مجانبی بسل دربخش ۶.۱۱ به‌دست آورد. داریم

$$j_n(x)\sim\frac{1}{x}\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right) \qquad (۱۵۸.۱۱)$$

$$n_n(x)\sim-\frac{1}{x}\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right) \qquad (۱۵۹.۱۱)$$

$$h_n^{(1)}(x)\sim(-i)^{n+1}\frac{e^{ix}}{x}=(-i)\frac{e^{i(x-n\pi/2)}}{x} \qquad (\text{۱۶۰.۱۱الف})$$

$$h_n^{(2)}(x)\sim i^{n+1}\frac{e^{-ix}}{x}=(i)\frac{e^{-i(x-n\pi/2)}}{x} \qquad (\text{۱۶۰.۱۱ب})$$

شرط برقراری این صورتهای کروی بسل آن است که داشته باشیم: $x\gg n(n+1)/2$. با استفاده از این مقادیر مجانبی پی می‌بریم که $j_n(x)$ و $n_n(x)$ برای توصیف امواج کروی ایستاده مناسب‌اند، و $h_n^{(1)}(x)$ و $h_n^{(2)}(x)$ به امواج کروی پیشرونده مربوط می‌شوند. اگر وابستگی زمانی در امواج پیشرونده را $e^{-i\omega t}$ بگیریم، آنگاه $h_n^{(1)}(x)$ یك موج کروی پیشروندهٔ برونرونده، و $h_n^{(2)}(x)$ یك موج فرودی را به‌دست می‌دهد. این توابع در نظریهٔ تابش درالکترومغناطیس ودرنظریهٔ پراکندگی درمکانیك کوانتومی کاربردهای فراوان‌دارند.

روابط بازگشتی

اکنون به‌روابط بازگشتی بازمی‌گردیم تاراه مناسبی برای‌تشکیل‌توابع کروی بسل مرتبه‌های بالا فراهم آوریم. این روابط بازگشتی را می‌توان از سریها استخراج‌کرد، ولی در اینجا مثل‌توابع تعدیل‌یافتهٔ بسل، کارآسانتر آن است‌که آنها را با جانشانی درروابط بازگشتی

معلوم [معادله‌های (۱۰.۱۱) و (۱۲.۱۱)] به‌دست آوریم. در نتیجه

$$f_{n-1}(x)+f_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{x}f_n(x) \qquad (۱۶۱.۱۱)$$

$$nf_{n-1}(x)-(n+1)f_{n+1}(x)=(2n+1)f'_n(x) \qquad (۱۶۲.۱۱)$$

پس‌از بازآرایی این روابط [یا نشاندن در معادله‌های (۱۵.۱۱) و (۱۷.۱۱)]، خواهیم داشت

$$\frac{d}{dx}[x^{n+1}f_n(x)]=x^{n+1}f_{n-1}(x) \qquad (۱۶۳.۱۱)$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-n}f_n(x)]=-x^{-n}f_{n+1}(x) \qquad (۱۶۴.۱۱)$$

دراینجا f_n می‌تواند نمایانگر j_n، n_n، $h_n^{(1)}$، یا $h_n^{(2)}$ باشد.

صورتهای خاص معادله‌های (۱۵۴.۱۱) و (۱۵۵.۱۱) را نیز می‌شود به‌آسانی از معادلهٔ (۱۶۴.۱۱) به‌دست آورد.

فرمولهای ریلی

$$j_n(x)=(-1)^n x^n\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n\left(\frac{\sin x}{x}\right) \qquad (۱۶۵.۱۱)$$

$$n_n(x)=-(-1)^n x^n\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n\left(\frac{\cos x}{x}\right) \qquad (۱۶۶.۱۱)$$

$$\begin{aligned} h_n^{(1)}(x)&=-i(-1)^n x^n\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n\left(\frac{e^{ix}}{x}\right)\\ h_n^{(2)}(x)&=i(-1)^n x^n\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n\left(\frac{e^{-ix}}{x}\right)\end{aligned} \qquad (۱۶۷.۱۱)$$

را می‌توان ازطریق استقرای ریاضی اثبات کرد.

محاسبهٔ عددی

توابع کروی بسل و تعدیل‌یافتهٔ بسل را می‌توان بااستفاده ازهمان تکنیکهایی محاسبه کرد که در بخشهای ۱.۱۱ و ۶.۱۱ برای محاسبهٔ توابع بسل توصیف شده است. برای $j_n(x)$ و $i_n(x)$[1] بهتراست که ازمعادلهٔ (۱۶۱.۱۱) ومسئلهٔ ۱۸.۷.۱۱ بهره‌گیریم ومانند روندمحاسبهٔ

---

۱. توابع کروی تعدیل‌یافتهٔ بسل، $i_n(x)$ و $k_n(x)$ درمسئلهٔ ۱۵.۷.۱۱ تعریف شده‌اند.

$J_n(x)$، روبه‌پایین عمل کنیم. بهنجارش ازطریق مقایسه باصورتهای معلوم $j_0(x)$ و $i_0(x)$، معادلهٔ (۱۵۰۱۱) ومسئلهٔ ۱۵۰۷۰۱۱، تعیین می‌شود. برای $n_n(x)$ و $k_n(x)$ هم باز ازمعادلهٔ (۱۶۱۰۱۱) و مسئلهٔ ۱۹۰۷۰۱۱ استفاده می‌کنیم، ولی این‌بار از صورتهای معلوم $n_0(x)$، $n_1(x)$، $k_0(x)$، و $k_1(x)$ درمعادلهٔ (۱۵۵۰۱۱) و مسئلهٔ ۱۷۰۷۰۱۱ شروع و رو به‌بالا عمل می‌کنیم.

تعامد

می‌توانیم ازانتگرال تعامد برای توابع معمولی بسل [معادلهٔ (۵۰۰۱۱)]، به‌قرارزیر

$$\int_0^a J_\nu(\alpha_{\nu p}\frac{\rho}{a})J_\nu(\alpha_{\nu q}\frac{\rho}{a})\rho\, d\rho=\frac{a^2}{2}[J_{\nu+1}(\alpha_{\nu p})]^2\delta_{pq} \qquad (۱۶۸۰۱۱)$$

بهره‌گیریم وعبارت مربوط به j_n را درآن بنشانیم وبرسیم به

$$\int_0^a j_n(\alpha_{np}\frac{\rho}{a})j_n(\alpha_{nq}\frac{\rho}{a})\rho^2\, d\rho=\frac{a^3}{2}[j_{n+1}(\alpha_{np})]^2\delta_{pq} \qquad (۱۶۹۰۱۱)$$

دراینجا α_{np} و α_{nq} ریشه‌های j_nاند.

این‌امر نمایانگر تعامد نسبت به‌ریشه‌های توابع بسل است. نمایشی از این‌نوع تعامد درهمین‌بخش و به‌کمك مسئلهٔ ذره درکره خواهدآمد. معادلهٔ (۱۶۹۰۱۱) تعامد تابع‌موجهای $j_n(r)$ را به‌ازای مقادیر ثابت n تضمین می‌کند. (اگر n تغییر کند، هماهنگ کروی تعامد را تأمین می‌کند.)

مثال ۱۰۰۷۰۱۱ ذره دریك کره

مسئلهٔ یك‌ذرهٔ کوانتوم مکانیکی درکره‌ای به‌شعاع a، یکی‌ازموارد استفادهٔ توابع کروی بسل را نشان می‌دهد. نظریهٔ کوانتومی ایجاب می‌کند که تابع‌موجی مانند ψ که ذرهٔ فوق را توصیف می‌کند در معادلهٔ زیر صدق کند

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi=E\psi \qquad (۱۷۰۰۱۱)$$

و دراین شرایط مرزی نیز صادق باشدکه اولا $\psi(r\leqslant a)$ متناهی بماند وثانیاً $\psi(a)=0$. این‌تابع متناظر است باپتانسیل $V=0$ به‌ازای $r\leqslant a$، و $V=\infty$ به‌ازای $r>a$. دراینجا $\hbar$ ثابت پلانك (تقسیم بر 2π)، m جرم‌ذره، و E انرژی آن‌است. حال‌مقدار کمینهٔ انرژی را تعیین می‌کنیم که به ازای آن معادلهٔ موج دارای یك جواب قابل قبول است. معادلهٔ

(۱۷۰.۱۱)، همان‌معادلهٔ هلمهولتز با بخش‌شعاعی زیراست [با بخش ۶.۲ (جلداول) دربارهٔ جداسازی متغیرها مقایسه‌کنید]

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+\left[k^2-\frac{n(n+1)}{r^2}\right]R=0 \qquad (۱۷۱.۱۱)$$

که درآن $k^2=2mE/\hbar^2$. از این‌رو، با استفاده ازمعادلهٔ (۱۳۹.۱۱)، به‌ازای $n=0$، داریم

$$R=Aj_0(kr)+Bn_0(kr)$$

شاخص پایین n را صفر می‌گیریم، زیرا هروابستگی زاویه‌ای، انرژی را افزایش خواهد داد. تابع‌کروی نویمان، به‌دلیل رفتار واگرای آن‌درمبدأ، حذف می‌شود. ازلحاظ تکنیکی، تابع‌کروی نویمان، n_0، عبارت است ازتابع‌گرینی‌که درمعادلهٔ گرین صدق می‌کند اما در معادلهٔ شرودینگر در مبدأ صدق نمی‌کند. برای بر آورده ساختن شرط مرزی دوم (به‌ازای همهٔ زاویه‌ها) باید داشته باشیم

$$ka=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}a=\alpha \qquad (۱۷۲.۱۱)$$

که‌درآن α یکی‌ازریشه‌های j_0 است، یعنی $j_0(\alpha)=0$. اثراین‌شرط آن‌است‌که انرژیهای مجاز را به یك مجموعهٔ منقطع خاص محدود می‌کند؛ به عبارت دیگر اعمال کردن شرط مرزی دوم، انرژی E را کوانتیده می‌کند. کوچکترین α عبارت است از اولین صفر j_0، یعنی

$$\alpha=\pi$$

و

$$E_{\min}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}=\frac{h^2}{8ma^2} \qquad (۱۷۳.۱۱)$$

یعنی برای هرکرهٔ متناهی، ذره دارای انرژی‌کمینهٔ مثبت یانقطهٔ صفری‌است. این نمایشی‌از اصل عدم قطعیت هایزنبرگ به‌شمار می‌آید.

در حوزهٔ فیزیك حالت جامد، اخترفیزیك، وسایر زمینه‌های فیزیك این سؤال مطرح می‌شود که چند جواب مختلف (حالت انرژی) با انرژیهای‌کمتر از، یا مساوی با، انرژی معین E_0 متناظرند. این‌مسئله برای یك‌حجم مکعبی(مسئلهٔ ۵.۶.۲، جلداول) نسبتاً ساده است. حالت نسبتاً دشوارتر کروی توسط لمبرت[1] حل شده‌است.

1. Lambert, R. H., *Am. J. Phys.* **36**, 417, 1169, 1968

یکی دیگر از صورتهای تعامد، یعنی تعامد نسبت به شاخصهای پایین را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\int_{-\infty}^{\infty} j_m(x) j_n(x)\, dx = 0, \quad m \neq n, \quad m, n \geqslant 0 \qquad (۱۷۴.۱۱)$$

اثبات این‌رابطه را به‌مسئلهٔ ۱۰.۷.۱۱ واگذار می‌کنیم. اگر $m=n$ (با مسئلهٔ ۱۱.۷.۱۱ مقایسه کنید)، داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} [j_n(x)]^2 dx = \frac{\pi}{2n+1} \qquad (۱۷۵.۱۱)$$

اکثر کاربردهای فیزیکی توابع متعامد بسل و بسل کروی شامل تعامد بین ریشه‌های مختلف، و در بازهٔ $[0, a]$ یعنی معادله‌های (۱۶۸.۱۱) و (۱۶۹.۱۱)، **می‌شوند. تعامد بین** شاخصهای پایین متغیر، معادلهٔ (۱۷۴.۱۱)، عمدتاً یك غرابت ریاضی به‌شمار می‌آید.

توابع کروی بسل درارتباط با امواج کروی نیز رخ می‌نمایند، ولی بررسی وسیعتر آنها را تا معرفی توابع زاویه‌ای متناظر، یعنی توابع لژاندر، به‌تعویق می‌اندازیم.

مسائل

۱.۷.۱۱ نشان دهیدکه اگر داشته‌باشیم

$$n_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{n+1/2}(x)$$

آنگاه n_n خودبه‌خود برابر است با

$$(-1)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-n-1/2}(x)$$

۲.۷.۱۱ صورتهای چندجمله‌ای مثلثاتی $j_n(z)$ و $n_n(z)$ را استخراج کنید.[1]

(الف)
$$j_n(z) = \frac{1}{z}\sin\left(z - \frac{n\pi}{2}\right) \sum_{s=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^s (n+2s)!}{(2s)!(2z)^{2s}(n-2s)!}$$
$$+\frac{1}{z}\cos\left(z - \frac{n\pi}{2}\right) \sum_{s=0}^{[(n-1)/2]} \frac{(-1)^s (n+2s+1)!}{(2s+1)!(2z)^{2s+1}(n-2s-1)!}$$

---

۱. حد بالای مجموعیابی، $[n/2]$ به‌معنای بزرگترین عدد درستی است که‌از $n/2$ بیشتر نباشد.

(ب)

$$n_n(z)=\frac{(-1)^{n+1}}{z}\cos\left(z+\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{s=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^s(n+2s)!}{(2s)!(2z)^{2s}(n-2s)!}$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}}{z}\sin\left(z+\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{s=0}^{[(n-1)/2]}\frac{(-1)^s(n+2s+1)!}{(2s+1)!(2z)^{2s+1}(n-2s-1)!}$$

۳.۷.۱۱ با استفاده از نمایش انتگرالی $J_\nu(x)$

$$J_\nu(x)=\frac{1}{\pi^{1/2}(\nu-1/2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\int_{-1}^{1}e^{\pm ixp}(1-p^2)^{\nu-1/2}dp$$

نشان دهید که توابع کروی بسل $j_n(x)$ را می‌توان برحسب توابع مثلثاتی بیان کرد؛ یعنی، مثلا

$$j_0(x)=\frac{\sin x}{x}$$

$$j_1(x)=\frac{\sin x}{x^2}-\frac{\cos x}{x}$$

۴.۷.۱۱ (الف) روابط بازگشتی زیر راکه توابع کروی بسل، $j_n(x)$، $n_n(x)$، $h_n^{(1)}(x)$، و $h_n^{(2)}(x)$ درآنها صدق می‌کنند، به‌دست آورید

$$f_{n-1}(x)+f_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{x}f_n(x)$$

$$nf_{n-1}(x)-(n+1)f_{n+1}(x)=(2n+1)f_n'(x)$$

(ب) به‌کمك این دو رابطهٔ بازگشتی نشان دهید که تابع کروی بسل، $f_n(x)$، در معادلهٔ دیفرانسیل زیرصدق می‌کند

$$x^2f_n''(x)+2xf_n'(x)+[x^2-n(n+1)]f_n(x)=0$$

۵.۷.۱۱ از طریق استقرای ریاضی ثابت کنیدکه به‌ازای عدد درست غیرمنفی اختیاری n داریم

$$j_n(x)=(-1)^nx^n\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

۶.۷.۱۱ با استفاده از مبحث تعامد توابع کروی بسل، نشان دهید که یك رابطهٔ **رونسکیی** برای $j_n(x)$ و $n_n(x)$ به‌صورت زیرداریم

$$j_n(x)n_n'(x)-j_n'(x)n_n(x)=\frac{1}{x^2}$$

۷.۷.۱۱ تحقیق کنید که

$$.h_n^{(1)}(x)h_n^{(2)\prime}(x)-h_n^{(1)\prime}(x)h_n^{(2)}(x)=-\frac{2i}{x^2}$$

۸.۷.۱۱ درستی نمایش انتگرالی پواسون برای تابع کروی بسل

$$j_n(z)=\frac{z^n}{2^{n+1}n!}\int_0^\pi \cos(z\cos\theta)\sin^{2n+1}\theta\,d\theta$$

را تحقیق کنید.

۹.۷.۱۱ نشان دهید که

$$\int_0^\infty J_\mu(x)J_\nu(x)\frac{dx}{x}=\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin[(\mu-\nu)\pi/2]}{\mu^2-\nu^2},\quad \mu+\nu>-1$$

۱۰.۷.۱۱ معادلهٔ (۱۷۴.۱۱) را به‌صورت زیر استخراج کنید

$$\int_{-\infty}^\infty j_m(x)j_n(x)dx=0,\quad m\neq n\quad m,n\geqslant 0$$

۱۱.۷.۱۱ معادلهٔ (۱۷۵.۱۱) را به‌شکل زیر استخراج کنید

$$\int_{-\infty}^\infty [j_n(x)]^2dx=\frac{\pi}{2n+1}$$

۱۲.۷.۱۱ انتگرال تعامد را برای $j_L(kr)$ در کره‌ای به‌شعاع R و با شرط مرزی

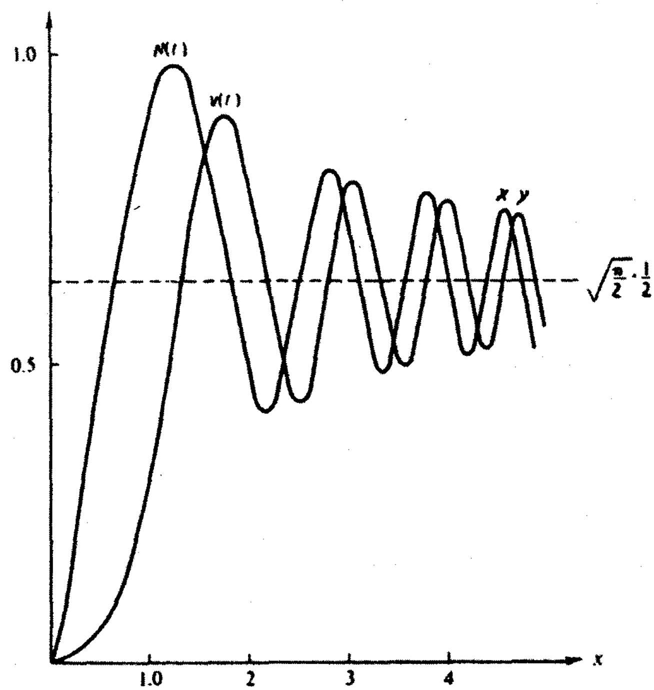
$$j_L(kR)=0$$

بنویسید. از این نتیجه برای رده‌بندی تابش الکترومغناطیسی برحسب تکانهٔ زاویه‌ای آن بهره می‌گیرند.

۱۳.۷.۱۱ انتگرالهای فرنل (شکل ۱۶.۱۱) که درنظریهٔ پراش به آنها برمی‌خوریم، به صورت زیر بیان می‌شوند

$$x(t)=\int_0^t \cos(v^2)dv$$

$$y(t)=\int_0^t \sin(v^2)dv$$



شکل ۱۶۰۱۱ انتگرالهای فرنل.

نشان دهیدکه این انتگرالها را می‌توان به‌صورت سریهایی ازتوابع‌کروی بسل به‌قرارزیر بسط داد

$$x(s)=\frac{۱}{۲}\int_{\circ}^{s} j_{-۱}(u)\,u^{۱/۲}du=s^{۱/۲}\sum_{n=\circ}^{\infty} j_{۲n}(s)$$

$$y(s)=\frac{۱}{۲}\int_{\circ}^{s} j_{\circ}(u)\,u^{۱/۲}du=s^{۱/۲}\sum_{n=\circ}^{\infty} j_{۲n+۱}(s)$$

راهنمایی. برای اثبات برابری انتگرال و مجموع، شاید بخواهید با مشتقهای آنها کار کنید. شبیه کروی بسل معادله‌های (۱۲۰۱۱) و (۱۴۰۱۱) دراین خصوص مفید واقع می‌شوند.

۱۴۰۷۰۱۱ کره‌ای توخالی به‌شعاع a (تشدیدکنندهٔ هلمهولتز) حاوی امواج ایستادهٔ صوتی است. کمینهٔ بسامد نوسان را برحسب شعاع a وسرعت صوت، v، پیداکنید. امواج صوتی درمعادلهٔ موج

$$\nabla^{2}\psi=\frac{1}{v^{2}}\frac{\partial^{2}\psi}{\partial t^{2}}$$

وشرط مرزی

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=0, \quad r=a$$

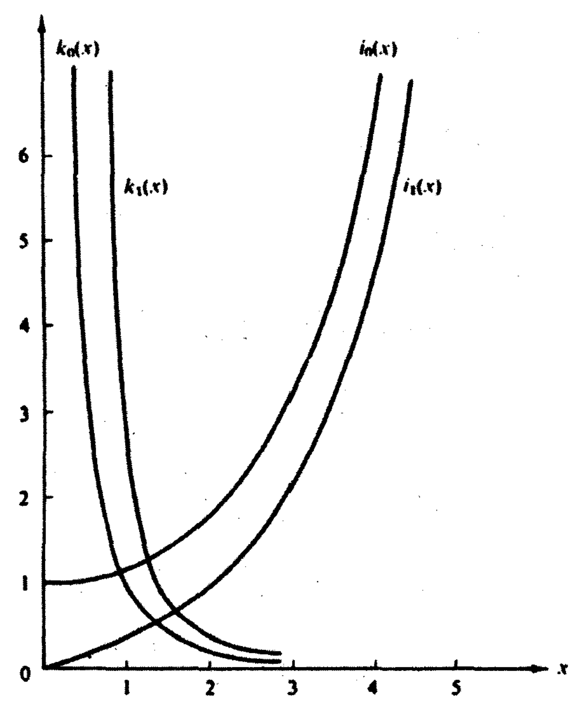
صلق می‌کنند. این‌شرط عبارت است ازشرط مرزی نویمان. درمثال ۱۰۷۰۱۱ همین معادلهٔ دیفرانسیل را داریم، ولی بایك شرط مرزی دیریکله.

پاسخ. $\lambda_{\text{بیشینه}}=3.018a$، $\nu_{\text{کمینه}}=0.3313v/a$.

۱۵۰۷۰۱۱ توابع‌کروی تعدیل‌یافتهٔ بسل (شکل ۱۷۰۱۱) به‌کمك روابط زیرتعریف‌می‌شوند

$$i_{n}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}I_{n+1/2}(x)$$

$$k_{n}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}K_{n+1/2}(x)$$



شکل ۱۷۰۱۱ توابع کروی تعدیل‌یافتهٔ بسل.

نشان دهید که

$$i_0(x)=\frac{\sinh x}{x}$$

$$k_0(x)=\frac{e^{-x}}{x}$$

توجه کنید که ضریبهای عددی در تعریفهای i_n و k_n یکسان نیستند.

۱۶.۷.۱۱ (الف) نشان دهید که پاریتهٔ $i_n(x)$ عبارت است از $(-1)^n$.
(ب) نشان دهید که $k_n(x)$ پاریتهٔ خاصی ندارد.

۱۷.۷.۱۱ نشان دهید که توابع کروی تعدیل یافتهٔ بسل در روابط زیر صدق می‌کنند

(الف)

$$i_n(x)=i^{-n}j_n(ix)$$

$$k_n(x)=-(i)^n h_n^{(1)}(ix)$$

(ب)

$$i_{n+1}(x)=x^n\frac{d}{dx}(x^{-n}i_n)$$

$$k_{n+1}(x)=-x^n\frac{d}{dx}(x^{-n}k_n)$$

(ج)

$$i_n(x)=x^n\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n\frac{\sinh x}{x}$$

$$k_n(x)=(-1)^n x^n\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n\frac{e^{-x}}{x}$$

۱۸.۷.۱۱ نشان دهید که روابط بازگشتی مربوط به $i_n(x)$ و $k_n(x)$ عبارت‌اند از

(الف)

$$i_{n-1}(x)-i_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{x}i_n(x)$$

$$ni_{n-1}(x)+(n+1)i_{n+1}(x)=(2n+1)i_n'(x)$$

(ب)

$$k_{n-1}(x)-k_{n+1}(x)=-\frac{2n+1}{x}k_n(x)$$

$$nk_{n-1}(x)+(n+1)k_{n+1}(x)=-(2n+1)k_n'(x)$$

۱۹.۷.۱۱ مقادیرحدی زیر را برای توابع کروی تعدیل‌یافتهٔ بسل به‌دست آورید

(الف)

$$i_n(x)\approx\frac{x^n}{(۲n+۱)!!}$$

$$k_n(x)\approx\frac{(۲n-۱)!!}{x^{n+۱}},\quad x\ll ۱$$

(ب)

$$i_n(x)\sim\frac{e^x}{۲x}$$

$$k_n(x)\sim\frac{e^{-x}}{x},\quad x\gg n(n+۱)/۲$$

۲۰.۷.۱۱ نشان دهید که **رونسکیبی** توابع کروی تعدیل‌یافتهٔ بسل از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آیـد

$$i_n(x)k_n'(x)-i_n'(x)k_n(x)=-\frac{۱}{x^۲}$$

۲۱.۷.۱۱ یك ذرهٔ کوانتومی دریك چاه "مربعی" به‌شعاع a به‌دام افتاده است. پتانسیـل معادلهٔ شرودینگرعبارت است‌از

$$V(r)=\begin{cases}-V_\circ, & \circ\leqslant r<a\\ \circ, & r>a\end{cases}$$

انرژی ذره، E، (یك ویژه‌مقدار) منفی‌است.

(الف)نشان دهید که جزء شعاعی تابع‌موج از طریق $j_l(k_۱r)$، به‌ازای $\circ\leqslant r<a$ و$k_l(k_۲r)$ به‌ازای $r>a$ به‌دست می‌آید. [این شرط را داریم که $\psi(\circ)$ و $\psi(\infty)$ متناهی باشند.] دراینجا $k_۱^۲=۲M(E+V_\circ)/\hbar^۲$، $k_۲^۲=-ME/\hbar^۲$، و l تکانهٔ زاویه‌ای [n درمعادلهٔ (۱۳۹.۱۱)] است.

(ب) شرط مرزی در $r=a$ آن است که تابع‌موج $\psi(r)$ و مشتق اول آن پیوسته باشند.نشان دهیدکه این نکته بدان معناست که

$$\left.\frac{\frac{d}{dr}j_l(k_۱r)}{j_l(k_۱r)}\right|_{r=a}=\left.\frac{\frac{d}{dr}k_l(k_۲r)}{k_l(k_۲r)}\right|_{r=a}$$

این معادله ویژه‌مقدارهای انرژی را تعیین می‌کند.
یادآوری. این مسئله تعمیم مثال ۲.۱.۹ است.

۲۲.۷.۱۱ تابع‌موج شعاعی کوانتوم مکانیکی برای یك موج پراکنده از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آیـد

$$\psi_k = \frac{\sin(kr+\delta_0)}{kr}$$

که در آن k عدد موج و برابر است با $\sqrt{2mE}/\hbar$، و δ_0 انتقال فاز پراکندگی است. نشان دهیدکه انتگرال بهنجارش عبارت است‌از

$$\int_0^\infty \psi_k(r)\,\psi_{k'}(r) r^2\, dr = \frac{\pi}{2k}\delta(k-k')$$

راهنمایی. می‌توانید از یك نمایش سینوسی برای تابع دلتای دیراك استفاده کنید. به‌مسئلهٔ ۸.۳.۱۵ رجوع کنید.

۲۳.۷.۱۱ رابطهٔ بستاری تابع کروی بسل

$$\frac{2a^2}{\pi}\int_0^\infty j_n(ar)\,j_n(br)\,r^2\, dr = \delta(a-b)$$

را استخراج کنید.
یادآوری. یکی از روشهای جالب برای استخراج این رابطه شامل تبدیلهای فوریه، بسط موج تخت ریلی، وهماهنگهای کروی توسط یوگینسیوز[1] به‌دست آمده است.

۲۴.۷.۱۱ (الف)زیر-برنامه‌ای بنویسیدکه توابع کروی بسل $j_n(x)$ را تولید کند، یعنی مقدار عددی $j_n(x)$ را با معلوم بودن x و n تعیین کند.
یادآوری. یکی‌ازامکانها آن‌است‌که ازصورتهای صریح ومعلوم j_0 و j_1 بهره‌گیرید و j_n با شاخصهای پایین بالاتر را ازطریق کاربرد پی‌درپی رابطهٔ بازگشتی ایجادکنید.
(ب) زیر-برنامهٔ خودرا به‌کمك‌یك محاسبهٔ مستقل، مثلا معادلهٔ(۱۵۳.۱۱)، بیازمایید. در صورت امکان زمانی راکه کامپیوتر برای این آزمون صرف می‌کند با زمان لازم برای زیر-برنامهٔ خود مقایسه کنید.

۲۵.۷.۱۱ تابع‌موج ذره‌ای واقع در یك‌کره (مثال ۱.۷.۱۱) با تکانهٔ زاویه‌ای l، عبارت

1. Ugincius, P., *Am. J. Phys.*, **40**, 1690 (1972).

است از $\psi(r,\theta,\varphi)=Aj_l\left[\frac{\sqrt{2ME}}{\hbar}r\right]Y_l^m(\theta,\varphi)$. تابع $Y_l^m(\theta,\varphi)$ یک‌هماهنگ کروی‌است که دربخش ۶.۱۲ توصیف شده‌است. بااستفاده ازشرط‌مرزی $\psi(a,\theta,\varphi)=0$ یا $j_l\left[\frac{\sqrt{2ME}}{\hbar}a\right]=0$، ده‌حالت انرژی‌پایینتر رامحاسبه‌کنید. واگنی نسبت‌به m ($2l+1$ مقدار برای m به‌ازای هرگزینهٔ l) را درنظر نگیرید. نتایج حاصل را با جدول ۶.۱۰، در AMS-55، بیازمایید.

راهنمایی. می‌توانید از زیر-برنامهٔ کروی بسل ویک‌زیر-برنامهٔ ریشه‌یاب‌استفاده‌کنید.
مقادیرآزمونی. $j_l(\alpha_{ls})=0$، $\alpha_{01}=3/1416$، $\alpha_{11}=4/4934$، $\alpha_{21}=5/7635$، $\alpha_{02}=6/2832$.

۲۶.۷.۱۱ مثال ۱.۷.۱۱ را چنان تغییر دهید که پتانسیل در بیرون $(r>a)$ برابر V_0 متناهی باشد.

(الف) نشان دهیدکه به‌ازای $E<V_0$

$$\psi_{out}(r,\theta,\varphi)\sim k_l\left(\frac{\sqrt{2M(V_0-E)}}{\hbar}r\right)$$

(ب) شرایط مرزی جدیدکه باید به‌ازای $r=a$ برقرارباشند، عبارت‌اند از

$$\psi_{in}(a,\theta,\varphi)=\psi_{out}(a,\theta,\varphi)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\psi_{in}(a,\theta,\varphi)=\frac{\partial}{\partial r}\psi_{out}(a,\theta,\varphi)$$

یا

$$\frac{1}{\psi_{in}}\left.\frac{\partial\psi_{in}}{\partial r}\right|_{r=a}=\frac{1}{\psi_{out}}\left.\frac{\partial\psi_{out}}{\partial r}\right|_{r=a}$$

نشان دهیدکه به‌ازای $l=0$، شرط مرزی در $r=a$ به‌رابطهٔ زیرمنجرمی‌شود

$$f(E)=k\left\{\cot ka-\frac{1}{ka}\right\}+k'\left\{1+\frac{1}{k'a}\right\}$$

$$=0$$

که در آن $k=\sqrt{2ME}/\hbar$ و $k'=\sqrt{2M(V_0-E)}/\hbar$.

(ج) با $a=1\hbar^2/Me^2$ (شعاع بور) و $V_0=4Me^4/2\hbar^2$، حالتهای مقیدممکن ($0<E<V_0$) را محاسبه‌کنید.

راهنمایی. پس‌از آنکه محل تقریبی ریشه‌های

$$f(E),\ (\circ, V_\circ)$$

را پیداکردید، ازیك زیر-برنامهٔ ریشه‌یاب استفاده‌کنید.

(د) نشان دهیدکه وقتی $a = ۱\hbar^۲/Me^۲$، کمترین مقدار $V_\circ$ که برای‌آن یك حالت مقید وجود دارد، عبارت است‌از $V_\circ = ۲٫۴۶۷۴ Me^۴/۲\hbar^۲$.

۲۷.۷.۱۱ سطح مقطع دیفرانسیلی در برخی از واکنشهای مربوط به برهنه‌شدن هسته‌ای، متناسب است با $[j_l(x)]^۲$، که درآن l تکانهٔ زاویه‌ای است. اگر موضع (نخستین) بیشینهٔ $j_l(x)$ معلوم باشد، موضع بیشینه روی منحنی داده‌هـای تجربی، تعیین l را میسر می‌سازد. موضع اولین بیشینهٔ $j_۱(x)$، $j_۲(x)$، و $j_۳(x)$ را محاسبه‌کنید.

یادآوری. برای دقت بیشتر، موضع اولین صفر $j_l'(x)$ را جستجوکنید. چرا این‌کار دقیقتر ازمحاسبهٔ مستقیم موضع بیشینه است؟

مراجع

McBride, E. B., *Obtaining Generating Functions*. New York: Springer-Verlag, 1971.

این‌کتاب درآمدی‌است برروشهای دستیابی به‌توابع مولد.

Watson, G. N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd ed. Cambridge/: Cambridge/ University Press, 1952.

این‌کتاب متن درسی جامعی برای توابع بسل وخواص‌آنهاست. هرچند خواندنش دشوار است، ولی به‌عنوان مرجع نهایی بسیار ارزشمند است.

Watson, G. N., *Theory of Bessel Functions*. Cambridge: Cambridge University Press.

به‌سیاههٔ مراجعی‌که درانتهای فصل ۱۳ آورده‌ایم نیز رجوع‌کنید.

۱۲

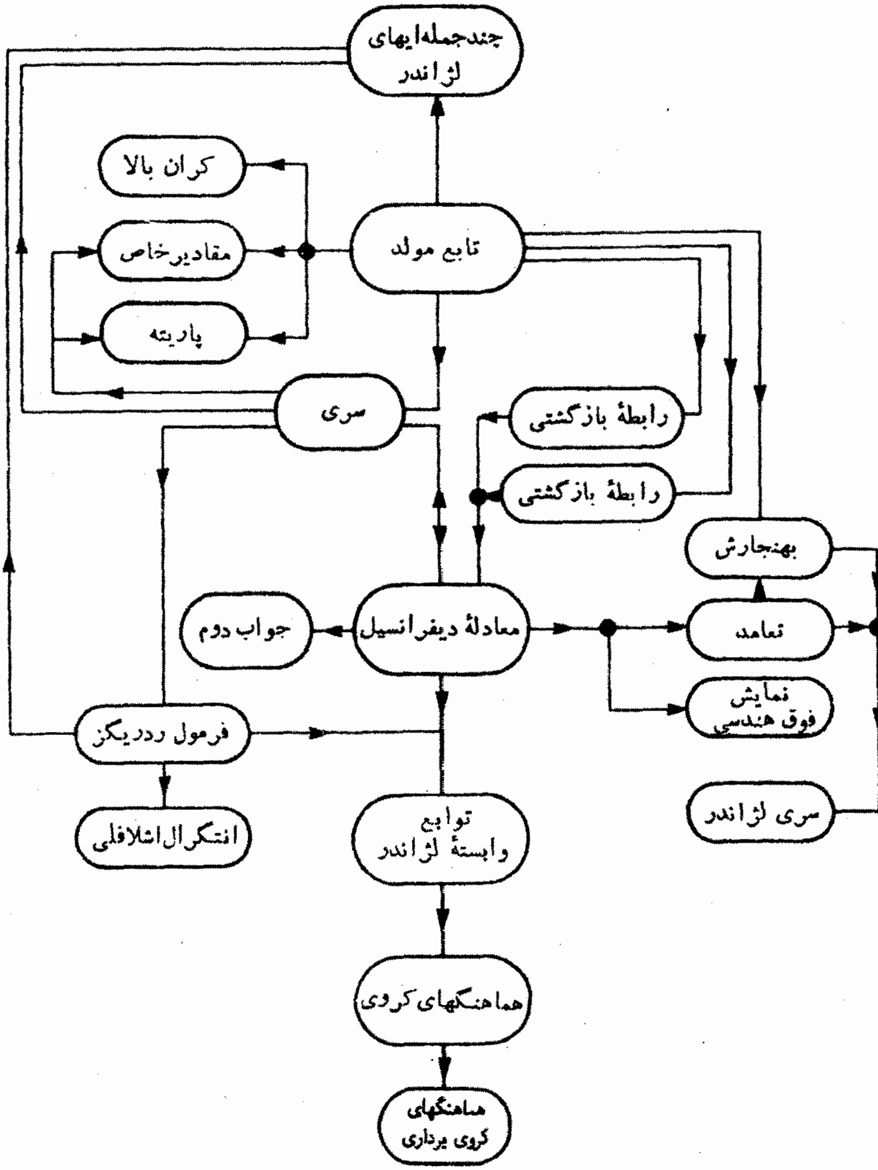
توابع لژاندر

۱.۱۲ تابع مولد

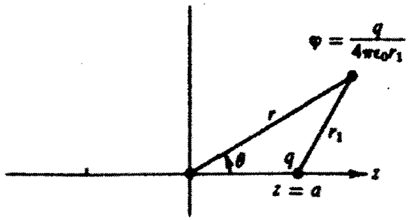
چندجمله‌ایهای لژاندر درمباحث فیزیکی و ریاضی بسیار متفاوتی ظاهر می‌شوند: (۱) مبدأ این چندجمله‌ایها ممکن است به‌صورت جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل لژاندر باشد که در جداسازی متغیرهای معادلهٔ لاپلاس، معادلهٔ هلمهولتز، و معادلات دیفرانسیل مشابه آنها در مختصات قطبی‌کروی (بخش ۶.۲، جلد اول) با آنها روبه‌رو شدیم. (۲) این چندجمله‌ایها ممکن‌است به‌صورت پیامدی ازیك فرمول ردریگز (بخش ۴.۱۲) وارد شوند. (۳) ممکن است پیامد جستجوی یك مجموعهٔ کامل از توابع متعامد روی بازهٔ [۱ ,۱ —] باشند (متعامدسازی گرام‌ـاشمیت، بخش ۳.۹). (۴) در مکانیك کوانتومی، این چندجمله‌ایها (در واقع‌ـهماهنگهای کروی، بخشهای ۶.۱۲ و ۷.۱۲) نمایانگر ویژه‌تابعهای تکانهٔ زاویه‌ای‌اند. (۵)این چندجمله‌ایها را می‌توان به‌کمك یك‌تابع مولد نیزپدیدآورد. دراینجا چندجمله‌ایهای لژاندر را ازطریق تابع‌مولد معرفی‌می‌کنیم. خواص‌مختلف این‌چندجمله‌ایها و توابع مربوط به‌آنها به‌صورت طرحواره درشکل ۱.۱۲ نموده شده‌است.

مبنای فیزیکی‌ـالکتروستاتیك

بهتر است چندجمله‌ایهای لژاندر را نیز، مانند توابع بسل، به‌کمك یك تابع مولد معرفی کنیم. ولی یك تعبیر فیزیکی مستقیم نیز میسر است. بارالکتریکی q راکه در $z=a$ روی محور z واقع است درنظربگیرید. بنابرشکل ۲.۱۲، پتانسیل الکتروستاتیکی بار q برابر



شکل ۱۰۱۲ روابط درونی تابع لژاندر.



شکل ۲.۱۲ پتانسیل الکتروستاتیکی. بار q نسبت به‌مبدأ جابه‌جا شده‌است.

است با

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r_1} \qquad (\text{SI دستگاه}) \qquad (1.12)$$

مسئلهٔ ما عبارت است از تعیین پتانسیل الکتروستاتیکی برحسب مختصات قطبی‌کروی r و θ (مختصهٔ φ به‌دلیل تقارن حول محور z ظاهر نخواهد شد). با استفاده ازقانون کسینوسها

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta)^{-1/2} \qquad (2.12)$$

چندجمله‌ایهای لژاندر

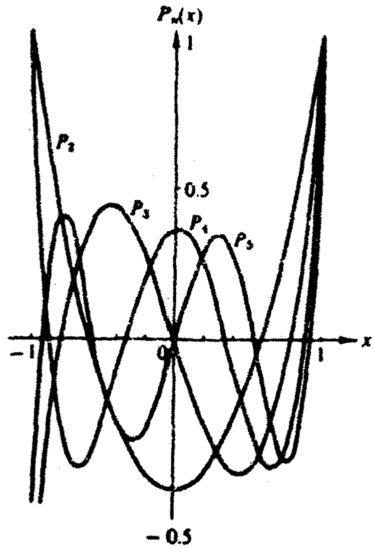
حالت $r>a$، یا به‌بیان دقیقتر $r^2 > |a^2 - 2ar\cos\theta|$، را درنظر بگیرید. رادیکال را می‌توان به‌کمك سری دوجمله‌ای بسط داد و به‌رابطهٔ زیر رسید

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^n \qquad (3.12)$$

این‌عبارت یك‌سری‌از توانهای (a/r) به‌شمارمی‌آیدکه درآن ضریب‌توان nام با $P_n(\cos\theta)$ نشان داده شده‌است. P_nها چندجمله‌ایهای لژاندر هستند (شکل ۳.۱۲) و می‌توان آنها را به‌کمك تابع زیر تعریف کرد

$$g(t,x) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \quad |t|<1 \qquad (4.12)$$

این عبارت معادل آن است که سمت‌راست معادلات (۲.۱۲) و (۳.۱۲) را مساوی هم‌قرار دهیم، ودر آن‌به‌جای $\cos\theta$ کمیت x و به‌جای a/r کمیت t را بنشانیم. معادلهٔ(۴.۱۲)تابع مولد ما به‌شمار می‌آید. دربخش بعد نشان خواهیم داد که $|P_n(\cos\theta)| \leqslant 1$، یعنی بسط



شکل ۱۲.۴. چندجمله‌ایهای لژاندر، $P_2(x)$، $P_3(x)$، $P_4(x)$، $P_5(x)$.

سری [معادلهٔ (۴.۱۲)] به‌ازای $|t|<1$ همگراست.[1] درواقع این سری به‌ازای $|t|=1$ همگراست، مگر آنکه $|x|=1$.

درواقع از آنجا که معادلهٔ (۴.۱۲) چندجمله‌ایهای لژاندر، $P_n(x)$، را تعریف می‌کند، همگرایی سری ضروری نیست. حتی‌اگر سری واگرا هم باشد، باز می‌توان مقادیر صریح چندجمله‌ایها را به دست آورد و روابط مفیدی میان آنها برقرار کرد. در هر حال، خاصیت همگرایی از آن‌رو مناسب‌است که بهره‌گیری از خواص سری توانی (بخش ۷.۵، جلد اول) را میسرمی‌سازد.

معادلهٔ (۴.۱۲) درکاربردهای فیزیکی غالباً به‌صورت برداری زیر ظاهر می‌شود

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}=\frac{1}{r_>}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^n P_n(\cos\theta) \qquad (\text{۴.۱۲ الف})$$

که درآن

$$\left.\begin{aligned} r_> &= |\mathbf{r}_1| \\ r_< &= |\mathbf{r}_2| \end{aligned}\right\} \quad \text{به‌ازای}\ |\mathbf{r}_1|>|\mathbf{r}_2|$$

---

۱. توجه کنید که سری معادلهٔ (۳.۱۲) به‌ازای $r>a$ همگراست هرچند که بسط دو جمله‌ای مربوطه فقط به‌ازای $r>(a^2+2ar)^{1/2}$ و $\cos\theta=-1$ صادق است.

و

$$\left.\begin{array}{l} r_> = |\mathbf{r}_2| \\ r_< = |\mathbf{r}_1| \end{array}\right\} \quad |\mathbf{r}_2| > |\mathbf{r}_1| \quad \text{به‌ازای}$$

تابع مولد را، با بهره‌گیری از قضیهٔ دوجمله‌ای (بخش ۶.۵، جلـد اول) و مسئلهٔ ۱۵.۱.۱۰، به‌صورت زیر بسط می‌دهیم

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(2xt-t^2)^n$$

(۵.۱۲)

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(2xt-t^2)^n$$

برای چندتایی‌ازاولین‌چندجمله‌ایهای لژاندر، یعنی P_0، P_1، و P_2 به‌ضرایب t^0، t^1، و t^2 نیاز داریم. این‌توانها تنها درجملات $n=0, 1, 2$ ظاهرمی‌شوند، ازاین‌رو می‌توانیم‌توجه خودرا به‌سه‌جملهٔ اول‌سری متناهی، یعنی

$$\frac{0!}{2^0(0!)^2}(2xt-t^2)^0+\frac{2!}{2^2(1!)^2}(2xt-t^2)^1+\frac{4!}{2^4(2!)^2}(2xt-t^2)^2$$

$$=1t^0+xt^1+\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)t^2+\theta t^3$$

معطوف‌کنیم. آنگاه بااستفاده ازمعادلهٔ (۴.۱۲) (و یکتایی سری توانی) داریم

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$$

این نحوهٔ استخراج محدود را بعداً درهمین‌بخش درچارچوب برداری تکرارخواهیم‌کرد.

در رونـد به‌کارگیری یك راه‌حل کـلی، پی می‌بریم که از بسط دوجمله‌ای عامـل $(2xt-t^2)^n$، سری دوگانهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}t^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}(2x)^{n-k}t^k$$

(۶.۱۲)

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(2n)!}{2^{2n}n!k!(n-k)!}(2x)^{n-k}t^{n+k}$$

معادلهٔ (۶.۱۲)، با استفاده از معادلـهٔ (۶۴.۵) در بخش ۴.۵ (جلد اول) (پس از بازآرایی ترتیب مجموعیابی) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$(1-2xt+t^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^{2n-2k}k!(n-k)!(n-2k)!}\cdot(2x)^{n-2k}t^n \tag{۷.۱۲}$$

که در آن توان متغیر t از شاخص پایین k مستقل است.[1] حال با مساوی قراردادن جمله‌به جملهٔ دوسری توانی [معادلات (۴.۱۲) و (۷.۱۲)] داریم[2]

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^nk!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k} \tag{۸.۱۲}$$

چندقطبیهای الکتریکی خطی

بازهم به‌بارالکتریکی روی محور z برمی‌گردیم، وبا افزودن یك بار $-q$ در $z=-a$، مطابق شکل ۴.۱۲، سودمندی وتوانایی تابع مولد را نشان می‌دهیم. پتانسیل به‌صورت‌زیر درمی‌آید

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) \tag{۹.۱۲}$$

وبا استفاده ازقانون‌کسینوسها داریم

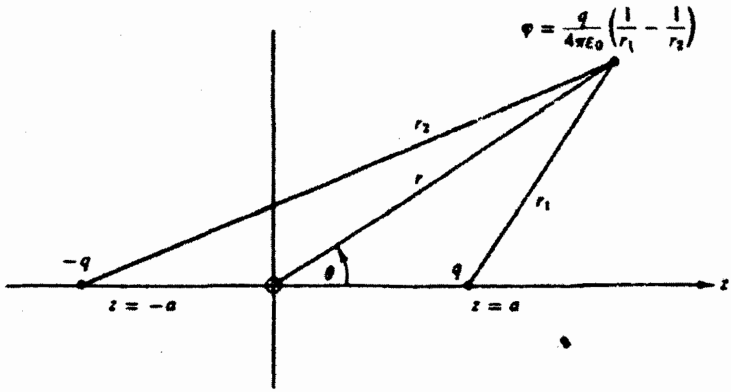
$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left\{\left[1-2\left(\frac{a}{r}\right)\cos\theta+\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]^{-1/2}\right.$$
$$\left.-\left[1+2\left(\frac{a}{r}\right)\cos\theta+\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]^{-1/2}\right\},\quad (r>a)$$

روشن است‌که رادیکال دوم مانند رادیکال اول است، با این تفاوت‌که درآن به جای a کمیت $-a$ نشسته‌است. آنگاه، بااستفاده ازمعادلهٔ (۴.۱۲)

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)(-1)^n\left(\frac{a}{r}\right)^n\right] \tag{۱۰.۱۲}$$
$$=\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[P_1(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)+P_3(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^3+\cdots\right]$$

---

۱. $[n/2]$ به‌ازای مقادیر زوج n برابر $n/2$، و به‌ازای مقادیر فرد n برابر $(n-1)/2$است.
۲. معادلهٔ (۸.۱۲) با x^n شروع می‌شود. این سری را با تعویض شاخص پایین می‌توانیم به‌یك سری تبدیل کنیم که به‌ازای nهای زوج از x^0 و به‌ازای nهای فرد از x^1 شروع مـی‌شود. این سریهای صعودی، در معـادلات (۱۰۴.۱۳) و (۱۰۵.۱۳) در بخش (۵.۱۳) بـرای توابـع فوق هندسی بیان می‌شوند.



شکل ۴.۱۲ دوقطبی الکتریکی.

جملهٔ اول (که به‌ازای $r \gg a$ جملهٔ غالب نیزهست) عبارت است‌از

$$\varphi = \frac{2aq}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{P_1(\cos\theta)}{r^2} \tag{۱۱.۱۲}$$

که همان پتانسیل دوقطبی الکتریکی معمولی است. در اینجا $2aq$ گشتاور دوقطبی است (شکل ۴.۱۲).

این بررسی را می‌توان با قراردادن بارهای دیگری روی محور z طوری تعمیم داد که علاوه برجملهٔ P_0 (تك قطبی)، جملهٔ P_1 نیز حذف شود. مثلا، بارهای q در $z=a$ و $z=-a$ وبار $-2q$ در $z=0$ به‌پتانسیلی منجرمی‌شوند که بسط سری آن‌با $P_2(\cos\theta)$ شروع می‌شود. این یك چارقطبی الکتریکی خطی است. دو چارقطبی خطی‌را می‌توان چنان قرار داد که جملهٔ چارقطبی حذف شود، ولی P_3، یعنی جملهٔ هشت‌قطبی، باقی بماند.

بسط برداری

پتانسیل الکتروستاتیکی حاصل‌از بارتوزیع شدهٔ $\rho(\mathbf{r}_2)$ رادر نظرمی‌گیریم

$$\varphi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d\tau_2 \tag{۱۲.۱۲الف}$$

قبلا، دربخشهای ۱۵.۱ (جلداول) و۷.۸، به‌این‌عبارت برخورده‌ایم. برای مخرج انتگرالده، ابتدا قانون کسینوسها وسپس بسط دوجمله‌ای را به‌کارمی‌بریم، درنتیجه

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = (r_1^2 - 2\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 + r_2^2)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{r_1}\left[1 + \left(-\frac{2\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{r_1^2} + \frac{r_2^2}{r_1^2}\right)\right]^{-1/2}, \qquad \text{به‌ازای } r_1 > r_2$$

$$=\frac{1}{r_1}\left[1+\frac{\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2}{r_1^2}-\frac{1}{2}\frac{r_2^2}{r_1^2}+\frac{3}{2}\frac{(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2)^2}{r_1^4}+\theta\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3\right] \quad (\text{۱۲.۱۲ب})$$

[معادلهٔ (۱۲.۱۲ ب)، به‌ازای $r_1=1$، $r_2=t$، و $\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2=xt$، به تابع مولد معادلهٔ (۴.۱۲) تقلیل می‌یابد.]

از جملهٔ اول داخل کروشه، یعنی ۱، پتانسیل زیر به‌دست می‌آید

$$\varphi_0(\mathbf{r}_1)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_1}\int\rho(\mathbf{r}_2)d\tau_2 \quad (\text{۱۲.۱۲ج})$$

انتگرال، درست برابر بار کل است. این بخش از پتانسیل کل، یك تك‌قطبی الکتریکی است.

از جملهٔ دوم پتانسیل زیر حاصل می‌شود

$$\varphi_1(\mathbf{r}_1)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3}\int\mathbf{r}_2\rho(\mathbf{r}_2)d\tau_2 \quad (\text{۱۲.۱۲د})$$

در اینجا بار $\rho(\mathbf{r}_2)$ برحسب وزن بازوی گشتاور $\mathbf{r}_2$ تنظیم می‌شود. پتانسیلی دوقطبی داریم. $\rho(\mathbf{r}_2)$ برای حالتهای اتمی یاهسته‌ای باپاریتهٔ معین، تابعی است زوج و این انتگرال دوقطبی باصفر متحد می‌شود.

دوجملهٔ آخر را، که هردو ازمرتبهٔ $(r_2/r_1)^2$ هستند، می‌توان با استفاده از مختصات دکارتی بررسی کرد

$$(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2)^2=\sum_{i=1}^{3}x_{1i}\,x_{2i}\sum_{j=1}^{3}x_{1j}\,x_{2j}$$

پس از بازآرایی متغیرها، به صورتی که x_2ها در داخل انتگرال باقی بمانند، خواهیم داشت

$$\varphi_2(\mathbf{r}_1)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2r_1^5}\sum_{i,j=1}^{3}x_{1i}\,x_{1j}\int[3x_{2i}x_{2j}-\delta_{ij}r_2^2]\rho(\mathbf{r}_2)d\tau_2$$

(۱۲.۱۲ه)

این عبارت، جملهٔ چارقطبی الکتریکی است. خاطرنشان می‌سازیم که کروشهٔ درون انتگرالده، یك تانسور متقارن با رد صفر را تشکیل می‌دهد.

با استفاده ازمعادلهٔ (۱۲.۱۲ الف) برای $\varphi(r_1)$ و نشاندن تابع گرین معادلهٔ (۱۶۹.۱۶) به‌جای $1/(4\pi|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)$، می‌توان یك بسط چندقطبی الکتروستاتیکی کلی نیز تشکیل داد. به‌این ترتیب، پتانسیل $\varphi(\mathbf{r}_1)$ به‌صورت یك‌سری (دوگانه) ازهماهنگهای کروی $Y_l^m(\theta_1,\varphi_1)$ و $Y_l^m(\theta_2,\varphi_2)$ به‌دست می‌آید.

پیش‌ازآنکه از مبحث میدانهای چندقطبی بگذریم، شاید بهتر باشد بر سه نکته تأکید کنیم. نخست آنکه یك چندقطبی الکتریکی(یامغناطیسی) تنها درصورتی معنایی مطلق‌دارد که **همهٔ جمله‌های از مرتبهٔ پایینترحذف شوند.** مثلا، پتانسیل یك‌بار q در $z=a$ به صورت‌یك سریِ ازچندجمله‌ایهای لژاندربسط داده‌شد. هرچند می‌توانیم دراین‌بسط‌جملهٔ $P_1(\cos\theta)$ را یك جملهٔ دوقطبی بخوانیم، ولی باید به‌خاطر داشت که این جمله تنها به‌آن علت‌که ما مختصات خاصی برگزیده‌ایم وجود دارد. دراین صورت‌عملا یك تك‌قطبی $P_0(\cos\theta)$ داریم.

دوم آنکه، درسیستمهای فیزیکی به‌چندقطبیهای خالص برنمی‌خوریم. مثلا، پتانسیل‌یك دوقطبی‌متناهی (q در $z=a$ و $-q$ در $z=-a$) شامل یك‌جملهٔ $P_3(\cos\theta)$ نیزهست. این جملات از مرتبهٔ بالاتر را می‌توان از طریق جمع (و فشرده) کردن چندقطبی و تبدیل آن به‌یك چندقطبی نقطه‌ای حذف کرد. در مورد دوقطبی فوق این جمع‌کردن باید چنان صورت‌گیردکه qa ثابت‌بماند ($a\to 0$، $q\to\infty$)، تاآنکه همان‌گشتاور دوقطبی را داشته باشیم.

سوم آنکه، نظریهٔ چندقطبی به پدیده‌های الکتریکی محدود نمی‌شود. پیکربندیهای سیاره‌ای برحسب چندقطبیهای جرمی توصیف می‌شوند (بخشهای ۳.۱۲ و ۵.۱۲). تابش گرانشی به رفتار زمانی چندقطبیهای جرمی بستگی دارد. (میدان تابش گرانشی یك میدان تانسوری است. یکای تابش، که گراویتون نامیده می‌شود، حاوی دو واحد تکانهٔ زاویه‌ای است.)

همچنین می‌توان خاطرنشان ساخت‌که بسط چندجمله‌ای درواقع تجزیه‌ای است به نمایشهای تحویل‌ناپذیرگروه چرخشی (بخش ۱۰.۴، جلد اول).

تعمیم به‌چندجمله‌ایهای فراکروی

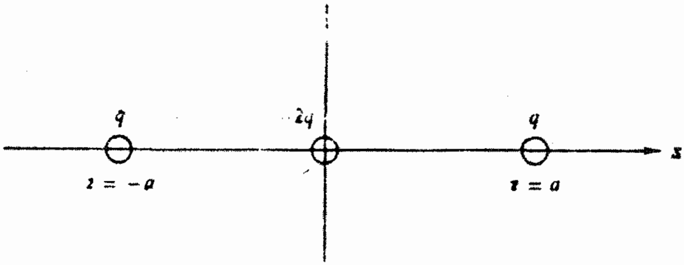
تابع مولدی، $g(t,x)$، که دراینجا به‌کار بردیم حالت خاصی است ازتابع مولدکلیترزیر

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^{\alpha}}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{(\alpha)}(x)t^n \qquad (13.12)$$

ضرایب $C_n^{(\alpha)}(x)$ چندجمله‌ایهای فراکروی‌اند(که باچندجمله‌ایهای‌گگن‌باوئر متناسب‌اند). این معادله به‌ازای $\alpha=1/2$ به‌معادلهٔ (۴.۱۲) تقلیل می‌یابد، یعنی $C_n^{(1/2)}(x)=P_n(x)$. حالتهای $\alpha=0$ و $\alpha=1$ را در فصل ۱۳ در ارتباط با چندجمله‌ایهای چبیشف از نظر خواهیم‌گذراند.

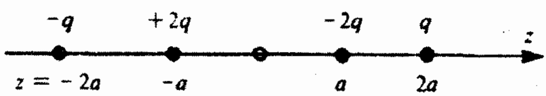
مسائل

۱.۱.۱۲ پتانسیل الکتروستاتیکی را برای آرایه‌ای ازبارها، مطابق شکل ۵.۱۲، به‌دست آورید. این آرایه یك چارقطبی خطی‌الکتریکی‌است.



شکل ۵.۱۲ چارقطبی خطی الکتریکی.

۳.۱.۱۲ پتانسیل الکتروستاتیکی آرایهٔ باری راکه درشکل ۶.۱۲ نموده شده‌است، محاسبه کنید. این مثالی است از دو دوقطبی مساوی جهتهای مخالف. جملات مربوط به‌دوقطبی حذف می‌شوند. جملات هشت‌قطبی حذف نمی‌شوند.



شکل ۶.۱۲ هشت‌قطبی خطی الکتریکی.

۴.۱.۱۲ نشان دهیدکه پتانسیل الکتروستاتیکی حاصل از بار q در $z=a$ به‌ازای $r<a$ عبارت است از

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta)$$

۴.۱.۱۲ بااستفاده از $\mathbf{E}=-\nabla\varphi$، مؤلفه‌های میدان الکتریکی متناظر با پتانسیل دوقطبی (خالص) الکتریکی زیررا تعیین کنید

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{2aqP_1(\cos\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

دراینجا فرض شده‌است که $r\gg a$

$$E_r=+\frac{4aq\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = + \frac{۲aq \sin\theta}{۴\pi\varepsilon_\circ r^۳}$$

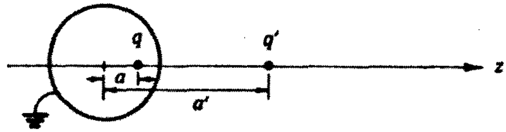
$$E_\varphi = \circ$$

۵.۱.۱۲ یك دوقطبی الکتریکی نقطه‌ای به قدرت $p^{(۱)}$ در $z=a$ قرار دارد؛ دوقطبی الکتریکی نقطه‌ای دیگری با قدرت مساوی ولی مخالف با آن در مبدأ واقع است. با ثابت نگه‌داشتن $p^{(۱)}a$، a را به‌سمت صفر میل دهید. نشان دهیدکه حاصل این‌کار یك چارقطبی الکتریکی نقطه‌ای است.

راهنمایی. از مسئلهٔ ۵.۲.۱۲ (پس از اثبات) بهره‌گیرید.

۶.۱.۱۲ بار نقطه‌ای q درون کرهٔ توخالی رسانایی به‌شعاع $r_\circ$، به‌فاصلهٔ a از مرکز کره قراردارد. اگرکرهٔ رسانا به‌زمین متصل شده باشد، نشان دهیدکه درون‌کره، پتانسیل حاصل از q و توزیع بارالقایی با پتانسیل حاصل از q وبار تصویری آن، q'، برابر است. بار تصویری درفاصلهٔ $a' = r_\circ^۲/a$ ازمرکز واقع وبا q ومبدأ همخط است (شکل ۷.۱۲).

راهنمایی. پتانسیل الکتروستاتیکی را به ازای $a < r_\circ < a'$ محاسبه کنید. نشان دهیدکه اگر q' را با $-qr_\circ/a$ برابر بگیریم، پتانسیل به‌ازای $r = r_\circ$ صفرمی‌شود.



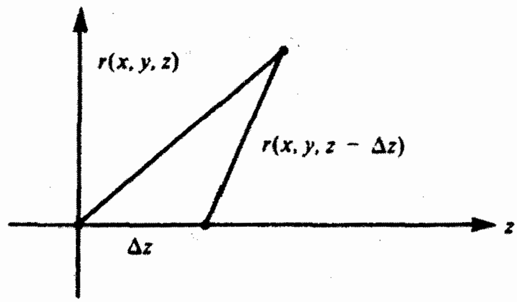
شکل ۷.۱۲

۷.۱.۱۲ ثابت‌کنیدکه

$$P_n(\cos\theta) = (-۱)^n \frac{r^{n+۱}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{۱}{r}\right)$$

راهنمایی. بسط تابع مولد برحسب چندجمله‌ایهای لژاندر($a \to \Delta z$ درشکل۲.۱۲) را با بسط سری تایلور $۱/r$، که در آن وابستگی r به z از z به $z - \Delta z$ تغییر کرده باشد، مقایسه‌کنید (شکل۸.۱۲).

۸.۱.۱۲ با مشتقگیری و جانشانی مستقیم صورت سری چندجمله‌ای لژاندر، یعنی معادلهٔ (۸.۱۲)، نشان دهیدکه $P_n(x)$ در معادلهٔ دیفرانسیل لژاندر صدق می‌کند. توجه کنید که هیچ محدودیتی روی x وجود ندارد. می‌توانیم هرمقدار x را در بازهٔ $-\infty < x < \infty$



شکل ۸.۱۲

ودرواقع هرمقدار z را درتمامی صفحهٔ مختلط متناهی، اختیار کنیم.

۹.۱.۱۲ چندجمله‌ایهای (نوع II) چبیشف توسط تابع زیر تولید می‌شوند [معادلهٔ (۶۲.۱۳)، بخش ۳.۱۳ را ببینید]

$$\frac{1}{1-2xt+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}U_n(x)\,t^n$$

با استفاده از شگردهای بخش ۴.۵ (جلد اول) برای تبدیل سریها، یك نمایش سری برای $U_n(x)$ ارائه دهید.

پاسخ. $U_n(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}$.

۲.۱۲ روابط بازگشتی و خواص ویژه

روابط بازگشتی

تابع مولد چندجمله‌ای لژاندر روش مناسبی برای استخراج روابط بازگشتی[1] و برخی از خواص ویژه فراهم می‌آورد. اگر ازتابع مولد [معادلهٔ (۴.۱۲)] نسبت به t مشتق بگیریم، خواهیم داشت

$$\frac{\partial g(t,x)}{\partial t}=\frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}}=\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1} \qquad (۱۴.۱۲)$$

با نشاندن معادلهٔ (۴.۱۲) دراین‌رابطه وبازآرایی جملات آن، داریم

---

۱. ازصورت صریح سری [معادلهٔ (۸.۱۲)] نیزمستقیماً می‌توان استفاده کرد.

$$(1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1}+(t-x)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n=0 \qquad (15.12)$$

عبارت سمت چپ یك سری توانی است برحسب t. این سری توانی به‌ازای همهٔ مقادیر t صفرمی‌شود. پس می‌توانیم ضریب هریك ازتوانهای t را برابرصفر قرار دهیم، یعنی سری توانی ما یکتاست (بخش ۷.۵، جلد اول). این‌کار را می‌توان صرفاً باجداکردن هریك از مجموعیابیها ازیکدیگر و به‌کاربردن شاخصهای پایین متمایز مجموعیابی، انجام داد

$$\sum_{m=0}^{\infty} mP_m(x)t^{m-1}-\sum_{n=0}^{\infty} 2nxP_n(x)t^n+\sum_{s=0}^{\infty} sP_s(x)t^{s+1}$$

$$+\sum_{s=0}^{\infty} P_s(x)t^{s+1}-\sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)t^n=0 \qquad (16.12)$$

اکنون باقراردادن $m=n+1$ و $s=n-1$ خواهیم داشت

$$(2n+1)xP_n(x)=(n+1)P_{n+1}(x)+nP_{n-1}(x),\quad n=1,2,3,\cdots \qquad (17.12)$$

این‌عبارت، رابطهٔ بازگشتی سه‌جمله‌ای دیگری‌است که با رابطهٔ بازگشتی برای توابع بسل مشابه‌است (ولی باآن یکی‌نیست). با این رابطهٔ بازگشتی می‌توانیم چندجمله‌ایهای بالاتر لژاندر را تشکیل دهیم. اگر بگیریم $n=1$، و مقادیر $P_0(x)$ و $P_1(x)$ را که به آسانی به‌دست می‌آیند [مسئلهٔ ۷.۱.۱۲ یا معادلهٔ (۸.۱۲)] دررابطه بنشانیم، خواهیم داشت

$$3xP_1(x)=2P_2(x)+P_0(x) \qquad (18.12)$$

یا

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1) \qquad (19.12)$$

این فرایند را می‌توان تا بینهایت ادامه داد. تعدادی ازنخستین چندجمله‌ایهای لژاندر در جدول ۱.۱۲ آورده شده‌است.

هرچند ممکن‌است این‌روش دربادی امرپردردسر بنماید، ولی نسبت به‌محاسبهٔ‌مستقیم سری [معادلهٔ (۸.۱۲)]، برای‌کامپیوترهای رقمی‌بزرگ عملا کارامدتراست. برای‌دستیابی به‌ثبات بیشتر (یعنی اجتناب از انباشته و بزرگ شدن بی‌مورد خطای حاصل از گردشدن) معادلهٔ (۱۷.۱۲) را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$P_{n+1}(x)=2xP_n(x)-P_{n-1}(x)-[xP_n(x)-P_{n-1}(x)]/(n+1)$$

(۱۷.۱۲ الف)

محاسبه را از $P_0(x)=1$ و $P_1(x)=x$ آغاز و مقادیر عددی همهٔ $P_n(x)$ها را

جدول ۱۰۱۲ چندجمله‌ایهای لژاندر

$$P_0(x)=1$$

$$P_1(x)=x$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

$$P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$$

$$P_6(x)=\frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5)$$

$$P_7(x)=\frac{1}{16}(429x^7-693x^5+315x^3-35x)$$

$$P_8(x)=\frac{1}{128}(6435x^8-12012x^6+6930x^4-1260x^2+35)$$

به‌ازای یك مقدار معین x تا $P_N(x)$ مطلوب محاسبه می‌کنند. مقادیر $P_n(x)$ به‌ازای $0 \leqslant n < N$ به‌صورت یك مزیت جانبی قابل دسترسی خواهند بود.

معادلات دیفرانسیل

اکنون اگر از معادلهٔ (۴.۱۲) نسبت به x مشتق بگیریم، خواهیم توانست دربارهٔ رفتار چندجمله‌ایهای لژاندر اطلاعات بیشتری به‌دست آوریم. داریم

$$\frac{\partial g(t,x)}{\partial x}=\frac{t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)t^n \tag{۲۰.۱۲}$$

یا

$$(1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)t^n-t\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n=0 \tag{۲۱.۱۲}$$

مانندقبل، ضریب هریک‌ازتوانهای t را برابرصفرمی‌گیریم، درنتیجه

$$P'_{n+1}(x)+P'_{n-1}(x)=2xP'_n(x)+P_n(x) \qquad (22.12)$$

با مشتقگیری ازمعادلهٔ (۱۷.۱۲) نسبت‌به x وضرب کردن آن‌در ۲، می‌توان‌به‌رابطهٔ مفیدتری رسید. به این رابطه $(2n+1)$ برابر معادلهٔ (۲۲.۱۲) را می‌افزاییم که درنتیجه جملهٔ P'_n حذف می‌شود. نتیجه به‌صورت زیردرمی‌آید

$$P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=(2n+1)P_n(x) \qquad (23.12)$$

به‌کمك معادلات (۲۲.۱۲) و (۲۳.۱۲) معادلات بیشمار دیگری می‌توان تشکیل داد[1]، که عبارتهای زیر را دربرمی‌گیرند

$$P'_{n+1}(x)=(n+1)P_n(x)+xP'_n(x) \qquad (24.12)$$

$$P'_{n-1}(x)=-nP_n(x)+xP'_n(x) \qquad (25.12)$$

$$(1-x^2)P'_n(x)=nP_{n-1}(x)-nxP_n(x) \qquad (26.12)$$

$$(1-x^2)P'_n(x)=(n+1)xP_n(x)-(n+1)P_{n+1}(x) \qquad (27.12)$$

به‌کمك مشتقگیری ازمعادلهٔ (۲۶.۱۲) وبااستفاده ازمعادلهٔ(۲۵.۱۲) برای‌حذف $P'_{n-1}(x)$، پی می‌بریم که $P_n(x)$ درمعادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم‌خطی زیرصدق می‌کند

$$(1-x^2)P''_n(x)-2xP'_n(x)+n(n+1)P_n(x)=0 \qquad (28.12)$$

معادلات پیشین، از (۲۲.۱۲) تا (۲۷.۱۲)، جملگی معادلات دیفرانسیلی مرتبهٔ اول‌اند،

---

۱. هر معادله، با شمارهٔ مربوطه که در پرانتز می‌آید، نشان داده خواهد شد. این روابط را می‌توان به‌ترتیب زیراستخراج کرد

$$2\times\frac{d}{dx}(17.12)+(2n+1)\times(22.12)\Longrightarrow(23.12)$$

$$\frac{1}{2}\{(22.12)+(23.12)\}\Longrightarrow(24.12)$$

$$\frac{1}{2}\{(22.12)-(23.12)\}\Longrightarrow(25.12)$$

$$(24.12)_{n\to n-1}+x\times(25.12)\Longrightarrow(26.12)$$

$$\frac{d}{dx}(26.12)+n\times(25.12)\Longrightarrow(28.12)$$

ولی‌هریك ازآنها دوچندجمله‌ای باشاخصهای پایین‌متفاوت‌دارد. معادلهٔ دیفرانسیل‌مرتبهٔ دوم بهاییاست که برای در اختیارداشتن شاخصهای پایین‌یکسان می‌پردازیم. معادلهٔ (۲۸.۱۲)، **همان معادلهٔ دیفرانسیل لژاندر است. اکنون می‌بینیم که چندجمله‌ایهای $P_n(x)$ که** از بسط $(1-2xt+t^2)^{-1/2}$ به‌دست آمدند در معادلهٔ دیفرانسیل لژاندر صدق می‌کنند، و البته به‌همین دلیل آنها را چندجمله‌ایهای لژاندر می‌نامند.

مشتقگیری درمعادلهٔ (۲۸.۱۲) نسبت به x است $(x=\cos\theta)$. صورتی از معادلهٔ دیفرانسیل لژاندرکه درآن مشتقگیری نسبت‌به θ صورت می‌گیرد نیز کاملا متداول‌است

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\right)+n(n+1)P_n(\cos\theta)=0 \quad (۲۹.۱۲)$$

مقادیر خاص

تابع مولد اطلاعات دیگری نیزدربارهٔ چندجمله‌ایهای لژاندر ارائه می‌کند. اگرقراردهیم $x=1$، آنگاه معادلهٔ (۴.۱۲)، بااستفاده ازبسط دوجمله‌ای، به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-2t+t^2)^{1/2}}&=\frac{1}{1-t}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}t^n\end{aligned} \quad (۳۰.۱۲)$$

اما

$$\frac{1}{(1-2tx+t^2)^{1/2}_{x=1}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(1)t^n$$

با مقایسهٔ این دوبسط سری [وبا درنظرگرفتن یکتایی سری توانی (بخش ۷.۵، جلد اول)] داریم

$$P_n(1)=1 \quad (۳۱.۱۲)$$

اگرقرار دهیم $x=-1$، به‌اتکای تحلیل مشابهی خواهیم داشت

$$P_n(-1)=(-1)^n \quad (۳۲.۱۲)$$

برای دستیابی به‌این نتایج، پی می‌بریم که تابع مولد نسبت به‌صورت صریح سری مناسبتر است.

اگرقرار دهیم $x=0$، بااستفاده ازبسط دوجمله‌ای

$$(1+t^2)^{-1/2}=1-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{8}t^4+\cdots+(-1)^n\frac{1\times 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}t^{2n}+\cdots \tag{۳۳.۱۲}$$

داریم[1]

$$P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{1\times 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \tag{۳۴.۱۲}$$

$$P_{2n+1}(0)=0,\quad n=0,1,2,\cdots \tag{۳۵.۱۲}$$

این نتایج را می‌توان از وارسی معادلهٔ (۸.۱۲) نیز به‌دست‌آورد.

پاریته

برخی نتایج فوق حالتهای خاصی ازخاصیت پاریتهٔ چندجمله‌ایهای لژاندر به‌شمار می‌آیند. بازهم به‌معادلهٔ (۴.۱۲) بازمی‌گردیم. اگربه‌جای x کمیت $-x$ وبه‌جای t کمیت $-t$ را بنشانیم، تابع مولد تغییری نمی‌کند. ازاین‌رو

$$\begin{aligned} g(t,x)&=g(-t,-x)\\ &=[1-2(-t)(-x)+(-t)^2]^{-1/2}\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(-x)(-t)^n\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n \end{aligned} \tag{۳۶.۱۲}$$

با مقایسهٔ این‌دوسری داریم

$$P_n(-x)=(-1)^nP_n(x) \tag{۳۷.۱۲}$$

یعنی توابع چندجمله‌ای (نسبت به $x=0$ و $\theta=\pi/2$)، برحسب آنکه شاخص n زوج یا فرد باشد، زوج یا فرد خواهند بود. این همان خاصیت پاریته[2] یا بازتاب است‌که در

---

۱. نماد فاکتوریل دوگانه دربخش ۱.۱۰ تعریف شد،

$$(2n)!!=2\times4\times6\times\cdots\times(2n),\ (2n-1)!!=1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)$$

۲. در مختصات قطبی کروی، وارونی نقطهٔ (r,θ,φ) نسبت به‌مبدأ از طریق تبدیل $[r\to r,\ \theta\to\pi-\theta,\ \varphi\to\varphi\pm\pi]$ صورت‌می‌گیرد. درنتیجه $\cos\theta\to\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ متناظراست با $x\to-x$ (با مسئلهٔ ۸.۵.۲ مقایسه‌کنید).

مکانیك‌کوانتومی نقش مهمی‌دارد. شاخص n، برای نیروهای مرکزی، مقیاسی‌است ازتکانهٔ زاویه‌ای مداری، درنتیجه این‌شاخص، پاریته وتکانهٔ زاویه‌ای مداری رابه‌هم مربوط‌می‌کند.

خواننده پی‌خواهد برد که خاصیت پاریته ازطریق جوابهای سری ومقادیرخاصی که در جدول ۱.۱۲ جدولبندی شده‌اند تأیید می‌شود. توجه به‌این نکته جالب است که معادلهٔ (۳۷.۱۲) را می‌توان باوارسی رابطهٔ بازگشتی معادلهٔ(۱۷.۱۲)نیزپیشگویی‌کرد. خصوصاً اگر $P_{n-1}(x)$ و $xP_n(x)$ زوج باشند، آنگاه $P_{n+1}(x)$ باید زوج باشد.

کرانهای بالا و پایین $P_n(\cos\theta)$

سرانجام، تابع‌مولد، علاوه‌برنتایج فوق، امکان یافتن حدبالای $|P_n(\cos\theta)|$ را نیزفراهم می‌کند. داریم

$$(1-2t\cos\theta+t^2)^{-1/2}=(1-te^{i\theta})^{-1/2}(1-te^{-i\theta})^{-1/2}$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}te^{i\theta}+\frac{3}{8}t^2e^{2i\theta}+\dots\right) \quad (۳۸.۱۲)$$

$$\times\left(1+\frac{1}{2}te^{-i\theta}+\frac{3}{8}t^2e^{-2i\theta}+\dots\right)$$

که در آن همهٔ ضرایب مثبت‌اند. اکنون می‌توان چندجمله‌ای لژاندر، $P_n(\cos\theta)$، راکه در اینجا نیزضریب t^n است، به‌صورت مجموع جملاتی به‌این قرارنوشت

$$a_m(e^{im\theta}+e^{-im\theta})/2=a_m\cosh im\theta$$

$$=a_m\cos m\theta \quad (۳۹.۱۲ \text{ الف})$$

که در آن همهٔ a_m ها مثبت‌اند.آنگاه

$$P_n(\cos\theta)=\sum_{m=0 \text{ یا } 1}^{n} a_m\cos m\theta \quad (۳۹.۱۲\text{ب})$$

روشن است که هرگاه $\theta=0$ یعنی $\cos m\theta=1$، این سری [معادلهٔ (۳۹.۱۲ب)] بیشینه است. اما معادلهٔ (۳۱.۱۲)، به‌ازای $x=\cos\theta=1$، نشان می‌دهد که $P_n(1)=1$. بنابراین

$$|P_n(\cos\theta)|\leqslant P_n(1)=1 \quad (۳۹.۱۲\text{ج})$$

علاوه‌براین یکی‌ازفایده‌های حاشیه‌ای معادلهٔ (۳۹.۱۲ب) این است‌که نشان می‌دهد

جدول ۲.۱۲ مقایسهٔ تابع مولد به‌اضافهٔ روابط بازگشتی و بسط سری [معادلهٔ (۸.۱۲)].

کاربرد	تابع مولد روابط بازگشتی معادلات(۴.۱۲)،(۱۷.۱۲)، و (۲۲.۱۲)	سری معادلهٔ (۸.۱۲)
جدول ۱.۱۲ مقدار عددی	گزینهٔ کامپیوتر	مستقیمتر
استخراج معادلهٔ دیفرانسیل معادلهٔ (۲۷.۱۲)	نسبتاً پیچیده	تحقیق اینکه چندجمله‌ای درمعادله صدق می‌کند آسان است، استخراج معادله نیاز به‌تبحر دارد
$P_n(1)$، معادلهٔ(۳۰.۱۲)	آسان	پردردسر
$P_n(0)$، معادلهٔ(۳۴.۱۲)	آسان	ازطریق بازبینی
پاریته، معادلهٔ (۳۶.۱۲)	آسان	ازطریق بازبینی
کرانها، معادلهٔ(۳۸.۱۲)	نسبتاً آسان	پردردسر

چندجمله‌ای لژاندر ترکیبی خطی از $\cos m\theta$ هاست. یعنی، چندجمله‌ایهای لژاندر، برای همهٔ توابعی که بتوان آنها را به‌کمك یك‌سری فوریه (بخش ۱.۱۴ را ببینید) روی بازهٔ $(0, \pi)$ بسط داد، یك مجموعهٔ کامل تشکیل می‌دهند.

دراین بخش، با استفاده از تابع مولد، معادلهٔ (۴.۱۲)، خواص متنوع مفیدی برای چندجمله‌ایهای لژاندر استخراج کردیم. نمایش صریح سری، معادلهٔ (۸.۱۲)، رهیافتی متفاوت وگاهی برتر برای استخراج این‌خواص دراختیار ما می‌گذارد. این‌دو رهیافت در جدول ۲.۱۲ باهم مقایسه شده‌اند.

مسائل

۱.۲.۱۲ سری زیررا درنظر بگیرید

$$\alpha_0+\alpha_2\cos^2\theta+\alpha_4\cos^4\theta+\alpha_6\cos^6\theta=a_0P_0+a_2P_2+a_4P_4+a_6P_6$$

ضرایب α_i را به‌صورت بردار ستونی $\vec{\alpha}$ و ضرایب a_i را به‌صورت بردار ستونی $\mathbf{a}$ بیان کنید. ماتریسهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را چنان بیابید که

$$\mathbf{A}\vec{\alpha}=\mathbf{a} \quad \text{و} \quad \mathbf{B}\mathbf{a}=\vec{\alpha}$$

محاسبهٔ خود را بانشان‌دادن برقراری رابطهٔ $\mathbf{AB}=1$ (ماتریس‌یکه) بیازمایید. این مسئله را برای حالت فرد نیز تکرارکنید.

$$\alpha_1\cos\theta+\alpha_3\cos^3\theta+\alpha_5\cos^5\theta+\alpha_7\cos^7\theta=a_1P_1+a_3P_3+a_5P_5+a_7P_7$$

یادآوری. $P_n(\cos\theta)$ و $\cos^n\theta$ در AMS-55[1]، برحسب یکدیگر جدولبندی شده‌اند.

۲.۲.۱۲ از تابع مولد $g(x,t)$ نسبت به t مشتق بگیرید، آن‌را در $2t$ ضرب کنید و $g(x,t)$ را به‌آن بیفزایید، آنگاه نشان دهید

$$\frac{1-t^2}{(1-2xt+t^2)^{3/2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(x)t^n$$

این نتیجه برای محاسبهٔ باری الکتریکی مفید خواهد بود که یك بار نقطه‌ای روی یك کرهٔ فلزی متصل به‌زمین القا می‌کند.

۳.۲.۱۲ (الف) معادلهٔ (۲۷.۱۲)، یعنی معادلهٔ زیر، را استخراج کنید

$$(1-x^2)P_n'(x)=(n+1)xP_n(x)-(n+1)P_{n+1}(x)$$

(ب) رابطهٔ بین معادلهٔ (۲۷.۱۲) و معادلات قبلی آن‌را به‌صورت نمادی، مشابه با صورتهای نمادی مربوط به‌معادلات (۲۳.۱۲) تا (۲۶.۱۲)، بنویسید.

۴.۲.۱۲ با قراردادن یك چارقطبی نقطه‌ای الکتریکی (باقدرت $p^{(2)}$ در راستای z) در $z=a$ وچارقطبی‌نقطه‌ای الکتریکی مساوی ومخالفی در $z=0$، آنگاه بامیل‌دادن a به‌سوی صفر، با این شرط که $p^{(2)}a$ ثابت بماند، می‌توان یك هشت‌قطبی نقطه‌ای الکتریکی ساخت. پتانسیل الکتروستاتیکی متناظر با هشت‌قطبی نقطه‌ای الکتریکی را پیدا کنید. با استفاده از نحوهٔ ساختن هشت‌قطبی نقطه‌ای الکتریکی نشان دهید که پتانسیل متناظر را می‌توان با مشتقگیری ازپتانسیل چارقطبی به‌دست‌آورد.

۵.۲.۱۲ با انجام عملیات در مختصات قطبی کروی، نشان دهید

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}\right]=-(n+1)\frac{P_{n+1}(\cos\theta)}{r^{n+2}}$$

عملیات مزبور، در روند این برهان ریاضی‌که مشتق یك چندقطبی به چندقطبی مرتبهٔ بالاتر بعدی می‌انجامد، یك گام کلیدی به‌شمار می‌آید.

راهنمایی. با مسئلهٔ ۱۲.۵.۲ مقایسه‌کنید.

---

۱. AMS-55 نام‌اختصاری کتابی‌است که تحت‌عنوان ویراستارانش، ابراموویتس و استیگان، درفهرست مراجع فصل ۱۳ آمده است.ـ م.

۶.۲.۱۲ با استفاده از

$$P_L(\cos\theta)=\frac{1}{L!}\frac{\partial^L}{\partial t^L}(1-2t\cos\theta+t^2)^{-1/2}\Big|_{t=0}$$

نشان دهید که

$$P_L(1)=1,\quad P_L(-1)=(-1)^L$$

۷.۲.۱۲ ثابت کنید که

$$P'_n(1)=\frac{d}{dx}P_n(x)\Big|_{x=1}=\frac{1}{2}n(n+1)$$

۸.۲.۱۲ با استفاده از رابطهٔ بازگشتی که P_n، P_{n+1}، و P_{n-1} را به‌هم مربوط می‌کند و معلوم بودن P_0 و P_1، نشان دهید که $P_n(\cos\theta)=(-1)^n P_n(-\cos\theta)$.

۹.۲.۱۲ با استفاده ازمعادلهٔ (۳۸.۱۲)، ضریب t^2 را برحسب $\cos n\theta$، به‌ازای $n\leqslant 2$ بنویسید. این‌ضریب همان $P_2(\cos\theta)$ است.

۱۰.۲.۱۲ برنامه‌ای بنویسید که ضرایب a_s مربوط به چندجمله‌ای لژاندر را به صورت زیر تولید کند

$$P_n(x)=\sum_{s=0}^{n}a_s x^s$$

۱۱.۲.۱۲ (الف) $P_{10}(x)$ را در گسترهٔ $[0,1]$ محاسبه ونتیجه را ترسیم کنید.
(ب) مقادیر پنج ریشهٔ مثبت $P_{10}(x)$ را دقیقاً دست‌کم تا پنج‌رقم اعشاری محاسبه کنید. مقادیری راکه به‌دست آورده‌اید با مقادیری که درجدول ۴.۲۵، مرجع AMS-55، آمده است، مقایسه کنید.
راهنمایی. برای دستیابی به‌شگردهای ریشه‌یابی به‌پیوست ۱ رجوع کنید.

۱۲.۲.۱۲ (الف)بزرگترین ریشهٔ $P_n(x)$ را به‌ازای $n=2(1)50$ محاسبه کنید.
(ب) با استفاده از نمایش فوق هندسی $P_n(x)$ (بخش ۴.۱۳ را ببینید)، تقریبی برای بزرگترین ریشه به‌دست آورید ومقادیر حاصل ازبند (الف) را با تقریب فوق هندسی خود، وهمچنین بامقادیری‌که درجدول ۴.۲۵ ازمرجع AMS-55 آمده‌اند، مقایسه کنید.

۱۳.۲.۱۲ (الف)بااستفاده‌ازمسئلهٔ ۱.۲.۱۲ وجدول۹.۲۲ مندرج درمرجع AMS-55، ماتریسی 6×6 مانند **B** را چنان تشکیل دهید‌که یک‌سری از چند جمله‌ایهای مرتبهٔ زوج

لژاندر راکه از $P_{10}(x)$ شروع می‌شود به‌سری توانی $\sum_{n=0}^{5}\alpha_{2n}x^{2n}$ تبدیل کند.

(ب) $\mathbf{A}=\mathbf{B}^{-1}$ را حساب کنید. عناصر $\mathbf{A}$ را بامقادیری که درجدول ۹.۲۲ مندرج درمرجع AMS-55 آمده‌اند، مقایسه کنید.

(ج) با استفاده از ضرب ماتریسی، سری $\sum_{n=0}^{5}\alpha_{2n}x^{2n}$ با توانهای زوج را به سری لژاندر تبدیل کنید.

۱۴.۲.۱۲ زیر-برنامه‌ای بنویسیدکه سری توانی‌متناهی $\sum_{n=0}^{N}a_nx^n$ را به‌یك سری‌لژاندر $\sum_{n=0}^{N}b_nP_n(x)$ تبدیل‌کنـد. برای این کار از رابطهٔ بازگشتی (۱۷.۱۲) استفاده‌کنیـد و شگردی را پی‌بگیریدکه طرح کلی‌آن دربخش ۳.۱۳ برای سری‌چبیشف ارائه شده است.

۳.۱۲ تعامد

معادلهٔ دیفرانسیل لژاندر (۲۸.۱۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n'(x)]+n(n+1)P_n(x)=0 \qquad (۴۰.۱۲)$$

که صریحاً خود-الحاقی بودن آن را نشان می‌دهـد. از این‌رو، روشن است‌که جوابهـای $P_n(x)$ که در شرایط مرزی معینی صدق می‌کنند، متعامـد خواهند بود. بـا تکرار تحلیل اشتورم-لیوویل (بخش ۲.۹) معادلهٔ (۴۰.۱۲) را در $P_m(x)$ ضرب می‌کنیم، ومعادلهٔ متناظری را، که در آن جای m و n را عوض‌کرده‌ایم، ازآن‌کم می‌کنیم. با انتگرالگیری از ۱ − تا ۱ + داریم

$$\int_{-1}^{1}\left\{P_m(x)\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n'(x)]-P_n(x)\frac{d}{dx}[(1-x^2)P_m'(x)]\right\}dx$$

$$=[m(m+1)-n(n+1)]\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx \qquad (۴۱.۱۲)$$

از طریق انتگرالگیری جزء‌به‌جزء، جزء انتگرالگیری شده به‌دلیل وجود عامل $(1-x^2)$ صفرمی‌شود[1]؛ داریم

$$[m(m+1)-n(n+1)]\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=0 \qquad (۴۲.۱۲)$$

آنگاه به‌ازای $m\neq n$

---

۱. البته حدود ۱ − و ۱ + به‌همین دلیل برگزیده شده‌اند.

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0^*$$

(۴۳.۱۲)

$$\int_{0}^{\pi} P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = 0$$

که نشان می‌دهد $P_n(x)$ و $P_m(x)$ در بازهٔ $[-1, 1]$ متعامدند. این تعامد را می‌توان با استفاده از تعریف ردریگز برای $P_n(x)$ نیز به‌آسانی نمایش داد (با بخش ۴.۱۲، مسئلهٔ ۲.۴.۱۲ مقایسه کنید).

به‌ازای $m=n$، باید انتگرال معادلهٔ (۴۲.۱۲) را محاسبه کنیم. این انتگرال مطمئناً دیگر صفر نیست. با استفاده از تابع مولد داریم

$$(1-2tx+t^2)^{-1} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n\right]^2 \qquad (۴۴.۱۲)$$

با انتگرالگیری از $x=-1$ تا $x=+1$، خواهیم داشت

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 dx \qquad (۴۵.۱۲)$$

جمله‌های حاصلضربی در سری، به‌دلیل برقراری معادلهٔ (۴۳.۱۲)، حذف می‌شوند. با بهره‌گیری از $y = 1-2tx+t^2$ خواهیم داشت

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-2tx+t^2} = \frac{1}{2t}\int_{(1-t)^2}^{(1+t)^2} \frac{dy}{y} = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \qquad (۴۶.۱۲)$$

این عبارت را به‌صورت یک‌سری توانی بسط می‌دهیم (مسئلهٔ ۱.۴.۵، جلد اول)، درنتیجه

$$\frac{1}{t}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1} \qquad (۴۷.۱۲)$$

---

* چنین انتگرالهایی، دربخش ۴.۹، به‌صورت ضرب داخلی درفضای برداری (توابع) تعبیر شدند. نمادهای دیگری که به‌کارمی‌روند عبارت‌اند از

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx \equiv \langle P_n(x)|P_m(x)\rangle$$

$$\equiv (P_n(x),\ P_m(x))$$

نماد $\langle\ \rangle$، که توسط دیراک مقبولیت یافت، در نوشتارهای قلمرو فیزیک متداول است. نماد $(\ )$ درنوشتارهای حوزهٔ ریاضی متداولتراست.

از آنجا که می‌دانیم نمایش سری توانی یکتاست، باید داشته باشیم

$$\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^2dx=\frac{2}{2n+1} \qquad (۴۸.۱۲)$$

در بخش ۶.۱۲، وقتی هماهنگهای کروی متعامد را تشکیل می‌دهیم، از این نتیجه استفاده خواهیم کرد.

بسط توابع، سری لژاندر

نظریهٔ اشتورم-لیوویل، علاوه‌بر تعامد چندجمله‌ایهای لژاندر، حاکی از آن است که این چندجمله‌ایها مجموعهٔ کاملی تشکیل می‌دهند. حال فرض کنید که به‌مفهوم همگرایی درمیانگین (بخش ۴.۹) در بازهٔ [۱ , ۱ −] سری زیر را داشته باشیم

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(x)=f(x) \qquad (۴۹.۱۲)$$

این نکته ایجاب می‌کند که $f(x)$ و $f'(x)$ دراین بازه دست‌کم به‌صورت قطعه‌ای پیوسته باشند. ضرایب a_n را ازطریق ضرب‌سری در $P_m(x)$ وانتگرالگیری جمله‌به‌جمله به‌دست می‌آورند. با بهره‌گیری ازخاصیت تعامدکه به‌کمك معادله‌های (۴۳.۱۲) و (۴۸.۱۲) بیان شد، خواهیم داشت

$$\frac{2}{2m+1}a_m=\int_{-1}^{1}f(x)P_m(x)dx \qquad (۵۰.۱۲)$$

متغیر انتگرالگیری x را با t وشاخص پایین m را با n تعویض می‌کنیم. آنگاه با نشاندن در معادلهٔ (۴۹.۱۲) خواهیم داشت

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}\left(\int_{-1}^{1}f(t)P_n(t)dt\right)P_n(x) \qquad (۵۱.۱۲)$$

این بسط را برحسب یك‌سری ازچندجمله‌ایهای لژاندر، معمولاً سری لژاندر می‌نامند.[۱] خواص این سری، باخواص سری فوریه (فصل ۱۴ را ببینید) که با آن آشناتریم، کاملاً مشابه‌است. به‌ویژه، می‌توان از خاصیت تعامد [معادلهٔ (۴۳.۱۲)] برای نشان دادن یکتایی سری استفاده کرد.

در سطحی انتزاعیتر (و در ضمن کارامدتر)، معادلهٔ (۵۱.۱۲) تابع $f(x)$ را در فضای برداری خطی چند جمله‌ایهای لژاندر (فضای هیلبرت، بخش ۴.۹) نمایش می‌دهد.

از دیدگاه تبدیلهای انتگرالی (فصل ۱۵ را ببینید)، معادلهٔ (۵۰.۱۲) را می‌توان برای $f(x)$ یك تبدیل لژاندر متناهی‌دانست. دراین‌صورت معادلهٔ (۵۱.۱۲) تبدیل‌وارون

---

۱. دقت کنیدکه از معادلهٔ (۵۰.۱۲)، کمیت a_m را به صورت یك انتگرال معین به‌دست می‌آوریم؛ یعنی a_m به‌ازای یك $f(x)$ معلوم، یك‌عدد است.

آن خواهدبود. این‌معادله را می‌توان برحسب عملگرهای تصویری نظریهٔ کوانتومی نیز تعبیر کرد. می‌توانیم عبارت

$$\mathcal{P}_m \equiv P_m(x)\frac{۲m+۱}{۲}\int_{-۱}^{۱} P_m(t)[\quad]dt$$

را یك عملگر (انتگرالی) بگیریم که روی $f(t)$ عمل می‌کند. [$f(t)$ به‌صورت ضریبی در انتگرالده، درداخل کروشه قرار می‌گیرد.] آنگاه ازمعادلهٔ (۵۰.۱۲)، داریم

$$\mathcal{P}_m f(t) = a_m P_m(x)^*$$

عملگر $\mathcal{P}_m$، mامین مؤلفهٔ تابع f را تصویرمی‌کند.

معادلهٔ (۳.۱۲) که مستقیماً به تعریف تابع مولد چندجمله‌ایهای لژاندر انجامید، عبارت است‌از بسط لژاندر $۱/r_۱$. این بسط لژاندر $۱/r_۱$ یا $۱/r_{۱۲}$ درتعدادی ازمسائل بخش ۸.۱۲ خواهد آمد. معمولاً درموارد فراتر از میدان کولنی ساده، به‌جای $۱/r_{۱۲}$ یك پتانسیل $V(|\mathbf{r}_۱-\mathbf{r}_۲|)$ می‌نشیند، و جواب مسئله بازهم به‌کمك یك بسط لژاندر به‌دست می‌آید. درمحاسبات مربوط به فیزیك هسته‌ای ضرایب a_n را می‌توان (توسط یك‌کامپیوتر) تا $a_{۱۰۰}$ حساب کرد.

دراینجا محاسبات خود را با سری لژاندر، یعنی معادلهٔ (۴۹.۱۲) به‌صورت تابع معلوم $f(x)$ انجام داده‌ایم که آن را به دلخواه اختیار کردیم تا برحسب چندجمله‌ایهای لژاندر بسط داده‌شود. ولی‌گاهی منشأ و ماهیت سری لژاندر چیز دیگری است. درمثالهای بعدی، توابع نامعلومی را درنظر می‌گیریم که از معادلهٔ دیفرانسیلی که این‌توابع درآنها صدق می‌کنند، می‌دانیم که می‌توان آنهارا به‌کمك سری لژاندر نمایش‌داد. مسئله، مانندقبل، عبارت است از تعیین ضرایب نامعلوم دربسط سری. ولی در اینجا ضرایب به‌کمك معادلهٔ (۵۰.۱۲) به‌دست نمی‌آیند، بلکه آنها را با این شرط که سری لژاندر حاصل، در یکی از مرزها با یك جواب معلوم جور شود تعیین می‌کنیم. این مثالها، مسائل مقدار مرزی به‌شمار می‌آیند.

مثال ۱۰.۳.۱۲ میدان‌گرانشی زمین

مثالی‌ازسری لژاندر عبارت‌است ازتوصیف پتانسیل‌گرانشی‌زمین، U(برای نقاط‌خارجی)، با چشمپوشی از آثار سمتی. باتوجه به

$$R = \text{شعاع استوایی زمین}$$

$$= ۶۳۷۸٫۱ \pm ۰٫۱\ \text{km}$$

---

* متغیرهای وابسته اختیاری‌اند. در اینجا x حاصل همان x موجود در $\mathcal{P}_m$ است، درحالی‌که t یکی‌از متغیرهای ظاهری انتگرالگیری به‌شمار می‌آید.

$$\frac{GM}{R}=۶۲٫۴۹۴\pm ۰٫۰۰۱\ \mathrm{km}^۲/\mathrm{s}^۲$$

می‌نویسیم

$$U(r,\theta)=\frac{GM}{R}\left[\frac{R}{r}-\sum_{n=۲}^{\infty}a_n\left(\frac{R}{r}\right)^{n+۱}P_n(\cos\theta)\right] \qquad (۵۲.۱۲)$$

که یك سری لژاندر است. حرکت ماهواره‌های مصنوعی نشان داده است که

$$a_۲=(۱۰۸۲۶۳۵\pm ۱۱)\times ۱۰^{-۹}$$

$$a_۳=(-۲۵۳۱\pm ۷)\times ۱۰^{-۹}$$

این همان تغییرصورت گلابی‌شکل معروف زمین است

$$a_۴=(-۱۶۰۰\pm ۱۲)\times ۱۰^{-۹}$$

سایرضرایب تا $n=۲۰$ محاسبه شده‌اند. خواننده باید متوجه شده باشدکه $P_۱$ حذف شده است، زیرا این جمله نمایانگر یك جا به‌جایی است، نه‌یك تغییرشکل.

داده‌های ماهواره‌ای اخیر، تعیین وابستگی طولی میدان گرانشی زمین را میسر می‌سازند. این وابستگی را می‌توان به‌کمك یك سری لاپلاس (بخش ۶.۱۲) توصیف کرد.

مثال ۲.۳.۱۲ کره در یك میدان یکنواخت

یکی دیگر ازموارد استفادهٔ چندجمله‌ایهای لژاندر به‌کمك مسئلهٔ کرهٔ رسانای خنثی (به‌شعاع $r_۰$) واقع در یك میدان الکتریکی که در غیاب کره یکنواخت است، نمایش داده می‌شود (شکل ۹.۱۲). مسئله عبارت‌است ازیافتن‌پتانسیل الکتروستاتیکی مختل‌شدهٔ جدید. پتانسیل الکتروستاتیکی را با V نشان می‌دهیم[1] وبه‌قرارزیر معادلهٔ لاپلاس را می‌نویسیم

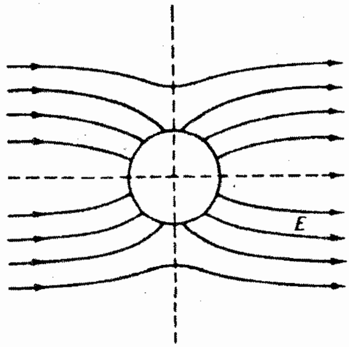
$$\nabla^۲V=۰ \qquad (۵۳.۱۲)$$

به‌دلیل شکل کروی رسانا، مختصات قطبی کروی را برمی‌گزینیم. (این عمل، کاربرد شرط مرزی درسطح رسانا را ساده خواهدکرد.) ازطریق جداسازی متغیرها ودرصورت لزوم، توجه به‌جدول ۱.۸، می‌توانیم پتانسیل نامعلوم $V(r,\theta)$ را به‌صورت یك ترکیب خطی از جوابها بنویسیم

$$V(r,\theta)=\sum_{n=۰}^{\infty}a_n r^n P_n(\cos\theta)+\sum_{n=۰}^{\infty}b_n\,\frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+۱}} \qquad (۵۴.۱۲)$$

---

۱. بایدتأکید کردکه این‌مسئله، ارائهٔ بسط لژاندر یك تابع معلوم $V(\cos\theta)$ نیست. دراینجا به‌مسائل مقدار مرزی برمی‌گردیم.



شکل ۹.۱۲ کرهٔ رسانا در میدان یکنواخت.

به‌دلیل تقارن محوری مسئله، هیچ‌گونه وابستگی به φ ظاهر نمی‌شود. (مبدأ، در مرکز کرهٔ رسانا ومحور z موازی بامیدان یکنواخت اولیه درنظرگرفته شده است.)

دراینجا خوب است بگوییم که n عددی‌است درست، زیرا تنها به‌ازای مقادیر درست n است که وابستگی به θ در $\cos\theta = \pm 1$ خوش‌رفتار خواهدبود. جوابهای معادلهٔ لژاندر به‌ازای‌مقادیر غیرعدد درست n درنقاط انتهایی‌بازهٔ $[-1, 1]$، یعنی‌درقطبهای $\theta = 0, \pi$ کره، واگرا می‌شوند (با مثال ۴.۲.۵ و مسائل ۱۵.۲.۵ و ۵.۵.۸ مقایسه کنید). درست به همین دلیل است که جواب دوم معادلهٔ لژاندر، Q_n، نیزحذف شده است.

اکنون به شرایط مرزی (دیریکله) باز می‌گردیم تا a_nها و b_nهای نامعلوم جواب سری، معادلهٔ (۵۴.۱۲)، را تعیین کنیم. اگرمیدان‌الکتروستاتیکی مختل‌نشدهٔ اولیه E_0 باشد، به‌عنوان یك شرط مرزی باید داشته‌باشیم

$$\begin{aligned} V(r\to\infty) &= -E_0 z = -E_0 r\cos\theta \\ &= -E_0 r P_1(\cos\theta) \end{aligned} \tag{۵۵.۱۲}$$

به‌دلیل یکتایی‌سری لژاندر می‌توانیم ضرایب $P_n(\cos\theta)$ درمعادلهٔ (۵۴.۱۲)(با $r\to\infty$) را باضرایب متناظر درمعادلهٔ (۵۵.۱۲) مساوی قراردهیم وداشته باشیم

$$\begin{aligned} a_n &= 0, \qquad n > 1 \\ a_1 &= -E_0 \end{aligned} \tag{۵۶.۱۲}$$

اگر به‌ازای $n > 1$، داشته باشیم: $a_n \neq 0$، این جملات به ازای مقادیر بزرگ r غالب خواهند بود، و شرط مرزی [معادلهٔ (۵۵.۱۲)] نمی‌تواند صادق باشد.

به‌عنوان یك شرط مرزی دیگر، می‌توانیم کرهٔ رسانا در صفحهٔ $\theta=\pi/2$ را در پتانسیل صفر بگیریم، درنتیجه معادلهٔ (۵۴.۱۲) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$V(r=r_0)=a_0+\frac{b_0}{r_0}+\left(\frac{b_1}{r_0^2}-E_0 r_0\right)P_1(\cos\theta)+\sum_{n=2}^{\infty} b_n\frac{P_n(\cos\theta)}{r_0^{n+1}} \qquad (۵۷.۱۲)$$
$$=0$$

برای آنکه این رابطه به‌ازای تمام مقادیر θ برقرار باشد، باید هریك از ضرایب $P_n(\cos\theta)$ صفر شود.[1] ازاین‌رو

$$a_0=b_0=0^*$$
$$b_n=0,\quad n\geqslant 2 \qquad (۵۸.۱۲)$$

درحالی‌که

$$b_1=E_0 r_0^3 \qquad (۵۹.۱۲)$$

درنتیجه پتانسیل الکتروستاتیکی (خارج کره) عبارت است از

$$V=-E_0 rP_1(\cos\theta)+\frac{E_0 r_0^3}{r^2}P_1(\cos\theta)$$
$$=-E_0 rP_1(\cos\theta)\left(1-\frac{r_0^3}{r^3}\right) \qquad (۶۰.۱۲)$$

دربخش ۱۵.۱ (جلد اول) نشان‌داده شدکه جوابی‌ازمعادلهٔ لاپلاس که شرایطمرزی را روی تمامی مرز برآورده می‌کند، یکتاست. پتانسیل الکتروستاتیکی V، به صورتی که درمعادلهٔ (۶۰.۱۲) داده شده است، یکی‌ازجوابهای معادلهٔ لاپلاس‌است. این تابع شرایط مرزی را برآورده می‌کند؛ از این‌رو این همان جواب مطلوب معادلـهٔ دیفرانسیل لاپلاس مسئلهٔ ما به‌شمار می‌آید.

---

۱. دراینجا نیزاین بیان معادل آن است که بگوییم بسط سری برحسب چندجمله‌ایهای لژاندر (با هرمجموعهٔ متعامد کاملی) یکتاست.

* ضریب P_0 برابر است با a_0+b_0/r_0. به‌دلیل آنکه هیچ باری روی کره قرار ندارد، قرار دادیم $b_0=0$ (و بنابراین a_0 نیزصفر است). اگر بار خالص q روی کره موجود باشد، آنگاه $b_0\neq 0$.

علاوه بر این، می‌توان نشان داد که (مسئلهٔ ۱۳.۳.۱۲) یك چگالی بار سطحی القایی به‌میزان

$$\sigma = -\varepsilon_\circ \frac{\partial V}{\partial r}\bigg|_{r=r_\circ} = ۳\varepsilon_\circ E_\circ \cos\theta \qquad (۶۱.۱۲)$$

روی سطح کره ویك گشتاور دوقطبی الکتریکی القایی به‌مقدار

$$P = ۴\pi r_\circ^۳ \varepsilon_\circ E_\circ \qquad (۶۲.۱۲)$$

وجود دارد (مسئلهٔ ۱۳.۳.۱۲).

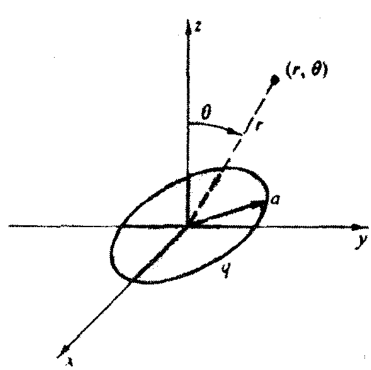
مثال ۳.۳.۱۲ پتانسیل الکتروستاتیکی یك‌حلقهٔ باردار

به‌عنوان مثالی دیگر، پتانسیل الکتروستاتیکی حاصل از یك حلقهٔ رسانا را که حامل بار الکتریکی کل q است، درنظر بگیرید (شکل ۱۰.۱۲). بااستفاده ازمبحث الکتروستاتیك(و بخش ۱۴.۱، جلد اول)، پتانسیل ψ در معادلهٔ لاپلاس صدق می کند. از طریق جداسازی متغیرها در مختصات قطبی‌کروی داریم (با جدول ۱.۸ مقایسه‌کنید)

$$\psi(r,\theta) = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n \frac{a^n}{r^{n+۱}} P_n(\cos\theta), \quad r > a \qquad (\text{الف}۶۳.۱۲)$$

در اینجا a شعاع حلقه است که در صفحهٔ $\theta = \pi/۲$ قرار دارد. به دلیل تقارن استوانه‌ای سیستم، وابستگی به φ (وابستگی سمتی) وجود ندارد.

جملات با وابستگی شعاعی مثبت ـ توان را حذف‌می‌کنیم،زیرا پتانسیل باید رفتاری مجانبی به‌صورت زیرداشته باشد



شکل ۱۰.۱۲ حلقهٔ باردار رسانا.

$$\psi \sim \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}, \quad r \gg a \qquad (\text{۶۳.۱۲ب})$$

مسئله عبارت است‌ازتعیین ضرایب a_n درمعادلهٔ (۶۳.۱۲الف). این کار را می‌ت به‌کمک محاسبهٔ $\psi(r,\theta)$ در $\theta=0$ و $r=z$، ومقایسهٔ آن بامحاسبهٔ مستقل پتاسیل قانون‌کولن، انجام داد. در واقع، یك‌شرط مرزی در امتداد محور z را به قانون‌کولن (با بارهای همفاصله) داریم

$$\psi(r,\theta)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{(z^2+a^2)^{1/2}}, \qquad \begin{cases}\theta=0\\ r=z\end{cases}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(2s)!}{2^{2s}(s!)^2}\left(\frac{a}{z}\right)^{2s}, \quad z>a \qquad (\text{۶۳.۱۲ج})$$

درمرحلهٔ آخر ازنتیجهٔ مسئلهٔ ۱۵.۱.۱۰ استفاده شده‌است. حال ازمعادلهٔ (۶۳.۱۲ الف) در $\theta=0$ و $r=z$ (با $P_n(1)=1$) خواهیم داشت

$$\psi(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{a^n}{z^{n+1}}, \quad r=z \qquad (\text{۶۳.۱۲د})$$

با مقایسهٔ معادلات (۶۳.۱۲ج) و (۶۳.۱۲ د)، به‌ازای مقادیرفرد n داریم: $a_n=0$. با نشاندن $n=2s$ خواهیم داشت

$$a_{2s}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(-1)^s\frac{(2s)!}{2^{2s}(s!)^2} \qquad (\text{۶۳.۱۲ه})$$

وپتانسیل الکتروستاتیکی $\psi(r,\theta)$ ازرابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\psi(r,\theta)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(2s)!}{2^{2s}(s!)^2}\left(\frac{a}{r}\right)^{2s}P_{2s}(\cos\theta), \; r>a \qquad (\text{۶۳.۱۲و})$$

شبیه مغناطیسی این‌مسئله را دربخش ۵.۱۲، مثال ۱.۵.۱۲، بررسی خواهیم‌کرد.

مسائل

۱.۳.۱۲ با استفاده از توابع $u_n(x)=x^n$، $n=0,1,2,\ldots$، و به کمك فرایند

گرام‌ـاشمیت (بخش ۳.۹)، در بازهٔ $-1 \leqslant x \leqslant 1$ و با $w(x)=1$ مجموعه‌ای از توابع متعامد تشکیل داده‌ایم. ثابت کنید که nامین تابعی که به این صورت تشکیل می‌شود، با $P_n(x)$ متناسب است.

راهنمایی. از استقرای ریاضی بهره گیرید.

۲.۳.۱۲ تابع‌دلتای دیراك را در بازهٔ $-1 \leqslant x \leqslant 1$ به‌صورت یك‌سری ازچندجمله‌ایهای لژاندر بسط دهید.

۳.۳.۱۲ درستی بسطهای زیر را برای تابع دلتای دیراك تحقیق کنید

$$\delta(1-x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}P_n(x)$$

$$\delta(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{2}P_n(x)$$

این عبارتها در تجزیهٔ بسط موج تخت ریلی (مسئلهٔ ۷.۴.۱۲) به امواج کروی ورودی و خروجی پدیدارمی‌شوند.

یادآوری. فرض‌کنید‌که با انتگرالگیری روی $[-1, 1]$، تمامی‌تابع دلتای‌دیراك تحت پوشش قرارمی‌گیرد.

۴.۳.۱۲ نوترونهایی (به‌جرم واحد) توسط هسته‌ای به‌جرم A $(A>1)$ پراکنده‌می‌شوند. پراکندگی دردستگاه مرکز جرم همسانگرد است. دراین صورت، میانگین کسینوس زاویهٔ انحراف نوترون دردستگاه آزمایشگاه عبارت است‌از

$$\langle\cos\psi\rangle=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{A\cos\theta+1}{(A^2+2A\cos\theta+1)^{1/2}}\sin\theta\, d\theta$$

ازطریق بسط‌دادن مخرج، نشان دهیدکه $\langle\cos\psi\rangle=2/(3A)$.

۵.۳.۱۲ تابع معلوم $f(x)$ که در بازهٔ $[-1, 1]$ تعریف شده است، برحسب یك سری لژاندر روی همین بازه بسط داده می‌شود. نشان دهیدکه این‌بسط یکتاست.

۶.۳.۱۲ تابع $f(x)$ را به‌صورت یك سری لژاندر به‌شکل $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(x)$ بسط داده‌ایم. نشان دهیدکه

$$\int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx=\sum_{n=0}^{\infty}2\frac{a_n^2}{2n+1}$$

این‌صورت لژاندری اتحاد پارسوال سری‌فوریهٔ مسئلهٔ ۲.۴.۱۴ است، که درضمن‌نمایانگر نامساوی بسل، معادلهٔ (۷۲.۹)، نیز هست که برای یک‌مجموعهٔ کامل به‌تساوی تبدیل می‌شود.

۷.۳.۱۲ بااستفاده از تابع مولد چندجمله‌ایهای لژاندر، رابطهٔ بازگشتی

$$(1-x^2)P_n'(x)=nP_{n-1}(x)-nxP_n(x)$$

را استخراج کنید.

۸.۳.۱۲ $\int_0^1 P_n(x)dx$ را محاسبه کنید.

پاسخ. $n=2s$: یک به‌ازای $s=0$، وصفر به‌ازای $s>0$

$n=2s+1$: $P_{2s}(0)/(2s+2)=(-1)^s(2s-1)!!/(2s+2)!!$.

راهنمایی. $P_n(x)$ را بااستفاده ازیک‌رابطهٔ بازگشتی، برحسب مشتق بنویسید. آنگاه ازطریق‌قراردادن مقادیرمشخص انتگرال بگیرید! راه‌دیگر آن است که‌ازتابع مولد انتگرال بگیرید.

۹.۳.۱۲ (الف) برای $f(x)=\begin{cases}+1, & 0<x<1\\ -1, & -1<x<0\end{cases}$، نشان دهیدکه

$$\int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx=2\sum_{n=0}^{\infty}(4n+3)\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\right]^2$$

(ب) ازطریق‌آزمودن سری (با عددگذاری)، نشان دهیدکه این سری‌همگراست.

۱۰.۳.۱۲ ثابت کنید

$$\int_{-1}^{1}x(1-x^2)P_n'P_m'dx=0$$

مگر آنکه $m=n\pm1$.

۱۱.۳.۱۲ دامنهٔ موج پراکنده ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$f(\theta)=\lambda\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\exp[i\delta_l]\sin\delta_l P_l(\cos\theta)$$

در اینجا، θ زاویهٔ پراکندگی، l تکانهٔ زاویه‌ای، و δ_l انتقال فاز حاصل از پتانسیل مرکزی است که‌باعث پراکندگی‌می‌شود. سطح‌مقطع کل عبارت‌است‌از $\sigma_{tot}=\int f^*(\theta)f(\theta)d\Omega$. نشان دهید*

---

* منظور از tot، همان‌کل درعبارت "سطح‌مقطع کل" است.

$$\sigma_{\text{tot}}=۴\pi\lambda^{۲}\sum_{l=۰}^{\infty}(۲l+۱)\sin^{۲}\delta_l$$

۱۲.۳.۱۲ آهنگ شمارش همفرودی، $W(\theta)$، در یک آزمایش همبستگی زاویه‌ای گاما ـ گاما به‌صورت زیراست

$$W(\theta)=\sum_{n=۰}^{\infty}a_{۲n}P_{۲n}(\cos\theta)$$

نشان دهید که علی‌الاصول داده‌های واقع درگسترهٔ $\pi/۲\leqslant\theta\leqslant\pi$، می‌توانند تابع $W(\theta)$ را تعریف(و تعیین ضرایب $a_{۲n}$ را میسر) کنند. یعنی، گرچه می‌توان از داده‌های واقع در گسترهٔ $۰\leqslant\theta<\pi/۲$ برای آزمودن جواب استفاده کرد، ولی این داده‌ها ضرورتاً برای تعیین $W(\theta)$، موردنیاز نیستند.

۱۳.۳.۱۲ کرهٔرسانایی به‌شعاع $r_۰$ درمیدان‌الکتریکی $\mathbf{E}_۰$، درغیاب کره یکنواخت، قرار داده می‌شود. نشان دهید

(الف)چگالی بارسطحی القایی عبارت است از

$$\sigma=۳\varepsilon_۰E_۰\cos\theta$$

(ب) گشتاور دوقطبی الکتریکی القایی عبارت است از

$$P=۴\pi r_۰^۳\varepsilon_۰E_۰$$

گشتاور دوقطبی الکتریکی را می‌توان یا با استفاده از بار سطحی [قسمت (الف)]، و یا با توجه به‌این‌نکته‌که میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ حاصل برهم‌نهی یک‌میدان دوقطبی ومیدان‌الکتریکی اولیه است، محاسبه‌کرد.

۱۴.۳.۱۲ بار q به‌اندازهٔ فاصلهٔ a درطول محور z، ازمرکز یک کاواک کروی به‌شعاع R جابه‌جا شده‌است.

(الف) نشان دهید که متوسط میدان الکتریکی روی حجم $a\leqslant r\leqslant R$ صفراست.

(ب) نشان دهید که متوسط میدان الکتریکی روی حجم $۰\leqslant r\leqslant a$ عبارت‌است از

$$\mathbf{E}=\mathbf{k}E_z=-\mathbf{k}\frac{q}{۴\pi\varepsilon_۰a^۲}\quad(\text{برحسب SI})$$

$$=-\mathbf{k}\frac{nqa}{۳\varepsilon_۰}$$

که درآن n عبارت است ازتعداد بارهای جا به جا شده درواحد حجم. این‌محاسبه قسمت اصلی محاسبهٔ قطبش یك دی‌الکتریك را تشکیل می‌دهد.

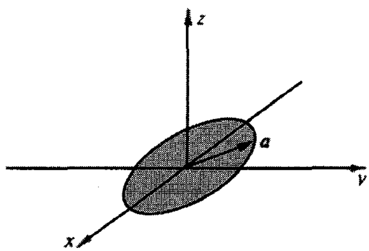
راهنمایی. $\mathbf{E}=-\nabla\varphi$.

۱۵.۳.۱۲ (بسط لژاندر) پتانسیل الکتروستاتیکی یك حلقهٔ بار الکتریکی دایره‌ای را در $r<a$ تعیین کنید.

۱۶.۳.۱۲ میدان الکتریکی حاصل از حلقهٔ رسانای باردار مثال ۳.۳.۱۲ را به‌ازای (الف) $r>a$، (ب) $r<a$، محاسبه کنید.

۱۷.۳.۱۲ به‌عنوان تعمیم مثال ۳.۳.۱۲، پتانسیل $\psi(r, \theta)$ حاصل از یك قرص رسانای باردار به‌شعاع a را در $r>a$ بیابید، شکل ۱۱.۱۲. چگالی بار σ (روی هروجه قرص) برابر است با

$$\sigma(\rho)=\frac{q}{4\pi a(a^2-\rho^2)^{1/2}},\quad \rho^2=x^2+y^2$$



شکل ۱۱.۱۲ قرص رسانای باردار.

راهنمایی. انتگرال معینی را که به‌دست می‌آورید، می‌شود به‌صورت یك تابع بتا، بخش ۴.۱۰، محاسبه کرد.

پاسخ. $\psi(r, \theta)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum\limits_{l=0}^{\infty}(-1)^l\dfrac{1}{2l+1}\left(\dfrac{a}{r}\right)^{2l}P_{2l}(\cos\theta)$.

۱۸.۳.۱۲ با استفاده ازنتیجهٔ مسئلهٔ ۱۷.۳.۱۲، پتانسیل قرص را حساب کنید. با توجه به اینکه دراین محاسبه شرط $r>a$ را نقض می‌کنید، صحت روش خود را دقیقاً ثابت کنید.

راهنمایی. **شاید به‌سری‌ای که‌درمسئلهٔ ۱۴.۲.۵** (جلد اول) داده شده است، برخورد کنیـد.

۱۹.۳.۱۲ پتانسیل الکتروستاتیکی نیمکره‌ای که به‌کمك $r=a$ و $\circ\leqslant\theta<\pi/2$ تعریف می‌شود $+V_\circ$، و از آن نیمکرهٔ $r=a$ و $\pi/2<\theta\leqslant\pi$ عبارت است از: $-V_\circ$. نشان دهیدکه پتانسیل درنقاط داخلی عبارت است‌از

$$V=V_\circ\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{4n+3}{2n+2}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1}P_{2n}(\circ)P_{2n+1}(\cos\theta)$$

$$=V_\circ\sum_{n=\circ}^{\infty}(-1)^n\frac{(4n+3)(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1}P_{2n+1}(\cos\theta)$$

راهنمایی. به مسئلهٔ ۸.۳.۱۲ نیاز خواهید داشت.

۲۰.۳.۱۲ یك سد عایق‌ساز نازك، کرهٔ رسانایی به‌شعاع a را از استوای آن به‌دو نیمکره تقسیم کرده است‌که از لحاظ الکتریکی مجزایند. پتانسیـل نیمکرهٔ بالایی در $V_\circ$ و از آن نیمکرهٔ پایینی در $-V_\circ$ نگه‌داشته می‌شود.

(الف) نشان دهیدکه پتانسیل الکتروستاتیکی خارج ازدونیمکره عبارت است از

$$V(r,\theta)=V_\circ\sum_{s=\circ}^{\infty}(-1)^s(4s+3)\frac{(2s-1)!!}{(2s+2)!!}\left(\frac{a}{r}\right)^{2s+2}P_{2s+1}(\cos\theta)$$

(ب) چگالی بارالکتریکی σ روی سطح‌خارجی را محاسبه‌کنید. دقت‌کنیدکه سری حاصل در $\cos\theta=\pm1$ واگرا می‌شود، که باتوجه به‌ظرفیت نامتناهی این‌سیستم (به‌دلیل ضخامت نزدیك به‌صفر سد عایق‌ساز) نیزهمین انتظارمی‌رود.

پاسخ.
$$\sigma=\varepsilon_\circ E_n=-\varepsilon_\circ\frac{\partial V}{\partial r}\bigg|_{r=a}$$

$$=\varepsilon_\circ V_\circ\sum_{s=\circ}^{\infty}(-1)^s(4s+3)\frac{(2s-1)!!}{(2s)!!}P_{2s+1}(\cos\theta)$$

۲۱.۳.۱۲ بنابر نمادگـذاری بخش ۴.۹ عبارت $|\varphi_s\rangle=\sqrt{(2s+1)/2}\,P_s(x)$ یك چند جمله‌ای لژاندر است که به واحد بازبهنجار شده است. توضیح دهیدکه $|\varphi_s\rangle\langle\varphi_s|$ چگـونه به صورت یك عملگـر تصویری عمل می‌کند. مخصوصاً نشان دهیـد که اگـر $|f\rangle=\sum_n a'_n|\varphi_n\rangle$، آنگاه

$$|\varphi_s\rangle\langle\varphi_s|f\rangle=a'_s|\varphi_s\rangle$$

۲۲.۳.۱۲ x^8 را به صورت یك‌سری لژاندر بسط دهیـد. ضرایب لژانـدر را از معادلهٔ (۵۰.۱۲) تعیین کنید

$$a_m=\frac{۲m+۱}{۲}\int_{-۱}^{۱} x^۸ P_m(x)dx$$

مقادیری را که به‌دست آورده‌اید از طریق مقایسه با جدول ۹.۲۲ مندرج درمرجع AMS-55 بیازمایید. این‌عمل بسط یك‌تابع ساده را نمایش می‌دهد. درواقع اگر $f(x)$ به‌صورت یك سری توانی مشخص شده‌باشد، تکنیك مسئلهٔ ۱۴.۲.۱۲، هم سریعتر و هم دقیقتراست.

راهنمایی. برای محاسبهٔ انتگرال می‌توان ازکوادراتور گاؤسی استفاده کرد.

۲۳.۳.۱۲ پتانسیل الکتروستاتیکی ناشی از حلقهٔ بار در مثال ۳.۳.۱۲ را به‌ازای $r/a=۱٫۵(۰٫۵)۵٫۰$ و $\theta=۰°(۱۵°)۹۰°$ محاسبه کنید و در یك جدول بیاورید. جملات تا $P_{۲۲}(\cos\theta)$ را حساب کنید.

یادآوری. همگرایی سری به‌ازای $r/a=۱٫۵$ کند است. قطع کردن سری‌در $P_{۲۲}$، جواب را به‌دقت چهاررقم بامعنی محدود می‌کند.

مقدار آزمونی. به‌ازای $r/a=۲٫۵$ و $\theta=۶۰°$، $\psi=۰٫۴۰۲۷۲(q/۴\pi\varepsilon_۰ r)$.

۲۴.۳.۱۲ پتانسیل الکتروستاتیکی ناشی از قرص باردار در مسئلهٔ ۱۷.۳.۱۲ را به ازای $r/a=۱٫۵(۰٫۵)۵٫۰$ و $\theta=۰°(۱۵°)۹۰°$ محاسبه‌کنید ودریك جدول بیاورید. جملات تا $P_{۲۲}(\cos\theta)$ را حساب‌کنید.

مقدار آزمونی. به‌ازای $r/a=۲٫۰$ و $\theta=۱۵°$: $\psi=۰٫۴۶۶۳۸(q/۴\pi\varepsilon_۰ r)$.

۲۵.۳.۱۲ با انتگرالگیری عددی ازمعادلهٔ (۵۱.۱۲)، پنج ضریب(غیرصفر) اول دربسط سری لژاندر $f(x)=۱-|x|$ را محاسبه‌کنید. این‌ضرایب‌را درواقع می‌توان به‌صورتی بسته به‌دست آورد. ضرایبی‌راکه محاسبه‌کرده‌اید باضرایب حاصل ازمسئلهٔ ۴.۴.۱۳ مقایسه کنید.

پاسخ.

$$a_۰=۰٫۵۰۰۰$$
$$a_۲=-۰٫۶۲۵۰$$
$$a_۴=۰٫۱۸۷۵$$
$$a_۶=-۰٫۱۰۱۶$$
$$a_۸=۰٫۰۶۶۴$$

۲۶.۳.۱۲ پتانسیل الکتروستاتیکی ناشی‌از دونیمکرهٔ باردار مسئلهٔ ۲۰.۳.۱۲ را درخارج آنها به‌ازای $r/a=۱٫۵(۰٫۵)۵٫۰$ و $\theta=۰°(۱۵°)۹۰°$ محاسبه کنید ونتایج را در جدولی بیاورید. جملات را تا $P_{۲۳}(\cos\theta)$ محاسبه کنید.

مقدار آزمونی. به‌ازای $r/a=۲٫۰$ و $\theta=۴۵°$: $V=۰٫۲۷۰۶۶V_۰$.

۲۷.۳.۱۲ (الف) تابع

$$f(x)=\begin{cases} ۲٫۰ & |x|<۰٫۵ \\ ۰ & ۰٫۵<|x|<۱٫۰ \end{cases}$$

را به‌صورت یك سری لژاندر بسط دهید و ضرایب را تا $a_{۸۰}$ (به‌صورت تحلیلی) محاسبه کنیـد.

(ب) $\sum_{n=۰}^{۸۰} a_n P_n(x)$ را به‌ازای $x=۰٫۴۰۰(۰٫۰۰۵)۰٫۶۰۰$ حساب کنید. نتیجه را ترسیم کنید.

یادآوری. این مسئله، پدیدهٔ گیبس در بخش ۵.۱۴، را نشان می‌دهد و نمایانگر دشواریهایی است که هنگام محاسبه از طریق بسط سری در مجاورت یك ناپیوستگی پیش می‌آید.

۴.۱۲ سایر تعریفهای چندجمله‌ایهای لژاندر

فرمول ردریگز

صورت سری چندجمله‌ایهای لژاندر [معادلهٔ (۸.۱۲)] را در بخش ۱.۱۲ می‌توان به‌صورت زیر تبدیل کرد. با استفاده ازمعادلهٔ (۸.۱۲)

$$P_n(x)=\sum_{r=۰}^{[n/۲]}(-۱)^r\frac{(۲n-۲r)!}{۲^n r!(n-r)!(n-۲r)!}x^{n-۲r} \qquad (۶۴.۱۲)$$

به‌ازای مقدار درست n داریم

$$P_n(x)=\sum_{r=۰}^{[n/۲]}(-۱)^r\frac{۱}{۲^n r!(n-r)!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n x^{۲n-۲r}$$

(۶۴.۱۲الف)

$$=\frac{۱}{۲^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\sum_{r=۰}^{n}\frac{(-۱)^r n!}{r!(n-r)!}x^{۲n-۲r}$$

به بسط حدبالاتوجه کنید. اثبات اینکه جمله‌های اضافی‌از $۱+[n/۲]$ تا n چیزی به‌مجموع نمی‌افزایند، موضوع مسئلهٔ ۱.۴.۱۲ است. درهرحال، باافزودن این جملات اضافی‌می‌توانیم، به‌جای مجموع جدید (با استفادهٔ مجدد از قضیهٔ دوجمله‌ای)، کمیت $(x^۲-۱)^n$ را قرار دهیم وعبارت زیر را به‌دست آوریم

$$P_n(x)=\frac{۱}{۲^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n(x^۲-۱)^n \qquad (۶۵.۱۲)$$

این عبارت فرمول ردریگز است. این فرمول دراثبات بسیاری ازخواص چنـدجمله‌ایهای لژاندر ازجملهٔ تعامد به‌کارمی‌آید. یکی‌ازموارد استفادهٔ آن، درمسئلهٔ ۳.۴.۱۲ آمده است. دربخش ۵.۱۲، با تعمیم تعریف ردریگز، به تعریف توابع وابستهٔ لژاندر می‌پردازیم. این

تعریف، در بخش ۷.۱۲، برای یافتن ویژه‌تابعهای تکانهٔ زاویه‌ای مداری به‌کارمی‌رود.

انتگرال اشلافلی

یکی از ابزار ارائهٔ نمایش انتگرالی $P_n(z)$ فرمول ردریگز است. با استفاده از فرمول انتگرال کوشی (بخش ۴.۶، جلد اول)

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(t)}{t-z}\,dt \tag{۶۶.۱۲}$$

با

$$f(z)=(z^2-1)^n \tag{۶۷.۱۲}$$

داریم

$$(z^2-1)^n=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{(t^2-1)^n}{t-z}\,dt \tag{۶۸.۱۲}$$

با n بار مشتقگیری نسبت‌به z و ضرب کردن در $1/(2^n n!)$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} P_n(z)&=\frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n \\ &=\frac{2^{-n}}{2\pi i}\oint\frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+1}}\,dt \end{aligned} \tag{۶۹.۱۲}$$

با پربندی‌که نقطهٔ $t=z$ را دربرمی‌گیرد.

این عبارت انتگرال اشلافلی است. مارجینو و مورفی[1]، با استفاده از این انتگرال، روابط بازگشتی راکه با استفاده از تابع مولد به‌دست‌آوردیم، استخراج می‌کنند.

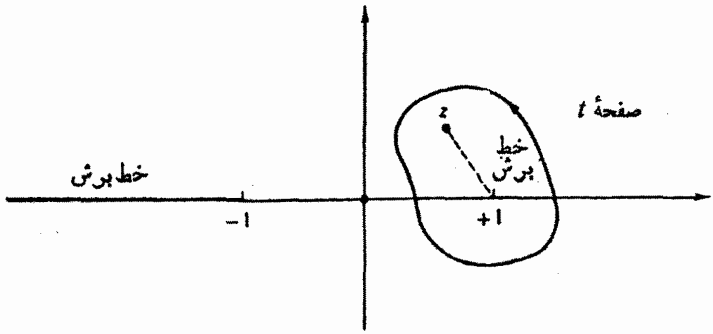
با مشتقگیری و جانشانی مستقیم، به‌آسانی می‌توان نشان دادکه انتگرال اشلافلی در معادلهٔ لژاندر صدق می‌کند (شکل ۱۲.۱۲). خواهیم داشت

$$\begin{aligned} &(1-z^2)\frac{d^2P_n}{dz^2}-2z\frac{dP_n}{dz}+n(n+1)P_n \\ &\quad=\frac{n+1}{2^n\times 2\pi i}\oint\frac{d}{dt}\left[\frac{(t^2-1)^{n+1}}{(t-z)^{n+2}}\right]dt \end{aligned} \tag{۷۰.۱۲}$$

---

۱. بخش ۵.۳ کتابی با مشخصات زیر را ببینید:

Margenau, H., and G. M. Murphy, *The Mathematics of Physics and Chemistry*, 2nd ed., Princeton, N. J. Van Nostrand (1956).



شکل ۱.۲.۱۲ پربند انتگرال اشلافلی.

تابع $(t^{2}-1)^{n+1}/(t-z)^{n+2}$، به‌ازای عدد درست n، تك‌مقدار است، وانتگرال روی مسیر بسته صفر می‌شود. همچنین می‌توان برای تعریف $P_\nu(z)$ به‌ازای مقادیر غیر درست ν وانتگرالگیری حول نقاط $t=z$ و $t=1$، بدون‌اینکه ازخط‌برش از -1 تا $-\infty$ عبور کنیم، انتگرال اشلافلی را به کار برد. می‌شد نقاط $t=z$ و $t=-1$ را دور زد، ولی این عمل چیز تازه‌ای به ما نمی‌دهد. پربندی که $t=+1$ و $t=-1$ را دربر گیرد، به یك جواب دیگر $Q_\nu(z)$ منجرمی‌شود، بخش ۱۰.۱۲.

مسائل

۱.۴.۱۲ نشان دهیدکه هریك ازجمله‌ها درمجموعیابی

$$\sum_{r=[n/2]+1}^{n}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\frac{(-1)^{r}n!}{r!(n-r)!}\,x^{2n-2r}$$

صفرمی‌شود (r و n اعداد درست‌اند).

۲.۴.۱۲ با بهره‌گیری ازفرمول رودریگز، نشان دهیدکه $P_n(x)$ها متعامدند ونیز

$$\int_{-1}^{1}[P_n(x)]^{2}dx=\frac{2}{2n+1}$$

راهنمایی. ازفرمول رودریگز انتگرال جزءبه‌جزء بگیرید.

۳.۴.۱۲ نشان دهیدکه هرگاه $m<n$، آنگاه $\int_{-1}^{1}x^{m}P_n(x)dx=0$.
راهنمایی. ازفرمول رودریگز بهره‌گیرید.

۴.۴.۱۲ نشان دهید که

$$\int_{-1}^{1} x^n P_n(x)dx = \frac{2^{n+1} n! n!}{(2n+1)!}$$

یادآوری. انتظار می‌رود از فرمول رودریگز بهره و از آن انتگرال جزء به‌جزء بگیرید، ولی در ضمن ببینید آیا می‌توانید این نتیجه را به‌کمك وارسی معادلهٔ (۸.۱۲) به‌دست آورید یا خیر.

۵.۴.۱۲ نشان دهید که

$$\int_{-1}^{1} x^{2r} P_{2n}(x)dx = \frac{2^{2n+1}(2r)!(r+n)!}{(2r+2n+1)!(r-n)!}$$

۶.۴.۱۲ به عنوان تعمیم مسائل ۴.۴.۱۲ و ۵.۴.۱۲، نشان دهید که بسطهای لژاندر x^s عبارت‌اند از

(الف) $$x^{2r} = \sum_{n=0}^{r} \frac{2^{2n}(4n+1)(2r)!(r+n)!}{(2r+2n+1)!(r-n)!} P_{2n}(x), \qquad s = 2r$$

(ب) $$x^{2r+1} = \sum_{n=0}^{r} \frac{2^{2n+1}(4n+3)(2r+1)!(r+n+1)!}{(2r+2n+3)!(r-n)!} P_{2n+1}(x),$$

$$s = 2r+1$$

۷.۴.۱۲ یك موج تخت را می‌توان به‌کمك معادلهٔ ریلی برحسب یك‌سری ازامواج کروی به‌صورت زیر بسط داد

$$e^{ikr\cos\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n j_n(kr) P_n(\cos\gamma)$$

نشان دهید که $a_n = i^n(2n+1)$.

راهنمایی. ۱. از تعامد P_nها برای یافتن $a_n j_n(kr)$ استفاده کنید.
۲. n بار نسبت به (kr) مشتق بگیرید و قراردهید $r=0$، تا وابستگی به r را حذف کنید.
۳. انتگرال باقیمانده را با استفاده ازمسئلهٔ ۴.۴.۱۲ محاسبه کنید.

یادآوری. این مسئله را می‌توان با توجه به‌این نکته نیز بررسی کرد که هر دوطرف معادله درمعادلهٔ هلمهولتزصدق می‌کنند. تساوی دوطرف را می‌توان باتوجه به‌این نکته که رفتار جوابها در مبدأ یکسان‌اند، و اینکه در فواصل دور نیز به‌طور یکسان رفتار می‌کنند،

اثبات کرد. دربخش ۶.۱۶، با استفاده از توابع گرین، به‌کمك قراردادن مقادیر مشخص، جوابی به‌دست می‌آوریم.

۸.۴.۱۲ درستی معادلهٔ ریلی‌را درمسئلهٔ ۷.۴.۱۲ با دنبال‌کردن مراحل زیر تحقیق کنید:

۱. نسبت به (kr) مشتق بگیرید تا رابطهٔ زیررا به‌دست آورید

$$\sum_n a_n j'_n(kr) P_n(\cos\gamma) = i \sum_n a_n j_n(kr) \cos\gamma P_n(\cos\gamma)$$

۲. با استفاده از یك رابطهٔ بازگشتی به‌جای $\cos\gamma\, P_n(\cos\gamma)$، ترکیبی خطی از P_{n-1} و P_{n+1} را قراردهید.

۳. با استفاده از یك رابطهٔ بازگشتی به‌جای j'_n ترکیبی خطی از j_{n-1} و j_{n+1} را قرار دهید.

۹.۴.۱۲ با استفاده ازمسئلهٔ ۷.۴.۱۲ نشان دهید که

$$j_n(kr) = \frac{1}{2i^n} \int_{-1}^{1} e^{ikr\mu} P_n(\mu)\, d\mu$$

یعنی، تابع‌کروی‌بسل، $j_n(kr)$، (گذشته ازضرایب ثابت) تبدیل فوریهٔ چندجمله‌ای‌لژاندر، $P_n(\mu)$، به‌شمارمی‌آید.

۱۰.۴.۱۲ چندجمله‌ایهای لژاندر و توابع کروی بسل از طریق رابطهٔ زیر به‌هم مربوط می‌شوند

$$j_n(z) = \frac{1}{2}(-i)^n \int_0^{\pi} e^{iz\cos\theta} P_n(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

درستی این رابطه را، با تبدیل سمت راست آن به

$$\frac{z^n}{2^{n+1} n!} \int_0^{\pi} \cos(z\cos\theta) \sin^{2n+1}\theta\, d\theta$$

و استفاده از مسئلهٔ ۹.۷.۱۱، تحقیق کنید.

۱۱.۴.۱۲ بامحاسبهٔ مستقیم انتگرال اشلافلی نشان دهید که $P_n(1) = 1$.

۱۲.۴.۱۲ توضیح‌دهید‌که چرا وقتی‌که $n \to \nu$ (غیرعدد درست)، پربند انتگرال اشلافلی، معادلهٔ (۶۹.۱۲)، طوری برگزیده می‌شود‌که نقاط $z = t$ و $1 = t$ را دربر بگیرد.

۱۳.۴.۱۲ درمحاسبات عددی(مانندکوادراتورگاؤس‌ـ‌لژاندر، پیوست ۲ راببینید) خوب

است که بدانیم $P_n(x)$، درون $[-1,1]$، n صفر حقیقی دارد. درستی این گزاره را نشان دهید.

راهنمایی. بنابر قضیهٔ رل، اولین مشتق $(x^2-1)^{2n}$ یك صفر درون $[-1,1]$ دارد. این برهان را به‌مشتقهای دوم، سوم، و سرانجام nام تعمیم دهید.

۵.۱۲ توابع وابستهٔ لژاندر

اگر معادلهٔ هلمهولتز را درمختصات قطبی‌کروی تفکیك کنیم (بخش ۶.۲، جلد اول)، یکی از معادلات دیفرانسیل معمولی تفکیك‌شده، معادلهٔ وابستهٔ لژاندر خواهد بود

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta}\right)+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P_n^m(\cos\theta)=0$$

(۷۱.۱۲)

این معادله به‌ازای $x=\cos\theta$، به‌صورت زیردرمی‌آید

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}P_n^m(x)-2x\frac{d}{dx}P_n^m(x)+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P_n^m(x)=0$$

(۷۲.۱۲)

این معادله، تنها درصورتی که ثابت جداسازی سمتی، یعنی m^2، صفر باشد، به‌معادلهٔ لژاندر، معادلهٔ (۲۸.۱۲)، ساده می‌شود.

یکی‌از راههای به‌دست آوردن جواب معادلهٔ وابستهٔ لژاندر آن است که از معادلهٔ منظم لژاندر شروع کنیم و آن را ازطریق مشتقگیری چندگانه به‌معادلهٔ وابستهٔ لژاندر تبدیل کنیم. معادلهٔ لژاندر را درنظرمی‌گیریم

$$(1-x^2)P_n''-2xP_n'+n(n+1)P_n=0 \qquad (۷۳.۱۲)$$

بااستفاده ازفرمول لایب‌نیتس[1]، m بارمشتق می‌گیریم. درنتیجه

$$(1-x^2)u''-2x(m+1)u'+(n-m)(n+m+1)u=0 \qquad (۷۴.۱۲)$$

که در آن

---

۱. فرمول لایب‌نیتس برای مشتق nام یك حاصلضرب به‌صورت زیراست

$$\frac{d^n}{dx^n}[A(x)B(x)]=\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}\frac{d^{n-s}}{dx^{n-s}}A(x)\frac{d^s}{dx^s}B(x)$$

که درآن $\binom{n}{s}=\frac{n!}{(n-s)!s!}$ یك ضریب دوجمله‌ای است.

$$u \equiv \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \qquad (۷۵.۱۲)$$

معادلهٔ (۷۴.۱۲) خود-الحاقی نیست. برای آنکه آن را به‌صورت خود-الحاقی درآوریم، به‌جای $u(x)$ می‌گذاریم

$$v(x) = (1-x^2)^{m/2} u(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \qquad (۷۶.۱۲)$$

ازاین معادله u را به‌دست می‌آوریم واز آن مشتق می‌گیریم، خواهیم داشت

$$u' = \left(v' + \frac{mxv}{1-x^2} \right)(1-x^2)^{-m/2} \qquad (۷۷.۱۲)$$

$$u'' = \left[v'' + \frac{2mxv'}{1-x^2} + \frac{mv}{1-x^2} + \frac{m(m+2)x^2 v}{(1-x^2)^2} \right] \cdot (1-x^2)^{-m/2}$$
$$(۷۸.۱۲)$$

با نشاندن درمعادلهٔ (۷۴.۱۲)، پی‌می‌بریم که تابع جدید v درمعادلهٔ دیفرانسیل زیر صدق می‌کند

$$(1-x^2)v'' - 2xv' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] v = 0 \qquad (۷۹.۱۲)$$

این همان معادلهٔ وابستهٔ لژاندر است، که همان طورکه باید، با مساوی صفر قراردادن m، به‌معادلهٔ لژاندر ساده‌می‌شود. معادلهٔ وابستهٔ لژاندر برحسب مختصات‌قطبی کروی به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dv}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] v = 0 \qquad (۸۰.۱۲)$$

توابع وابستهٔ لژاندر

جوابهای منظم،که آنها را بانماد جدید $P_n^m(x)$ مشخص می‌کنیم، عبارت‌اند از

$$v \equiv P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \qquad (۸۱.۱۲)$$

اینها توابع‌وابستهٔ لژاندرند.[1] ازآنجاکه x^n بزرگترین‌توان x در $P_n(x)$ است، بایدداشته

---

۱. گهگاه (مثلا در AMS-55) توابع وابستهٔ لژاندر، به کمك یك ضریب اضافی $(-1)^m$ تعریف می‌شوند. دراین مرحله، کمیت $(-1)^m$، نالازم به‌نظر می‌آید. این ضریب در بخش ۶.۱۲، درتعریف هماهنگهای کروی $Y_n^m(\theta,\varphi)$ وارد خواهد شد.

باشیم $m \leqslant n$ (در غیر این‌صورت مشتقگیری mگانه تابع ما را صفر خواهد کرد). تعبیر فیزیکی شرط $m \leqslant n$، درمکانیك کوانتومی آن است که مقدار انتظاری مربع مؤلفهٔ z تکانهٔ زاویه‌ای کمتر از مقدار انتظاری مربع بردار تکانهٔ زاویه‌ای، $\mathbf{L}$، یا مساوی با آن است، $\langle L_z^2 \rangle \leqslant \langle L^2 \rangle$.

از شکل معادلهٔ (۸۱.۱۲) می‌توان انتظار داشت که m نامنفی باشد، زیرا چندبار مشتقگیری منفی تعریف نشده است. ولی اگر $P_n(x)$ به کمك فرمول رودریگز تعریف شده باشد، این محدودیت روی مقدار m برداشته می‌شود و می‌توان به این نتیجه رسید که: $-n \leqslant m \leqslant n$، یعنی علاوه‌بر مقادیر مثبت m، مقادیر منفی آن‌هم مجاز است. بار دیگر با بهره‌گیری از فرمول مشتقگیری لایب‌نیتس، می‌توان نشان داد که (مسئلهٔ ۱.۵.۱۲) رابطهٔ $P_n^m(x)$ و $P_n^{-m}(x)$ با هم به‌صورت زیراست

$$P_n^{-m}(x)=(-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x) \qquad \text{(۸۱.۱۲ الف)}$$

بنابرتعریف توابع وابستهٔ لژاندر، $P_n^m(x)$، داریم

$$P_n^0(x)=P_n(x) \qquad (۸۲.۱۲)$$

علاوه‌براین، می‌توانیم جدول ۳.۱۲ را نیز تشکیل دهیم.

توابع وابستهٔ لژاندر هم مانند چندجمله‌ایهای لژاندر، یك تابع مولد به‌صورت زیر دارند

$$\frac{(2m)!(1-x^2)^{m/2}}{2^m m!(1-2tx+t^2)^{m+1/2}}=\sum_{s=0}^{\infty} P_{s+m}^m(x) t^s \qquad (۸۳.۱۲)$$

ولی این تابع به‌علت دشواریهای دست‌وپاگیرش، و عدم کاربرد فیزیکی مستقیم برای آن، به‌ندرت به‌کار می‌رود.

روابط بازگشتی

همان‌گونه که انتظار می‌رود، توابع وابستهٔ لژاندر در روابط بازگشتی معینی صدق می‌کنند. به‌دلیل وجود دوشاخص پایین به‌جای یك‌شاخص‌پایین، انواع گوناگونی ازروابط بازگشتی داریم

$$P_n^{m+1}-\frac{2mx}{(1-x^2)^{1/2}}P_n^m+[n(n+1)-m(m-1)]P_n^{m-1}=0 \qquad (۸۴.۱۲)$$

$$(2n+1)xP_n^m=(n+m)P_{n-1}^m+(n-m+1)P_{n+1}^m \qquad (۸۵.۱۲)$$

جدول ۳.۱۲ توابع وابستهٔ لژاندر

$$P_1^1(x)=(1-x^2)^{1/2}=\sin\theta$$
$$P_2^1(x)=3x(1-x^2)^{1/2}=3\cos\theta\sin\theta$$
$$P_2^2(x)=3(1-x^2)=3\sin^2\theta$$
$$P_3^1(x)=\frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2}=\frac{3}{2}(5\cos^2\theta-1)\sin\theta$$
$$P_3^2(x)=15x(1-x^2)=15\cos\theta\sin^2\theta$$
$$P_3^3(x)=15(1-x^2)^{3/2}=15\sin^3\theta$$
$$P_4^1(x)=\frac{5}{2}(7x^3-3x)(1-x^2)^{1/2}=\frac{5}{2}(7\cos^3\theta-3\cos\theta)\sin\theta$$
$$P_4^2(x)=\frac{15}{2}(7x^2-1)(1-x^2)=\frac{15}{2}(7\cos^2\theta-1)\sin^2\theta$$
$$P_4^3(x)=105x(1-x^2)^{3/2}=105\cos\theta\sin^3\theta$$
$$P_4^4(x)=105(1-x^2)^2=105\sin^4\theta$$

$$\begin{aligned}(2n+1)(1-x^2)^{1/2}P_n^m &= P_{n+1}^{m+1}-P_{n-1}^{m+1}\\ &=(n+m)(n+m-1)P_{n-1}^{m-1}-(n-m+1)(n-m+2)P_{n+1}^{m-1}\end{aligned} \quad (۸۶.۱۲)$$

$$(1-x^2)^{1/2}P_n^m=\frac{1}{2}P_n^{m+1}-\frac{1}{2}(n+m)(n-m+1)P_n^{m-1} \quad (۸۷.۱۲)$$

درستی این روابط وبسیاری ازروابط مشابه دیگر را می‌توان بااستفاده ازتابع مولد [معادلهٔ (۴.۱۲)]، یاازطریق جانشانی‌جواب سری معادلهٔ وابستهٔ لژاندر (۷۹.۱۲) تحقیق کرد. این کار با ساده کردن روابط بازگشتی چندجمله‌ای لژاندر، با بهره‌گیری از معادلهٔ (۸۱.۱۲)، نیزامکانپذیر است. به‌عنوان‌نمونه‌ای برای روش‌اخیر، سومین معادله ازمجموعهٔ بالا را درنظر بگیرید. این‌معادله به‌معادلهٔ (۲۳.۱۲) شبیه‌است

$$(2n+1)P_n(x)=P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x) \quad (۸۸.۱۲)$$

ازاین رابطهٔ بازگشتی چندجمله‌ای لژاندر، m بار مشتق می‌گیریم و به‌دست می‌آوریم

$$(2n+1)\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)=\frac{d^m}{dx^m}P'_{n+1}(x)-\frac{d^m}{dx^m}P'_{n-1}(x)$$

$$=\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_{n+1}(x)-\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_{n-1}(x) \qquad (۸۹.۱۲)$$

حال به‌کمك ضرب کردن در $(1-x^2)^{(m+1)/2}$ و با استفاده از تعریف $P_n^m(x)$، معادلهٔ (۸۶.۱۲) را به‌دست می‌آوریم.

پاریته

با بررسی معادلهٔ معرف توابع وابستهٔ لژانـدر (۸۱.۱۲)، می‌توان رابطهٔ پاریته‌ای را که این توابع در آن صدق می‌کنند، تعیین کرد. با $x\to -x$، ازقبل می‌دانیم که $P_n(x)$ یك $(-1)^n$ ایجاد می‌کند. مشتقگیری m گانه نیز یك‌ضریب $(-1)^m$ ایجاد می‌کند. ازاین‌رو داریم

$$P_n^m(-x)=(-1)^{n+m}P_n^m(x) \qquad (۹۰.۱۲)$$

این رابطه را می‌توان با یك نظر به‌جدول ۳.۱۲، به‌ازای $1\leqslant m\leqslant n\leqslant 4$، تحقیق کرد.

همچنین ازتعریف $P_n^m(x)$، درمعادلهٔ (۸۱.۱۲)، داریم

$$P_n^m(\pm 1)=0, \qquad m\neq 0 \text{ به‌ازای} \qquad (۹۱.۱۲)$$

تعامد

تعامد $P_n^m(x)$، درست مثل $P_n(x)$ها (بخش ۳.۱۲)، از معادلهٔ دیفرانسیل نتیجه می‌شود؛ بافرض‌اینکه m درهردوتابع یکی‌باشد، جملهٔ $-m^2/(1-x^2)$ حذف‌می‌شود. ولی هرگاه تعامد $P_n^m(x)$ها را با روش دیگری نمایش دهیم، روشی که ثابت بهنجارش را نیز تعیین خواهدکرد، خیلی بهتراست.

بااستفاده ازتعریف $P_n^m(x)$ درمعادلهٔ (۸۱.۱۲) وفرمول رودریگز[معادلهٔ(۶۵.۱۲)] برای $P_n(x)$، خواهیم داشت

$$\int_{-1}^{1}P_p^m(x)P_q^m(x)\,dx=\frac{(-1)^m}{2^{p+q}p!q!}\int_{-1}^{1}X^m\frac{d^{p+m}}{dx^{p+m}}X^p\frac{d^{q+m}}{dx^{q+m}}X^q\,dx \qquad (۹۲.۱۲)$$

تابع X از رابطهٔ $X\equiv(x^2-1)$ به‌دست می‌آید. اگر $p\neq q$، فرض‌کنید $p<q$. توجه

کنید که شاخص بالای m برای هردوتابع یکی است. این یك شرط اساسی است. شگرد کار به این ترتیب است که پشت‌سرهم انتگرال جزء به جزء بگیریم؛ قسمتهای انتگرالگیری‌شده، تا آنجا که دارای یك عامل $X = x^{2} - 1$ باشند، تماماً صفر می‌شوند. $q+m$ بار مشتق می‌گیریم وخواهیم داشت

$$\int_{-1}^{1} P_p^m(x) P_q^m(x)\, dx = \frac{(-1)^m (-1)^{q+m}}{2^{p+q} p! q!} \int_{-1}^{1} \frac{d^{q+m}}{dx^{q+m}} \times \left(X^m \frac{d^{p+m}}{dx^{p+m}} X^p \right) X^q dx \qquad (۹۳.۱۲)$$

اکنون انتگرالده طرف راست‌را به‌کمك فرمول لایب‌نیتس به‌صورت زیر بسط می‌دهیم

$$X^q \frac{d^{q+m}}{dx^{q+m}} \left(X^m \frac{d^{p+m}}{dx^{p+m}} X^p \right) = X^q \sum_{i=0}^{i=q+m} \frac{(q+m)!}{i!(q+m-i)!} \frac{d^{q+m-i}}{dx^{q+m-i}} \times X^m \frac{d^{p+m+i}}{dx^{p+m+i}} X^p \qquad (۹۴.۱۲)$$

ازآنجاکه جملهٔ X^m شامل هیچ توانی از x نیست‌که از x^{2m} بالاترباشد، باید داشته باشیم

$$q+m-i \leqslant 2m \qquad (۹۵.۱۲)$$

درغیراین صورت مشتق برابرصفر می‌شود. به‌همین ترتیب

$$p+m+i \leqslant 2p \qquad (۹۶.۱۲)$$

این دو معادله را حل می‌کنیم و i را به دست می‌آوریم؛ شرایط داشتن نتیجهٔ غیر صفر آن است که

$$i \geqslant q-m, \quad i \leqslant p-m \qquad (۹۷.۱۲)$$

اگر $p<q$، هیچ جواب غیرصفری وجودندارد و انتگرال صفر می‌شود. روشن است در صورتی که داشته باشیم: $p>q$، نیزهمین نتیجه به‌دست می‌آید.

در مورد تنها حالت باقیمانده یعنی $p=q$، فقط ممکن است یك جملهٔ متناظر با $i=q-m$ داشته باشیم. بانشاندن معادلهٔ (۹۴.۱۲) درمعادلهٔ (۹۳.۱۲) داریم

$$\int_{-1}^{1} [P_q^m(x)]^2 dx = \frac{(-1)^{q+2m}(q+m)!}{2^{2q} q! q! (2m)! (q-m)!} \int_{-1}^{1} X^q \left(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} X^m \right) \left(\frac{d^{2q}}{dx^{2q}} X^q \right) dx \qquad (۹۸.۱۲)$$

از آنجاکه

$$X^m=(x^2-1)^m=x^{2m}-mx^{2m-2}+\dots \qquad (۹۹.۱۲)$$

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}X^m=(2m)! \qquad (۱۰۰.۱۲)$$

معادلهٔ (۹۸.۱۲) به‌صورت زیر ساده می‌شود

$$\int_{-1}^{1}[P_q^m(x)]^2\,dx=\frac{(-1)^{q+2m}(2q)!(q+m)!}{2^{2q}q!q!(q-m)!}\int_{-1}^{1}X^q dx \qquad (۱۰۱.۱۲)$$

انتگرال سمت راست عبارت است از

$$(-1)^q\int_0^{\pi}\sin^{2q+1}\theta\,d\theta=\frac{(-1)^q 2^{2q+1}q!q!}{(2q+1)!} \qquad (۱۰۲.۱۲)$$

(با مسئلهٔ ۹.۴.۱۰ مقایسه کنید). باترکیب معادلات (۱۰۱.۱۲) و (۱۰۲.۱۲)، انتگرال تعامد زیررا داریم

$$\int_{-1}^{1}P_p^m(x)P_q^m(x)\,dx=\frac{2}{2q+1}\cdot\frac{(q+m)!}{(q-m)!}\delta_{p,q} \qquad (۱۰۳.۱۲)$$

یا، درمختصات قطبی کروی

$$\int_0^{\pi}P_p^m(\cos\theta)P_q^m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta=\frac{2}{2q+1}\cdot\frac{(q+m)!}{(q-m)!}\delta_{p,q} \qquad (۱۰۴.۱۲)$$

تعامد چندجمله‌ایهای لژاندرعملا حالت خاصی‌ازاین نتیجه‌است، که با مساوی صفر قراردادن m به‌دست‌می‌آید؛ یعنی، معادلهٔ(۱۰۳.۱۲) به‌ازای $m=0$ به‌معادلات(۴۳.۱۲) و (۴۸.۱۲) ساده می‌شود. تابع دلتای‌کرونکر درهردو معادلهٔ (۱۰۳.۱۲) و (۱۰۴.۱۲) را می‌شد به‌اعتبار نظریهٔ اشتورم-لیوویل (فصل ۹) به‌دست آورد. ولی برای تعیین ثابت بهنجارش، به‌محاسبهٔ خاصی نظیرآنچه در اینجا ارائه شد نیازداریم.

تعامد توابع‌وابستهٔ لژاندر روی‌همان‌بازه وبا همان‌عامل وزنی‌که برای‌چندجمله‌ایهای لژاندر داشتیم، تناقضی با یکتایی روش گرام-اشمیت برای ساختن چندجمله‌ایهای لژاندر، مثال ۱.۳.۹، ندارد. بنابر جدول ۳.۱۲ (که در بخش ۴.۱۲ هم ثابت می‌شود)؛ $\int_{-1}^{1}P_p^m(x)P_q^m(x)dx$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\int_{-1}^{1}p_p^m(x)p_q^m(x)(1-x^2)^m dx$$

دراینجا

$$p_p^m(x)(1-x^2)^{m/2}=P_p^m(x)$$

می‌توان به‌کمك دستورالعمل گـرام‌ـاشمیت با تابع وزنی $w(x)=(1-x^2)^m$ تـوابع $p_p^m(x)$ را به‌دست آورد.

می‌توان یك‌رابطهٔ تعامد هم‌برای توابع وابستهٔ لژاندر، با همان شاخص پایین اما با شاخصهای بالایی متفاوت به‌دست‌آورد. خواهیم داشت

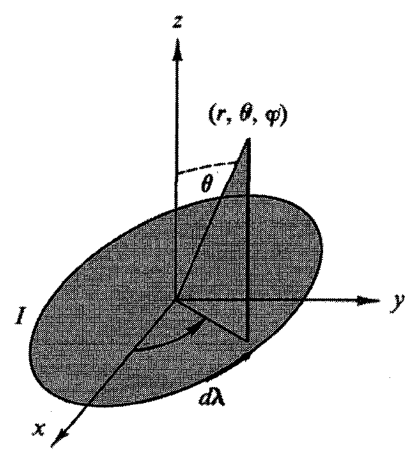
$$\int_{-1}^{1} P_n^m(x)P_n^k(x)(1-x^2)^{-1}dx=\frac{(n+m)!}{m(n-m)!}\delta_{m,k} \qquad (105.12)$$

توجه کنید که عامل‌وزنی جدید $(1-x^2)^{-1}$ دراین عبارت راه یافته‌است. این‌رابطهٔ تعامد، در ریاضیات علی‌الاصول یکی از موارد ارضای نیاز کنجکاوی به‌شمار می‌آید. در مسائل فیزیکی، تعامد در بخشهای وابسته به φ، دو شاخص بالا را به هم مربوط می‌کند و به‌معادلهٔ (۱۰۴.۱۲) منجر می‌شود.

مثال ۱.۵.۱۲ میدان القای مغناطیسی یك حلقهٔ جریان

ممکن است معادلهٔ وابستهٔ لژاندر نیز، مانند سایر معادلات دیفرانسیـلی مربوط به فیزیك‌ـ ریاضی، به‌صورتی کاملا غیرمنتظره بروز کند. به‌عنوان نمونه میدان القای مغناطیسی، $\mathbf{B}$، و پتانسیل برداری مغناطیسی، $\mathbf{A}$، حاصل ازیك تك‌حلقهٔ دایره‌ای جریان‌را، درصفحهٔ‌استوایی، درنظر بگیرید (شکل ۱۳.۱۲).

باعنایت به نظریهٔ الکترومغناطیس، می‌دانیم که سهم عنصر جریان $\mathbf{I}d\lambda$، در پتانسیـل برداری مغناطیسی عبارت است‌از



شکل ۱۳.۱۲ حلقهٔ جریان دایره‌ای.

$$dA=\frac{\mu_\circ}{4\pi}\,\frac{Id\lambda}{r} \qquad (۱۰۶.۱۲)$$

(این نتیجه ازمسئلهٔ ۴.۱۴.۱ به‌دست می‌آید). معادلهٔ (۱۰۶.۱۲)، به‌اضافهٔ تقارن سیستم، نشان می‌دهد که $\mathbf{A}$ تنها یک‌مؤلفهٔ $\boldsymbol{\varphi}_0$ دارد که از φ مستقل است[1]

$$\mathbf{A}=\boldsymbol{\varphi}_0 A_\varphi(r,\theta) \qquad (۱۰۷.۱۲)$$

ازمعادلات ماکسول داریم

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J} \quad (\partial\mathbf{D}/\partial t=\circ \text{ ،SI برحسب یکاهای}) \qquad (۱۰۸.۱۲)$$

از آنجا که

$$\mu_\circ\mathbf{H}=\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A} \qquad (۱۰۹.۱۲)$$

داریم

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\mu_\circ\mathbf{J} \qquad (۱۱۰.۱۲)$$

که در آن $\mathbf{J}$ چگالی جریان است. در مسئلهٔ ما، $\mathbf{J}$ در همه جا، جز درون حلقهٔ جریان، صفر است. بنابراین، بااستفاده ازمعادلهٔ (۱۰۷.۱۲)، برای خارج ازحلقه داریم

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\varphi}_0 A_\varphi(r,\theta)=\circ \qquad (۱۱۱.۱۲)$$

با استفاده از عبارت مربوط به‌تاو در مختصات قطبی کروی (بخش ۵.۲، جلد اول) داریم (مثال ۲.۵.۲)

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\varphi}_0 A_\varphi(r,\theta)=\boldsymbol{\varphi}_0\left[-\frac{\partial^۲ A_\varphi}{\partial r^۲}-\frac{۲}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial r}-\frac{۱}{r^۲}\frac{\partial^۲ A_\varphi}{\partial\theta^۲}-\frac{۱}{r^۲}\frac{\partial}{\partial\theta}(\cot\theta\, A_\varphi)\right]$$

$$=\circ \qquad (۱۱۲.۱۲)$$

باقراردادن $A_\varphi(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$، وتفکیک متغیرها داریم

$$r^۲\frac{d^۲R}{dr^۲}+۲\frac{dR}{dr}-n(n+۱)R=\circ \qquad (۱۱۳.۱۲)$$

---

۱. عنصرهای بار متناظر $Id\lambda(\varphi_۱)$ و $Id\lambda(\varphi_۲)$، که در آن $\varphi-\varphi_۱=\varphi_۲-\varphi$، دو به دو اثر یکدیگر را حذف می‌کنند.

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{d\Theta}{d\theta}+n(n+1)\Theta-\frac{\Theta}{\sin^2\theta}=0 \qquad (114.12)$$

معادلهٔ دوم، معادلهٔ وابستهٔ لژاندر به‌ازای $m=1$ (۸۰.۱۲) است، وفوراً می‌توانیم بنویسیم

$$\Theta(\theta)=P_n^1(\cos\theta) \qquad (115.12)$$

ثابت جداسازی $n(n+1)$ را به این علت برمی‌گزینیم که، این جواب همچنان خوشرفتار باقی بماند.

جواب $R(r)=r^\alpha$ را امتحان می کنیم. پی‌خواهیم برد که $\alpha=n$ یا $\alpha=-n-1$. امکان اول را رد می‌کنیم، زیرا جواب ما باید به‌ازای $r\to\infty$ صفر شود. ازاین‌رو

$$A_{\varphi n}=\frac{b_n}{r^{n+1}}P_n^1(\cos\theta)=c_n\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}P_n^1(\cos\theta) \qquad (116.12)$$

و

$$A_\varphi(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}P_n^1(\cos\theta), \quad (r>a) \qquad (117.12)$$

a، دراینجا عبارت است ازشعاع حلقهٔ جریان.

ازآنجاکه، به‌علت تقارن مسئله، A_φ باید نسبت به بازتاب درصفحهٔ استوایی ناوردا بماند، یعنی

$$A_\varphi(r,\cos\theta)=A_\varphi(r,-\cos\theta) \qquad (118.12)$$

خاصیت پاریتهٔ $P_n^m(\cos\theta)$ [معادلهٔ (۹۰.۱۲)] نشان می‌دهد که به ازای مقدار زوج n، داریم: $c_n=0$.

برای آنکه محاسبهٔ ثابتها را کامل کرده باشیم، می‌توانیم از معادلهٔ (۱۱۷.۱۲) برای محاسبهٔ B_z درامتداد محور z، $[B_z=B_r(r,\theta=0)]$ بهره برگیریم و نتیجه را با عبارت حاصل از قانون بیو-ساوار مقایسه کنیم. در مثال ۳.۳.۱۲ از همین تکنیك استفاده می‌شود. داریم [با معادلهٔ (۴۷.۲) مقایسه کنید]

$$\begin{aligned}B_r&=\nabla\times\mathbf{A}|_r\\&=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\,A_\varphi)\right] \qquad (119.12)\\&=\frac{\cot\theta}{r}A_\varphi+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta}\end{aligned}$$

با استفاده از معادلهٔ (۸۷.۱۲)

$$\frac{\partial P_n^1(\cos\theta)}{\partial\theta} = -\sin\theta \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d(\cos\theta)}$$

(۱۲۰.۱۲)

$$= -\frac{1}{2}P_n^2 + \frac{n(n+1)}{2}P_n^0$$

و آنگاه معادلهٔ (۸۴.۱۲)، به‌ازای $m=1$

$$P_n^2(\cos\theta) - \frac{2\cos\theta}{\sin\theta}P_n^1(\cos\theta) + n(n+1)P_n(\cos\theta) = 0 \quad (۱۲۱.۱۲)$$

به‌ازای همهٔ θها، خواهیم داشت

$$B_r(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(n+1)\frac{a^{n+1}}{r^{n+2}}P_n(\cos\theta), \quad r>a \qquad (۱۲۲.۱۲)$$

مخصوصاً به‌ازای $\theta=0$

$$B_r(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(n+1)\frac{a^{n+1}}{r^{n+2}} \qquad (۱۲۳.۱۲)$$

همچنین می‌توانیم داشته‌باشیم

$$B_\theta(r,\theta) = -\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}$$

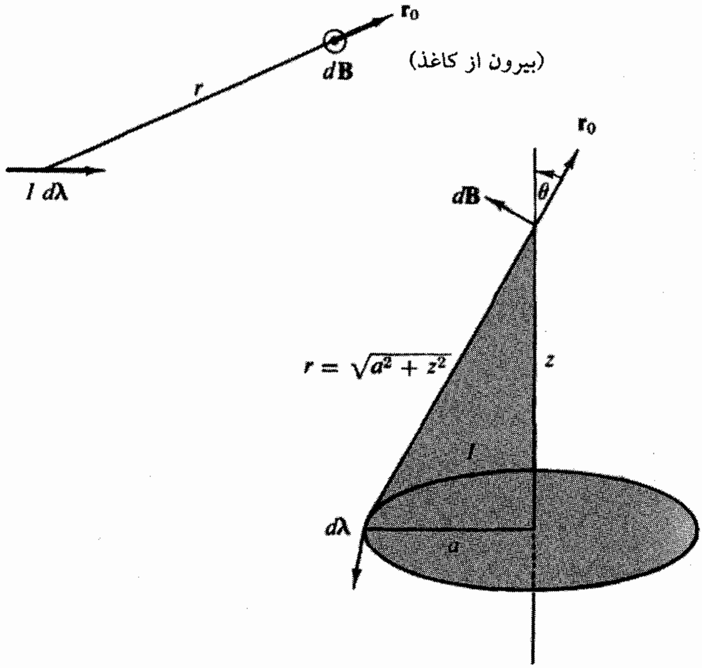
(۱۲۴.۱۲)

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, n\, \frac{a^{n+1}}{r^{n+2}}P_n^1(\cos\theta), \quad r>a$$

بنابر قانون بیو-ساوار

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\, I\, \frac{d\boldsymbol{\lambda}\times\mathbf{r}_0}{r^2} \quad \text{(برحسب یکاهای SI)} \qquad (۱۲۵.۱۲)$$

حال روی محیط حلقه (به شعاع a) انتگرال می‌گیریم. نمایش هندسی مربوطه در شکل ۱۴.۱۲ نشان داده شده‌است. میدان القای مغناطیسی حاصل عبارت است‌از: $\mathbf{k}B_z$، در طول محور z، با



شکل ۱۴.۱۲ قانون بیو-ساوار دربارهٔ یك حلقهٔ جریان.

$$B_z = \frac{\mu_\circ I}{۲} a^۲ (a^۲ + z^۲)^{-۳/۲}$$

$$= \frac{\mu_\circ I}{۲} \frac{a^۲}{z^۳} \left(۱ + \frac{a^۲}{z^۲} \right)^{-۳/۲} \qquad (۱۲۶.۱۲)$$

با بهره‌گیری از قضیهٔ دوجمله‌ای، بسط می‌دهیم

$$B_z = \frac{\mu_\circ I}{۲} \frac{a^۲}{z^۳} \left[۱ - \frac{۳}{۲}\left(\frac{a}{z}\right)^۲ + \frac{۱۵}{۸}\left(\frac{a}{z}\right)^۴ - \cdots \right]$$

$$= \frac{\mu_\circ I}{۲} \frac{a^۲}{z^۳} \sum_{s=\circ}^{\infty} (-۱)^s \frac{(۲s+۱)!!}{(۲s)!!} \left(\frac{a}{z}\right)^{۲s}, \quad z > a \qquad (۱۲۷.۱۲)$$

جمله به جملهٔ معادلات (۱۲۳.۱۲) و (۱۲۷.۱۲) را (به‌ازای $z = r$)[1] مساوی می‌گیریم، داریم

---

۱. سری توانهای نزولی نیز یکتاست.

$$c_1=\frac{\mu_0 I}{4},\quad c_3=-\frac{\mu_0 I}{16},\quad c_2=c_4=\dots=0$$

(۱۲۸.۱۲)

$$c_n=(-1)^{(n-1)/2}\frac{\mu_0 I}{2n(n+1)}\times\frac{(n/2)!}{[(n-1)/2]!(1/2)!},\qquad n \text{ فرد}$$

واین عبارت معادل آن است که بنویسیم

$$c_{2n+1}=(-1)^n\frac{\mu_0 I}{2^{2n+2}}\cdot\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}=(-1)^n\frac{\mu_0 I}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$$

(۱۲۹.۱۲)

و

$$A_\varphi(r,\theta)=\left(\frac{a}{r}\right)^2\sum_{n=0}^{\infty}c_{2n+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}P_{2n+1}^1(\cos\theta)\qquad(۱۳۰.۱۲)$$

$$B_r(r,\theta)=\frac{a^2}{r^3}\sum_{n=0}^{\infty}c_{2n+1}(2n+1)(2n+2)\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}P_{2n+1}(\cos\theta)$$

(۱۳۱.۱۲)

$$B_\theta(r,\theta)=\frac{a^2}{r^3}\sum_{n=0}^{\infty}c_{2n+1}(2n+1)\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}P_{2n+1}^1(\cos\theta)\qquad(۱۳۲.۱۲)$$

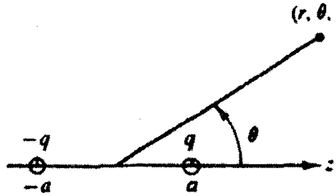
این میدانها را می‌توان به‌شکل بسته با بهره‌گیری ازانتگرالهای بیضوی نیز توصیف کرد. مسئلهٔ ۴.۸.۵ (جلد اول) نمایشی ازاین رهیافت به‌شمار می‌آید. سومین روش ممکن انتگرالگیری مستقیم از معادلهٔ (۱۰۶.۱۲)، ازطریق بسط عامل $1/r$ به‌صورت تابع مولد چندجمله‌ایهای لژانـدر است. توابع دلتای دیراك جریان را مشخص می‌کنند. مزیت این روشها آن‌است که ثابتهای c_n را مستقیماً ارائه می‌کنند.

مقایسهٔ بین میدانهای دوقطبی مغناطیسی حاصل ازحلقه‌های جریان بامیدانهای دوقطبی الکتریکی متناهی می‌تواند جالب باشد. از تحلیل فوق برای دوقطبی مغناطیسی حلقهٔ‌جریان به‌مقادیر زیرمی‌رسیم

$$B_r(r,\theta)=\frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2}{r^3}\left[P_1-\frac{3}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2P_3+\dots\right]\qquad(۱۳۳.۱۲)$$

$$B_\theta(r,\theta)=\frac{\mu_0 I}{4}\frac{a^2}{r^3}\left[P_1^1-\frac{3}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^2P_3^1+\dots\right]\qquad(۱۳۴.۱۲)$$

با استفاده ازپتانسیل دوقطبی‌الکتریکی متناهی، بخش ۱.۱۲، داریم



شکل ۱۵.۱۲ دوقطبی الکتریکی.

$$E_r(r,\theta)=\frac{qa}{\pi\varepsilon_0 r^3}\left[P_1+2\left(\frac{a}{r}\right)^2P_3+\cdots\right] \tag{135.12}$$

$$E_\theta(r,\theta)=\frac{qa}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\left[P_1^1+\left(\frac{a}{r}\right)^2P_3^1+\cdots\right] \tag{136.12}$$

شکل این‌دومیدان، تا آنجاکه به‌جملهٔ پیشرو $(r^{-3}P_1)$ مربوط می‌شود باهم توافق دارند، و اطلاق نام میدان دوقطبی به‌هر دوی آنها نیز برهمین پایه استوار است.

گاهی بحث دربارهٔ چندقطبیهای نقطه‌ای مغناطیسی نیز، مانند چندقطبیهای الکتریکی مفید خواهد بود. درمورد دوقطبی یعنی معادلات (۱۳۳.۱۲) و (۱۳۴.۱۲)، دوقطبی نقطه‌ای باگرفتن حد $a\to 0$، $I\to\infty$، درحالی که Ia^2 ثابت بماند، تشکیل می‌شود. اگر بردار یکهٔ عمود برحلقهٔ جریان را با $\mathbf{n}$ نشان دهیم [سوی مثبت $\mathbf{n}$ به کمک قاعدهٔ دست راست، بخش ۱۰.۱ (جلد اول)، تعیین می‌شود]، گشتاور مغناطیسی $\mathbf{m}$ از عبارت $\mathbf{m}=\mathbf{n}I\pi a^2$ به‌دست می‌آید.

مسائل

۱.۵.۱۲ ثابت کنید

$$P_n^{-m}(x)=(-1)^m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(x)$$

که در آن رابطهٔ زیر، $P_n^m(x)$ را توصیف می‌کند

$$P_n^m(x)=\frac{1}{2^n n!}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n$$

راهنمایی. یکی از راه‌حلها آن‌است که‌فرمول لایب‌نیتس را برای $(x+1)^n(x-1)^n$ به‌کار بریم.

۲.۵.۱۲ نشان دهید

$$P^{1}_{2n}(0)=0$$

$$P^{1}_{2n+1}(0)=(-1)^{n}\frac{(2n+1)!}{(2^{n}n!)^{2}}=(-1)^{n}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}$$

با هریك ازسه روش زیر، محاسبهٔ خودرا انجام دهید: (الف) بااستفاده ازرابطهٔ بازگشتی، (ب) با بسط تابع‌مولد، (ج) با بهره‌گیری ازفرمول رودریگز.

۳.۵.۱۲ $P^{m}_{n}(0)$ را محاسبه‌کنید

پاسخ.

$$P^{m}_{n}(0)=\begin{cases}(-1)^{(n-m)/2}\dfrac{(n-m)!}{2^{n}\left(\dfrac{n-m}{2}\right)!\left(\dfrac{n+m}{2}\right)!}, & n+m \text{ زوج} \\ 0 & n+m \text{ فرد}\end{cases}$$

همچنین $n+m$ زوج، $P^{m}_{n}(0)=(-1)^{(n-m)/2}\dfrac{(n+m-1)!!}{(n-m)!!}$

۴.۵.۱۲ نشان دهید

$$P^{n}_{n}(\cos\theta)=(2n-1)!!\sin^{n}\theta,\quad n=0,1,2,\dots$$

۵.۵.۱۲ رابطهٔ بازگشتی زیررا برای توابع وابستهٔ لژاندر استخراج‌کنید

$$P^{m+1}_{n}(x)-\frac{2mx}{(1-x^{2})^{1/2}}P^{m}_{n}(x)+[n(n+1)-m(m-1)]P^{m-1}_{n}(x)=0$$

۶.۵.۱۲ رابطه‌ای بازگشتی تشکیل دهیدکه $P^{1}_{n}(x)$ را به‌صورت زیربه‌دست دهد

$$P^{1}_{n}(x)=f_{1}(x,n)P_{n}(x)+f_{2}(x,n)P_{n-1}(x)$$

برای این‌کار به‌یکی ازدوطریق (الف) یا (ب) عمل کنید.

(الف)رابطه‌ای بازگشتی را به‌صورت‌قبل استخراج کنید. $f_{1}(x,n)$ و $f_{2}(x,n)$ را صریحاً مشخص‌کنید.

(ب) این رابطهٔ بازگشتی را درمرجعی چاپ‌شده بیابید.

(۱) نام مرجع را ذکرکنید.

(۲) درستی آن را تحقیق‌کنید.

پاسخ. $P_n^1(x)=-\dfrac{nx}{(1-x^2)^{1/2}}P_n+\dfrac{n}{(1-x^2)^{1/2}}P_{n-1}$.

۷.۵.۱۲ نشان دهید

$$\sin\theta P_n'(\cos\theta)=P_n^1(\cos\theta)$$

۸.۵.۱۲ نشان دهید

(الف)

$$\int_0^\pi\left(\frac{dP_n^m}{d\theta}\,\frac{dP_{n'}^m}{d\theta}+\frac{m^2P_n^m\,P_{n'}^m}{\sin^2\theta}\right)\sin\theta\,d\theta=\frac{2n(n+1)}{2n+1}\;\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{nn'},$$

$$\int_0^\pi\left(\frac{P_n^1}{\sin\theta}\,\frac{dP_{n'}^1}{d\theta}+\frac{P_{n'}^1}{\sin\theta}\,\frac{dP_n^1}{d\theta}\right)\sin\theta\,d\theta=0 \qquad \text{(ب)}$$

این انتگرالها، درنظریهٔ پراکندگی امواج الکترومغناطیسی توسط کره‌ها، ظاهرمی‌شوند.

۹.۵.۱۲ به‌عنوان تکرار مسئلهٔ ۶.۳.۱۲، با استفاده ازتوابع وابستهٔ لژاندر، نشان‌دهید

$$\int_{-1}^1 x(1-x^2)P_n'(x)P_m'(x)\,dx=\frac{n+1}{2n+1}\cdot\frac{2}{2n-1}\cdot\frac{n!}{(n-2)!}\delta_{m,n-1}$$
$$+\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{2}{2n+3}\cdot\frac{(n+2)!}{n!}\delta_{m,n+1}$$

۱۰.۵.۱۲ انتگرال زیررا محاسبه‌کنید

$$\int_0^\pi \sin^2\theta P_n^1(\cos\theta)d\theta$$

۱۱.۵.۱۲ چندجمله‌ای وابستهٔ لژاندر $P_n^m(x)$ درمعادلهٔ دیفرانسیل خود-الحاقی زیرصدق می‌کند

$$(1-x^2)P_n^{m\prime\prime}(x)-2xP_n^{m\prime}(x)+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P_n^m(x)=0$$

با استفاده از معادلات دیفرانسیل مربوط به $P_n^m(x)$ و $P_n^k(x)$ نشان دهید که به ازای $k\neq m$

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x)P_n^k(x)\frac{dx}{1-x^2}=0$$

۱۲.۵.۱۲ پتانسیل برداری یك چارقطبی مغناطیسی را از طریق مشتقگیری از پتانسیل دوقطبی مغناطیسی تعیین کنید.

پاسخ. $\mathbf{A}_{MQ}=\frac{\mu_\circ}{۲}(Ia^۲)(dz)\boldsymbol{\varphi}_\circ\frac{P_۲^۱(\cos\theta)}{r^۳}+$ جملات از مرتبهٔ بالاتر

$$\mathbf{B}_{MQ}=\mu_\circ(Ia^۲)(dz)\left[\mathbf{r}_\circ\frac{۳P_۲(\cos\theta)}{r^۴}+\boldsymbol{\theta}_\circ\frac{P_۲^۱(\cos\theta)}{r^۴}\right]$$

این رابطه معادل آن است که یك‌حلقهٔ جریان به‌شعاع a را در $z=dz$، وحلقهٔ جریانی در جهت مخالف را در $z=-dz$ قراردهیم، آنگاه a را تحت این شرط که $x(dz)$(قدرت دوقطبی) مقدار ثابتی‌است، به‌صفر میل دهیم.

یك راه دیگر برای حل این مسئله آن‌است‌که از dA [معادلهٔ (۱۰۶.۱۲)] انتگرال بگیریم، مخرج را به‌صورت یك سری از چندجمله‌ایهای لژاندر بسط دهیم وازقضیهٔ جمع چندجمله‌ایهای لژاندر (بخش ۸.۱۲) استفاده‌کنیم.

۱۳.۵.۱۲ جریان I ازیك تك حلقهٔ سیمی به‌شعاع a می‌گذرد.

(الف)القای مغناطیسی $\mathbf{B}$ را به‌ازای $r<a$ بیابید.

(ب) انتگرال شارمغناطیسی $(\mathbf{B}.d\sigma)$ را روی سطح حلقهٔ جریان، یعنی

$$\int_\circ^a\int_\circ^{۲\pi}B_\theta(r,\theta=\frac{\pi}{۲})d\varphi\, r\, dr$$

محاسبه‌کنید.

پاسخ. ∞.

زمین درداخل چنین جریانی حلقه‌ای واقع است، که درآن I تقریباً برابر میلیونها آمپراست و از رانش ذرات باردار درون کمربند وان‌آلن ناشی می‌شود.

۱۴.۵.۱۲ (الف)نشان دهیدکه میدان القای مغناطیسی حلقهٔ جریان درحد دوقطبی نقطه‌ای به‌صورت زیر درمی‌آید

$$B_r(r,\theta)=\frac{\mu_\circ}{۲\pi}\frac{m}{r^۳}P_۱(\cos\theta)$$

$$B_\theta(r,\theta)=\frac{\mu_\circ}{۴\pi}\frac{m}{r^۳}P_۱^۱(\cos\theta)$$

که درآن $m=I\pi a^۲$.

(ب) این نتایج را با القای مغناطیسی دوقطبی نقطه‌ای مغناطیسی در مسئلهٔ ۱۷.۸.۱

(جلد اول) مقایسه کنید. قرار دهید $\mathbf{m}=\mathbf{k}m$.

۱۵.۵.۱۲ یک پوستهٔ کروی، که به‌طور یکنواخت باردار شده است، با سرعت زاویه‌ای ثابت می‌چرخد.

(الف) القای مغناطیسی $\mathbf{B}$ را در خارج از کره، در امتداد محور چرخش محاسبه کنید.

(ب) با استفاده از سری پتانسیل برداری، بخش ۵.۱۲، $\mathbf{A}$ و آنگاه $\mathbf{B}$ را در تمام فضای خارج از کره به‌دست آورید.

۱۶.۵.۱۲ درمدل قطره‌ای هسته، هستهٔ کروی دستخوش تغییرشکلهای کوچکی واقع می‌شود. کره‌ای به‌شعاع $r_\circ$ را در نظر بگیرید که چنان تغییرشکل یافته باشد که معادلهٔ زیر سطح جدید آن‌را مشخص کند

$$r=r_\circ[1+\alpha_2 P_2(\cos\theta)]$$

مساحت کرهٔ تغییرشکل یافته را تا جملاتی از مرتبهٔ α_2^2 پیدا کنید.

راهنمایی.

$$dA=\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{1/2} r\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

پاسخ. $A=4\pi r_\circ^2[1+\frac{4}{5}\alpha_2^2+\theta(\alpha_2^3)]$.

یادآوری. عنصر مساحت dA با توجه به این نکته تعیین می‌شود که عنصر طول ds به‌ازای φ ثابت از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$ds=(r^2 d\theta^2+dr^2)^{1/2}=[r^2+(dr/d\theta)^2]^{1/2}d\theta$$

۱۷.۵.۱۲ یک ذرهٔ هسته‌ای در پتانسیل $V(r,\theta,\varphi)$ قرار دارد. V به‌ازای $0\leqslant r<a$ صفر و به ازای $r>a$ بینهایت است. تابع‌موج $\psi(r,\theta,\varphi)$ که در معادلهٔ موج

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi+V_\circ\psi=E\psi$$

وشرط مرزی

$$\psi(r=a)=0$$

صدق می‌کند، توصیفگر ذره است. نشان دهید که برای آنکه انرژی E کمینه باشد، باید تابع‌موج هیچگونه وابستگی زاویه‌ای نداشته باشد، یعنی $\psi=\psi(r)$.

راهنمایی. سرنخ اصلی در شرط مرزی روی تابع شعاعی نهفته است.

۱۸.۵.۱۲ (الف) زیر-برنامه‌ای برای محاسبهٔ مقدار عددی تابع وابستهٔ لژاندر $P_N^1(x)$ به‌ازای مقادیر معلوم N و x بنویسید.

راهنمایی. می‌توانید از رابطهٔ بازگشتی معادلهٔ (۸۵.۱۲) وشکلهای معلوم P_1^1 و P_2^1 برای تولید P_N^1، به‌ازای $N>۲$، استفاده کنید.

(ب) زیر-برنامه‌ای را که نوشته‌اید از طریق محاسبهٔ $P_N^1(x)$ به ازای $N=۱(۱)۱۰$ و $x=۰٫۰(۰٫۵)۱٫۰$ بیازمایید. این مقادیر عددی را از راه مقایسه با مقادیر معلوم $P_N^1(۰)$ و $P_N^1(۱)$ و نیز با مقادیری از $P_N^1(۰٫۵)$ که در جدول آمده‌اند، بیازمایید.

۱۹.۵.۱۲ پتانسیل برداری مغناطیسی حلقهٔ جریان مثال ۱.۵.۱۲ را محاسبه کنید. نتیجه را به‌ازای $r/a=۱٫۵(۰٫۵)۵٫۰$ و $\theta=۰^\circ(۱۵^\circ)۹۰^\circ$ در جدولی درج کنید. جملات بسط سری، معادلهٔ (۱۳۰.۱۲)، را تا آنجا محاسبه کنید که مقدار مطلق جمله باضریبی برابر $۱۰^۵$ یا بیشتر، ازجملهٔ پیشروکوچکترشود.

یادآوری. بسط مربوط به لژاندر را می‌توان ازمقایسه باجواب انتگرال بیضوی، مسئلهٔ ۴.۸.۵ (جلد اول)، آزمود.

مقدار آزمونی. به‌ازای $r/a=۴٫۰$ و $\theta=۲۰^\circ$، $A_\varphi/\mu_\circ I=۴٫۹۳۹۸\times ۱۰^{-۳}$.

۶.۱۲ هماهنگهای کروی

درهنگام تفکیك متغیرهای: (۱) معادلهٔ لاپلاس؛ (۲) معادلهٔ هلمهولتز یابخش وابسته به‌فضا در معادلهٔ کلاسیکی موج؛ و (۳) معادلهٔ شرودینگر برای میدانهای نیروی مرکزی

$$\nabla^۲\psi+k^۲f(r)\psi=۰ \qquad (۱۳۷.۱۲)$$

وابستگی زاویه‌ای، که به‌طورکامل حاصل عملگر لاپلاسی است، به‌صورت زیراست[۱]

$$\frac{\Phi(\varphi)}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\frac{\Theta(\theta)}{\sin^۲\theta}\frac{d^۲\Phi(\varphi)}{d\varphi^۲}+n(n+۱)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)=۰ \qquad (۱۳۸.۱۲)$$

وابستگی سمتی-تعامد

معادلهٔ سمتی تفکیك‌شده به‌صورت زیراست

$$\frac{۱}{\Phi(\varphi)}\frac{d^۲\Phi(\varphi)}{d\varphi^۲}=-m^۲ \qquad (۱۳۹.۱۲)$$

---

۱. یك‌جواب‌سری معادلهٔ لژاندر، به‌ازای‌ثابت جداسازی $n(n+۱)$، که n عدد درست است، به صورت یك چندجمله‌ای درمی‌آید. درغیر این صورت هردوجواب‌سری‌واگرا می‌شوند (مسئلهٔ ۵.۵.۸).

با جوابهای

$$\Phi(\varphi)=e^{-im\varphi},\ e^{im\varphi} \qquad (۱۴۰.۱۲)$$

که آشکارا درشرط تعامد زیرصدق می‌کنند

$$\int_0^{2\pi} e^{-im_1\varphi}e^{im_2\varphi}d\varphi=2\pi\delta_{m_1,m_2} \qquad (۱۴۱.۱۲)$$

یادآوری می‌شود که ازحاصلضرب $\Phi^*_{m_1}(\varphi)\Phi_{m_2}(\varphi)$ بهره گرفته‌ایم که در آن ستاره(*) برای مشخص کردن تابع همیوغ مختلط به‌کار رفته است. این گزینه اجباری نیست، ولی برای محاسبات کوانتوم مکانیکی مناسبتراست. می‌توانستیم داشته باشیم

$$\Phi=\sin m\varphi,\quad \cos m\varphi \qquad (۱۴۲.۱۲)$$

و شرایط تعامدی را به‌کار بریم که پایهٔ سری فوریه (فصل ۱۴ را ببینید) را تشکیل می‌دهند. در کاربردهایی نظیر توصیف میدان گرانشی یا مغناطیسی زمین، گزینه‌های مرجع عبارت‌اند از: $\sin m\varphi$ و $\cos m\varphi$ (مثال ۱.۶.۱۲).

در الکتروستاتیك و در بسیاری از مسائل فیزیکی دیگر، برای آنکه $\Phi(\varphi)$ تابع تك‌مقداری از زاویهٔ سمتی باشد، m باید عددی درست باشد. این مسئله در حوزهٔ مکانیك کوانتومی بسیار پیچیده‌تراست، زیرا کمیت مشاهده‌پذیری که باید تك‌مقدار باشد، عبارت است از مربع بزرگی تابع‌موج، یعنی $\Phi^*\Phi$. درهرحال می‌توان نشان دادکه بازهم m باید عدد درستی باشد. با پانوشت بخش ۳.۸ مقایسه کنید.

تابع

$$\Phi_m=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi} \qquad (۱۴۳.۱۲)$$

به‌اعتبار معادلهٔ (۱۴۱.۱۲)، نسبت به‌انتگرالگیری روی زاویهٔ‌سمتی φ، متعامدبهنجار است.

وابستگی زاویهٔ قطبی

با جداکردن وابستگی سمتی، وابستگی زاویهٔ قطبی (θ)، به‌معادلهٔ وابستهٔ لژاندر (۸۰.۱۲) منجر می‌شود که توابع وابستهٔ لژاندر در آن صدق می‌کنند؛ یعنی $\Theta(\theta)=P_n^m(\cos\theta)$. برای آنکه مقادیرمنفی m رانیز منظورکرده باشیم، درتعریف $P_n^m(\cos\theta)$، ازفرمول رودریگز درمعادلهٔ (۶۵.۱۲) بهره می‌گیریم. درنتیجه

$$P_n^m(\cos\theta)=\frac{1}{2^n n!}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}(x^2-1)^n,\quad -n\leqslant m\leqslant n \qquad (۱۴۴.۱۲)$$

$P_n^m(\cos\theta)$ و $P_n^{-m}(\cos\theta)$ به صورتی که در مسئلهٔ ۱.۵.۱۲ مشخص شده به‌هم مربوط

می‌شوند. مزیت این رهیافت درمقایسه با اینکه $P_n^m(\cos\theta)$ را صرفاً به‌ازای $0 \leqslant m \leqslant n$ تعریف و قرارداد کنیم که $P_n^{-m} = P_n^m$، این است که روابطی بازگشتی که به ازای $0 \leqslant m \leqslant n$ صادق‌اند، به‌ازای $-n \leqslant m \leqslant 0$ نیز برقرارخواهند بود.

اگر تابع وابستهٔ لژاندر را به‌کمك معادلهٔ(۱۵۳.۱۲) بهنجار کنیم، تابع متعامد زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\mathcal{P}_n^m(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\; P_n^m(\cos\theta), \quad -n \leqslant m \leqslant n$$

(۱۴۵.۱۲)

هماهنگهای کروی

تابع $\Phi_m(\varphi)$ [معادلهٔ (۱۴۳.۱۲)] نسبت به‌زاویهٔ سمتی φ متعامدبهنجار است، در حالی‌که تابع $\mathcal{P}_n^m(\cos\theta)$ [معادلهٔ(۱۴۵.۱۲)] نسبت به‌زاویهٔ قطبی θ متعامدبهنجاراست. حاصلضرب این‌دو را درنظرمی‌گیریم و تابع زیر را تعریف می‌کنیم

$$Y_n^m(\theta, \varphi) \equiv (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\; P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (۱۴۶.۱۲)$$

به‌این ترتیب توابعی‌از دو زاویه(با دوشاخص‌پایین) به‌دست آورده‌ایم که‌روی سطح کروی، متعامدبهنجار ند. این کمیتهای $Y_n^m(\theta, \varphi)$ هماهنگهای کروی به‌شمار می‌آیند. انتگرال تعامد کامل به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} Y_{n_1}^{m_1 *}(\theta, \varphi) Y_{n_2}^{m_2}(\theta, \varphi)\, \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \delta_{n_1, n_2}\delta_{m_1, m_2}$$

(۱۴۷.۱۲)

به‌جاست‌که دربارهٔ کمیت اضافی $(-1)^m$ که در معادلهٔ $Y_n^m(\theta, \varphi)$ آمده است، توضیحی‌بدهیم. ازآنجاکه معادلهٔ(۱۳۷.۱۲) خطی و همگن است، روشن است‌که افزودن این‌ضریب کاملا مجازخواهدبود. وجوداین‌ضریب ضروری‌نیست، ولی دربعضی‌ازمحاسبات کوانتوم مکانیکی، به ویژه درنظریهٔ کوانتومی تکانهٔ زاویه‌ای (بخش ۷.۱۲)، کاملا مناسب است. عامل $(-1)^m$ یك ضریب فاز است، که آن را غالباً به احترام کوندون و شورتلی (مؤلفان یك‌کتاب درسی دربارهٔ طیف‌نمایی اتمی)، ضریب فاز کوندون-شورتلی می‌نامند. اثراین $(-1)^m$ درمعادلهٔ (۱۴۶.۱۲) و $(-1)^m$ در معادلهٔ (۸۱.۱۲ الف) برای $P_n^{-m}(\cos\theta)$، این‌است‌که یك تغییر تناوبی درعلامت هماهنگهای کروی با m مثبت وارد می‌کند. این مطلب در جدول ۴.۱۲ نشان داده شده است.

جدول ۴.۱۲ هماهنگهای کروی (فاز کوندون-شورتلی).

$$Y_0^0(\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_1^1(\theta,\varphi)=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi}$$

$$Y_1^0(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^{-1}(\theta,\varphi)=+\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi}$$

$$Y_2^2(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{5}{96\pi}}3\sin^2\theta e^{2i\varphi}$$

$$Y_2^1(\theta,\varphi)=-\sqrt{\frac{5}{24\pi}}3\sin\theta\cos\theta\, e^{i\varphi}$$

$$Y_2^0(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\right)$$

$$Y_2^{-1}(\theta,\varphi)=+\sqrt{\frac{5}{24\pi}}3\sin\theta\cos\theta e^{-i\varphi}$$

$$Y_2^{-2}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{5}{96\pi}}3\sin^2\theta e^{-2i\varphi}$$

نام "هماهنگهای کروی" را به‌این دلیل روی توابع $Y_n^m(\theta,\varphi)$ نهاده‌اند‌که اولا این توابع روی سطح یك‌کره تعریف می‌شوند که در آن θ زاویهٔ قطبی و φ زاویهٔ سمتی است. واژهٔ "هماهنگ" به این علت به‌کار می‌رود‌که جوابهای معادلهٔ لاپلاس را توابع هماهنگ می‌نامند و $Y_n^m(\theta,\varphi)$، جزء زاویه‌ای چنین جوابی‌است.

معادلهٔ (۱۳۸.۱۲) درچارچوب مکانیك‌کوانتومی، به‌یك‌معادلهٔ تکانهٔ زاویه‌ای‌مداری تبدیل‌می‌شود وجواب $Y_L^M(\theta,\varphi)$ (L به‌جای n و M به‌جای m نشسته‌است) یك‌ویژه‌تابع تکانهٔ زاویه‌ای است: L عددکوانتومی تکانهٔ زاویه‌ای و M تصویر L در راستای z است. این روابط به‌طورمشروح دربخش ۷.۱۲ توضیح داده شده‌اند.

سری لاپلاس، قضیهٔ اساسی بسط

اهمیت هماهنگهای کروی، تا حدودی به خاصیت تمامیت آنها، که یکی از پیامدهای شکل اشتورم-لیوویلی معادلهٔ لاپلاس است، مربوط می‌شود. دراین مورد، مفهوم این خاصیت آن است که هر تابع $f(\theta, \varphi)$ (با خاصیتهای پیوستگی کافی) راکه روی سطح کره محاسبه شده باشد، می‌توان در یک سری دوگانه از هماهنگهای کروی که به‌طور یکنواخت همگرا باشند، بسط داد (سری لاپلاس).[1]

$$f(\theta, \varphi)=\sum_{m,n} a_{mn} Y_n^m(\theta, \varphi) \qquad (۱۴۸.۱۲)$$

اگر $f(\theta, \varphi)$ معلوم باشد، ضرایب را می‌توان بی درنگ با بهره‌گیری از انتگرال تعامد پیداکرد. در چارچوب نظریهٔ فضاهای برداری خطی، تمامیت هماهنگهای کروی از قضیهٔ وایرشتراوس نتیجه می‌شود.

مثال ۱.۶.۱۲ سری لاپلاس—میدانهای گرانی

میدانهای گرانی زمین، ماه، ومریخ به‌کمک یک‌سری لاپلاس با ویژه‌تابعهای حقیقی به‌صورت زیر توصیف شده‌است

$$U(r, \theta, \varphi)=\frac{GM}{R}\left[\frac{R}{r}-\sum_{n=2}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\left\{C_{nm}Y_{mn}^{e}(\theta, \varphi)+S_{nm}Y_{mn}^{o}(\theta, \varphi)\right\}\right]$$

(۱۴۸.۱۲ الف)

M در اینجا جرم جسم و R شعاع استوایی است. توابع حقیقی Y_{mn}^{e} و Y_{mn}^{o} بنابر تعریف عبارت‌اند از

$$Y_{mn}^{e}(\theta, \varphi)=P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi$$

$$Y_{mn}^{o}(\theta, \varphi)=P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi$$

دراین نوع کاربردها، صورتهای مثلثاتی حقیقی $Y_L^M(\theta, \varphi)$ به صورتهای نمایی با نمای موهومی ترجیح داده‌می‌شوند. مقادیر عددی حاصل از اندازه‌گیریهای ماهواره‌ای درجدول ۵.۱۲ آمده‌اند.

---

۱. برای اثبات این قضیهٔ اساسی به‌فصل هفتم کتابی بامشخصات زیرمراجعه کنید
The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics, E. W. Hobson, New York: Chelsea (1955).
اگر $f(\theta, \varphi)$ ناپیوسته باشد، بازهم ممکن‌است همگرایی درمیانگین داشته باشیم (بخش ۴.۹).

جدول ۵.۱۲ ضرایب میدان‌گرانی، معادلهٔ (۱۴۸.۱۲الف).

	زمین	ماه	مریخ
$C_{۲۰}$	$۱٫۰۸۳ \times ۱۰^{-۳}$	$(۰٫۲۰۰ \pm ۰٫۰۰۲) \times ۱۰^{-۳}$	$(۱٫۹۶ \pm ۰٫۰۱) \times ۱۰^{-۳}$
$C_{۲۲}$	$۰٫۱۶ \times ۱۰^{-۵}$	$(۲٫۴ \pm ۰٫۵) \times ۱۰^{-۵}$	$(-۵ \pm ۱) \times ۱۰^{-۵}$
$S_{۲۲}$	$-۰٫۰۹ \times ۱۰^{-۵}$	$(۰٫۵ \pm ۰٫۶) \times ۱۰^{-۵}$	$(۳ \pm ۱) \times ۱۰^{-۵}$

$C_{۲۰}$ نمایانگر یك برجستگی استوایی است، درحالی که $C_{۲۲}$ و $S_{۲۲}$ وابستگی سمتی میدان گرانشی را نمایش می‌دهند.

مسائل

۱.۶.۱۲ نشان دهید که پاریتهٔ $Y_L^M(\theta, \varphi)$ برابر $(-۱)^L$ است. به‌عدم حضور هر نوع وابستگی به M توجه کنید.

راهنمایی. برای عملکرد پاریته درمختصات قطبی کروی به‌بخش ۵.۲، **جلد اول**، و پانوشتی دربخش ۲.۱۲ رجوع کنید.

۲.۶.۱۲ ثابت کنید که

$$Y_L^M(۰, \varphi) = \left(\frac{۲L+۱}{۴\pi}\right)^{۱/۲} \delta_{M۰}$$

۳.۶.۱۲ در نظریهٔ برانگیزش کولنی هسته با $Y_L^M(\pi/۲, ۰)$ روبه‌رو می‌شویم. نشان دهید که

$$Y_L^M\left(\frac{\pi}{۲}, ۰\right) = \begin{cases} \left(\frac{۲L+۱}{۴\pi}\right)^{۱/۲} \frac{[(L-M)!(L+M)!]^{۱/۲}}{(L-M)!!\,(L+M)!!}(-۱)^{(L+M)/۲} & \text{به‌ازای } L+M \text{ زوج} \\ ۰ & \text{به‌ازای } L+M \text{ فرد} \end{cases}$$

دراینجا

$$(۲n)!! = ۲n(۲n-۲)\ldots \times ۶ \times ۴ \times ۲$$

$$(۲n+۱)!! = (۲n+۱)(۲n-۱)\ldots \times ۵ \times ۳ \times ۱$$

۴.۶.۱۲ (الف)عناصر $x_i x_j$ تانسور گشتاور چارقطبی را به‌صورت ترکیبی خطی از هماهنگهای کروی $Y_۲^m$ (و $Y_۰^۰$) مشخص کنید.

یادآوری. تانسور $x_i x_j$ تحویل‌پذیر است. $Y_۰^۰$ وجود یك مؤلفهٔ اسکالر را نشان می‌دهد.

(ب) تانسور گشتاور چارقطبی معمولا بنابر تعریف عبارت است از

$$Q_{ij}=\int(۳x_ix_j-r^۲\delta_{ij})\rho(\mathbf{r})d\tau$$

که درآن $\rho(\mathbf{r})$ چگالی بار است. مؤلفه‌های $(۳x_ix_j-r^۲\delta_{ij})$ را برحسب $r^۲Y_۲^M$ مشخص کنید.

(ج) معنای جملهٔ $-r^۲\delta_{ij}$ چیست؟

راهنمایی. با بخش ۴.۳ (جلد اول) مقایسه کنید.

۵.۶.۱۲ توابع سمتی متعامد، نمایش مفیدی برای تابع دلتای دیراك ارائه می‌کنند. نشان دهید که

$$\delta(\varphi_۱-\varphi_۲)=\frac{۱}{۲\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp[im(\varphi_۱-\varphi_۲)]$$

۶.۶.۱۲ رابطهٔ بستاری هماهنگهای کروی

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}Y_l^m(\theta_۱,\varphi_۱)Y_l^{m*}(\theta_۲,\varphi_۲)=\frac{۱}{\sin\theta_۱}\delta(\theta_۱-\theta_۲)\delta(\varphi_۱-\varphi_۲)$$

$$=\delta(\cos\theta_۱-\cos\theta_۲)\delta(\varphi_۱-\varphi_۲)$$

را استخراج کنید.

۷.۶.۱۲ درمکانیك کوانتومی، عملگرهای تکانهٔ زاویه‌ای $L_x\pm iL_y$ ازروابط زیر به‌دست می‌آیند

$$L_x+iL_y=e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$L_x-iL_y=-e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

نشان دهید

(الف)

$$(L_x+iL_y)Y_L^M(\theta,\varphi)=+\sqrt{(L-M)(L+M+۱)}\,Y_L^{M+۱}(\theta,\varphi)$$

(ب)

$$(L_x-iL_y)Y_L^M(\theta,\varphi)=+\sqrt{(L+M)(L-M+۱)}\,Y_L^{M-۱}(\theta,\varphi)$$

۸.۶.۱۲ با درنظر گرفتن $L_\pm$ به‌صورت زیر

$$L_{\pm}=L_x \pm iL_y=\pm e^{\pm i\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\pm i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]$$

نشان دهید

(الف)
$$Y_l^m=\sqrt{\frac{(l+m)!}{(۲l)!(l-m)!}}\,(L_-)^{l-m}Y_l^l$$

(ب)
$$Y_l^m=\sqrt{\frac{(l-m)!}{(۲l)!(l+m)!}}\,(L_+)^{l+m}Y_l^{-l}$$

۹.۶.۱۴ در برخی شرایط بهتر است که به‌جای عبارت نمایی با نمای موهومی در هماهنگ کروی، سینوس یا کسینوس به‌کار ببریم. مورس و فشباخ توابع زیر را تعریف می‌کنند

$$Y_{mn}^e=P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi$$

$$Y_{mn}^o=P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi$$

که در آن

$$\int_0^{۲\pi}\int_0^{\pi}[Y_{mn}^{e\,\text{یا}\,o}(\theta,\varphi)]^۲\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=\begin{cases}\dfrac{۱\pi}{۲(۲n+۱)}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}, & n=۱,۲,۳,\cdots\\ ۴\pi,\quad n=0 & (\text{وجود ندارد } Y_{00}^o)\end{cases}$$

این هماهنگهای کروی را غالباً برحسب نقش نواحی‌مثبت ومنفی آنها بر روی سطح یك‌کره، نامگذاری می‌کنند: به‌ازای $m=0$، هماهنگهای منطقه‌ای، به‌ازای $m=n$، هماهنگهای قطاعی، و به‌ازای $0<m<n$، هماهنگهای‌مقطعی. درمورد Y_{mn}^e، $n=۴$ و $m=0,۲,۴$؛ نواحیی راکه در آنها هماهنگ کروی مثبت است، بر روی نمودار یك نیمکره نشان دهید (برای هر هماهنگ کروی نمودار جداگانه‌ای رسم کنید).

۱۰.۶.۱۴ تابع $f(r,\theta,\varphi)$ را می‌توان به‌صورت سری لاپلاس، به‌قرار زیر نمایش داد

$$f(r,\theta,\varphi)=\sum_{l,m}a_{lm}r^lY_l^m(\theta,\varphi)$$

میانگین روی یك‌کره را (که مرکزش درمبدأ است) با نماد کره$\langle\ \rangle$ بنمایانید ونشان‌دهید

$$\langle f(r,\theta,\varphi)\rangle_{\text{کره}}=f(0,0,0)$$

۷.۱۲ تکانهٔ زاویه‌ای وعملگرهای نردبانی

تکانهٔ زاویه‌ای مداری

در بخش ۴.۱، برای معرفی ضرب خارجی، با مفهوم کلاسیکی تکانهٔزاویه‌ای $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ آشناشدیم. به‌پیروی ازنمایش‌متداول مکانیك‌کوانتومی شرودینگر به‌جای تکانهٔ‌خطی‌کلاسیکی $\mathbf{p}$، عملگر $-i\nabla$ را می‌نشانیم. عملگر کوانتوم‌مکانیکی تکانهٔ زاویه‌ای چنین می‌شود[1]

$$\mathbf{L}_{QM}=-i\mathbf{r}\times\nabla \tag{۱۴۹.۱۲}$$

از این رابطه، در بخشهای ۸.۱، ۹.۱، و ۴.۲، بارها برای نمایش عملگرهای دیفرانسیلی برداری بهره برده‌ایم. به‌اتکای مسئلهٔ ۶.۸.۱ می‌دانیم که مؤلفه‌های تکانهٔ زاویه‌ای در رابطهٔ جابه‌جایی زیرصدق می‌کنند

$$[L_i, L_j]=i\varepsilon_{ijk}L_k \tag{۱۵۰.۱۲}$$

ε_{ijk}، نماد لوی‌ـچیویتای مذکور دربخش ۴.۳ است. دراین رابطه یك مجموعیابی روی k به‌عمل آمده است.

باتوجه به‌مسائل ۱۲.۵.۲ و ۱۳.۵.۲، پی‌می‌بریم که درمختصات قطبی‌کروی‌داریم

$$L_z=-i\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{۱۵۱.۱۲}$$

ازاین‌رو

$$L_zY_L^M(\theta,\varphi)=MY_L^M(\theta,\varphi) \tag{۱۵۲.۱۲}$$

عملگردیفرانسیلی متناظر با مجذور تکانهٔ زاویه‌ای را به‌این قرار

$$\mathbf{L}^2=\mathbf{L}.\mathbf{L}=L_x^2+L_y^2+L_z^2 \tag{۱۵۳.۱۲}$$

می‌توان ازرابطهٔ زیر به‌دست آورد

$$\mathbf{L}.\mathbf{L}=-(\mathbf{r}\times\nabla).(\mathbf{r}\times\nabla) \tag{۱۵۴.۱۲}$$

این‌کار مبحث مسائل ۹.۹.۱ و ۱۷.۵.۲ (ب) را تشکیل می‌دهد. از این مسائل پی می‌بریم که $\mathbf{L}.\mathbf{L}$ به‌صورت زیرروی یك‌هماهنگ‌کروی عمل می‌کند[2]

---

۱. برای سادگی، $\hbar$ راحذف کرده‌ایم. یعنی، تکانهٔ‌زاویه‌ای برحسب‌واحد $\hbar$ اندازه‌گرفته‌می‌شود.

۲. علاوه‌براین معادلات ویژه‌مقداری، در بخشهای ۱۰.۴ و ۱۲.۴ نیز رابطهٔ $\mathbf{L}$ با چرخش دستگاههای مختصات وچرخش توابع بررسی شده است.

$$\mathbf{L}.\mathbf{L}Y_L^M(\theta,\varphi) = -\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}Y_L^M(\theta,\varphi)$$
(۱۵۵.۱۲)

یا

$$\mathbf{L}.\mathbf{L}Y_L^M(\theta,\varphi) = L(L+1)Y_L^M(\theta,\varphi) \qquad (۱۵۶.۱۲)$$

این همان مسئلهٔ ۱.۳.۸ است.

معادلهٔ (۱۵۰.۱۲) روابط جابه‌جایی اصلی مؤلفه‌های تکانهٔزاویه‌ای کوانتوم‌مکانیکی را به‌دست می‌دهد. درچارچوب مکانیك‌کوانتومی، عملگر تکانهٔزاویه‌ای درواقع بااین‌روابط جابه‌جایی تعریف می‌شود. ازمعادلهٔ(۱۵۲.۱۲) روشن‌می‌شودکه هماهنگ‌کروی$Y_L^M(\theta,\varphi)$ یك ویژه‌تابع L_z با ویژه‌مقدار M به‌شمارمی‌آید. سرانجام، ازمعادلهٔ (۱۵۶.۱۲)پیداست که $Y_L^M(\theta,\varphi)$ ویژه‌تابع $\mathbf{L}^2$ نیزهست و ویژه‌مقدار متناظرش عبارت است‌از $L(L+1)$.

رهیافت عملگری کلی

بررسی ما تااینجا، جدا از جایگزینی $-i\nabla$ به‌جای $\mathbf{p}$، درچارچوب ریاضیات کلاسیکی صورت گرفته است. اکنون بررسی خود را، به‌شیوهٔ نوعیتری در کوانتوم مکانیکی، ازسر می‌گیریم.

۱. عملگر هرمیتی $\mathbf{J}$ را درنظر می‌گیریم که مؤلفه‌هایش در رابطه‌های‌جابه‌جایی زیر صدق می‌کنند

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k \qquad (۱۵۷.۱۲)$$

J از هر نظر دیگر اختیاری است.

۲. فرض می‌کنیم که ψ_{JM}، به‌طور همزمان، ویژه‌تابع (یا ویژه‌بردار) بهنجار J_z با ویژه‌مقدار M و ویژه‌تابع $\mathbf{J}^2$ با ویژه‌مقدار $J(J+1)$ باشد[1]

$$J_z\psi_{JM} = M\psi_{JM} \qquad (۱۵۸.۱۲)$$

$$\mathbf{J}^2\psi_{JM} = J(J+1)\psi_{JM} \qquad (۱۵۹.۱۲)$$

ψ_{JM} ازهرنظر دیگر نامعلوم فرض می‌شود.

ابتدا این نکته را بررسی می‌کنیم که به چه نتیجه‌گیری‌کلی می‌توانیم برسیم. سپس عملگرهای‌عام J_x، J_y، و J_z را به‌عملگرهای تکانهٔ زاویه‌ای مدار‌ی L_x، L_y، و L_z تبدیل می‌کنیم. دراین‌صورت ψ_{JM} به‌تابعی‌اززاویه‌های مختصات قطبی کروی، θ و φ تبدیل‌خواهد

---

۱. اینکه ψ_{JM} ویژه‌تابع هردو عملگر J_z و $\mathbf{J}^2$ است، یکی از پیامدهای رابطهٔ $[J_z, \mathbf{J}^2] = 0$ محسوب می‌شود.

شد. شکل آن‌را، برحسب چندجمله‌ایهای لژاندر وعملگرهای دیفرانسیلی، استخراج‌خواهیم کرد و نشان خواهیم داد که ψ_{JM} با هماهنگ کروی $Y_J^M(\theta, \varphi)$ متحد است. این فرایند، عمومیت وتوانایی شگردهای عملگری و به‌ویژه استفاده از عملگرهای نردبانی را به‌نمایش می‌گذارد.[1] همچنین‌مبنای‌ضریب فاز کوندون‌ـشورتلی، یعنی کمیت $(-1)^M$ که با هماهنگهای کروی دارای M مثبت همراه می‌شود، روشن خواهد شد.

عملگرهای نردبانی بنا برتعریف عبارت‌اند از

$$J_+ = J_x + iJ_y \qquad (۱۶۰.۱۲)$$
$$J_- = J_x - iJ_y$$

$\mathbf{J}^2$ را می‌توان برحسب این‌عملگرها به‌صورت زیر بازنویسی کرد

$$\mathbf{J}^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2 \qquad (۱۶۱.۱۲)$$

با استفاده ازروابط بازگشتی، معادلهٔ (۱۵۷.۱۲)، خواهیم داشت

$$[J_z, J_+] = +J_+, \quad [J_z, J_-] = -J_-, \quad [J_+, J_-] = 2J_z \qquad (۱۶۲.۱۲)$$

ازآنجاکه J_+ با $\mathbf{J}^2$ جابه‌جا می‌شود (مسئلهٔ ۱.۷.۱۲)، داریم

$$\mathbf{J}^2(J_+\psi_{JM}) = J_+(\mathbf{J}^2\psi_{JM}) = J(J+1)(J_+\psi_{JM}) \qquad (۱۶۳.۱۲)$$

ازاین‌رو $J_+\psi_{JM}$ هم یك‌ویژه‌تابع $\mathbf{J}^2$ با ویژه‌مقدار $J(J+1)$ است. برای $J_-\psi_{JM}$ نیز به‌همین‌ترتیب است. ولی‌از معادلهٔ (۱۶۲.۱۲) داریم

$$J_zJ_+ = J_+(J_z+1) \qquad (۱۶۴.۱۲)$$

یا

$$J_z(J_+\psi_{JM}) = J_+(J_z+1)\psi_{JM} = (M+1)(J_+\psi_{JM}) \qquad (۱۶۵.۱۲)$$

بنابراین $J_+\psi_{JM}$ هنوزهم یکی‌از ویژه‌تابعهای J_z است‌ولی دراینجا باویژه‌مقدار $M+1$. J_+ ویژه‌مقدار را به‌اندازهٔ یك ۱افزایش داده‌است، ازاین‌رو آن‌را غالباً یك عملگر فزاینده می‌نامند. به همین ترتیب J_- ویژه‌مقدار را به اندازهٔ یك کاهش می‌دهد و آن را غالباً عملگر کاهنده می‌نامند.

ψ_{JM} نسبت به‌چرخشهای ($\mathbf{J}^2, J_z, J_+, J_-$)، یك زیرفضای ناوردای تحویل‌ناپذیر

---

۱. عملگرهای نردبانی را به‌سایرتوابع ریاضی نیز می‌توان تعمیم‌داد. با بخش ۱.۱۳ دربارهٔ چندجمله‌ایهای هرمیت مقایسه‌کنید.

تشکیل می‌دهد؛ M تغییر می‌کند و J ثابت است. در بخش ۱۰.۴، این‌ویژگی به‌صورت گروه چرخشی که روی هماهنگهای کروی Y_l^m عمل می‌کند، جلوه می‌کند؛ m تغییر می‌کند و l ثابت می‌ماند.

اینک ببینیم اینکه ابتدا J_+ وسپس J_- روی ψ_{JM} عمل کنند چه تأثیری دارد؟ پاسخ این پرسش با مشخص کردن J_-J_+ (و J_+J_-) برحسب $\mathbf{J}^2$ و J_z به‌دست می‌آید؛ با عنایت به‌معادلات (۱۵۷.۱۲) و (۱۶۱.۱۲)، داریم

$$J_-J_+=\mathbf{J}^2-J_z(J_z+1)$$
$$J_+J_-=\mathbf{J}^2-J_z(J_z-1) \tag{۱۶۶.۱۲}$$

آنگاه با استفاده ازمعادلات (۱۵۸.۱۲)، (۱۵۹.۱۲) و (۱۶۶.۱۲)، داریم

$$J_-J_+\psi_{JM}=[J(J+1)-M(M+1)]\psi_{JM}=(J-M)(J+M+1)\psi_{JM}$$
$$J_+J_-\psi_{JM}=[J(J+1)-M(M-1)]\psi_{JM}=(J+M)(J-M+1)\psi_{JM} \tag{۱۶۷.۱۲}$$

حال در ψ_{JM}^* ضرب کنید و (روی‌تمام زوایای مربوط به‌هماهنگهای کروی) انتگرال بگیرید. فرض شده‌است که ψ_{JM} بهنجار باشد، لذا

$$\int\psi_{JM}^*J_-J_+\psi_{JM}d\tau=(J-M)(J+M+1)\geqslant 0$$
$$\int\psi_{JM}^*J_+J_-\psi_{JM}d\tau=(J+M)(J-M+1)\geqslant 0 \tag{۱۶۸.۱۲}$$

جزء $\geqslant 0$ راباید توجیه کرد. J_+ و J_- به‌زبان مکانیك کوانتومی‌همیوغ هرمیتی‌یکدیگرند[1]

$$J_+^\dagger=J_-,\qquad J_-^\dagger=J_+ \tag{۱۶۹.۱۲}$$

به‌نمونه‌هایی ازاین عملگرها ازطریق ماتریسهای مسائل ۱۳.۲.۴ (اسپین ۱/۲)، ۱۵.۲.۴ (اسپین ۱)، و ۱۸.۲.۴ (اسپین ۳/۲) دست می‌یابیم. بنابراین

$$J_-J_+=J_+^\dagger J_+,\quad J_+J_-=J_-^\dagger J_- \tag{۱۷۰.۱۲}$$

و مقادیر انتظاری، معادلهٔ (۱۶۸.۱۲)، باید مثبت یا صفر باشند.[2] شکل صریح عملگرهای

---

۱. عمل محاسبهٔ همیوغ هرمیتی یا الحاقی برای ماتریسها دربخش ۵.۴، وبرای عملگرها به طورکلی دربخش ۱.۹ تعریف شده‌است.

۲. بحث جامعی دربارهٔ عملگرهای الحاقی و فضای هیلبرت در فصل ۷ کتابی با مشخصات زیر آمده است:

Quantum Mechanics, A. Messiah, New York: Wiley (1961).

نردبانی تکانهٔ زاویه‌ای مداری، L_+ و L_-، درمسائل ۱۴.۵.۲ و۷.۶.۱۲ ارائه شده‌است. خواننده می‌تواند نشان دهد که (مسئلهٔ ۲.۷.۱۲)

$$\int Y_L^{M*} L_-(L_+Y_L^M)\,d\Omega = \int (L_+Y_L^M)^*(L_+Y_L^M)d\Omega \qquad (۱۷۱.۱۲)$$

این نوعی انتگرالگیری جزء‌به‌جزء است (که در آن علامت منفی اضافی در L_- توسط علامت منفی موجود درفرمول انتگرالگیری جزء‌به‌جزء حذف می‌شود). درواقع این تساوی را می‌توان با محاسبهٔ هر دو طرف معادلهٔ (۱۷۱.۱۲) و به‌کمك مسئلهٔ ۷.۶.۱۲ به آسانی اثبات کرد.

از سمت راست معادلهٔ (۱۷۱.۱۲) روشن می‌شود که نامساوی $\geqslant ۰$ درمعادلهٔ (۱۶۸.۱۲) درست است. حال‌که $\geqslant ۰$ توجیه شد، M باید به گسترهٔ $-J \leqslant M \leqslant J$ محدود باشد.

ازآنجاکه J_+ ویژه‌مقدار M رابه $M+۱$ افزایش می‌دهد، ویژه‌تابع حاصل رابا $\psi_{J,M+۱}$ مشخص می‌کنیم. ضریب بهنجارش به‌کمك معادلهٔ (۱۶۸.۱۲) به‌صورت زیر به دست می‌آید

$$J_+\psi_{JM} = \sqrt{(J-M)(J+M+۱)}\,\psi_{J,M+۱} \qquad (۱۷۲.۱۲)$$

که در آن ریشهٔ دوم مثبت‌را درنظرگرفته‌ایم وهیچ ضریب فازی به‌معادله وارد نشده است. با همین استدلال داریم

$$J_-\psi_{JM} = \sqrt{(J+M)(J-M+۱)}\,\psi_{J,M-۱} \qquad (۱۷۳.۱۲)$$

هم $\psi_{J,M+۱}$ وهم $\psi_{J,M-۱}$ بهنجارشدهٔ به‌واحد باقی می‌مانند. محاسبهٔ صریح این نتایج (با استفاده ازعملگرهای نردبانی معلوم و هماهنگهای‌کروی معلوم) موضوع مسئلهٔ ۷.۶.۱۲ را تشکیل می‌دهد. در معادلات (۱۷۲.۱۲) و (۱۷۳.۱۲) ریشهٔ دوم مثبت منظور شده است. لذا فازنسبی $\psi_{J,M\pm۱}$ و ψ_{JM} به‌کمك عملگرهای نردبانی تعیین می‌شوند.

به‌کاربردن پی‌درپی J_+ به‌نتیجهٔ زیرمنجر می‌شود

$$(J_+)^n\psi_{JM} = C_{JMn}\psi_{J,M+n} \qquad (۱۷۴.۱۲)$$

این عمل باید در $M'=M+n=J$ متوقف شود، درغیراین صورت به‌یك M' بزرگتر از J خواهیم رسید وبا نتیجهٔ حاصل از معادلهٔ (۱۶۸.۱۲)، یعنی $M \leqslant J$، تناقض پیدا خواهدشد. به‌عبارت‌دیگر، می‌توان گفت که $M_{\max}$ هرچه‌باشد، ازآنجاکه $J_+\psi_{JM_{\max}}=۰$، سمت چپ معادلهٔ (۱۷۲.۱۲) صفراست، وبنابراین سمت راست صفرخواهد بود. ازاینجا می‌رسیم به $M_{\max}=J$. به‌همین ترتیب، عبارت

$$(J_-)^n\psi_{JM}=D_{JMn}\psi_{J,M-n} \qquad (۱۷۵.۱۲)$$

باید به $M''=M-n=-J$ ختم شود. اولاً، ازاینجا نتیجه می‌گیریم

$$J_+\psi_{J,J}=0, \qquad J_-\psi_{J,-J}=0 \qquad (۱۷۶.۱۲)$$

ثانیاً، باتوجه به‌اینکه M از $+J$ تا $-J$ باگامهای واحد تغییرمی‌کند، $2J$ باید یك‌عدد درست باشد. پس J یا یك‌عدد درست است و یا یك عدد نیم‌درست فرد. به‌طوری‌که بعداً خواهیم دید، تکانهٔزاویه‌ای مداری توسط اعداد درست J توصیف می‌شود. ولی برای‌اسپین بعضی از ذرات بنیادی یا بعضی از هسته‌ها، داریم ... ,۵/۲ ,۳/۲ ,۱/۲ $=J$. تکانهٔ زاویه‌ای ما، اساساً به‌عنوان نتیجه‌ای از روابط جابه‌جایی، کوانتیده است.

عملگرهای تکانهٔ زاویه‌ای مداری

حال به‌عملگرهای‌ویژهٔ تکانهٔزاویه‌ای مداری L_x، L_y، وL_z بازمی‌گردیم. معادلهٔ(۱۵۸.۱۲) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$L_z\psi_{LM}(\theta,\varphi)=M\psi_{LM}(\theta,\varphi)$$

شکل دقیق L_z نشان می‌دهدکه $\psi_{LM}(\theta,\varphi)$ دارای‌یك وابستگی‌به φ به‌صورت $e^{iM\varphi}$ است که برای‌آنکه ψ_{LM} تك‌مقدار بماند، M باید عددی درست باشد. واگر M عدد درست است، L هم باید عدد درست باشد.

تعیین وابستگی $\psi_{LM}(\theta,\varphi)$ به θ را دردومرحله انجام‌می‌دهیم: (۱) $\psi_{LL}(\theta,\varphi)$ را تعیین می‌کنیم، و (۲) $\psi_{LM}(\theta,\varphi)$ را برحسب $\psi_{LL}(\theta,\varphi)$ با فازی‌که به‌وسیلهٔ ψ_{LO} ثابت شده، ایجاد می‌کنیم.

قرار دهید

$$\psi_{LM}(\theta,\varphi)=\Theta_{LM}(\theta)e^{iM\varphi} \qquad (۱۷۷.۱۲)$$

از معادلهٔ (۱۷۶.۱۲)، با استفاده از L_+ به‌شکلی‌که در مسائل ۱۴.۵.۲ و ۷.۶.۱۲ آمده است، داریم

$$e^{i(L+1)\varphi}\left[\frac{d}{d\theta}-L\cot\theta\right]\Theta_{LL}(\theta)=0 \qquad (۱۷۸.۱۲)$$

و

$$\psi_{LL}(\theta,\varphi)=c_L\sin^L\theta\, e^{iL\varphi} \qquad (۱۷۹.۱۲)$$

ازطریق بهنجارش، خواهیم داشت

$$c_L^* c_L \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^{2L+1}\theta \, d\theta \, d\varphi = 1 \qquad (۱۸۰.۱۲)$$

انتگرال θ را می‌توان به‌صورت یك‌تابع بتا محاسبه‌کرد (مسئلهٔ ۹.۴.۱۰)، و

$$|c_L| = \sqrt{\frac{(2L+1)!!}{4\pi(2L)!!}} = \frac{\sqrt{(2L)!}}{2^L L!}\sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} \qquad (۱۸۱.۱۲)$$

به‌این ترتیب مرحلهٔ اول کامل‌می‌شود.

برای محاسبهٔ ψ_{LM}، به‌ازای $M \neq \pm L$، به عملگرهای نردبانی بازمی‌گردیم. از معادله‌های (۱۷۲.۱۲) و (۱۷۳.۱۲)، که در آنها J_+ با L_+ و J_- با L_- تعویض‌شده باشد، داریم

$$\psi_{LM}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(L+M)!}{(2L)!(L-M)!}}(L_-)^{L-M}\psi_{LL}(\theta, \varphi)$$

$$(۱۸۲.۱۲)$$

$$\psi_{LM}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(L-M)!}{(2L)!(L+M)!}}(L_+)^{L+M}\psi_{L,-L}(\theta, \varphi)$$

توجه‌کنیدکه بازهم فازهای نسبی ازطریق عملگرهای نردبانی تعیین می‌شوند. عمل L_+ و L_- روی $\Theta_{LM}(\theta)e^{iM\varphi}$ را می‌توان به‌صورت زیرنوشت

$$L_+\Theta_{LM}(\theta)e^{iM\varphi} = e^{i(M+1)\varphi}\left[\frac{d}{d\theta} - M\cot\theta\right]\Theta_{LM}(\theta)$$

$$= -e^{i(M+1)\varphi}\sin^{1+M}\theta \frac{d}{d(\cos\theta)}\sin^{-M}\theta\Theta_{LM}(\theta)$$

$$(۱۸۳.۱۲)$$

$$L_-\Theta_{LM}(\theta)e^{iM\varphi} = -e^{i(M-1)\varphi}\left[\frac{d}{d\theta} + M\cot\theta\right]\Theta_{LM}(\theta)$$

$$= e^{i(M-1)\varphi}\sin^{1-M}\theta \frac{d}{d(\cos\theta)}\sin^{M}\theta\Theta_{LM}(\theta)$$

با nبار تکرار این‌عملیات، می‌رسیم به

$$(L_+)^n\Theta_{LM}(\theta)e^{iM\varphi}=(-1)^n e^{i(M+n)\varphi}\sin^{n+M}\theta\frac{d^n}{d(\cos\theta)^n}\sin^{-M}\theta\Theta_{LM}(\theta)$$

(۱۸۴.۱۲)

$$(L_-)^n\Theta_{LM}(\theta)\,e^{iM\varphi}=e^{i(M-n)\varphi}\sin^{n-M}\theta\,\frac{d^n}{d(\cos\theta^n)}\sin^M\theta\Theta_{LM}(\theta)$$

ازمعادلهٔ (۱۸۲.۱۲) داریم

$$\psi_{LM}(\theta,\varphi)=c_L\sqrt{\frac{(L+M)!}{(2L)!(L-M)!}}e^{iM\varphi}\sin^{-M}\theta\frac{d^{L-M}}{d(\cos\theta)^{L-M}}\sin^{2L}\theta$$

(۱۸۵.۱۲)

وبه‌ازای $M=-L$

$$\psi_{L,-L}(\theta,\varphi)=\frac{c_L}{(2L)!}e^{-iL\varphi}\sin^L\theta\,\frac{d^{2L}}{d(\cos\theta)^{2L}}\sin^{2L}\theta$$

(۱۸۶.۱۲)

$$=(-1)^L c_L\sin^L\theta e^{-iL\varphi}$$

به‌فازمشخصهٔ $(-1)^L$ تابع $\psi_{L,-L}$ نسبت به $\psi_{L,L}$ توجه کنید. این کمیت $(-1)^L$ به‌شکل زیر وارد می‌شود

$$\sin^{2L}\theta=(1-x^2)^L=(-1)^L(x^2-1)^L \qquad (۱۸۷.۱۲)$$

باترکیب معادله‌های (۱۸۲.۱۲)، (۱۸۴.۱۲)، و (۱۸۶.۱۲)، داریم

$$\psi_{LM}(\theta,\varphi)=(-1)^L c_L\sqrt{\frac{(L-M)!}{(2L)!(L+M)!}}(-1)^{L+M}e^{iM\varphi}\sin^M\theta$$

$$\times\frac{d^{L+M}}{d(\cos\theta)^{L+M}}\sin^{2L}\theta \qquad (۱۸۸.۱۲)$$

معادله‌های (۱۸۵.۱۲) و (۱۸۸.۱۲) باعبارت زیر تطبیق می کنند

$$\psi_{L0}(\theta,\varphi)=c_L\frac{1}{\sqrt{(2L)!}}\;\frac{d^L}{(d\cos\theta)^L}\sin^{2L}\theta \qquad (۱۸۹.۱۲)$$

با استفاده ازفرمول رودریگز، معادلهٔ (۶۵.۱۲)، داریم

$$\psi_{L0}(\theta,\varphi)=(-1)^L c_L\frac{2^L L!}{\sqrt{(2L)!}}P_L(\cos\theta)$$

(۱۹۰.۱۲)

$$=(-1)^L\frac{c_L}{|c_L|}\sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}}P_L(\cos\theta)$$

تساوی اخیر ازمعادلهٔ (۱۸۱.۱۲) ناشی‌می‌شود. حال‌این شرط را می‌گذاریم که $\psi_{L0}(0,0)$ حقیقی ومثبت باشد. بنابراین

$$c_L=(-1)^L|c_L|=(-1)^L\frac{\sqrt{(2L)!}}{2^L L!}\sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} \qquad (191.12)$$

با قراردادن $(-1)^L c_L/|c_L|=1$، $\psi_{L0}(\theta,\varphi)$ درمعادلهٔ (۱۹۰.۱۲) را می‌توان با هماهنگ کروی $Y_L^0(\theta,\varphi)$، بخش ۶.۱۲، یکی دانست.

با نشاندن $(-1)^L c_L$ درمعادلهٔ (۱۸۸.۱۲)، داریم

$$\psi_{LM}(\theta,\varphi)=\frac{\sqrt{(2L)!}}{2^L L!}\sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(L-M)!}{(2L)!(L+M)!}}(-1)^{L+M}$$

$$\cdot\, e^{iM\varphi}\sin^M\theta\frac{d^{L+M}}{d(\cos\theta)^{L+M}}\sin^{2L}\theta$$

$$(192.12)$$

$$=\sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(L-M)!}{(L+M)!}}e^{iM\varphi}(-1)^M$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{2^L L!}(1-x^2)^{M/2}\frac{d^{L+M}}{dx^{L+M}}(x^2-1)^L\right\},\ x=\cos\theta,\ M\geqslant 0$$

عبارت درون‌آکولاد همان تابع وابستهٔ لژانداست [معادلهٔ (۱۴۴.۱۲)]، وداریم

$$\psi_{LM}(\theta,\varphi)=Y_L^M(\theta,\varphi)$$

$$(193.12)$$

$$=(-1)^M\sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}\cdot\frac{(L-M)!}{(L+M)!}}\cdot P_L^M(\cos\theta)e^{iM\varphi},\ M\geqslant 0$$

که با بخش ۶.۱۲ کاملا سازگار است. Y_L^M به‌ازای شاخصهای بالایی منفی، با استفاده از معادلهٔ (۸۱.۱۲ الف)، ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$Y_L^{-M}(\theta,\varphi)=(-1)^M Y_L^{M*}(\theta,\varphi) \qquad (194.12)$$

ویژه‌تابعهای تکانهٔ زاویه‌ای، $\psi_{LM}(\theta,\varphi)$، باهماهنگهای‌کروی یکی‌هستند. ضریب فاز $(-1)^M$ با مقادیرمثبت M همراه است ودیده‌می‌شودکه پیامد عملگرهای نردبانی‌است.

این نحوهٔ بررسی هماهنگهای کروی را می‌توان بخشی از جبرلی دانست که به‌نظریهٔ گروهها، بخش ۱۰.۴، مربوط می‌شود.

مسائل

۱۰۷۰۱۲ نشان دهید

(الف) $$[J_+, \mathbf{J}^2] = 0$$

(ب) $$[J_-, \mathbf{J}^2] = 0$$

۲۰۷۰۱۲ بااستفاده ازصورتهای‌معلوم L_+ و L_-(مسائل ۱۴۰۵۰۲ و ۷۰۶۰۱۲)، نشان‌دهید

$$\int Y_L^{M*} L_-(L_+ Y_L^M) d\Omega = \int (L_+ Y_L^M)^* (L_+ Y_L^M) d\Omega$$

۳۰۷۰۱۲ روابط زیررا استخراج‌کنید

(الف) $$\psi_{LM}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(L+M)!}{(2L)!(L-M)!}} (L_-)^{L-M} \psi_{LL}(\theta, \varphi)$$

(ب) $$\psi_{LM}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(L-M)!}{(2L)!(L+M)!}} (L_+)^{L+M} \psi_{L,-L}(\theta, \varphi)$$

۴۰۷۰۱۲ معادله‌های عملگرچندگانهٔ زیررا استخراج کنید

(الف)

$$(L_+)^n \Theta_{LM}(\theta) e^{iM\varphi} = (-1)^n e^{i(M+n)\varphi} \sin^{n+M}\theta \frac{d^n}{d(\cos\theta)^n} \sin^{-M}\theta \Theta_{LM}(\theta)$$

(ب) $$(L_-)^n \Theta_{LM}(\theta) e^{iM\varphi} = e^{i(M-n)\varphi} \sin^{n-M}\theta \frac{d^n}{d(\cos\theta)^n} \sin^M\theta\, \Theta_{LM}(\theta)$$

راهنمایی. ازروش استقرای ریاضی بهره‌بگیرید.

۵۰۷۰۱۲ با استفاده از $(L_-)^n$، نشان دهید

$$Y_L^{-M}(\theta, \varphi) = (-1)^M Y_L^{M*}(\theta, \varphi)$$

۶۰۷۰۱۲ به‌کمك محاسبهٔ صریح تحقیق کنیدکه

(الف) $$L_+ Y_1^0(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\theta\, e^{i\varphi} = \sqrt{2} Y_1^1(\theta, \varphi)$$

(ب) $$L_- Y_1^0(\theta, \varphi) = +\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin\theta\, e^{-i\varphi} = \sqrt{2} Y_1^{-1}(\theta, \varphi)$$

علامتها (فازکوندون-شورتلی) پیامد عملگرهای نردبانی L_+ و L_- هستند.

۸.۱۲ قضیهٔ جمع برای هماهنگهای کروی

اتحاد مثلثاتی

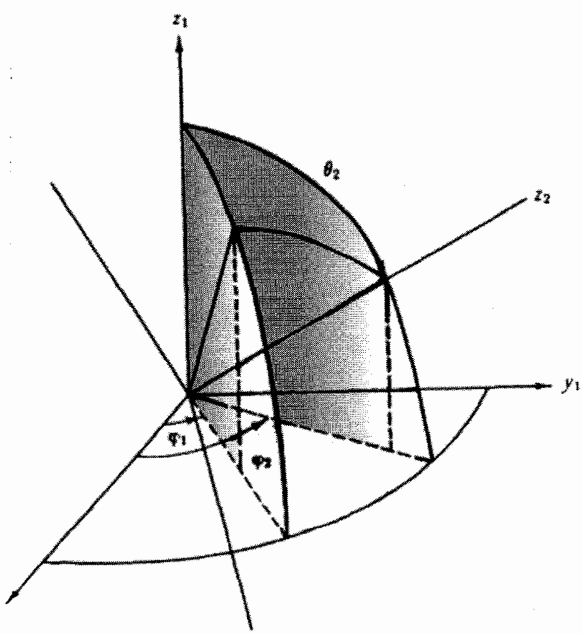
درمبحث زیر (θ_1, φ_1) و (θ_2, φ_2)، دو راستای مختلف‌را دردستگاه مختصات قطبی کروی نمایش می‌دهندکه بایکدیگر زاویهٔ γ می‌سازند (شکل ۱۶.۱۲). این‌زوایا دراتحاد مثلثاتی زیرصدق می‌کنند

$$\cos\gamma = \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad (۱۹۵.۱۲)$$

شاید ساده‌ترین شیوهٔ اثبات این‌اتحاد بهره‌گیری ازروش‌برداری است (با فصل یك مقایسه کنید).

دراین صورت، بنابرقضیهٔ جمع

$$P_n(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^{n} (-1)^m Y_n^m(\theta_1, \varphi_1) Y_n^{-m}(\theta_2, \varphi_2) \qquad (۱۹۶.۱۲)$$



شکل ۱۶.۱۲

یا، به‌عبارت دیگر

$$P_n(\cos\gamma)=\frac{4\pi}{2n+1}\sum_{m=-n}^{n}Y_n^m(\theta_1,\varphi_1)Y_n^{m*}(\theta_2,\varphi_2) \qquad (197.12)$$

(توضیح: ستاره می‌تواند روی هریك ازهماهنگهای کروی بنشیند).
قضیهٔ‌جمع برحسب توابع‌وابستهٔ لژاندرعبارت است‌از

$$P_n(\cos\gamma)=P_n(\cos\theta_1)P_n(\cos\theta_2) + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta_1)P_n^m(\cos\theta_2)\cos m(\varphi_1-\varphi_2) \qquad (198.12)$$

معادلهٔ (۱۹۵.۱۲)، حالت‌خاصی ازمعادلهٔ (۱۹۸.۱۲) است.

استخراج قضیهٔ جمع

اینك معادلهٔ (۱۹۷.۱۲) را استخراج می‌کنیم. فرض‌کنید $g(\theta,\varphi)$ تابعی باشدکه می‌توان آن‌را به‌صورت یك‌سری لاپلاس بسط داد

$$g(\theta_1,\varphi_1)=Y_n^m(\theta_1,\varphi_1) \qquad \text{نسبت به } x_1\text{، } y_1\text{، } z_1$$

$$(199.12)$$

$$=\sum_{m=-n}^{n}a_{nm}Y_n^m(\gamma,\psi) \qquad \text{نسبت به } x_2\text{، } y_2\text{، } z_2$$

انتخاب صفر متعلق به‌زاویهٔ سمتی ψ، عملا نقشی ندارد. به‌ازای $\gamma=0$، داریم

$$g(\theta_1,\varphi_1)|_{\gamma=0}=a_{n0}\left(\frac{2n+1}{4\pi}\right)^{1/2} \qquad (200.12)$$

زیرا $P_n(1)=1$ و $P_n^m(1)=0$ $(m\neq 0)$. معادلهٔ (۱۹۹.۱۲) را در $Y_n^{0*}(\gamma,\psi)$ ضرب می‌کنیم و روی‌کره انتگرال می‌گیریم، خواهیم‌داشت

$$\int g(\theta_1,\varphi_1)Y_n^{0*}(\gamma,\psi)d\Omega_{\gamma,\psi}=a_{n0} \qquad (201.12)$$

حال، با استفاده از معادلهٔ (۱۹۹.۱۲)، می‌توانیم معادلهٔ (۲۰۱.۱۲) را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم

$$\int Y_n^m(\theta_1,\varphi_1)Y_n^{0*}(\gamma,\psi)d\Omega=a_{n0} \qquad (202.12)$$

فرض می‌کنیم‌که بسط $P_n(\cos\gamma)$ نیز مانند معادلهٔ (۱۹۹.۱۲)، به‌صورت زیر باشد

$$P_n(\cos\gamma)=\sum_{m=-n}^{n} b_{nm}Y_n^m(\theta_1,\varphi_1) \qquad (۲۰۳.۱۲)$$

که در آن‌مقادیر b_{nm} مسلماً به θ_2 و φ_2، یعنی به‌سمتگیری محور z_2، وابسته‌خواهندبود. از طریق ضرب کردن در $Y_n^{m*}(\theta_1,\varphi_1)$ وانتگرالگیری نسبت‌به θ_1 و φ_1 روی کره، داریم

$$\int P_n(\cos\gamma)Y_n^{m*}(\theta_1,\varphi_1)d\Omega_{\theta_1,\varphi_1}=b_{nm} \qquad (۲۰۴.۱۲)$$

معادلهٔ (۲۰۴.۱۲) برحسب هماهنگهای کروی به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\left(\frac{4\pi}{2n+1}\right)^{1/2}\int Y_n^0(\gamma,\psi)Y_n^{m*}(\theta_1,\varphi_1)d\Omega=b_{nm} \qquad (۲۰۵.۱۲)$$

توجه داشته‌باشید که شاخصهای پایین مربوط به‌عنصر زاویهٔ فضایی $d\Omega$، حذف شده‌اند. از آنجاکه گسترهٔ انتگرالگیری روی‌کل زاویهٔ فضایی‌است، انتخاب محورقطبی نقشی ندارد. آنگاه درمقایسه بامعادله‌های (۲۰۲.۱۲) و (۲۰۵.۱۲)، داریم

$$\begin{aligned} b_{nm}^* &= a_{n0}\left(\frac{4\pi}{2n+1}\right)^{1/2} \\ &= \frac{4\pi}{2n+1}g(\theta_1,\varphi_1)\big|_{\gamma=0} && \text{به‌دلیل معادلهٔ (۲۰۰.۱۲)} \qquad (۲۰۶.۱۲) \\ &= \frac{4\pi}{2n+1}Y_n^m(\theta_2,\varphi_2) && \text{به‌دلیل معادلهٔ (۱۹۹.۱۲)} \end{aligned}$$

تغییرشاخصهای پایین به‌این‌دلیل رخ می‌دهدکه

$$\left.\begin{aligned}\theta_1&\to\theta_2\\ \varphi_1&\to\varphi_2\end{aligned}\right\} \qquad \text{به‌ازای } \gamma=0$$

هرگاه درمعادلهٔ (۲۰۳.۱۲)بنشانیم، به‌معادلهٔ (۱۹۷.۱۲) می‌رسیم، بدینسان قضیهٔ جمع اثبات می‌شود.

خوانندهٔ‌آشنا بانظریهٔ‌گروهها بابهره‌گیری ازگروه‌چرخشی، برای معادلهٔ(۱۹۷.۱۲) به‌اثبات ارزنده‌تری دست خواهد یافت.[1] این‌اثبات مبحث مسئلهٔ ۱۱.۱۰.۴ را تشکیل داده است.

---

۱. با کتابی با مشخصات زیر مقایسه‌کنید،
Elementary Theory of Angular Momentum, M. E. Rose, New York: Wiley, 1957.

یکی‌ازکاربردهای قضیهٔ جمع درتشکیل تابع گرین مربوط به‌معادلهٔ لاپلاس سه‌بعدی درمختصات قطبی کروی‌است. اگر چشمه روی‌محور قطبی‌ودر نقطهٔ $(r=a, \theta=0, \varphi=0)$ واقع باشد، آنگاه ازمعادلهٔ (۴.۱۲) داریم

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{k}a|}=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\gamma)\frac{a^n}{r^{n+1}}, \quad r>a$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\gamma)\frac{r^n}{a^{n+1}}, \quad r<a \tag{۲۰۷.۱۲}$$

دستگاه مختصات را می‌چرخانیم تاچشمه در (a, θ_2, φ_2)، ونقطهٔ مشاهده در (r, θ_1, φ_1) واقع‌شود، خواهیم داشت

$$G(r, \theta_1, \varphi_1, a, \theta_2, \varphi_2)=\frac{1}{R}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{4\pi}{2n+1}Y_n^{m*}(\theta_1, \varphi_1)Y_n^m(\theta_2, \varphi_2)\frac{a^n}{r^{n+1}}, r>a$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{4\pi}{2n+1}Y_n^{m*}(\theta_1,\varphi_1)Y_n^m(\theta_2, \varphi_2)\frac{r^n}{a^{n+1}}, r<a$$
(۲۰۸.۱۲)

این استدلال، دربخش ۶.۱۶ معکوس می‌شود تا به‌روش دیگری‌برای استخراج قضیهٔ‌جمع چندجمله‌ای لژاندر دست‌یابیم.

مسائل

۱.۸.۱۲ درروند اثبات قضیهٔ‌جمع، فرض‌کردیم‌که بتوان $Y_n^k(\theta_1, \varphi_1)$ را به‌صورت یك سری از $Y_n^m(\theta_2, \varphi_2)$ بسط داد که درآن m از $-n$ تا $+n$ تغییر می‌کند، ولی n ثابت می‌ماند. چه‌استدلالی می‌توانید برای توجیه‌مجموعیابی تنهاروی شاخص‌بالای m و نه‌روی شاخص پایین n ارائه‌کنید.

راهنمایی. یکی از راهها آن است‌که همگنی Y_n^m امتحان شود؛ یعنی Y_n^m را می‌توان کاملا برحسب جملاتی به‌صورت $\cos^{n-p}\theta\sin^p\theta$ و یا $x^{n-p-s}y^pz^s/r^n$ بسط داد. راه دیگر آن است‌که رفتار معادلهٔ لژاندر، $[\nabla^2+n(n+1)/r^2]P_n(\cos\theta)=0$، تحت چرخش دستگاه مختصات آزموده شود.

۲.۸.۱۲ تابع‌موج یك‌الكترون اتمی با تكانهٔ‌زاویه‌ای L و عددکوانتومی مغناطیسی M به قرار زیراست

$$\psi(r,\theta,\varphi)=f(r)Y_L^M(\theta,\varphi)$$

نشان‌دهیدکه مجموع چگالیهای الكترونی دریك پوستهٔ کامل‌معلوم، تقارن‌کروی دارد؛ یعنی $\sum_{M=-L}^{L}\psi^*(r,\theta,\varphi)\psi(r,\theta,\varphi)$ مستقل از θ و φ است.

۳.۸.۱۲ پتانسیـل یك الكترون در نقطهٔ $\mathbf{r}_e$، واقع در میدان Z پروتون در $\mathbf{r}_p$ عبارت است از

$$\varphi=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{p=1}^{Z}\frac{1}{|\mathbf{r}_e-\mathbf{r}_p|}$$

نشان دهیدکه این‌رابطه را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\varphi=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_e}\sum_{p=1}^{Z}\sum_{L,M}\left(\frac{r_p}{r_e}\right)^L\frac{4\pi}{2L+1}Y_L^{M*}(\theta_p,\varphi_p)Y_L^M(\theta_e,\varphi_e)$$

که درآن $r_e>r_p$. به‌ازای $r_e<r_p$، φ را چگونه بایدنوشت؟

۴.۸.۱۲ دوپروتون به‌طور یکنواخت دریك حجم‌کروی توزیع شده‌اند. اگرمختصات یك عنصر بار (r_1,θ_1,φ_1) و مختصات بار دیگر (r_2,θ_2,φ_2) و r_{12} فاصلهٔ بین آنها باشد، عنصر انرژی رانش از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$d\psi=\rho^2\frac{dv_1dv_2}{r_{12}}=\rho^2\frac{r_1^2dr_1\sin\theta_1\,d\theta_1\,d\varphi_1\,r_2^2dr_2\sin\theta_2\,d\theta_2\,d\varphi_2}{r_{12}}$$

دراینجا

$$\rho=\frac{\text{بار}}{\text{حجم}}=\frac{3e}{4\pi R^3}\text{، چگالی بار}$$

$$r_{12}^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\gamma$$

انرژی رانش الكتروستاتیکی کل دوپروتون را محاسبه‌کنید. این‌محاسبه برای منظورکردن اختلاف جرم درهسته‌های "آینه‌ای"، مانند O^{15} و N^{15} به‌کارمی‌رود.

پاسخ.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{به‌ازای } r_2>r_1 & \dfrac{3}{5}\dfrac{e^2}{R}\\[2ex] \text{به‌ازای } r_2<r_1 & \dfrac{3}{5}\dfrac{e^2}{R}\end{array}\right\}\ \frac{6}{5}\frac{e^2}{R}\ \text{(انرژی کل)}$$

این انرژی دوبرابر مقداری‌است که برای‌ایجاد یك کرهٔ باردار یکنواخت لازم است، زیرا دوبار ابری جداگانه داریم که برهم‌کنش می‌کنند، نه یك بارکه باخودش برهم‌کنش کنـد (که در آن جایگشت زوجها درنظرگرفته نمی‌شود).

۵.۸.۱۲ هر یك از دو الکترون $1s$ هلیم را می‌توان، در غیاب الکترون دیگـر، به‌کمك تابع‌موج هیدروژنی زیر توصیف‌کرد

$$\psi(\mathbf{r})=\left(\frac{Z^{3}}{\pi a_{0}^{3}}\right)^{1/2} e^{-Zr/a_{0}}$$

دراینجا، عدد اتمی Z برابـر ۲ است. نماد a_{0} شعاع اتمی بور و برابر $\hbar^{2}/me^{2}$ است. انرژی پتانسیل‌متقابل دوالکترون را بامحاسبهٔ انتگرال‌زیر به‌دست آورید

$$\int \psi^{*}(\mathbf{r}_{1})\psi^{*}(\mathbf{r}_{2}) \frac{e^{2}}{r_{12}}\psi(\mathbf{r}_{1})\psi(\mathbf{r}_{2})d^{3}r_{1}d^{3}r_{2}$$

پاسخ. $\frac{5e^{2}Z}{8a_{0}}$.

یادآوری. $d^{3}r_{1}=r_{1}^{2}dr_{1}\sin\theta_{1}\,d\theta_{1}d\varphi_{1}$

$r_{12}=|\mathbf{r}_{1}-\mathbf{r}_{2}|$

۶.۸.۱۲ احتمال یافتن یك الکترون $1s$ هیـدروژن در عنصر حجم $r^{2}dr\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$ عبارت است‌از

$$\frac{1}{\pi a_{0}^{3}}\exp[-2r/a_{0}]r^{2}dr\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

پتانسیل الکتروستاتیکی متناظررا بیابید. پتانسیل را ازرابطهٔ زیرمحاسبه‌کنید

$$V(\mathbf{r}_{1})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_{0}}\int\frac{\rho(\mathbf{r}_{2})}{r_{12}}d^{3}r_{2}$$

که در آن $\mathbf{r}_{1}$ روی محور z واقع نیست. r_{12} را بسط دهید. با بهره‌گیری از قضیهٔ جمع چندجمله‌ای لژاندر، نشان دهید‌که وابستگی زاویه‌ای $V(\mathbf{r}_{1})$ حذف می‌شود.

پاسخ. $V(\mathbf{r}_{1})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_{0}}\left\{\frac{1}{2r_{1}}\gamma\left(3,\frac{2r_{1}}{a_{0}}\right)+\frac{1}{a_{0}}\Gamma\left(2,\frac{2r_{1}}{a_{0}}\right)\right\}$.

۷.۸.۱۲ توزیع یك‌الکترون هیدروژن درمدار $2p$ به‌صورت زیراست

$$\rho=\frac{q}{64\pi a_{0}^{5}}r^{2}e^{-r/a_{0}}\sin^{2}\theta$$

که درآن a_0 شعاع بور، $\hbar^2/me^2$، است. پتانسیل الکتروستاتیکی متناظر با این توزیع بار را پیدا کنید.

۸.۸.۱۲ چگالی جریان الکتریکی که توسط یك الکترون $2p$ در اتم هیدروژن ایجاد می‌شود عبارت است از

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{\varphi}_0 \frac{q\hbar}{32 m a_0^5} e^{-r/a_0} r \sin\theta$$

با استفاده از

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d^3 r_2$$

پتانسیل برداری مغناطیسی حاصل ازاین الکترون هیدروژن را بیابید.

راهنمایی. به‌مؤلفه‌های دکارتی تجزیه کنید. با استفاده ازقضیهٔ جمع کمیت γ، زاویهٔ بین $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$، را حذف کنید.

۹.۸.۱۲ (الف) به‌عنوان یك سری لاپلاس ومثالی برای معادلهٔ (۸۰.۹) (دراینجا با توابع مختلط)، نشان دهید که

$$\delta(\Omega_1 - \Omega_2) = \sum_{n,m} Y_n^{m*}(\theta_2, \varphi_2) Y_n^m(\theta_1, \varphi_1)$$

(ب) همچنین نشان دهید که همین تابع دلتای دیراك را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\delta(\Omega_1 - \Omega_2) = \sum_n \frac{2n+1}{4\pi} P_n(\cos\gamma)$$

اکنون اگر بتوانید توجیه کنید که جمله به‌جملهٔ دو مجموعیابی روی n باهم برابرند، به‌راه دیگری برای استخراج قضیهٔ جمع‌هماهنگهای کروی دست یافته‌اید.

۹.۱۲ انتگرالهای حاصلضرب سه‌هماهنگ کروی

درمکانیك کوانتومی، بارها باانتگرالهایی به‌شکل کلی زیر برمی‌خوریم

$$\int Y_{L_1}^{M_1*} Y_{L_2}^{M_2} Y_{L_3}^{M_3} d\Omega \quad \text{یا} \quad \int Y_{L_1}^{M_1*} P_{L_2} Y_{L_3}^{M_3} d\Omega$$

که درآنها انتگرالگیری روی کل زاویهٔ فضایی صورت می‌گیرد. اولین‌عامل موجود در انتگرالده، ممکن‌است ازتابع‌موج یك‌حالت نهایی، وسومین‌عامل ازتابع‌موج یك‌حالت‌اولیه

ناشی‌شده باشد، درحالی که عامل‌وسطی می‌تواند نمایانگر عملگری باشدکه دردست محاسبه است یا "عنصرماتریسی"اش دارد تعیین‌می‌شود.

در اینجا نیز مانند نظریهٔ کوانتومی تکانهٔ زاویه‌ای، با بهره‌گیری از روشهای نظریهٔ گروه، می‌شود یك عبارت کلی برای صورتهایی به‌دست آوردکه در جدولها درج شده‌اند. این تجزیه وتحلیل شامل ضرایب جمع‌برداری یا ضرایب کلبش-گوردن است،که درجدول آمده‌اند. سه محدودیت کلی پیش‌می‌آید.[1] (۱) انتگرال صفرمی‌شود مگرآنکه جمع برداری Lها (تکانهٔ‌زاویه‌ای) صفرشود، $|L_1-L_2|\leqslant L_2\leqslant L_1+L_2$. (۲) انتگرال صفرمی‌شود مگـر آنکه $M_2+M_3=M_1$. همین مورد شالودهٔ نظری مدل برداری طیف‌نمایی اتمی را تشکیل‌می‌دهد.(۳) سرانجام، انتگرال صفرمی‌شود مگرآنکه حاصلضرب $Y_{L_1}^{M_1 *}Y_{L_2}^{M_2}Y_{L_3}^{M_3}$ زوج، یعنی $L_1+L_2+L_3$ یك عدد درست زوج باشد. این حکم، بیان قانون پایستگی پاریته است.

جزئیات این رهیافت‌کلی و توانا درمراجع کتاب یافت می‌شود. یادآوری می‌شود که ضرایب جمع برداری برحسب قرارداد فاز کوندون-شورتلی پدید آمده‌اند که درآن $(-1)^m$ متعلق به‌معادلهٔ (۱۴۶.۱۲) بامقادیرمثبت m همراه‌است.

باشگردهایی که تاکنون مطرح کرده‌ایم، می‌توان بسیاری ازاین نوع انتگرالها راکه معمولا به‌آنها برمی‌خوریم محاسبه‌کرد. انتگرالگیری روی زاویهٔ سمت را می‌توان ازطریق قراردادن مقادیر مشخص انجام داد

$$\int_0^{2\pi} e^{-iM_1\varphi}\, e^{iM_2\varphi}\, e^{iM_3\varphi}\, d\varphi = 2\pi\delta_{M_2+M_3-M_1,0} \qquad (۲۰۹.۱۲)$$

این انتگرال ازنظر فیزیکی باپایستگی مؤلفهٔ z تکانهٔ زاویه‌ای متناظر است.

کاربرد روابط بازگشتی

با یك نظر به‌جدول۴.۱۲ پی‌می‌بریم که وابستگی به θ در $Y_{L_2}^{M_2}$، یعنی $P_{L_2}^{M_2}(\theta)$رامی‌توان برحسب $\cos\theta$ و $\sin\theta$ مشخص کرد. اما عامل $\cos\theta$ یا $\sin\theta$ را می‌توان، با استفاده ازروابط بازگشتی چند جمله‌ایهای وابستهٔ لژاندر، با عامل $Y_{L_3}^{M_3}$ ترکیب کـرد. مثلا، از معادله‌های (۸۵.۱۲) و (۸۶.۱۲) داریم

1. Condon, E. U., and G. H. Shortley, *The Theory of Atomic Spectra*. Cambridge: Cambridge University Press, (1951); M.E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum*. New York: Wiley (1957); A. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*. Princeton, N. J.: Princeton University Press (1957); E.P. Wigner, *Group Theory and Its Applications to Quantum Mechanics* (translated by J.J.Griffin). New York: Academic Press (1959).

$$\cos\theta\, Y_L^M = +\left[\frac{(L-M+1)(L+M+1)}{(2L+1)(2L+3)}\right]^{1/2} Y_{L+1}^M + \left[\frac{(L-M)(L+M)}{(2L-1)(2L+1)}\right]^{1/2} Y_{L-1}^M \qquad (۲۱۰.۱۲)$$

$$e^{i\varphi}\sin\theta\, Y_L^M = -\left[\frac{(L+M+1)(L+M+2)}{(2L+1)(2L+3)}\right]^{1/2} Y_{L+1}^{M+1} + \left[\frac{(L-M)(L-M-1)}{(2L-1)(2L+1)}\right]^{1/2} Y_{L-1}^{M+1} \qquad (۲۱۱.۱۲)$$

$$e^{-i\varphi}\sin\theta\, Y_L^M = +\left[\frac{(L-M+1)(L-M+2)}{(2L+1)(2L+3)}\right]^{1/2} Y_{L+1}^{M-1} - \left[\frac{(L+M)(L+M-1)}{(2L-1)(2L+1)}\right]^{1/2} Y_{L-1}^{M-1} \qquad (۲۱۲.۱۲)$$

با بهره‌گیری ازاین‌معادلات، داریم

$$\int Y_{L_1}^{M_1 *} \cos\theta\, Y_L^M\, d\Omega = \left[\frac{(L-M+1)(L+M+1)}{(2L+1)(2L+3)}\right]^{1/2} \delta_{M_1,M}\, \delta_{L_1,L+1} + \left[\frac{(L-M)(L+M)}{(2L-1)(2L+1)}\right]^{1/2} \delta_{M_1,M}\delta_{L_1,L-1}$$

(۲۱۳.۱۲)

ظهوردلتای‌کرونکر $(L_1, L\pm 1)$ جنبه‌ای از پایستگی تکانهٔ‌زاویه‌ای به‌شمار می‌آید. این انتگرال درهنگام‌بررسی تابش‌الکترومغناطیسی معمولی اتمی (دوقطبی الکتریکی) درفیزیك بروزمی‌کند. این‌انتگرال به‌این‌قاعدهٔ گزینش‌آشنا منجر می‌شودکه‌گذار به‌یك تراز اتمی با عددکوانتومی تکانهٔ‌زاویه‌ای مداری L_1، تنها می‌تواند از ترازهای‌اتمی با اعدادکوانتومی $L_1 - 1$ یا $L_1 + 1$ ناشی شده باشد. کاربرد روابط بازگشتی در عبارتهایی چون

$$\text{گشتاور چارقطبی} \sim \int Y_L^{M*} P_2(\cos\theta)\, Y_L^M d\Omega$$

پیچیده‌تر ولی کاملا سرراست است.

مسائل

۱.۹.۱۲ درستی روابط زیر را تحقیق کنید

(الف)
$$\int Y_L^M Y_0^0 Y_L^{M*}\, d\Omega = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

(ب)
$$\int Y_L^M Y_1^0 Y_{L+1}^{M*}\, d\Omega = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sqrt{\frac{(L+M+1)(L-M+1)}{(2L+1)(2L+3)}}$$

(ج)
$$\int Y_L^M Y_1^1 Y_{L+1}^{M+1*}\, d\Omega = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sqrt{\frac{(L+M+1)(L+M+2)}{(2L+1)(2L+3)}}$$

(د)
$$\int Y_L^M Y_1^1 Y_{L-1}^{M+1*}\, d\Omega = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sqrt{\frac{(L-M)(L-M-1)}{(2L-1)(2L+1)}}$$

این انتگرالها در بررسی همبستگی زاویه‌ای الکترونهای واگردانی داخلی به‌کار رفتند.

۲.۹.۱۲ نشان دهید

(الف)
$$\int_{-1}^{1} xP_L(x)P_N(x)dx = \begin{cases} \dfrac{2(L+1)}{(2L+1)(2L+3)}, & N=L+1 \\[2ex] \dfrac{2L}{(2L-1)(2L+1)}, & N=L-1 \end{cases}$$

(ب)
$$\int_{-1}^{1} x^2P_L(x)P_N(x)\,dx = \begin{cases} \dfrac{2(L+1)(L+2)}{(2L+1)(2L+3)(2L+5)}, & N=L+2 \\[2ex] \dfrac{2(2L^2+2L-1)}{(2L-1)(2L+1)(2L+3)}, & N=L \\[2ex] \dfrac{2L(L-1)}{(2L-3)(2L-1)(2L+1)}, & N=L-2 \end{cases}$$

۳.۹.۱۲ از آنجا که $xP_n(x)$ یك چندجمله‌ای (از درجهٔ $n+1$) است، می‌توان آن را به‌کمك سری لژاندر نمایش داد

$$xP_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s P_s(x)$$

(الف) نشان دهید که به‌ازای $s<n-1$ و $s>n+1$ داریم $a_s=0$.

(ب) a_{n-1}، a_n، و a_{n+1} را محاسبه کنید و نشان دهید که رابطهٔ بازگشتی، معادلهٔ (۱۷.۱۲)، را باز تولید کرده‌اید.

یادآوری. این استدلال را می‌توان به‌شکل کلی درآورد، تا وجود یك‌رابطهٔ بازگشتی سه‌جمله‌ای را برای هرمجموعهٔ کاملی ازچندجمله‌ایهای متعامد نمایش‌دهد

$$x\varphi_n = a_{n+1}\varphi_{n+1} + a_n\varphi_n + a_{n-1}\varphi_{n-1}$$

۱۰.۱۲ توابع لژاندر نوع‌دوم، $Q_n(x)$

دراین فصل تااینجا بایك‌جواب معادلهٔ لژاندر، یعنی جواب $P_n(\cos\theta)$، سروکار داشته‌ایم که در دونقطهٔ تکین معادلهٔ‌دیفرانسیل، یعنی در $\cos\theta = \pm 1$، منظم(متناهی) است. به‌اتکای نظریهٔ کلی معادلات دیفرانسیـــل می‌دانیم که جواب دومی وجود دارد. به‌این جواب دوم، $Q_n(x)$، به کمك جواب سری معادلهٔ لژانـدر دست می‌یابیم. بعداً یك شکل بسته به‌دست خواهیم آورد.

جوابهای سری معادلهٔ لژاندر

برای حل‌معادلهٔ

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+n(n+1)y=0 \qquad (۲۱۴.۱۲)$$

مانند فصل ۸ اقدام می‌کنیم، وقرارمی‌دهیم[1]

$$y=\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda} \qquad (۲۱۵.۱۲)$$

با

$$y'=\sum_{\lambda=0}^{\infty}(k+\lambda)a_\lambda x^{k+\lambda-1} \qquad (۲۱۶.۱۲)$$

$$y''=\sum_{\lambda=0}^{\infty}(k+\lambda)(k+\lambda-1)a_\lambda x^{k+\lambda-2} \qquad (۲۱۷.۱۲)$$

بانشاندن درمعادلهٔ دیفرانسیلی اولی‌داریم

---

۱. توجه کنید که می‌شود به‌جای x متغیر مختلط z را نشاند.

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}(k+\lambda)(k+\lambda-1)a_\lambda x^{k+\lambda-2}$$

$$+\sum_{\lambda=0}^{\infty}[n(n+1)-2(k+\lambda)-(k+\lambda)(k+\lambda-1)]a_\lambda x^{k+\lambda}=0 \quad (218.12)$$

معادلهٔ اندیسی، باجوابهای $k=0,1$، عبارت است از

$$k(k-1)=0 \quad (219.12)$$

ابتدا $k=0$ را با $a_0=1$، $a_1=0$ بررسی می کنیم. درنتیجه سری ما با رابطهٔ بازگشتی زیر توصیف می‌شود

$$(\lambda+2)(\lambda+1)a_{\lambda+2}+[n(n+1)-2\lambda-\lambda(\lambda-1)]a_\lambda=0 \quad (220.12)$$

که به‌صورت زیر درمی‌آید

$$a_{\lambda+2}=-\frac{(n+\lambda+1)(n-\lambda)}{(\lambda+1)(\lambda+2)}a\lambda \quad (221.12)$$

این سری‌را به p_n نشان می‌دهیم، داریم

$$p_n(x)=1-\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4+\dots \quad (222.12)$$

جواب دوم معادلهٔ اندیسی، $k=1$، با $a_0=1$ و $a_1=0$ به‌رابطهٔ بازگشتی زیر می‌انجامد

$$a_{\lambda+2}=-\frac{(n+\lambda+2)(n-\lambda-1)}{(\lambda+2)(\lambda+3)}a_\lambda \quad (223.12)$$

این‌سری را به q_n نشان می‌دهیم، داریم

$$q_n(x)=x-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3+\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5-\dots$$

$$(224.12)$$

درنتیجه جواب کلی معادلهٔ (۲۱۴.۱۲) عبارت است‌از

$$y_n(x)=A_n p_n(x)+B_n q_n(x) \quad (225.12)$$

مشروط برآنکه همگرایی داشته باشیم. بااستفاده ازآزمون گاؤس، بخش ۲.۵ (مثال ۴.۲.۵، جلد اول)، در $x=\pm 1$ همگرایی‌نداریم. برای‌فائق آمدن براین‌مشکل، ثابت جداسازی n را یك‌عدد درست می‌گیریم (مسئلهٔ ۵.۵.۸) وسری‌نامتناهی را به‌یك چندجمله‌ای‌تبدیل می کنیم.

به‌ازای n، عدد درست مثبت زوج (یا صفر)، سری p_n ختم می‌شود و با یك گزینهٔ مناسب ضریب بهنجارش [به‌صورتی که با تعریف $P_n(x)$ دربخش ۱.۱۲ سازگاری به‌وجود آید] داریم

$$P_n(x)=(-1)^{n/2}\frac{n!}{2^n[(n/2)!]^2}P_n(x)$$

(۲۲۶.۱۲)

$$=(-1)^s\frac{(2s)!}{2^{2s}(s!)^2}\,p_{2s}(x)=(-1)^s\frac{(2s-1)!!}{(2s)!!}p_{2s}(x)$$

به‌ازای $n=2s$

اگر n یك عدد درست مثبت فرد باشد، سری q_n پس‌از تعدادی متناهی جمله خاتمه می‌یابد و می‌نویسیم

$$P_n(x)=(-1)^{(n-1)/2}\frac{n!}{2^{n-1}\{[(n-1)/2]!\}^2}\,q_n(x)$$

(۲۲۷.۱۲)

$$=(-1)^s\frac{(2s+1)!}{2^{2s}(s!)^2}\,q_{2s+1}(x)=(-1)^s\frac{(2s+1)!!}{(2s)!!}\,q_{2s+1}(x)$$

به‌ازای $n=2s+1$

باید گفت که این‌عبارات به‌ازای همهٔ مقادیرحقیقی x، $-\infty<x<\infty$، و به‌ازای مقادیر مختلط درصفحهٔ مختلط‌متناهی، برقرار است. ثابتهایی که در p_n و q_n ضرب‌می‌شوند، طوری برگزیده شده‌اندکه P_n با چندجمله‌ایهای لژاندرکه ازتابع مولد به‌دست می‌آیند، سازگار باشند.

معادلات (۲۲۲.۱۲) و (۲۲۴.۱۲) را می‌توان به ازای $n=\nu$، عدد غیردرست، هم به کار برد، ولی‌در این صورت سریها دیگر خاتمه نمی‌یابند و گسترهٔ همگرایی به $-1<x<1$ تبدیل می‌شود. نقاط پایانی $x=\pm1$ دراین‌گستره نمی‌گنجند.

گاهی‌بهتراست که ترتیب جملات سری را معکوس‌کنیم. این‌کاررا می‌توان‌به‌صورت زیرانجام داد

$$s=\frac{n}{2}-\lambda \qquad P_n(x) \text{ درصورت اول } n \text{ زوج،}$$

$$s=\frac{n-1}{2}-\lambda \qquad P_n(x) \text{ درصورت‌دوم } n \text{ فرد،}$$

درنتیجه معادلات (۲۳۰.۱۲) و (۲۳۱.۱۲) به‌صورت زیردرمی‌آیند

$$P_n(x)=\sum_{s=0}^{[n/2]}(-1)^s\frac{(2n-2s)!}{2^n s!(n-s)!(n-2s)!}x^{n-2s} \qquad (228.12)$$

که در آن حد بالا عبارت است از: (برای n زوج) $s=n/۲$ یا (برای n فرد) $s=(n-۱)/۲$. درنتیجه معادلهٔ (۸.۱۲) از بخش ۱.۱۲، که مستقیماً از تابع مولد به‌دست آمده بود، دوباره تولید می‌شود. گزینهٔ خاصی که برای بهنجارش معادلات (۲۲۶.۱۲) و (۲۲۷.۱۲) درنظر گرفته‌شد، برای ایجاد همین سازگاری بامعادلهٔ (۸.۱۲) صورت گرفت.

$Q_n(x)$، توابع نوع دوم

خاطرنشان می‌کنیم که تنها p_n به‌ازای n زوج و q_n به‌ازای n فرد را به‌کاربرده‌ایم (زیرا این سریها به‌ازای این انتخاب n خاتمه می‌یابند). حال می‌توانیم یك جواب دیگر معادلهٔ لژاندر (شکل ۱۷.۱۲) را به‌صورت زیرتعریف کنیم

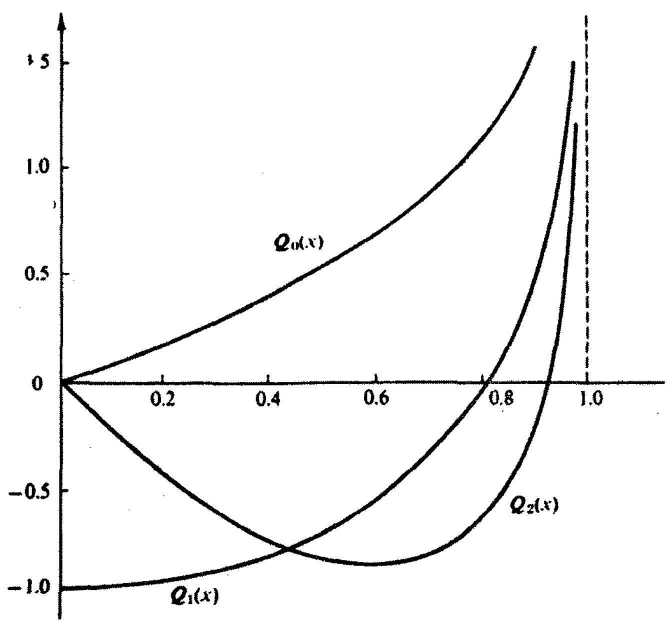
$$Q_n(x)=(-۱)^{n/۲}\frac{[(n/۲)!]^۲۲^n}{n!}q_n(x)=(-۱)^s\frac{(۲s)!!}{(۲s-۱)!!}q_{۲s}(x)$$

(۲۲۹.۱۲) به‌ازای n زوج، $n=۲s$

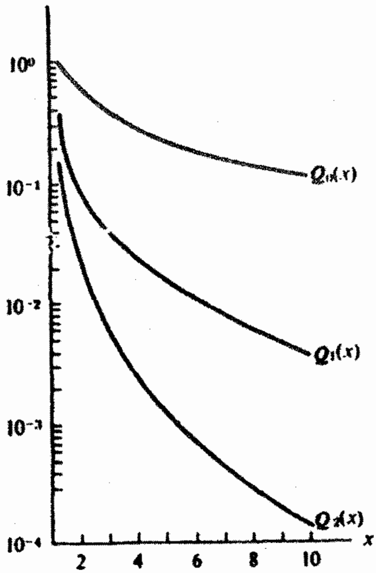
$$Q_n(x)=(-۱)^{(n+۱)/۲}\frac{\{[(n-۱)/۲]!\}^۲۲^{n-۱}}{n!}p_n(x)$$

(۲۳۰.۱۲)

$$=(-۱)^{s+۱}\frac{(۲s)!!}{(۲s+۱)!!}p_{۲s+۱}(x) \quad n=۲s+۱$$ به‌ازای n فرد،



شکل ۱۷.۱۲ تابع دوم لژاندر، $Q_n(x)$، $۰ \leqslant x < ۱$.



شکل ۱۸۰۱۲ تابع دوم لژاندر $Q_n(x)$، $x>1$.

این گزینش ضرایب بهنجارش ناگـزیر شرایطی را پیش می‌آورد که Q_n در همان روابط بازگشتی صدق کند که P_n صدق می‌کند. این نکته را می‌شود با نشاندن معادلات (۲۲۹۰۱۲) و (۲۳۰۰۱۲) در معادلات (۱۲ ۷) و (۲۶۰۱۲) تحقیق کـرد. بازبینی روابط بازگشتی سری [معادلات (۲۲۱۰۱۲) و (۲۲۳۰۱۲)]، به‌کمك آزمون نسبت کوشی، نشان می‌دهد که $Q_n(x)$ به‌ازای $-1<x<1$ همگرا خواهدبود. اگر $|x|\geqslant 1$، این صورتهای سری جواب دوم ما واگرا می‌شونـد. در ناحیهٔ $|x|>1$ (شکل ۱۸۰۱۲) می‌توان یك سری از توانهای منفی x تشکیل داد، ولی ما اقدام به‌یافتن جوابی به‌شکل بسته خواهیم کرد که بتوان آن‌را درتمامی صفحهٔ مختلط (جز درنقطل تکین $x=\pm 1$ و با قید احتیاط روی خطوط برش) به‌کار برد.

جوابهای به شکل بسته

جواب دوم، $Q_n(z)$، به شکل بسته در موارد متعدد مطلوب ماست. این شکل را می‌توان به کمك روشی که در بخش ۶۰۸ مورد بحث قرار گرفت به‌دست آورد. می‌نویسیم

$$Q_n(z)=P_n(z)\left\{A_n+B_n\int^z \frac{dx}{(1-x^2)[P_n(x)]^2}\right\} \qquad (۲۳۱۰۱۲)$$

که در آن ثابت A_n جـانشین مقدار انتگرال بـه‌ازای حد پایین اختیاری آن می‌شـود. هر دو ثابت A_n و B_n را می‌توان درحالتهای خاص تعیین کرد.

به‌ازای $n=0$، معادلهٔ (۲۳۱.۱۲) به‌صورت زیردرمی‌آید

$$Q_0(z)=P_0(z)\left\{A_0+B_0\int^z\frac{dx}{(1-x^2)[P_0(x)]^2}\right\}$$

$$=A_0+B_0\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z} \qquad (۲۳۲.۱۲)$$

$$=A_0+B_0\left(z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\dots+\frac{z^{2s+1}}{2s+1}+\dots\right)$$

عبارت آخری پیامد بسط لگاریتمی مك‌لورن به‌شمار می‌آید. از مقایسهٔ این تابع با جواب سری [معادلهٔ (۲۲۴.۱۲)] می‌رسیم به

$$Q_0(z)=q_0(z)=z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\dots+\frac{z^{2s+1}}{2s+1}+\dots \qquad (۲۳۳.۱۲)$$

داریم: $A_0=0$، $B_0=1$. به‌ازای $n=1$، نتایج مشابهی به‌دست می‌آید. خواهیم‌داشت

$$Q_1(z)=z\left[A_1+B_1\int^z\frac{dx}{(1-x^2)x^2}\right]$$

(۲۳۴.۱۲)

$$=A_1z+B_1z\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}-\frac{1}{z}\right)$$

پس‌از بسط به‌صورت یك سری توانی و مقایسه با $Q_1(z)=-p_1(z)$، خواهیم داشت $A_1=0$، $B_1=1$. بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$Q_0(z)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$$

(۲۳۵.۱۲)

$$Q_1(z)=\frac{1}{2}z\ln\frac{1+z}{1-z}-1, \quad |z|<1$$

شاید بهترین راه برای‌تعیین مقادیر $Q_n(z)$ مرتبه‌های بالاتر استفاده ازرابطهٔ بازگشتی [معادلهٔ(۱۷.۱۲)] باشد، که می‌توان اعتبارآن را هم به‌ازای $x^2<1$ وهم به‌ازای $x^2>1$، از طریق نشاندن صورتهای سری تحقیق کرد. با بهره‌گیری از این‌روش خواهیم داشت

$$Q_2(z)=\frac{1}{2}P_2(z)\ln\frac{1+z}{1-z}-\frac{3}{2}P_1(z) \qquad (۲۳۶.۱۲)$$

تکرار کاربرد فرمول بازگشتی منجر می‌شود به

$$Q_n(z)=\frac{1}{2}P_n(z)\ln\frac{1+z}{1-z}-\frac{2n-1}{1\times n}P_{n-1}(z)-\frac{2n-5}{3(n-1)}P_{n-3}(z)\ldots$$
(۲۳۷.۱۲)

با اتکا به‌شکل $\ln[(1+z)/(1-z)]$ پی می‌بریم که این عبارتها به‌ازای مقادیر حقیقی z درگسترهٔ $-1<x<1$ برقرارند. اگربخواهیم شکل بسته‌ای داشته باشیم که در خارج از این گستره معتبر باشد، تنها به‌جای $\ln[(1+x)/(1-x)]$ باید کمیت $\ln[(z+1)/(z-1)]$ را بنشانیم.

وقتی‌ازشکل اخیر استفاده می‌کنیم که مقادیر بزرگ z درآن صدق می‌کنند، بازهٔ خط $-1\leqslant x\leqslant 1$ را به‌عنوان یك‌خط برش می‌گیریم. عرفاً به‌مقادیر $Q_n(x)$، برروی‌خط برش، رابطهٔ زیررا نسبت می‌دهند

$$Q_n(x)=\frac{1}{2}[Q_n(x+i0)+Q_n(x-i0)] \qquad (۲۳۸.۱۲)$$

یعنی‌میانگین‌حسابی‌مقادیری که‌بانزدیك‌شدن‌ازسمت‌موهومی‌مثبت‌وازسمت‌موهومی‌منفی‌به‌دست می‌آوریم. بایدبه‌این‌نکته توجه‌کنیم که به‌ازای $z\to x>1$، داریم $z-1\to(x-1)e^{\pm i\pi}$. درنتیجه به‌ازای همهٔ مقادیر z، جز z های واقع برروی محورحقیقی $-1\leqslant x\leqslant 1$، داریم

$$Q_0(z)=\frac{1}{2}\ln\frac{z+1}{z-1} \qquad (۲۳۹.۱۲)$$

$$Q_1(z)=\frac{1}{2}z\ln\frac{z+1}{z-1}-1,\ \ldots \qquad (۲۴۰.۱۲)$$

برای مراجعهٔ سریع، برخی‌ازمقادیرخاص $Q_n(z)$ را دراینجا نقل‌می‌کنیم.

۱. ازجملهٔ لگاریتمی [معادلهٔ (۲۳۷.۱۲)] داریم: $Q_n(1)=\infty$.

۲. $Q_n(\infty)=0$. ساده‌ترین راه دستیابی‌به‌این مقدار بهره‌گیری ازنمایش $Q_n(x)$ به‌صورت یك‌سری ازتوانهای منفی x است (مسئلهٔ ۴.۱۰.۱۲).

۳. $Q_n(-z)=(-1)^{n+1}Q_n(z)$. این‌عبارت ازصورت سری به‌دست‌می‌آید. آن را می‌توان بااستفاده از $Q_0(z)$، $Q_1(z)$ و رابطهٔ بازگشتی [معادلهٔ (۱۷.۱۲)] نیزاستخراج کرد.

۴. بااستفاده ازبند (۳)، به‌ازای n زوج داریم: $Q_n(0)=0$.

۵.
$$Q_n(0)=(-1)^{(n+1)/2}\frac{\{[(n-1)/2]!\}^2}{n!}2^{n-1}$$

$$=(-1)^{s+1}\frac{(2s)!!}{(2s+1)!!},\quad n=2s+1$$ به‌ازای n فرد،

نتیجهٔ نهایی از صورت سری [معادلهٔ (۲۳۰.۱۲)] با $p_n(0)=1$ به‌دست می‌آید.

مسائل

۱.۱۰.۱۲ رابطهٔ پاریتهٔ $Q_n(x)$ را استخراج کنید.

۲.۱۰.۱۲ با استفاده از معادلات (۲۲۶.۱۲) و (۲۲۷.۱۲)، نشان دهید

(الف)
$$P_{2n}(x)=\frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\frac{(2n+2s-1)!}{(2s)!(n+s-1)!(n-s)!}x^{2s}$$

(ب)
$$P_{2n+1}(x)=\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\frac{(2n+2s+1)!}{(2s+1)!(n+s)!(n-s)!}x^{2s+1}$$

با نشان دادن این نکته که هر جمله درسریهای فوق با جملهٔ متناظر در معادلهٔ (۸.۱۲) سازگار است، بهنجارش را بیازمایید.

۳.۱۰.۱۲ نشان دهید

(الف)
$$Q_{2n}(x)=(-1)^n 2^{2n}\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\frac{(n+s)!(n-s)!}{(2s+1)!(2n-2s)!}x^{2s+1}$$
$$+2^{2n}\sum_{s=n+1}^{\infty}\frac{(n+s)!(2s-2n)!}{(2s+1)!(s-n)!}x^{2s+1},\qquad |x|<1$$

(ب)
$$Q_{2n+1}(x)=(-1)^{n+1}2^{2n}\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\frac{(n+s)!(n-s)!}{(2s)!(2n-2s+1)!}x^{2s}$$
$$+2^{2n+1}\sum_{s=n+1}^{\infty}\frac{(n+s)!(2s-2n-2)!}{(2s)!(s-n-1)!}x^{2s},\qquad |x|<1$$

۴.۱۰.۱۲ (الف) باشروع ازشکل فرضی

$$Q_n(x)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}b_{-\lambda}x^{k-\lambda}$$

نشان دهید

$$Q_n(x)=b_0x^{-n-1}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(n+s)!(n+2s)!(2n+1)!}{s!(n!)^2(2n+2s+1)!}x^{-2s}$$

(ب) گزینهٔ استاندارد برای $b_{\circ}$ عبارت است‌از

$$b_{\circ}=\frac{۲^{n}(n!)^{۲}}{(۲n+۱)!}$$

نشان دهید که این‌گزینهٔ $b_{\circ}$، صورت سری توانهای منفی $Q_n(x)$ را با جوابی که به شکل بسته باشد، سازگار خواهدکرد.

۵.۱۰.۱۲ تحقیق کنید که توابع نوع دوم لژاندر، $Q_n(x)$، هم به‌ازای $|x|<۱$ و هم به‌ازای $|x|>۱$ درهمان روابط بازگشتی صدق می‌کنند که $P_n(x)$ نیزدرآنها صادق‌است

$$(۲n+۱)xQ_n(x)=(n+۱)Q_{n+۱}(x)+nQ_{n-۱}(x)$$

$$(۲n+۱)Q_n(x)=Q'_{n+۱}(x)-Q'_{n-۱}(x)$$

۶.۱۰.۱۲ (الف)بااستفاده ازروابط بازگشتی (ومستقل از رابطهٔ رونسکیی) ثابت کنید

$$n[P_n(x)Q_{n-۱}(x)-P_{n-۱}(x)Q_n(x)]=P_۱(x)Q_{\circ}(x)-P_{\circ}(x)Q_۱(x)$$

(ب) به‌کمك جانشانی مستقیم نشان‌دهیدکه سمت‌راست این معادله یك‌است.

۷.۱۰.۱۲ (الف)زیر-برنامه‌ای بنویسیدکه $Q_n(x)$ و Qهای باشاخص پایین را براساس رابطهٔ بازگشتی این‌توابع نوع‌دوم لژاندر تولیدکند. x را درمحدودهٔ $(-۱, ۱)$ بگیرید وازنقاط انتهایی چشم‌بپوشید.

راهنمایی. $Q_{\circ}(x)$ و $Q_۱(x)$ را معلوم بگیرید.

(ب) دقت زیر-برنامهٔ خودرا از طریق محاسبهٔ $Q_{۱\circ}(x)$ ومقایسهٔ آن با مقادیری‌که درجدول فصل ۸ کتاب AMS-55 آمده است، بیازمایید.

۱۱.۱۲ هماهنگهای کروی برداری

توجه ما دراین‌فصل بیشتر به‌حل‌معادلات میدانهای‌نرده‌ای مانند میدان‌الکتروستاتیکی‌معطوف بوده‌است. علت‌این‌امر عمدتاً آن‌بوده است‌که‌کارکردن بامیدانهای نرده‌ای نسبت‌به‌میدانهای برداری آسانتر است! اما با اشراف بر میدانهای نرده‌ای، میدانهای برداری هرچه بیشتر مورد توجه‌قرار می‌گیرند.

میدان مغناطیسی یك‌حلقهٔ جریان

برای آنکه مشکلات را نشان دهیم، معادلهٔ زیر را برای پتانسیل برداری مغناطیسی درنظر

می‌گیریم[1]

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\mu_0\mathbf{J} \qquad (۲۴۱.۱۲)$$

به‌علاوه، فرض می‌کنیم که شرایط مرزی در مختصات قطبی کروی به‌بهترین وجه بیان شده باشند. درنمونهٔ یك حلقهٔ جریان (بخش ۵.۱۲)، می‌شد این‌معادله را حل کرد، زیرا شکل $\mathbf{A}$ کاملا محدود می‌شد. از این معادله، به‌طورکلی سه معادلهٔ نرده‌ای به دست می‌آید که هریك شامل هرسه‌مؤلفهٔ A یعنی A_r، A_θ، و A_φ هستند. چنین معادلات دیفرانسیل جفت‌شده‌ای را می‌توان حل کرد ولی دردسرش زیاداست.

با قرار دادن $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$، می‌توانیم معادلهٔ خود را به لاپلاسی برداری $\nabla^2\mathbf{A}$ تبدیل کنیم. این معادله در مختصات دکارتی به‌ازای هر مؤلفه به یك معادله تجزیه می‌شود. ولی، متأسفانه، مختصات حاکم برشرایط مرزی ما (برای حلقهٔ جریان) کروی است. برای آنکه این شرایط را برآورده کنیم، باید مؤلفه‌های دکارتی A_x، A_y، و A_z را به‌صورتی درهم بیامیزیم که احتمالا کارکردن با آن هم دست و پاگیر و هم مشکل خواهد بود.

برای آنکه حل معادلهٔ (۲۴۱.۱۲) وسایر معادلات، نظیر معادلهٔ برداری هلمهولتز و معادلهٔ موج برداری میسرشود، ترکیبهای مختلفی از هماهنگهای کروی (نرده‌ای) را برای تشکیل بردارهایی در مختصات قطبی کروی به‌کار برده‌ایم. یك مجموعه، که در مکانیك کوانتومی به‌کار می‌رود، توسط هیل توصیف شده است.[2] سه هماهنگ کروی برداری او عبارت‌اند از

$$\mathbf{V}_{LM}=\mathbf{r}_0\left[-\left(\frac{L+1}{2L+1}\right)^{1/2}Y_L^M\right]+\boldsymbol{\theta}_0\left\{\frac{1}{[(L+1)(2L+1)]^{1/2}}\frac{\partial Y_L^M}{\partial\theta}\right\}$$

$$+\boldsymbol{\varphi}_0\left\{\frac{iM}{[(L+1)(2L+1)]^{1/2}\sin\theta}Y_L^M\right\} \qquad (۲۴۲.۱۲)$$

$$\mathbf{W}_{LM}=\mathbf{r}_0\left[\left(\frac{L}{2L+1}\right)^{1/2}Y_L^M\right]+\boldsymbol{\theta}_0\left\{\frac{1}{[L(2L+1)]^{1/2}}\frac{\partial Y_L^M}{\partial\theta}\right\}$$

$$+\boldsymbol{\varphi}_0\left\{\frac{iM}{[L(2L+1)]^{1/2}\sin\theta}Y_L^M\right\} \qquad (۲۴۳.۱۲)$$

---

۱. نحوهٔ استخراج این معادله ازمعادلات ماکسول را درمسئلهٔ ۵.۱۴.۱ ببینید.

2. Hill, E. H., "Theory of Vector Spherical Harmonics," *Am.J.Phys.* **22**, 211 (1954) J. M. Blatt and V. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, New York: Wiley (1952).

توجه کنید که هیل فازها را مطابق قرارداد فازکوندون-شورتلی (بخش ۶.۱۲) تعیین می‌کند.

کوانتوم مکانیکی که در آنها تکانهٔ زاویه‌ای پارامتر مهمی به‌شمار می‌آید، متناسب است. مورس و فشباخ مجموعهٔ دیگری از هماهنگهای کروی برداری **B**، **C**، و **P** را توصیف می‌کنند که در آن وابستگی شعاعی کلا در **P** و وابستگی زاویه‌ای در **B** و **C** است. این مجموعه، در هنگام بررسی معادلهٔ موج، هنگامی که بخواهیم اجزای طولی وعرضی موج را از یکدیگر جدا کنیم، دارای مزایایی است.

نمونه‌های دیگری از فایده و توانایی هماهنگهای کروی برداری را می‌توان در کتاب بلات و وایسکوف یا در کتاب مورس- فشباخ و یا در کتاب «الکترودینامیك کلاسیکی» جکسون یافت، که این کتاب اخیر از هماهنگهای کروی برداری برای توصیف تابش چندگانه ومسائل الکترومغناطیسی مربوط به آن استفاده می‌کند.

هماهنگهای کروی برداری می‌توانند به‌عنوان نتیجهٔ جفت‌شدگی L واحد تکانهٔ زاویه‌ای مداری با ۱ واحد تکانهٔ زاویه‌ای اسپینی پدید آیند. تعمیم این روش، یعنی جفت شدگی L واحد تکانهٔ زاویه‌ای مداری با ۲ واحد تکانهٔ زاویه‌ای اسپینی و تشکیل هماهنگ کروی تانسوری توسط ماتیوز[1] عرضه شده‌است. کاربرد عمدهٔ هماهنگهای کروی تانسوری درحوزهٔ بررسی تابش گرانشی است.

مسائل

۱.۱۱.۱۲ هماهنگهای کروی برداری متناظر با $l=0$، $m=0$ و $l=1$، $m=0$ را تشکیل دهید.

پاسخ.

$$\mathbf{V}_{00}=-\mathbf{r}_0(4\pi)^{-1/2}$$
$$\mathbf{X}_{00}=0$$
$$\mathbf{W}_{00}=0$$
$$\mathbf{V}_{10}=-\mathbf{r}_0(2\pi)^{-1/2}\cos\theta-\boldsymbol{\theta}_0(8\pi)^{-1/2}\sin\theta$$
$$\mathbf{X}_{10}=\boldsymbol{\varphi}_0\, i(3/8\pi)^{1/2}\sin\theta$$
$$\mathbf{W}_{10}=\mathbf{r}_0(4\pi)^{-1/2}\cos\theta-\boldsymbol{\theta}_0(4\pi)^{-1/2}\sin\theta$$

۲.۱۱.۱۳ تحقیق کنید که پاریتهٔ $\mathbf{V}_{LM}$ برابر $(-1)^{L+1}$، پاریتهٔ $\mathbf{X}_{LM}$ برابر $(-1)^{L}$، و پاریتهٔ $\mathbf{W}_{LM}$ مساوی $(-1)^{L+1}$ است. برای وابستگی به M در پاریته چه‌پیش آمد؟

راهنمایی. پاریتهٔ $\mathbf{r}_0$ و $\boldsymbol{\varphi}_0$ فرد و پاریتهٔ $\boldsymbol{\theta}_0$ زوج است (با مسئلهٔ ۸.۵.۲ مقایسه کنید).

---

1. Mathews, J., "Gravitational Multipole Radiation," in H.P. Robertson, *In Memoriam*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1963.

$$\nabla \cdot [F(r)\mathbf{X}_{LM}(\theta, \varphi)] = 0 \tag{۲۵۰.۱۲}$$

شرط

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{۲۵۱.۱۲}$$

$\mathbf{V}_{LM}$ و $\mathbf{W}_{LM}$ را رد می‌کند وتنها $\mathbf{X}_{LM}$ باقی می‌ماند. هرگاه جریان عبور نکند ($\mathbf{J} = 0$)، یعنی در موضعی دور از حلقهٔ جریان، معادلهٔ (۲۴۱.۱۲)، همراه با معادلـهٔ (۲۵۱.۱۲) به صورت زیر درمی‌آید

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0 \tag{۲۵۲.۱۲}$$

با استفاده از یك رابطهٔ دیفرانسیلی دیگر هیـل، وبا توجه به $\mathbf{A}_{LM} = R(r)\mathbf{X}_{LM}(\theta, \varphi)$، خواهیم داشت

$$\nabla^2 [R(r)\mathbf{X}_{LM}(\theta, \varphi)] = \left[\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{L(L+1)}{r^2} R\right]\mathbf{X}_{LM} = 0$$
(۲۵۳.۱۲)

که با معادلهٔ (۱۱۳.۱۲) ما سازگار است. داریم

$$\mathbf{A}_{LM} = a_{LM} r^{-L-1} \mathbf{X}_{LM}(\theta, \varphi) \tag{۲۵۴.۱۲}$$

مشاهده می‌کنیم که به دلیل تقارن حلقه، هیچ وابستگی سمتی نمی‌توانـد وجود داشته باشد، پس $M = 0$ وجواب ما به‌صورت زیر ساده می‌شود

$$\mathbf{A}_L = a_L r^{-L-1} \left\{\frac{-i}{[L(L+1)]^{1/2}} \frac{\partial Y_L^0}{\partial \theta}\right\} \boldsymbol{\varphi}_0 \tag{۲۵۵.۱۲}$$

این عبارت معادل‌است با معادلهٔ (۱۱۶.۱۲). ثابتهای a_L را، همان‌گونه‌که در بخش ۵.۱۲ برای c_nها انجام دادیم، به‌کمك شرایط مرزی تعیین می‌کنیم. میدان مغناطیسی را می‌توان ازرابطهٔ زیر به‌دست‌آورد

$$\nabla \times [F(r)\mathbf{X}_{LM}] = i\left(\frac{L}{2L+1}\right)^{1/2}\left[\frac{dF}{dr} - \frac{L}{r}F\right]\mathbf{V}_{LM}$$
$$+ i\left(\frac{L+1}{2L+1}\right)^{1/2}\left[\frac{dF}{dr} + \frac{(L+1)}{r}F\right]\mathbf{W}_{LM} \tag{۲۵۶.۱۲}$$

که متناظراست بامعادلهٔ (۱۱۹.۱۲) [دراینجا $F(r) = a_L r^{-L-1}$].

تعریفهایی که دراینجا برای هماهنگهای کروی‌برداری ارائه کردیم، عمدتاً بامحاسبات

۱۳

توابع خاص

دراین‌فصل به بررسی چهارمجموعهٔ چندجمله‌ای متعامد: هرمیت، لاگر، وچبیشف[۱] از نوع‌اول ودوم می‌پردازیم. این چهار مجموعه، نسبت‌به توابع بسل و لژاندر در فصلهای ۱۱ و ۱۲، درفیزیك ریاضی از اهمیت کمتری برخوردارند، بااین حال گهگاه به‌کارمی‌روند وازاین‌رو دست‌کم درخور توجه‌اندکی هستند. کاربردهای عددی مهم چندجمله‌ایهای چبیشف دربخش ۴.۱۳ مـورد بررسی قرار می‌گیرند. از آنجا که شگردهـای کلی ریاضی مربوط به این چندجمله‌ایها تکرار مطالب دو فصل پیشین است، این توابع را تنها به‌صورت طرحی کلی مطرح می‌کنیم. اثباتهای مشروح، که در مسیرفصلهای ۱۱ و ۱۲ باشند، به‌خواننده واگذار می‌شود. درخاتمهٔ این‌فصل، این چندجمله‌ایها و سایرتوابع را برحسب توابع فوق هندسی و فوق‌هندسی همشار بیان می‌کنیم.

۱.۱۳ توابع هرمیت

توابع مولد ــ چندجمله‌ایهای هرمیت

چنـد جمله‌ایهای هرمیت، $H_n(x)$، (شکل ۱.۱۳) را می‌تـوان به‌کمك تابع مولـد زیر

---

۱. چبیشف در AMS-55 به‌صورت Chebyshev نوشته می‌شود. ولی صورتهای گـوناگون دیگری هم برای املای این نام دیده می‌شود، مانند Tschebyscheff.

۳.۱۱.۱۲ متعامـد بهنجار بـودن هماهنگهای کروی برداری $\mathbf{V}_{LM}$، $\mathbf{X}_{LM}$، و $\mathbf{W}_{LM}$ را تحقیق کنید.

۴.۱۱.۱۲ جکسون درویرایش‌دوم کتاب الکترودینامیك کلاسیکی $\mathbf{X}_{LM}$ را بدکمك‌معادلهٔ زیر تعریف می کند

$$\mathbf{X}_{LM}(\theta,\varphi)=\frac{۱}{\sqrt{L(L+۱)}}\mathbf{L}Y_L^M(\theta,\varphi)$$

که در آن عملگر تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{L}$ ازرابطهٔ زیر به‌دست می آید

$$\mathbf{L}=-i(\mathbf{r}\times\nabla)$$

نشان دهیدکه این تعریف بامعادلهٔ (۲۴۴.۱۲) سازگار است.

۵.۱۱.۱۲ نشان دهید

$$\sum_{M=-L}^{L}\mathbf{X}_{LM}^*(\theta,\varphi)\cdot\mathbf{X}_{LM}(\theta,\varphi)=\frac{۲L+۱}{۴\pi}$$

راهنمایی. یکی از راهها این است که ازمسئلهٔ ۴.۱۱.۱۲ استفاده کنید و $\mathbf{L}$ را با استفاده ازعملگرهای فزاینده وکاهندهٔ بخش ۷.۱۲، برحسب مختصات دکارتی بسط دهید.

۶.۱۱.۱۲ نشان دهیدکه

$$\int\mathbf{X}_{LM}(\theta,\varphi)\cdot(\mathbf{r}_\circ\times\mathbf{X}_{LM})d\Omega=\circ$$

انتگرالده نمایشگر یك‌جملهٔ تداخلی درتابش الکترومغناطیسی‌است که درتوزیعهای‌زاویه‌ای سهیم است ولی درشدت‌کل سهمی‌ندارد.

مراجع

Hobson, E. W., *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*. New-York: Chelsea, 1955.

این کتاب که یك‌کتاب درسی دربارهٔ چندجمله‌ایهای لژاندر وهمهٔ‌توابع مربوط به‌آن‌است، مرجع بسیارکاملی است.

به فهرست مراجعی‌که درانتهای فصل ۱۳ آمده‌اند، نیز رجوع کنید.

جدول ۱۰۱۳ چندجمله‌ایهای هرمیت.

$$H_0(x)=1$$
$$H_1(x)=2x$$
$$H_2(x)=4x^2-2$$
$$H_3(x)=8x^3-12x$$
$$H_4(x)=16x^4-48x^2+12$$
$$H_5(x)=32x^5-160x^3+120x$$
$$H_6(x)=64x^6-480x^4+720x^2-120$$

با استفاده از تابع مولدمی‌توان بعضی مقادیر خاص چندجمله‌ایهای هرمیت را به‌دست آورد؛ یعنی

$$H_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!} \tag{۴.۱۳}$$

$$H_{2n+1}(0)=0 \tag{۵.۱۳}$$

همچنین می‌توان به‌اتکای تابع مولد رابطهٔ مهم پاریتهٔ زیر را به‌دست آورد

$$H_n(x)=(-1)^n H_n(-x) \tag{۶.۱۳}$$

نمایشهای دیگر

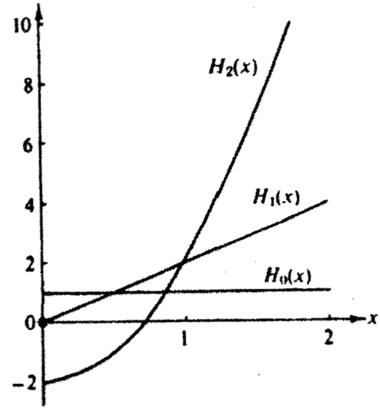
با nبار مشتقگیری از تابع مولد[1] نسبت به t و سپس مساوی صفر قرار دادن t داریم

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) \tag{۷.۱۳}$$

---

۱. تابع مولد را به‌صورت $g(x,t)=e^{x^2}e^{-(t-x)^2}$ بازنویسی کنید. دقت کنید که

$$\frac{\partial}{\partial t}e^{-(t-x)^2}=-\frac{\partial}{\partial x}e^{-(t-x)^2}$$



شکل ۱۰۱۳ چندجمله‌ایهای هرمیت.

تعریف کرد[1]

$$g(x, t)=e^{-t^{۲}+۲tx}=\sum_{n=۰}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} \qquad (۱۰۱۳)$$

روابط بازگشتی

دقت کنید که دراینجا برخلاف توابع هنکل، شاخص بالا نداریم و همین نکته باعث می‌شود این دوتابع‌را،که هیچ ارتباطی هم با یکدیگر ندارند، ازهم تمیزدهیم. باتوجه به‌تابع‌مولد پی‌می‌بریم که چندجمله‌ایهای هرمیت درروابط بازگشتی زیرصدق می‌کنند

$$H_{n+۱}(x)=۲xH_n(x)-۲nH_{n-۱}(x) \qquad (۲۰۱۳)$$

و

$$H'_n(x)=۲nH_{n-۱}(x) \qquad (۳۰۱۳)$$

معادلهٔ(۲۰۱۳)را می‌توان به‌کمك مشتقگیری از تابع‌مولد نسبت‌به t به‌دست‌آورد. مشتقگیری نسبت به x به‌معادلهٔ (۳۰۱۳) می‌انجامد.

با بسط مستقیم تابع مولد به‌آسانی پی می‌بریم که: $H_۰(x)=۱$ و $H_۱(x)=۲x$. دراین‌صورت معادلهٔ (۲۰۱۳) تشکیل هر $H_n(x)$ مطلوبی را میسرمی‌سازد (n عدد درست است). برای مراجعهٔ راحت‌تر، تعدادی چندجمله‌ای اول هرمیت را در جدول ۱۰۱۳ آورده‌ایم.

---

۱. نحوهٔ استخراج این تابع مولد درمسئلهٔ ۳.۱.۱۳ خلاصه شده است.

که $\varphi_n(x)$ دیگر یك چندجمله‌ای نیست.

پس‌از جانشانی در معادلهٔ (۱۰.۱۳)، معادلهٔ دیفرانسیل مربوط به $\varphi_n(x)$ به‌دست می‌آید

$$\varphi_n''(x)+(2n+1-x^2)\varphi_n(x)=0 \qquad (12.13)$$

این‌عبارت، معادلهٔ دیفرانسیل مربوط به نوسانگر هماهنگ ساده درمکانیك کوانتومی‌است، که شاید تنها کاربرد بسیار مهم چندجمله‌ایهای هرمیت به‌شمار می‌آید. معادلهٔ (۱۲.۱۳) خود-الحاقی است و جوابهای‌آن، $\varphi_n(x)$ها، در بازهٔ $(-\infty<x<\infty)$ با تابع وزنی واحد متعامدند.

مسئلهٔ بهنجارش این توابع باقی می‌ماند. مانند بخش ۳.۱۲ عمل می‌کنیم؛ معادلهٔ (۱.۱۳) را درخودش وسپس در e^{-x^2} ضرب می‌کنیم. خواهیم داشت

$$e^{-x^2}e^{-s^2+2sx}e^{-t^2+2tx}=\sum_{m,n=0}^{\infty}e^{-x^2}H_m(x)H_n(x)\frac{s^m t^n}{m!n!} \qquad (13.13)$$

وقتی روی x از $-\infty$ تا $+\infty$ انتگرال بگیریم، جملات حاوی حاصلضرب دوتابع با شاخصهای بالای مختلف به‌اعتبار خاصیت تعامد صفرمی‌شوند[1]، و

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(st)^n}{n!n!}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}[H_n(x)]^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2-s^2+2sx-t^2+2tx}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-s-t)^2}e^{2st}dx \qquad (14.13)$$

$$=\pi^{1/2}e^{2st}=\pi^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(st)^n}{n!}$$

با مساوی قراردادن ضریب توانهای مشابه به st، داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}[H_n(x)]^2dx=2^n\pi^{1/2}n! \qquad (15.13)$$

---

۱. جملات حاوی حاصلضرب دوتابع با شاخصهای بالای مختلف $(m\neq n)$ را می‌توانیم، اگر بخواهیم، نگه داریم. سپس، هنگامی که ضرایب $s^\alpha t^\beta$ دوطرف را باهم برابرمی‌گیریم، خاصیت تعامد آشکارمی‌شود.

از این عبارت به نمایش دیگر برای $H_n(x)$ می‌رسیم. با استفاده از حساب مانده‌ها (فصل ۷، جلد اول) می‌توان به نمایش دیگری دست یافت. اگر معادلهٔ (۱۰۱۳) را در t^{-m-1} ضرب کنیم و در پیرامون مبدأ از آن انتگرال بگیریم، فقط جملهٔ حاوی $H_m(x)$ باقی می‌ماند

$$H_m(x)=\frac{m!}{2\pi i}\oint t^{-m-1}e^{-t^2+2tx}\,dt \tag{۸.۱۳}$$

همچنین به کمک معادلهٔ (۱.۱۳)، می‌توانیم چندجمله‌ای هرمیت $H_n(x)$ را به‌صورت سری بنویسیم

$$H_n(x)=(2x)^n-\frac{2n!}{(n-2)!2!}(2x)^{n-2}+\frac{4n!}{(n-4)!4!}(2x)^{n-4}1\times 3\cdots$$

$$=\sum_{s=0}^{[n/2]}(-2)^s(2x)^{n-2s}\binom{n}{2s}1\times 3\times 5\times\cdots(2s-1) \tag{۹.۱۳}$$

$$=\sum_{s=0}^{[n/2]}(-1)^s(2x)^{n-2s}\frac{n!}{(n-2s)!s!}$$

این سری به‌ازای عدد درست n خاتمه می‌یابد و چندجمله‌ای هرمیت به‌دست می‌آید.

تعامد

روابط بازگشتی [معادله‌های (۲.۱۳) و (۳.۱۳)] به‌معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم زیر می‌انجامد

$$H_n''(x)-2xH_n'(x)+2nH_n(x)=0 \tag{۱۰.۱۳}$$

آشکار است که این معادله خود-الحاقی نیست.

برای آنکه معادلهٔ (۱۰.۱۳) را به‌صورت خود-الحاقی درآوریم، آن را در $\exp(-x^2)$ ضرب می‌کنیم (مسئلهٔ ۲.۱.۹). این کار، به‌انتگرال تعامد زیر می‌انجامد

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx=0,\quad m\neq n \tag{۱۰.۱۳ الف}$$

که تابع وزنی $\exp(-x^2)$ در این انتگرال، پیامد تبدیل معادلهٔ دیفرانسیل به‌یک صورت خود-الحاقی است. انتخاب بازهٔ $(-\infty,\infty)$ به‌این اعتبار است که شرایط مرزی عملگر هرمیتی، بخش ۱.۹، برآورده شود. گاهی بهتر است که تابع وزنی را در چندجمله‌ایهای هرمیت وارد کنیم. می‌توان تابع زیر را تعریف کرد

$$\varphi_n(x)=e^{-x^2/2}H_n(x) \tag{۱۱.۱۳}$$

$$\mathbf{X}_{LM}=\boldsymbol{\theta}_\circ\left\{\frac{-M}{[L(L+1)]^{1/2}\sin\theta}Y_L^M\right\}+\boldsymbol{\varphi}_\circ\left\{\frac{-i}{[L(L+1)]^{1/2}}\frac{\partial Y_L^M}{\partial\theta}\right\}$$

(۲۴۴.۱۲)

این توابع در رابطهٔ کلی تعامد زیر صدق می‌کنند

$$\int \mathbf{A}_{LM}\cdot\mathbf{B}^*_{L'M'}\,d\Omega=\delta_{AB}\,\delta_{LL'}\,\delta_{MM'} \qquad (۲۴۵.۱۲)$$

که در آن **A** و **B** ممکن است **V**، **X**، یا **W** باشند. این رابطه را می‌توان با استفاده از تعریف **V**، **X**، و **W** و تبدیل انتگرال به انتگرال یکی از هماهنگهای کروی متعامد بهنجار معمولی $Y_L^M(\theta,\varphi)$ اثبات کرد.

به‌اتکای اعمال مربوط به پاریته (وارونی مختصات)، هماهنگهای کروی برداری به صورت زیر تبدیل می‌شوند

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{LM}(\theta',\varphi')&=(-1)^{L+1}\mathbf{V}_{LM}(\theta,\varphi)\\ \mathbf{W}_{LM}(\theta',\varphi')&=(-1)^{L+1}\mathbf{W}_{LM}(\theta,\varphi)\\ \mathbf{X}_{LM}(\theta',\varphi')&=(-1)^{L}\mathbf{X}_{LM}(\theta,\varphi)\end{aligned} \qquad (۲۴۶.۱۲)$$

که در آن

$$\begin{aligned}\theta'&=\pi-\theta\\ \varphi'&=\pi+\varphi\end{aligned} \qquad (۲۴۷.۱۲)$$

برای اثبات این روابط، باید به‌خاطر داشت که از بردارهای یکهٔ مختصات قطبی کروی، $\mathbf{r}_\circ$ و $\boldsymbol{\varphi}_\circ$ فرد و $\boldsymbol{\theta}_\circ$ زوج است. این خواص را می‌توان با بیان بردارهای یکهٔ $\mathbf{r}_\circ$، $\boldsymbol{\theta}_\circ$، و $\boldsymbol{\varphi}_\circ$ برحسب بردارهای یکهٔ دکارتی **i**، **j**، و **k** ومختصات قطبی کروی، اثبات کرد.

برای نمایش کاربرد هماهنگهای کروی برداری، دراینجا نیزمعادلهٔ (۲۴۱.۱۲) را درنظر بگیرید. از جدول هیل برای روابط دیفرانسیلی داریم

$$\nabla\cdot[F(r)\mathbf{V}_{LM}(\theta,\varphi)]=-\left(\frac{L+1}{2L+1}\right)^{1/2}\left[\frac{dF}{dr}+\frac{L+2}{r}F\right]Y_L^M(\theta,\varphi)$$

(۲۴۸.۱۲)

$$\nabla\cdot[F(r)\mathbf{W}_{LM}(\theta,\varphi)]=\left(\frac{L}{2L+1}\right)^{1/2}\left[\frac{dF}{dr}-\frac{L-1}{r}F\right]Y_L^M(\theta,\varphi)$$

(۲۴۹.۱۲)

نوسانگر هماهنگ سادهٔ مکانیک کوانتومی

چنان که گفتیم، چندجمله‌ایهای هرمیت دربررسی مکانیک کوانتومی نوسانگر هماهنگ ساده به‌کارمی‌روند. معادلهٔ موج شرودینگر، برای انرژی پتانسیل

$$V=(۱/۲)Kz^۲=(۱/۲)m\omega^۲z^۲ \quad (\text{نیرو } \mathbf{F}=-\nabla V=-Kz\mathbf{k})$$

عبارت است از

$$\frac{-\hbar^۲}{۲m}\nabla^۲\Psi(z)+\frac{۱}{۲}Kz^۲\Psi(z)=E\Psi(z) \qquad (۱۶.۱۳)$$

جرم ذرهٔ نوسانگر ما m و انرژی کل آن E است. با استفاده ازثابتها و متغیرهای خلاصه شده به‌قرار زیر

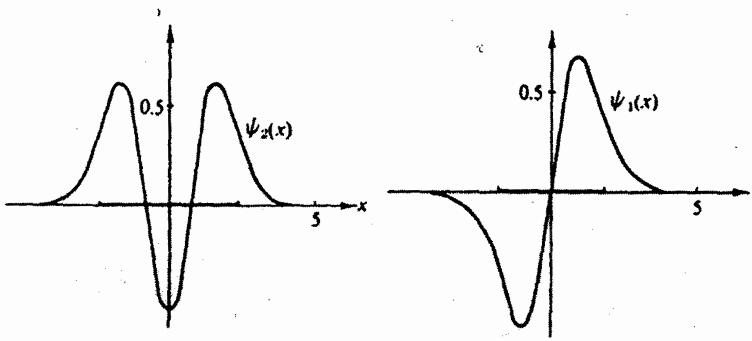
$$\alpha^۴=\frac{mK}{\hbar^۲}=\frac{m^۲\omega^۲}{\hbar^۲} \quad \text{با} \quad x=\alpha z$$
$$\lambda=\frac{۲E}{\hbar}\left(\frac{m}{K}\right)^{۱/۲}=\frac{۲E}{\hbar\omega} \qquad (۱۷.۱۳)$$

که در آن ω بسامد زاویه‌ای نوسانگر کلاسیکی متناظر است، معادلهٔ (۱۶.۱۳) [با تغییر $\Psi(z)=\Psi(x/a)=\psi(x)$] به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\frac{d^۲\psi(x)}{dx^۲}+(\lambda-x^۲)\psi(x)=۰ \qquad (۱۸.۱۳)$$

این‌عبارت همان معادلهٔ (۱۲.۱۳) است که در آن $\lambda=۲n+۱$. ازاین‌رو (شکل ۲.۱۳) داریم

$$\psi_n(x)=۲^{-n/۲}\pi^{-۱/۴}(n!)^{-۱/۲}e^{-x^۲/۲}H_n(x) \quad (\text{بهنجار}) \qquad (۱۹.۱۳)$$



شکل ۲.۱۳ تابع‌موجهای نوسانگر درمکانیک کوانتومی. پاره‌خط پررنگ روی محور x گسترهٔ مجاز نوسانگر کلاسیکی با انرژی کل یکسان را نشان می‌دهد.

این شرط را که n باید عدد درست باشد، شرایط مرزی‌سیستم‌مکانیک کوانتومی یعنی شرط زیر، وضع می‌کند

$$\lim_{z\to\pm\infty} \Psi(z)=0$$

به‌خصوص اگر $n\to\nu$، عدد غیر درست، جواب سری توانی معادلهٔ (۱۰.۱۳) (مسئلهٔ ۶.۵.۸) نشان می‌دهد که $H_\nu(x)$ به ازای مقادیر بزرگ x مانند $x^\nu e^{x^2}$ رفتار می‌کند. بنابراین توابع $\psi_\nu(x)$ و $\Psi_\nu(z)$ در بینهایت نامتناهی‌می‌شوند و نمی‌توان تابع‌موج $\Psi(z)$ را بهنجار کرد. بااین شرط انرژی به‌صورت زیر درمی‌آید

$$E=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \tag{۲۰.۱۳}$$

ازآنجا که گسترهٔ مقادیر n اعداد درست مثبت است ($n\geqslant 0$)، مشاهده می‌شود که انرژی کوانتیده است و یک انرژی‌کمینه یانقطهٔ صفر به‌صورت زیر وجود دارد

$$E_{\min}=\frac{1}{2}\hbar\omega \tag{۲۱.۱۳}$$

این انرژی نقطهٔ صفر، جنبه‌ای‌است از اصل عدم قطعیت ویک‌پدیدهٔ صرفاً کوانتومی به‌شمار می‌آید.

عملگرهای فزاینده وکاهنده

یکی دیگر از روشهای بررسی نوسانگرمکانیک‌کوانتومی که در بسیاری از کتابهای درسی مکانیک‌کوانتومی یافت می‌شود، بهره‌گیری ازعملگرهای فزاینده وکاهنده است

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{d}{dx}\right)\psi_n(x)=(n+1)^{1/2}\psi_{n+1}(x) \tag{۲۲.۱۳الف}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{d}{dx}\right)\psi_n(x)=n^{1/2}\psi_{n-1}(x) \tag{۲۲.۱۳ب}$$

درمکانیک‌کوانتومی غالباً عملگر فزاینده‌را یک عملگرآفرینش، $\hat{a}^+$، وعملگر کاهنده رایک‌عملگر نابودی، $\hat{a}$، می‌نامند. تابع‌موج ψ_n [که در واقع به‌کمک معادلهٔ (۱۹.۱۳) به‌دست می‌آید] نامعلوم است. به‌دست آوردن آن مشابه استفاده ازعملگرهای‌فزاینده وکاهنده دربخش ۷.۱۲ است. تابع‌موج با انرژی‌کمینه یا تابع‌موج حالت‌پایه، ψ_0، در معادلهٔ زیرصدق می‌کند

$$\left(x+\frac{d}{dx}\right)\psi_0(x)=0 \tag{۲۳.۱۳}$$

وپس از بهنجارش به‌واحد، داریم

$$\psi_0(x)=\pi^{-1/4}e^{x^2/2} \qquad (۲۳.۱۳ \text{الف})$$

که با معادلهٔ (۱۹.۱۳) سازگاراست. دراین‌صورت تابع‌موجهای حالتهای برانگیخته، ψ_1، ψ_2، وغیره را می‌توان به‌کمك عملگر فزاینده، در معادلهٔ (۲۲.۱۳ الف)، به‌دست آورد. تحقیق درستی روابط عملگرهای فزاینده وکاهنده، معادلات (۲۲.۱۳الف) و (۲۲.۱۳ب)، درقالب مسئلهٔ ۱۶.۱.۱۳ به‌خواننده واگذارمی‌شود.

درمکانیك‌کوانتومی، به‌ویژه در طیف‌نمایی مولکولی به انتگرالهایی به‌صورت زیر نیاز پیدا می‌کنیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\,dx$$

نمونه‌هایی از این انتگرالها را، به‌ازای $r=1$ و $r=2$ (با $n=m$)، درمسائل آخر این بخش ارائه کرده‌ایم. نمونه‌های بسیار دیگری از این انتگرالها توسط ویلسون، دسیوز، و کراس[1] ارائه شده‌است.

کاربرد پتانسیل‌نوسانگر درمحاسبات ساختارهسته‌ای(مدل پوسته‌ای هسته) نیزفراوان است.

معادلهٔ (۱۰.۱۳) یك جواب مستقل دیگر هم دارد. این تابع نوع دوم هرمیت، یك سری نامتناهی است (بخشهای ۵.۸ و ۶.۸) و دست‌کم تاکنون هیچ‌گونه کاربرد فیزیکی نداشته است.

مسائل

۱.۱.۱۳ فرض کنید که چندجمله‌ایهای هرمیت را جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل (۱۰.۱۳) بگیریم وبا استفاده ازآن رابطهٔ بازگشتی، معادلهٔ(۳.۱۳)، ومقادیر $H_n(0)$ نیزمعلوم‌باشند.

(الف)فرض‌کنیدکه تابع مولد زیروجود دارد

$$g(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)t^n/n!$$

(ب) از $g(x,t)$ نسبت به x مشتق‌بگیرید و بااستفاده ازرابطهٔ بازگشتی، یك‌معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول برای $g(x,t)$ تشکیل دهید.

1. Wilson, Jr., E. B., J.C. Decius, and P.C. Cross, *Molecular Vibrations*. New York: McGraw-Hill, 1955.

(ج) t را ثابت و نسبت به x انتگرال بگیرید.

(د) $g(0, t)$ را با استفاده ازمعادلات (۴.۱۳) و(۵.۱۳) محاسبه کنید. سرانجام، نشان دهید

$$g(x, t)=\exp(-t^{2}+2tx)$$

۲.۱.۱۳ در روند بررسی واستخراج خواص چندجمله‌ایهای هرمیت، می‌توانید ازجاهای مختلفی شروع کنید، مثلا:

۱. معادلهٔ دیفرانسیل هرمیت [معادلهٔ (۱۰.۱۳)]،

۲. فرمول رودریگز [معادلهٔ (۷.۱۳)]،

۳. نمایش انتگرالی [معادلهٔ (۸.۱۳)]،

۴. تابع مولد [معادلهٔ (۱.۱۳)]،

۵. روش گرام-اشمیت برای تشکیل مجموعهٔ کاملی ازچندجمله‌ایهای متعامد، روی بازهٔ $(-\infty,\infty)$ با تابع وزنی $\exp(-x^{2})$ (بخش ۳.۹).

به‌طورخلاصه شرح دهید که چگونه می‌توانید ازهریك ازاین نقاط شروع کنید و بقیهٔ آنها را به‌دست آورید.

۳.۱.۱۳ بااستفاده ازتابع مولد نشان دهید که

$$H_{n}(x)=\sum_{s=0}^{[n/2]}(-1)^{s}\frac{n!}{(n-2s)!s!}(2x)^{n-2s}$$

۴.۱.۱۳ بااستفاده ازتابع مولد، روابط بازگشتی زیر را استخراج کنید

$$H_{n+1}(x)=2xH_{n}(x)-2nH_{n-1}(x)$$

$$H_{n}'(x)=2nH_{n-1}(x)$$

۵.۱.۱۳ ثابت کنید

$$\left(2x-\frac{d}{dx}\right)^{n}1=H_{n}(x)$$

راهنمایی. چند رابطهٔ اول را اثبات کنید وآنگاه از استقرای ریاضی بهره‌گیرید.

۶.۱.۱۳ ثابت کنید

$$|H_{n}(x)|\leqslant|H_{n}(ix)|$$

۷.۱.۱۳ صورت سری $H_n(x)$، معادلهٔ (۹.۱۳)، را به صورت یك سری توانی صعودی بازنویسی کنید.

پاسخ.

$$H_{2n}(x)=(-1)^n\sum_{s=0}^{n}(-1)^s(2x)^{2s}\frac{(2n)!}{(2s)!(n-s)!}$$

$$H_{2n+1}(x)=(-1)^n\sum_{s=0}^{n}(-1)^s(2x)^{2s+1}\frac{(2n+1)!}{(2s+1)!(n-s)!}$$

۸.۱.۱۳ (الف) x^{2r} را به‌صورت یك سری از چندجمله‌ایهای هرمیت بامرتبهٔ زوج بسط دهید.

(ب) x^{2r+1} را به‌صورت یك‌سری ازچندجمله‌ایهای هرمیت بامرتبهٔ فرد بسط‌دهید.

پاسخ. (الف)

$$x^{2r}=\frac{(2r)!}{2^{2r}}\sum_{n=0}^{r}\frac{H_{2n}(x)}{(2n)!(r-n)!}$$

(ب)

$$x^{2r+1}=\frac{(2r+1)!}{2^{2r+1}}\sum_{n=0}^{r}\frac{H_{2n+1}(x)}{(2n+1)!(r-n)!}\,,\quad r=0,1,2,\dots$$

راهنمایی. ازنمایش رردریگز برای $H_{2n}(x)$ انتگرال جزء به‌جزء بگیرید.

۹.۱.۱۳ نشان دهید

(الف)

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_n(x)\exp[-x^2/2]dx=\begin{cases}2\pi n!/(n/2)!, & n \text{ زوج}\\ 0, & n \text{ فرد}\end{cases}$$

(ب)

$$\int_{-\infty}^{\infty}xH_n(x)\exp[-x^2/2]dx=\begin{cases}0, & n \text{ زوج}\\ 2\pi\dfrac{(n+1)!}{\left(\frac{n+1}{2}\right)!}, & n \text{ فرد}\end{cases}$$

۱۰.۱.۱۳ نشان دهید

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^m e^{-x^2}H_n(x)dx=0$$ به‌ازای m عدد درست $0\leqslant m\leqslant n-1$.

۱۱.۱.۱۳ احتمال‌گذار بین‌دوحالت m و n نوسانگر به‌انتگرال زیر بستگی دارد

$$\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-x^2}H_n(x)H_m(x)\,dx$$

نشان دهید که حاصل این انتگرال با $\pi^{1/2}2^{n-1}n!\delta_{m,n-1}+\pi^{1/2}2^{n}(n+1)!\delta_{m,n+1}$ برابر است. این نتیجه نشان می‌دهدکه چنین‌گذارهایی تنها می‌توانند بین ترازهای انرژی مجاور، با $m=n\pm1$، صورت پذیرند.

راهنمایی. تابع مولد [معادلهٔ (۱۰۱۳)] را درخودش ضرب کنید، برای این‌کار دو مجموعهٔ متفاوت ازمتغیرها(x, s) و(x, t) را بـه کار برید. یـا در روند دیگر، می‌توان عامل x را به‌کمك رابطهٔ بازگشتی، معادلهٔ (۲۰۱۳)، حذف‌کرد.

۱۲۰۱۰۱۳ نشان دهیدکه

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} H_n(x) H_n(x)\, dx = \pi^{1/2} 2^n n! \left(n+\frac{1}{2}\right)$$

به‌این انتگرال درمحاسبهٔ میانگین مربعی جابه‌جایی نوسانگر کوانتومی برمی‌خوریم.

راهنمایی. ازرابطهٔ بازگشتی معادلهٔ (۲۰۱۳) وانتگرال تعامد استفاده کنید.

۱۳۰۱۰۱۳ انتگرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp[-x^2] H_n(x) H_m(x)\, dx$$

را برحسب n و m وتوابع دلتای کرونکر مناسب محاسبه کنید.

پاسخ.

$2^{n-1}\pi^{1/2}(2n+1)n!\delta_{n,m}+2^n\pi^{1/2}(n+2)!\delta_{n+2,m}+2^{n-2}\pi^{1/2}n!\delta_{n-2,m}$.

۱۴۰۱۰۱۳ نشان دهیدکه به‌ازای اعداد درست نامنفی n، p، و r داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^r \exp[-x^2] H_n(x) H_{n+p}(x)\, dx = \begin{cases} 0, & p>r \\ 2^n \pi^{1/2}(n+r)!, & p=r \end{cases}$$

راهنمایی. رابطهٔ بازگشتی، معادلهٔ (۲۰۱۳)، را p بار به‌کار برید.

۱۵۰۱۰۱۳ (الف) بااستفاده ازفرمول انتگرال کوشی، یك‌نمایش انتگرالی براساس معادلهٔ (۱۰۱۳)، برای $H_n(x)$ با پربندی‌که نقطهٔ $z=-x$ را دور بزند، ابداع‌کنید.

پاسخ. $H_n(x)=\dfrac{n!}{2\pi i}e^{x^2}\oint \dfrac{e^{-z^2}}{(z+x)^{n+1}}dz$.

(ب) از طریق جانشانی مستقیم نشان دهید که این نمایش در معادلهٔ هرمیت صدق می‌کنـد.

۱۶.۱.۱۳ با استفاده از

$$\psi_n(x)=e^{x^{۲}/۲}H_n(x)/(۲^n n!\pi^{۱/۲})^{۱/۲}$$

تحقیق کنید که

$$\hat{a}_n\psi_n(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(x+\frac{d}{dx}\right)\psi_n(x)=n^{۱/۲}\psi_{n-۱}(x)$$

$$\hat{a}_n^{\dagger}\psi_n(x)=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(x-\frac{d}{dx}\right)\psi_n(x)=(n+۱)^{۱/۲}\psi_{n+۱}(x)$$

یادآوری. در رهیافتهای متداول در مکانیک کوانتومی این خواص فزاینده و کاهنده، قبل از آنکه شکل $\psi_n(x)$ معلوم باشد، تثبیت می‌شوند.

۱۷.۱.۱۳ (الف) درستی اتحاد عملگری زیر را تحقیق کنید

$$x-\frac{d}{dx}=-\exp[x^{۲}/۲]\frac{d}{dx}\exp[-x^{۲}/۲]$$

(ب) تابع‌موج بهنجار نوسانگر هماهنگ ساده عبارت است از

$$\psi_n(x)=(\pi^{۱/۲}۲^n n!)^{-۱/۲}\exp[-x^{۲}/۲]H_n(x)$$

نشان دهید که این تابع را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\psi_n(x)=(\pi^{۱/۲}۲^n n!)^{-۱/۲}\left(x-\frac{d}{dx}\right)^n\exp[-x^{۲}/۲]$$

یادآوری. این عبارت متناظر است با کاربرد n-گانهٔ عملگر فزایندهٔ مسئلهٔ ۱۶.۱.۱۳.

۱۸.۱.۱۳ (الف) نشان دهید که هامیلتونی نوسانگر ساده [در معادلهٔ (۱۸.۱۳)] را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$H=-\frac{۱}{۲}\,\frac{d^{۲}}{dx^{۲}}+\frac{۱}{۲}x^{۲}=\frac{۱}{۲}(\hat{a}\hat{a}^{\dagger}+\hat{a}^{\dagger}\hat{a})$$

راهنمایی. E را برحسب یکاهای $\hbar\omega$ بیان کنید.

(ب) با استفاده از فرمولبندی عملگر آفرینش-نابودی در بند (الف) نشان دهید که

$$H\psi(x)=(n+\frac{۱}{۲})\psi(x)$$

یعنی، ویژه‌مقدارهای انرژی برابرنـد با $E=(n+۱/۲)\hbar\omega$، که با معادلهٔ (۲۰.۱۳) سازگار است.

۱۹.۱.۱۳ بـرنامه‌ای بنـویسید کـه ضـرایب a_s چند جمله‌ای مربوط بـه چنـدجمله‌ای هرمیت، $H_n(x)=\sum_{s=۰}^{n}a_s x^s$، را تولیدکند.

۲۰.۱.۱۳ تابع $f(x)$ را به‌صورت یك‌سری هرمیت به‌قرار زیربسط داده‌ایم

$$f(x)=\sum_{n=۰}^{\infty} a_n H_n(x)$$

ضرایب a_n، بااستفاده‌ازتعامد وبهنجارش چندجمله‌ای‌هرمیت به‌صورت زیر به‌دست‌می‌آیند

$$a_n=\frac{۱}{۲^n\pi^{۱/۲}n!}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)H_n(x)e^{-x^۲}dx$$

ضرایب هرمیت، a_n، را به‌ازای $f(x)=x^۸$، به‌کمك کوادراتور گاؤس-هرمیت (پیوست ۲ راببینید) تعیین‌کنید. ضرایب حاصل‌را باجدول۱۲.۲۲ ازکتاب AMS-55 بیازمایید.

۲۱.۱.۱۳ (الف) مانند مسئلهٔ ۱۳.۲.۱۲، ماتریس ضرایب چندجمله‌ایهای زوج هرمیت، یعنی ماتریس $\mathbf{B}$ را، که یك سری زوج هرمیت را به‌یك سری زوج توانی تبدیـل می‌کند، تشکیل دهید.

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix} ۱ & -۲ & ۱۲ & \cdots \\ ۰ & ۴ & -۴۸ & \cdots \\ ۰ & ۰ & ۱۶ & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix}$$

$\mathbf{B}$ را تا سری چندجمله‌ای زوج $H_۸(x)$ ادامه دهید.

(ب) ماتریس $\mathbf{B}$ را وارون‌کنید وماتریس $\mathbf{A}$ راکه سریهای زوج توانی(تا $x^۸$) را به‌سریهای چندجمله‌ایهای‌زوج هرمیت تبدیل‌می‌کند، به‌دست‌آورید. عناصر$\mathbf{A}$را باعناصری که درجدول ۱۲.۲۲ متعلق به AMS-55 آمده‌اند، بیازمایید.

(ج) سرانجام، با استفاده از ضرب ماتریسی، سری هرمیتی معادل با $f(x)=x^۸$ را تعیین‌کنید.

۲۲.۱.۱۳ زیر-برنامه‌ای بنویسیدکه سری توانی متناهی $\sum_{n=۰}^{N} a_n x^n$ را به‌سری هرمیت $\sum_{n=۰}^{N} b_n H_n(x)$ تبدیل‌کند. ازرابطهٔ بازگشتی معادلهٔ (۲.۱۳) بهره‌گیرید وشگردی راکه

طرح کلی آن در بخش ۴.۱۳ برای یک‌سری چبیشف آمده‌است، دنبال کنید.

یادآوری. اگر $f(x)$ به‌صورت یک‌سری توانی در دسترس باشد، هر دو مسئلهٔ ۲۱.۱.۱۳ و ۲۲.۱.۱۳ سریعتر و دقیقتر از کوادراتور گاؤسی در مسئلهٔ ۲۰.۱.۱۳ به نتیجه می‌رسند.

۲۳.۱.۱۳ با استفاده از کوادراتور ده‌رقمی گاؤس-هرمیت (به‌ازای $p+q+r\leqslant 19$) زیر-برنامه‌ای برای محاسبهٔ عناصر ماتریسی چندجمله‌ای هرمیت به‌صورت زیر بنویسید

$$M_{pqr}=\int_{-\infty}^{\infty}H_p(x)H_q(x)x^re^{-x^2}dx$$

یک آزمون پاریته هم در برنامه بگنجانید و انتگرالهایی را که انتگرالده آنها پاریتهٔ فرد دارند برابر صفر قراردهید. این نکته را بیازمایید که آیا r درگسترهٔ $|p-q|\leqslant r\leqslant p+q$ واقع است یا خیر؟ اگر چنین نیست، قرار دهید $M_{pqr}=0$. نتایج حاصل را با حالتهای خاصی بیازمایید که درمسائل ۱۱.۱.۱۳، ۱۲.۱.۱۳، ۱۳.۱.۱۳، و ۱۴.۱.۱۳ آمده‌است.

۲۴.۱.۱۳ تابع‌موجهای بهنجار نوسانگر خطی

$$\psi_n(x)=2^{-n/2}\pi^{-1/4}(n!)^{-1/2}H_n(x)\exp(-x^2/2)$$

را به‌ازای $n=0(1)5$ و $x=0.0(0.1)5.0$ محاسبه کنید و به‌صورت جدولی گرد آورید. اگر یک برنامه برای رسم منحنی دراختیار دارید، نتیجهٔ حاصل را ترسیم کنید.

۲.۱۳ توابع لاگر

معادلهٔ دیفرانسیل ــ چندجمله‌ایهای لاگر

اگر بررسی خود را با تابع مولد مناسبی شروع کنیم، می‌توانیم چندجمله‌ایهای لاگر را، درست به‌همان ترتیب چندجمله‌ایهای هرمیت، تشکیل دهیم. همچنین می‌توان یک جواب سری باروشهای بخش ۵.۸ به‌دست آورد. دراینجا برای آنکه شگرد متفاوتی را ارائه‌دهیم، کار خود را بامعادلهٔ دیفرانسیل لژاندر آغاز می‌کنیم و به‌همان ترتیبی که درمورد تابع تعدیل‌یافتهٔ بسل $K_\nu(x)$ (بخش ۶.۱۱) عمل کردیم، جوابی به‌صورت یک انتگرال پربندی به‌دست می‌آوریم. آنگاه ازاین‌نمایش انتگرالی یک تابع مولد استخراج خواهیم کرد.

معادلهٔ دیفرانسیل لاگر به‌صورت زیر است

$$xy''(x)+(1-x)y'(x)+ny(x)=0 \qquad (۲۴.۱۳)$$

تلاش می‌کنیم y را، یا به‌بیان بهتر y_n را (چون y به n بستگی دارد) به‌کمک انتگرال پربندی زیرنمایش دهیم

$$y_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+1}}\,dz \qquad (\text{الف}۲۵.۱۳)$$

پربند مبدأ را دورمی‌زند ولی نقطهٔ $z=1$ درآن نمی‌گنجد. ازبخش ۴.۶، داریم

$$y'_n(x)=-\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)^2z^{n}}\,dz \qquad (\text{ب}۲۵.۱۳)$$

$$y''_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)^3z^{n-1}}\,dz \qquad (\text{ج}۲۵.۱۳)$$

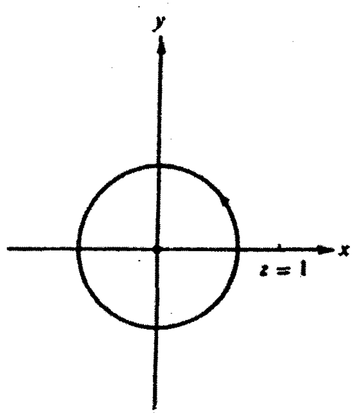
با نشاندن درسمت چپ معادلهٔ (۲۴.۱۳) خواهیم داشت

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\left[\frac{x}{(1-z)^3z^{n-1}}-\frac{1-x}{(1-z)^2z^{n}}+\frac{n}{(1-z)z^{n+1}}\right]e^{-xz/(1-z)}\,dz$$

که برابر است با

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n}}\right]dz \qquad (۲۶.۱۳)$$

اگرازاین دیفرانسیل کامل خود، پیرامون یک‌پربند انتگرال بگیریم و این پربند چنان‌انتخاب شده‌باشدکه درآن مقدار نهایی بامقداراولیه برابرباشد(شکل۳.۱۳)، انتگرال صفرخواهد شد و بدینسان تأیید می‌شود که $y_n(x)$ [معادلهٔ (۲۵.۱۳ الف)] یکی از جوابهای معادلهٔ لاگر است.



شکل ۳.۱۳ پربند تابع لاگر.

مرسوم است که $L_n(x)$، چندجمله‌ای لاگر (شکل ۴.۱۳)، را به‌صورت زیر تعریف کنند[1]

$$L_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)z^{n+1}}dz \qquad (۲۷.۱۳)$$

این عبارت دقیقاً همان چیزی‌است که ازسری

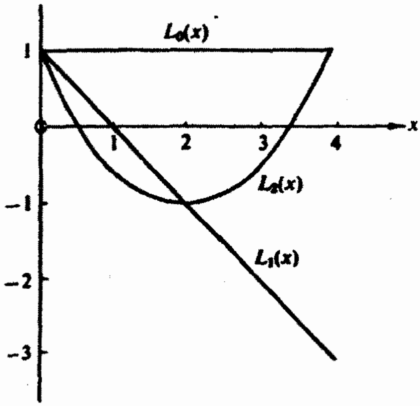
$$g(x, z)=\frac{e^{-xz/(1-z)}}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)z^n, \quad |z|<1 \qquad (۲۸.۱۳)$$

ازطریق ضرب آن در z^{-n-1} و انتگرالگیری حول مبدأ به‌دست می‌آوردیم. همان‌گونه‌که دربررسی حساب مانده‌ها (بخش۲.۷) دیدیم، تنها جملهٔ z^{-1} درسری باقی می‌ماند. براین اساس تابع $g(x, z)$ را تابع مولد چندجمله‌ایهای لاگرمی‌گیریم.

با تغییر متغیری به‌قرارزیر

$$z=\frac{s-x}{s} \quad \text{یا} \quad \frac{xz}{1-z}=s-x \qquad (۲۹.۱۳)$$

$$L_n(x)=\frac{e^x}{2\pi i}\oint\frac{s^n e^{-s}}{(s-x)^{n+1}}ds \qquad (۳۰.۱۳)$$



شکل ۴.۱۳ چندجمله‌ایهای لاگر.

---

۱. تعریفهای دیگری هم برای $L_n(x)$ به‌کار می‌رود. تعریفهایی که دراینجا برای چندجمله‌ای لاگر $L_n(x)$ و چندجمله‌ای وابستهٔ لاگر $L_n^k(x)$ ارائه می‌شود با فصل ۲۲ از کتاب AMS-55 سازگار است.

پربند جدید، نقطهٔ $x=s$ را در صفحهٔ مختلط s دربرمی‌گیرد. با استفاده ازفرمول انتگرال کوشی (برای مشتقها) داریم

$$L_n(x)=\frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}),\quad (\text{عدد درست } n)\qquad (۳۱.۱۳)$$

که از آن فرمول رودریگز برای چندجمله‌ایهای لاگر را به دست می‌آوریم. به کمك این نمایشهای $L_n(x)$، صورت سری زیر (برای اعداد درست n) و چندجمله‌ایهای خاصی راکه درجدول ۲.۱۳ درج شده‌اند به‌دست می‌آوریم (مسئلهٔ ۱.۲.۱۳)

$$L_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!}\left[x^n-\frac{n^2}{1!}x^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2}-\dots+(-1)^n n!\right]\qquad (۳۲.۱۳)$$

$$=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{n!}{(n-m)!m!m!}x^m=\sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}\frac{n!x^{n-s}}{(n-s)!(n-s)!s!}$$

با مشتقگیری ازتابع مولد درمعادلهٔ (۲۸.۱۳) نسبت‌به x و z روابط بازگشتی زیر را به‌دست می‌آوریم

$$(n+1)L_{n+1}(x)=(2n+1-x)L_n(x)-nL_{n-1}(x)\qquad (۳۳.۱۳)$$

$$xL_n'(x)=nL_n(x)-nL_{n-1}(x)\qquad (۳۴.۱۳)$$

جدول ۲.۱۳ چندجمله‌ایهای لاگر.

$$L_0(x)=1$$

$$L_1(x)=-x+1$$

$$2!L_2(x)=x^2-4x+2$$

$$3!L_3(x)=-x^3+9x^2-18x+6$$

$$4!L_4(x)=x^4-16x^3+72x^2-96x+24$$

$$5!L_5(x)=-x^5+25x^4-200x^3+600x^2-600x+120$$

$$6!L_6(x)=x^6-36x^5+450x^4-2400x^3+5400x^2-4320x+720$$

برای محاسبهٔ کامپیوتری مقادیر عـددی $L_n(x)$، از معادلهٔ (۳۳.۱۳) استفاده می‌شود و به دلایل صرفه‌جویی و پایداری عددی آن را به‌صورت زیر تغییر می‌دهیم

$$L_{n+1}(x)=2L_n(x)-L_{n-1}(x)$$
$$-[(1+x)L_n(x)-L_{n-1}(x)]/(n+1) \qquad \text{(۳۳.۱۳ الف)}$$

کامپیوتر کار محاسبه را بامقادیرعددی معلوم $L_0(x)$ و $L_1(x)$، جدول۲.۱۳، شروع می‌کند و درظرف چند میلی ثانیه گام به‌گام به‌طرف بالا می‌رود. این‌همان شگردی است که برای محاسبهٔ چندجمله‌ایهای لژاندر دربخش ۲.۱۲ توضیح دادیم.

همچنین ازمعادلهٔ (۲۸.۱۳) مقدارخاص زیررا به‌دست می‌آوریم

$$L_n(0)=1 \qquad (۳۵.۱۳)$$

همان‌گونه‌که ازشکل تابع مولد، شکل‌معادلهٔ دیفرانسیل لاگر، و یا از جدول ۲.۱۳ مشاهده می‌شود، چندجمله‌ایهای لاگر نه‌تقارن (پاریتهٔ) زوج دارند نه‌فرد.

معادلهٔ دیفرانسیل لاگر خودـالحاقی نیست و چندجمله‌ایهای لاگر، $L_n(x)$، به‌خودی خود یك مجموعهٔ متعامد تشکیل نمی‌دهند. ولی باتکیه برروشی‌که دربخش۱.۹ ارائه‌دادیم، معادلهٔ (۲۴.۱۳) را در e^{-x} (مسئلهٔ ۱.۱.۹) ضرب می‌کنیم وخواهیم داشت

$$\int_0^\infty e^{-x}L_m(x)L_n(x)dx=\delta_{m,n} \qquad (۳۶.۱۳)$$

این تعامد، پیامد نظریهٔ اشتورم‌ـلیوویـل، بخش ۱.۹، است. بهنجارش حاصل تابع مولـد است. گاهی بهتر است توابع متعامد لاگر (با تابع وزنی برابر یك) را به صورت زیر تعریف‌کنیم

$$\varphi_n(x)=e^{-x/2}L_n(x) \qquad (۳۷.۱۳)$$

تابع متعامدجدید $\varphi_n(x)$ درمعادلهٔ دیفرانسیل زیرصدق می‌کند

$$x\varphi_n''(x)+\varphi_n'(x)+\left(n+\frac{1}{2}-\frac{x}{4}\right)\varphi_n(x)=0 \qquad (۳۸.۱۳)$$

مشاهده می‌شودکه این معادله به‌صورت اشتورم‌ـلیوویل (خودـالحاقی) است. دقت کنیدکه در نظریهٔ اشتورم‌ـلیوویل این شرایط مرزی هستند که بازه را به صورت $(0\leqslant x<\infty)$ تعیین می‌کنند.

چندجمله‌ایهای وابستهٔ لاگر

در کاربردهای زیـادی، به‌ویژه در حوزهٔ نظریهٔ کوانتومی، به چندجمله‌ایهای وابستهٔ لاگری

نیاز داریم که بنا بر تعریف عبارت‌اند از[۱]

$$L_n^k(x)=(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}[L_{n+k}(x)] \qquad (۳۹.۱۳)$$

با استفاده از صورت سری $L_n(x)$ داریم

$$L_0^k(x)=1$$

$$L_1^k(x)=-x+k+1 \qquad (۴۰.۱۳)$$

$$L_2^k(x)=\frac{x^2}{2}-(k+2)x+\frac{(k+2)(k+1)}{2}$$

به‌طور کلی

$$L_n^k(x)=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{(n+k)!}{(n-m)!(k+m)!m!}x^m,\quad k>-1 \qquad (۴۱.۱۳)$$

با k بار مشتقگیری از تابع مولد لاگر، می‌توان به یك تابع مولد رسید. شاخص پایین را برای L_{n+k} تنظیم می‌کنیم؛ خواهیم داشت

$$\frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)^{k+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^k(x)z^n,\quad |z|<1 \qquad (۴۲.۱۳)$$

ازاینجا داریم

$$L_n^k(0)=\frac{(n+k)!}{n!k!} \qquad (۴۳.۱۳)$$

روابط بازگشتی را می‌توان ازتابع‌مولد ویا مشتقگیری ازروابط بازگشتی چندجمله‌ای‌لاگر به‌آسانی استخراج کرد. ازمیان امکانهای بیشمار، می‌توانیم داشته‌باشیم

$$(n+1)L_{n+1}^k(x)=(2n+k+1-x)L_n^k(x)-(n+k)L_{n-1}^k(x) \qquad (۴۴.۱۳)$$

$$xL_n^{k\prime}(x)=nL_n^k(x)-(n+k)L_{n-1}^k(x) \qquad (۴۵.۱۳)$$

به‌کمك این‌معادلات ویا ازطریق kبار مشتقگیری ازمعادلهٔ دیفرانسیل‌لاگر، معادلهٔ دیفرانسیل وابستهٔ لاگر را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$xL_n^{k\prime\prime}(x)+(k+1-x)L_n^{k\prime}(x)+nL_n^k(x)=0 \qquad (۴۶.۱۳)$$

وقتی در یك مسئلهٔ فیزیکی چندجمله‌ایهای وابستهٔ لاگـر ظاهر می‌شوند معمولا به این علت است که آن مسئلهٔ فیزیکی متضمن معادلهٔ (۴۶.۱۳) است

---

۱. برخی مؤلفان تابع $\mathcal{L}_{n+k}^k(x)=(d^k/dx^k)[L_{n+k}(x)]$ را به‌کار می‌برند. درنتیجه

$$L_n^k(x)=(-1)^k\mathcal{L}_{n+k}^k(x)$$

یکی‌ازنمایشهای چندجمله‌ای ردریگز وابستهٔ لاگر عبارت است‌از

$$L_n^k(x)=\frac{e^x x^{-k}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+k}) \qquad (۴۷.۱۳)$$

باید‌گفت که تمام این‌فرمولهای مربوط‌به $L_n^k(x)$، به‌ازای $k=0$ به‌عبارتهای متناظری‌برای $L_n(x)$ ساده می‌شوند.

معادلهٔ وابستهٔ لاگر(۴۶.۱۳) خود-الحاقی نیست، ولی‌می‌توان آن‌را ازطریق ضرب کردن در $e^{-x}x^k$،که عبارت است‌ازتابع وزنی آن، به‌صورت خود-الحاقی درآورد(بخش ۱.۹) داریم

$$\int_0^\infty e^{-x}x^k L_n^k(x)\, L_m^k(x)dx=\frac{(n+k)!}{n!}\delta_{m,n} \qquad (۴۸.۱۳)$$

معادلهٔ (۴۸.۱۳) دارای همان بازهٔ تعامد $(0\,,\infty)$ است‌که چندجمله‌ایهای لاگر داشتند؛ ولی دراینجا با تابع وزنی‌جدید مواجه‌ایم. این‌تابع وزنی عبارت است ازمجموعهٔ جدیدی ازچندجمله‌ایهای متعامد، یعنی چندجمله‌ایهای وابستهٔ لاگر.

تابع $\psi_n^k(x)=e^{-x/2}x^{k/2}L_n^k(x)$ درمعادلهٔ خود-الحاقی زیرصدق می‌کند

$$x\psi_n^{k\,\prime\prime}(x)+\psi_n^{k\,\prime}(x)+\left(-\frac{x}{4}+\frac{2n+k+1}{2}-\frac{k^2}{4x}\right)\psi_n^k(x)=0 \qquad (۴۹.۱۳)$$

$\psi_n^k(x)$ ها راگاهی توابع لاگر می‌نامند. معادلهٔ (۳۶.۱۳) حالت‌خاص متناظر با $k=0$ است.

یکی‌ازصورتهای مفید دیگراین تابع به‌اتکای تعریف زیربه‌دست می‌آید[1]

$$\Phi_n^k(x)=e^{-x/2}x^{(k+1)/2}L_n^k(x) \qquad (۵۰.۱۳)$$

درمعادلهٔ وابستهٔ لاگر می‌نشانیم و‌می‌رسیم به

$$\Phi_n^{k\,\prime\prime}(x)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{2n+k+1}{2x}-\frac{k^2-1}{4x^2}\right)\Phi_n^k(x)=0 \qquad (۵۱.۱۳)$$

انتگرال بهنجارش متناظرعبارت است از

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{k+1}L_n^k(x)L_n^k(x)dx=\frac{(n+k)!}{n!}(2n+k+1) \qquad (۵۲.۱۳)$$

---

۱. این‌عبارت متناظراست با تغییر تابع ψ درمعادلهٔ (۴۹.۱۳)، به‌صورتی‌که مشتق اول حذف شود (با مسئلهٔ 11.6.8 مقایسه‌کنید).

خواننده می‌تواند نشان دهد که $\Phi_n^k(x)$ به‌دلیل وجود x^{-1} در جملهٔ $(2n+k+1)/2x$، یك مجموعهٔ متعامد تشکیل نمی‌دهد (مگر آنکه x^{-1} را یك‌تابع وزنی بگیریم).

توابع لاگر $L_\nu^\mu(x)$ راکه درآن شاخصهای پایین و بالا ν و μ اعداد درستی نیستند، می‌توان بااستفاده ازتوابع فوق‌هندسی همشار، بخش ۶.۱۳، تعریف‌کرد.

مثال ۱۰.۴.۱۳ اتم هیدروژن

شاید تنهاکاربرد بسیار مهم چندجمله‌ایهای‌لاگر در جواب معادلهٔ موج شرودینگر برای اتم هیدروژن باشد. این‌معادله عبارت است‌از

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi-\frac{Ze^2}{r}\psi=E\psi \tag{۵۳.۱۳}$$

که در آن Z برای هیدروژن برابر یك، برای هلیم یك‌باریونیده ۲، و الی آخر است. با تفکیك متغیرها، وابستگی زاویه‌ای ψ را به صورت $Y_L^M(\theta,\varphi)$ می‌یابیم. جزء شعاعی، $R(r)$، درمعادلهٔ زیرصدق می‌کند

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-\frac{Ze^2}{r}R+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{L(L+1)}{r^2}R=ER \tag{۵۴.۱۳}$$

بابهره‌گیری ازکوتاه‌نویسی به‌شکل زیر

$$\alpha^2=-\frac{8mE}{\hbar^2} \quad \text{با} \quad \rho=\alpha r,\quad E<0$$
$$\lambda=\frac{2mZe^2}{\alpha\hbar^2} \tag{۵۵.۱۳}$$

معادلهٔ (۵۴.۱۳) چنین می‌شود

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{d\chi(\rho)}{d\rho}\right)+\left(\frac{\lambda}{\rho}-\frac{1}{4}-\frac{L(L+1)}{\rho^2}\right)\chi(\rho)=0 \tag{۵۶.۱۳}$$

که درآن $\chi(\rho)=R(\rho/\alpha)$. مقایسهٔ این معادله با معادلهٔ (۵۱.۱۳) برای $\Phi_n^k(x)$ نشان می‌دهدکه تابع زیردرمعادلهٔ (۵۶.۱۳) صدق‌می‌کند

$$\rho\chi(\rho)=e^{-\rho/2}\rho^{L+1}L_{\lambda-L-1}^{2L+1}(\rho) \tag{۵۷.۱۳}$$

دراینجا $2L+1$ به‌جای k و $\lambda-L-1$ به‌جای n نشسته است.

پارامتر λ را باید به‌این‌شرط محدود کنیم که برابر یك عدد درست n، $n=1,2,3,\ldots$، باشد.[1] ضرورت قراردادن این‌شرط آن است که تابع لاگر با عددغیردرست n، به‌صورت $\rho^n e^\rho$ واگرا می‌شود، که درمورد مسئلهٔ فیزیکی ما که باید در آن داشته‌باشیم

$$\lim_{r \to \infty} R(r) = 0$$

این شرط، غیرقابل‌قبول است.

اثر این محدودیت روی λ، که شرط مرزی ما آن را پدید می‌آورد، عبارت است از کوانتش انرژی

$$E_n = -\frac{Z^2 me^4}{2n^2\hbar^2} \qquad (58.13)$$

علت واردشدن علامت‌منفی آن‌است که ما دراینجا باحالتهای مقید، $E=0$، سروکار داریم و با الکترونی متناظر است که انرژیش فقط برای گریز به‌بینهایت کافی‌است. بااستفاده ازاین نتیجه، برای E_n داریم

$$\alpha = 2\frac{me^2}{\hbar^2} \cdot \frac{Z}{n} = \frac{2Z}{na_0}$$

$$\rho = \frac{2Z}{na_0} r \qquad (59.13)$$

که در آن

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$$

عبارت است‌از شعاع بور. تابع‌موج بهنجارنهایی الکترون رامی‌توان به‌صورت‌زیرنوشت

$$\psi_{nLM}(r, \theta, \varphi) = \left[\left(\frac{2Z}{na_0}\right)^3 \frac{(n-L-1)!}{2n(n+L)!}\right]^{1/2}$$

$$\times e^{-\alpha r/2}(\alpha r)^L L_{n-L-1}^{2L+1}(\alpha r) Y_L^M(\theta, \varphi) \qquad (60.13)$$

مسائل

۱.۲.۱۳ به‌کمك فرمول لایب‌نیتس، نشان دهید که بسط سری $L_n(x)$ [معادلهٔ (۳۲.۱۳)] حاصل نمایش رودریگز [معادلهٔ (۳۱.۱۳)] است.

---

[1] n نماد قراردادی برای λ است. این نماد همان n نیست که در $\mathfrak{L}_n^k(x)$ به‌صورت شاخص پایین آمده است.

۲.۲.۱۳ (الف) با استفاده ازصورت سری صریح [معادلهٔ (۳۲.۱۳)] نشان دهید که

$$L'_n(0) = -n$$

$$L''_n(0) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

(ب) بدون استفاده ازصورت سری صریح $L_n(x)$، بند (الف) را تکرار کنید.

۳.۲.۱۳ با استفاده از تابع مولد، نمایش ردریگز را استخراج کنید

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+k})$$

۴.۲.۱۳ رابطهٔ بهنجارش [معادلهٔ (۴۸.۱۳)] را برای چندجمله‌ایهای وابستهٔ لاگر استخراج کنید.

۵.۲.۱۳ x^r را به‌صورت یك سری از چندجمله‌ایهای وابستهٔ لاگر $L_n^k(x)$ بسط دهید، k ثابت و دامنهٔ تغییرات n ازصفر تا r (یا اگر r عدد درستی نباشد، تا ∞) است.

راهنمایی. ازصورت ردریگزی $L_n^k(x)$ بهره گیرید.

پاسخ. $0 \leqslant x < \infty$ ، $x^r = (r+k)!r!\sum_{n=0}^{r} \frac{(-1)^n L_n^k(x)}{(n+k)!(r-n)!}$.

۶.۲.۱۳ e^{-ax} را به‌صورت یك‌سری ازچندجمله‌ایهای وابستهٔ لاگر $L_n^k(x)$ بسط دهید؛ k ثابت است ودامنهٔ تغییرات n ازصفر تا ∞ است.

(الف) ضرایب این بسط را مستقیماً محاسبه کنید.

(ب) بسط مطلوب را با استفاده ازتابع مولد به‌دست آورید.

پاسخ. $0 \leqslant x < \infty$ ، $e^{-ax} = \frac{1}{(1+a)^{1+k}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{1+a}\right)^n L_n^k(x)$.

۷.۲.۱۳ نشان دهید

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{k+1}L_n^k(x)L_n^k(x)dx = \frac{(n+k)!}{n!}(2n+k+1)$$

راهنمایی. دقت کنید که

$$xL_n^k = (2n+k+1)L_n^k - (n+k)L_{n-1}^k - (n+1)L_{n+1}^k$$

۸.۲.۱۳ فرض کنید که یك مسئلهٔ خاص در مکانیك کوانتومی به‌معادلهٔ دیفرانسیل زیر منجر شده باشد

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\left[\frac{k^2-1}{4x^2}-\frac{2n+k+1}{2x}+\frac{1}{4}\right]y=0$$

$y(x)$ را به‌صورت زیر بنویسید

$$y(x)=A(x)B(x)C(x)$$

با این شرط که

(الف) $A(x)$ یك‌نمایی‌منفی باشد که بتوان از آن رفتار مجانبی مطلوب در $y(x)$ را به‌دست آورد.

(ب) $B(x)$ توان مثبتی از x باشد، که رفتار $y(x)$ در $x \ll 1$ را به‌دست دهد.
$A(x)$ و $B(x)$ را تعیین کنید. رابطهٔ بین $C(x)$ وچندجمله‌ای وابستهٔ لاگر را پیدا کنید.
پاسخ. $A(x)=e^{-x/2}$، $B(x)=x^{(k+1)/2}$، $C(x)=L_n^k(x)$.

۹.۲.۱۳ جزء شعاعی‌بهنجار تابع‌موج هیدروژنی، با استفاده ازمعادلهٔ (۶۰.۱۳) به‌صورت زیر است

$$R_{nL}(r)=\left[\alpha^3\frac{(n-L-1)!}{2n(n+L)!}\right]^{1/2}e^{-\alpha r/2}(\alpha r)^L L_{n-L-1}^{2L+1}(\alpha r)$$

که در آن $\alpha=2Z/na_0=2Zme^2/n\hbar^2$؛ مقادیر زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\langle r\rangle=\int_0^\infty rR_{nL}(\alpha r)R_{nL}(\alpha r)r^2dr$،

(ب) $\langle r^{-1}\rangle=\int_0^\infty r^{-1}R_{nL}(\alpha r)R_{nL}(\alpha r)r^2dr$ کمیت $\langle r\rangle$ میانگین جابه‌جایی الکترون نسبت به هسته است. حال آنکه $\langle r^{-1}\rangle$ عبارت است ازمیانگین وارون جابه‌جایی.

پاسخ. $\langle r\rangle=\frac{a_0}{2}[3n^2-L(L+1)]$، $\langle r^{-1}\rangle=\frac{1}{n^2a_0}$.

۱۰.۲.۱۳ رابطهٔ بازگشتی‌زیر، مربوط به‌مقادیر انتظاری تابع‌موج‌هیدروژن، را استخراج کنیـد.

$$\frac{s+2}{n^2}\langle r^{s+1}\rangle-(2s+3)a_0\langle r^s\rangle$$
$$+\frac{s+1}{4}[(2L+1)^2-(s+1)^2]a_0^2\langle r^{s-1}\rangle=0$$

که در آن $s\geqslant -2L-1$، $\langle r^s\rangle\equiv r^s$.

راهنمایی. معادلهٔ (۵۶.۱۳) را به‌صورتی شبیه به‌معادلهٔ (۵۱.۱۳) تبدیل کنید. در $\rho^{s+2}u'-c\rho^{s+1}u$ ضرب کنید. در اینجا $u=\rho\Phi$. در اینجا c را چنان تنظیم کنیـد تا

جملاتی که متضمن مقادیر انتظاری نیستند، حذف شوند.

۱۱.۲.۱۳ تابع‌موجهای هیدروژن، معادلهٔ (۶۰.۱۳)، متقابلاً متعامدند، که همین طور هم باید باشند، زیرا ویژه‌تابعهای معادلهٔ خود-الحاقی شرودینگر محسوب می‌شوند

$$\int \psi^*_{n_1 L_1 M_1} \psi_{n_2 L_2 M_1} r^2 dr d\Omega = \delta_{n_1 n_2} \delta_{L_1 L_2} \delta_{m_1 m_2}$$

با وجود این، انتگرال شعاعی به‌صورت (گمراه‌کنندهٔ) زیر است

$$\int_0^\infty e^{-\alpha r/2}(\alpha r)^L L^{2L+1}_{n_1-L-1}(\alpha r) e^{-\alpha r/2}(\alpha r)^L L^{2L+1}_{n_2-L-1}(\alpha r)^2 dr$$

که به‌نظر می‌آید با معادلهٔ (۵۲.۱۳) همساز است نه با رابطهٔ تعامد وابستهٔ لاگر [معادلهٔ (۴۸.۱۳)]. این پارادوکس را چگونه حل می‌کنید؟

پاسخ. پارامتر α به n بستگی دارد. سه‌مقدار اول α که درمعادلهٔ فوق آمده‌اند برابرند با: $2Z/n_1a_0$. سه α آخرعبارت اندازه $2Z/n_2a_0$. معادلهٔ (۵۲.۱۳)، به‌ازای $n_1 = n_2$ برقرار است. به‌ازای $n_1 \neq n_2$، نه‌معادلهٔ (۴۸.۱۳) و نه‌معادلهٔ (۵۲.۱۳)، هیچیک برقرار نیستند.

۱۲.۲.۱۳ تحلیل مکانیک‌کوانتومی اثر اشتارك (مختصهٔ سهموی) به معادلهٔ دیفرانسیل زیر می‌انجامد

$$\frac{d}{d\xi}\left(\xi \frac{du}{d\xi}\right) + \left(\frac{1}{2}E\xi + L - \frac{m^2}{4\xi} - \frac{1}{4}F\xi^2\right)u = 0$$

در اینجا F مقیاسی است از انرژی اختلال کـه منشأ آن میدان الکتریکی خارجی است. تابع‌موجهای مختل نشده ($F = 0$) را برحسب چندجمله‌ایهای وابستهٔ لاگر تعیین کنید.

پاسخ. $u(\xi) = e^{-\varepsilon\xi/2}\xi^{m/2}L^m_p(\varepsilon\xi)$ کـه در آن $p = \alpha/\varepsilon - (m+1)/2$، $\varepsilon = \sqrt{-2E} > 0$، و p یك عدد درست نامنفی است.

۱۳.۲.۱۳ معادلهٔ موج برای نوسانگرهماهنگ سه‌بعدی به‌صورت زیراست

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi + \frac{1}{2}M\omega^2 r^2\psi = E\psi$$

دراینجا ω بسامد زاویه‌ای نوسانگر کلاسیکی متناظراست. نشان‌دهید که جزء شعاعی ψ (در مختصات قطبی‌کروی) را می‌توان برحسب توابع وابستهٔ لاگر با شناسهٔ (βr^2) نوشت، که در آن $\beta = M\omega/\hbar$.

راهنمایی. دراینجا نیز مانند مسئلهٔ ۸.۲.۱۳، عاملهای r^l و $e^{-\beta r^2/2}$ را جدا کنید. تابع وابستهٔ لاگر به‌صورت $L_{1/2(n-l-1)}^{l+1/2}(\beta r^2)$ خواهد بود.

۱۴.۲.۱۳ برنامه‌ای بنویسید کـه ضرایب a_s چندجمله‌ای مربوط بـه چندجمله‌ای لاگر، $L_n(x)=\sum_{s=0}^{n} a_s x^s$، را تولید کند.

۱۵.۲.۱۳ زیر-برنامه‌ای بنویسید که سری توانی متناهی $\sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ را به‌سری لاگر $\sum_{n=0}^{N} b_n L_n(x)$ تبدیل کند. ازرابطهٔ بازگشتی‌معادلهٔ (۳۳.۱۳) بهره‌گیرید وشگردی راکه دربخش ۴.۱۳ برای سری چبیشف خلاصه شده‌است، پی‌گیرید.

۱۶.۲.۱۳ مقادیر $L_{10}(x)$ را به‌ازای ۰ر۳۰(۱ر۰)۰ر۰ $=x$ درجدولی درج کنید. این جدول حاوی ۱۰ ریشهٔ L_{10} خواهد بود. به‌ازای مقادیر بالاتر از ۰ر۳۰ $=x$، $L_{10}(x)$ به‌صورت یکنوا زیاد می‌شود. اگر به‌یك زیر-برنامهٔ رسم‌منحنی دسترسی‌دارید، نتیجهٔ‌حاصل را ترسیم کنید.

مقدار آزمونی. ریشهٔ هشتم = ۱۶ر۲۷۹.

۱۷.۲.۱۳ بااستفاده ازیك زیر-برنامهٔ ریشه‌یاب، ده‌ریشهٔ $L_{10}(x)$ را بیابید (با پیوست ۱ مقایسه‌کنید). می‌توانید از آگاهیی که درمورد محل‌تقریبی ریشه‌ها دارید استفاده‌کنید، یایك برنامهٔ پیگرد برای جستجوی ریشه‌ها ابداع کنیـد. ده‌ریشهٔ $L_{10}(x)$، نقاط محاسبه بـرای کوادراتور ده‌رقمی گاؤس-لاگرند (با پیوست ۲ مقایسه کنید). مقادیر حاصل را از طریق مقایسه با جدول ۹.۲۵ مندرج در AMS-55، بیازمایید.

۱۸.۲.۱۳ ضرایب بسط سری لاگر ($L_n(x)$, $k=0$) مربوط به‌کمیت نمایی e^{-x} را محاسبه کنید. ضرایب را به‌کمك کوادراتور گاؤس-لاگر برآورد کنید [با معادلهٔ (۶۴.۹) مقایسه‌کنید]. مقادیرحاصل را با مقادیر داده‌شده درمسئلهٔ ۶.۲.۱۳ بیازمایید.

یادآوری. کاربرد مستقیم‌کوادراتور گاؤس-لاگر با $f(x)=L_n(x)e^{-x}$، به‌دلیـل کمیت‌اضافی e^{-x} متضمن دقت‌اندکی‌است. تغییرمتغیر $y=2x$ را بیازمایید، به‌طوری‌که تابعی‌که درانتگرالده ظاهرمی‌شود، صرفاً برابر $L_n(y/2)$ باشد.

۱۹.۲.۱۳ (الف)زیر-برنامه‌ای برای محاسبهٔ عناصرماتریسی لاگر بنویسید

$$M_{mnp}=\int_0^\infty L_m(x)L_n(x)x^p e^{-x}dx$$

آزمونی به‌برنامه بیفزایید که شرط $|m-n|\leqslant p\leqslant m+n$ را بیازمایید. اگر p خارج ازاین گستره باشد، آنگاه: $M_{mnp}=0$. چرا؟)

یادآوری. یك کوادراتور ده‌رقمی گاؤس-لاگر برای $m+n+p\leqslant 19$ به‌ارائهٔ نتایج دقیقی می‌انجامد.

(ب) زیر-برنامهٔ خود را بخوانید تا عناصر ماتریسی مختلف لاگر را محاسبه کند. M_{nn1} را با مسئلهٔ ۷.۲.۱۳ بیازمایید.

۲۰.۲.۱۳ زیر-برنامه‌ای بنویسیدکه مقدار عددی $L_n^k(x)$ را به‌ازای مقادیرخاص n، k، و x محاسبه کند. n و k را اعداد درست نامنفی بگیرید و $x \geqslant 0$.

راهنمایی. باشروع محاسبه ازمقادیرمعلوم L_0^k و$L_1^k(x)$، می‌توانیم ازرابطهٔ بازگشتی معادلهٔ (۴۴.۱۳) برای تولید $L_n^k(x)$ به‌ازای $n=2,3,4,\ldots$ استفاده کنیم.

۲۱.۲.۱۳ برنامه‌ای بنویسید که تابع‌موج شعاعی بهنجار هیدروژن $\psi_{nL}(r)$ را محاسبه کند. این تابع همان ψ_{nLM} معادلهٔ (۶۰.۱۳) است‌که درآن از $Y_L^M(\theta, \varphi)$ چشمپوشی شده باشد. بگیرید $Z=1$ و $a_0=1$ (یعنی r برحسب واحد شعاع بور مشخص شده‌است). n و L را داده‌های ورودی بگیرید. مقادیر$\psi_{nL}(r)$ را به‌ازای $r=0(0.2)R$ درجدولی درج کنید؛ R راچندان بزرگ بگیریدکه ویژگیهای‌اساسی ψ رانمایش دهد. یعنی، به‌ازای $n=1$، $R=5$ و به‌ازای $n=2$، $R=10$ و به‌ازای $n=3$، $R=30$.

۳.۱۳ چندجمله‌ایهای چبیشف

در این بخش دو نوع چندجمله‌ای چبیشف را به عنوان حالتهای خاصی از چندجمله‌ایهای فراکروی بررسی می‌کنیم. خواص این چندجمله‌ایها پیامد تابع مولد چندجمله‌ایهای فراکروی هستند. اهمیت عمدهٔ چندجمله‌ایهای چبیشف درآنالیز عددی نهفته است. دربخش ۴.۱۳ به‌این روشهای عددی می‌پردازیم.

توابع مولد

دربخش ۱.۱۲ ازتابع مولد چندجمله‌ایهای فراکروی یاگگن باوئر، به‌قرار زیر

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)^{\alpha}}=\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(\alpha)}(x)t^n, \quad |x|<1, \quad |t|<1 \qquad (۶۱.۱۳)$$

نام بردیم،که به‌ازای $\alpha=1/2$ چندجمله‌ایهای لژاندر را تولید می‌کند. دراین‌بخش ابتدا α رابرابریك وسپس‌مساوی صفرمی‌گیریم تادومجموعه ازچندجمله‌ایها به‌نام چندجمله‌ایهای چبیشف را تولیدکرده باشیم:

نوع II

معادلهٔ (۶۱.۱۳) با $\alpha=1$ و $C_n^{(1)}(x)=U_n(x)$ به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\frac{1}{(1-2xt+t^2)}=\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n, \quad |x|<1, \quad |t|<1 \qquad (۶۲.۱۳)$$

این توابع، $U_n(x)$، را که به‌وسیلهٔ $(1-2xt+t^2)^{-1}$ تولید می‌شوند، چندجمله‌ایهای نوع II چبیشف می‌نامیم. کاربرد این چندجمله‌ایها در فیزیک ریاضی نادر است؛ یکی از کاربردهای نامعمول آنها در زمینهٔ تشکیل هماهنگهای کروی چهاربعدی در نظریهٔ تکانهٔ زاویه‌ای است.

نوع I

به‌ازای $\alpha=0$، با مشکلاتی مواجه می‌شویم. در واقع تابع مولد ما به‌مقدار ثابت ۱ ساده می‌شود. اگر از معادلهٔ (۶۱.۱۳) ابتدا نسبت به t مشتق بگیریم می‌توانیم از این مشکل برهیم. به‌این ترتیب

$$\frac{-\alpha(-2x+2t)}{(1-2xt+t^2)^{\alpha+1}}=\sum_{n=1}^{\infty} nC_n^{(\alpha)}(x)t^{n-1} \qquad (۶۳.۱۳)$$

یا

$$\frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{\alpha+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2}\left[\frac{C_n^{(\alpha)}(x)}{\alpha}\right]t^{n-1} \qquad (۶۴.۱۳)$$

$C_n^{(0)}(x)$ را به‌کمک رابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم

$$C_n^{(0)}(x)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{C_n^{(\alpha)}(x)}{\alpha} \qquad (۶۵.۱۳)$$

هدف از مشتقگیری نسبت به t دستیابی به یك آلفا در مخرج کسر و تشکیل یك شکل مبهم است. حال با ضرب کردن معادلهٔ (۶۴.۱۳) در $2t$ و افزودن عبارت

$$1=(1-2xt+t^2)/(1-2xt+t^2)$$

خواهیم داشت

$$\frac{1-t^2}{1-2xt+t^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2}C_n^{(0)}(x)t^n \qquad (۶۶.۱۳)$$

$T_n(x)$ بنا بر تعریف عبارت است از

$$T_n(x)=\begin{cases}1, & n=0\\[2ex] \frac{n}{2}C_n^{(0)}(x), & n>0\end{cases} \qquad (۶۷.۱۳)$$

توجه کنید که به‌ازای $n=0$ بررسی خاصی صورت گرفته است. این نوع بررسی مشابه نحوهٔ عمل با جملهٔ $n=0$ درسری فوریه است. همچنین، دقت کنید که $C_n^{(0)}$ همان حدی است که در معادلهٔ (۶۵.۱۳) نشان داده شده است و جانشانی سادهٔ $\alpha=0$ درسری تابع مولد نیست. با این مشخصات جدید داریم

$$\frac{1-t^2}{1-2xt+t^2}=T_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(x)t^n,\ \ |x|\leqslant 1,\ \ |t|<1 \qquad (۶۸.۱۳)$$

$T_n(x)$ را چندجمله‌ایهای نوع I چبیشف می‌نامیم. خاطرنشان می‌کنیم که نمادگذاری این توابع درمراجع مختلف متفاوت است. تقریباً هیچ توافق مشترك وعامی دراین‌زمینه وجود ندارد. دراینجا ما ازنمادهای به‌کاررفته درمرجع AMS-55 بهره می‌گیریم.

این چندجمله‌ایهای (نوع I) چبیشف، که جنبه‌های مفید: (۱) سری فوریه، و (۲) چندجمله‌ایهای متعامد را ترکیب می‌کنند، درمحاسبات‌عددی‌ازاهمیت زیادی برخوردارند. مثلاً، یکی‌از تقریبهای‌کمترین توان دوم، میانگین خطای مربعی را کمینه می‌کند. درتقریبی که درآن از چندجمله‌ایهای چبیشف بهره‌گرفته می‌شود، میانگین خطای مربعی بیشتر است ولی ممکن است بتوان خطاهای فرین را پایین نگهداشت (بخش۴.۱۳).

با مشتقگیری از تابع مولد [معادله‌های (۶۲.۱۳) و(۶۸.۱۳)] نسبت به t، به‌روابط بازگشتی زیردست پیداکنیم

$$T_{n+1}(x)-2xT_n(x)+T_{n-1}(x)=0 \qquad (۶۹.۱۳)$$

$$U_{n+1}(x)-2xU_n(x)+U_{n-1}(x)=0 \qquad (۷۰.۱۳)$$

(جدول ۳.۱۳ را ببینید). سپس، بااستفاده از توابع مولد برای یافتن مقدار مربوط به‌چند nاول واین‌روابط بازگشتی برای چندجمله‌ایهای مرتبهٔ بالاتر، جدولهای ۴.۱۳ و ۵.۱۳ را به‌دست می‌آوریم (شکلهای ۵.۱۳ و ۶.۱.۳ را نیز ببینید).

جدول ۳.۱۳ رابطهٔ بازگشتی چندجمله‌ایهای متعامد[1]

$P_{n+1}(x)=(A_nx+B_n)P_n(x)-C_nP_{n-1}(x)$.

	$P_n(x)$	A_n	B_n	C_n
لژاندر	$P_n(x)$	$\frac{2n+1}{n+1}$	0	$\frac{1}{n+1}$
چبیشف I	$T_n(x)$	2	0	1
انتقال‌یافتهٔ چبیشف I	$T_n^*(x)$	4	-2	1
چبیشف II	$U_n(x)$	2	0	1
انتقال‌یافتهٔ چبیشف II	$U_n^*(x)$	4	-2	1
وابستهٔ لاگر	$L_n^{(k)}(x)$	$-\frac{1}{n+2}$	$\frac{2n+k+1}{n+1}$	$\frac{n+k}{n+1}$
هرمیت	$H_n(x)$	2	0	$2n$

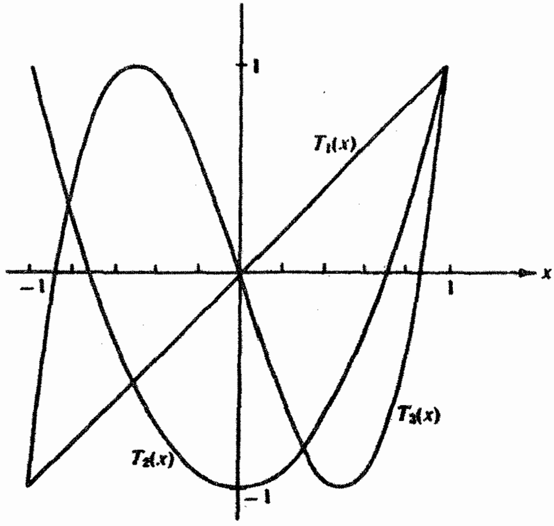
۱. P_n هریك ازاین چندجمله‌ایهای متعامد است.

جدول ۴۰۱۳ چندجمله‌ایهای نوع I چبیشف.

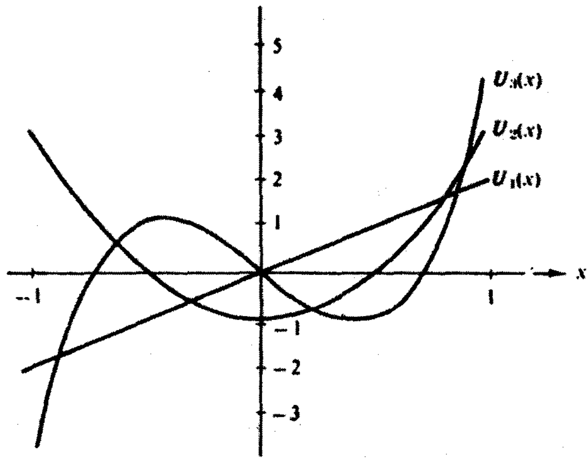
$$T_{۰}=۱$$
$$T_{۱}=x$$
$$T_{۲}=۲x^{۲}-۱$$
$$T_{۳}=۴x^{۳}-۳x$$
$$T_{۴}=۸x^{۴}-۸x^{۲}+۱$$
$$T_{۵}=۱۶x^{۵}-۲۰x^{۳}+۵x$$
$$T_{۶}=۳۲x^{۶}-۴۸x^{۴}+۱۸x^{۲}-۱$$

جدول ۵۰۱۳ چندجمله‌ایهای نوع II چبیشف.

$$U_{۰}=۱$$
$$U_{۱}=۲x$$
$$U_{۲}=۴x^{۲}-۱$$
$$U_{۳}=۸x^{۳}-۴x$$
$$U_{۴}=۱۶x^{۴}-۱۲x^{۲}+۱$$
$$U_{۵}=۳۲x^{۵}-۳۲x^{۳}+۶x$$
$$U_{۶}=۶۴x^{۶}-۸۰x^{۴}+۲۴x^{۲}-۱$$



شکل ۵۰۱۳ چندجمله‌ایهای چبیشف، $T_n(x)$.



شکل ۶.۱۳ چندجمله‌ایهای چبیشف، $U_n(x)$.

در اینجا نیز مانند مورد چندجمله‌ایهای هرمیت، بخش ۱.۱۳، روابط بازگشتی، معادلات (۶۰.۱۳) و(۷۰.۱۳)، همراه بامقادیرمعلوم $T_0(x)$، $T_1(x)$، $U_0(x)$، و$U_1(x)$، ابزارمناسبی برای کامپیوترهای الکترونیکی باسرعت زیاد فراهم می‌آورند. دراین‌صورت می‌توان به‌مقدار عددی هر$T_n(x_0)$ یا $U_n(x_0)$ به‌ازای یك x_0 معلوم، دست یافت. دراینجا نیز، ازتوابع مولد، مقادیرخاص زیررا داریم

$$
\begin{aligned}
T_n(1) &= 1\\
T_n(-1) &= (-1)^n\\
T_{2n}(0) &= (-1)^n\\
T_{2n+1}(0) &= 0
\end{aligned}
\qquad (۷۱.۱۳)
$$

$$
\begin{aligned}
U_n(1) &= n+1\\
U_n(-1) &= (-1)^n(n+1)\\
U_{2n}(0) &= (-1)^n\\
U_{2n+1}(0) &= 0
\end{aligned}
\qquad (۷۲.۱۳)
$$

روابط پاریته برای T_n و U_n عبارت‌اند از

$$T_n(x)=(-1)^n T_n(-x) \qquad (۷۳.۱۳)$$

$$U_n(x)=(-1)^n U_n(-x) \qquad (۷۴.۱۳)$$

نمایشهای رودریگز $T_n(x)$ و $U_n(x)$ عبارت‌اند از

$$T_n(x)=\frac{(-1)^n\pi^{1/2}(1-x^2)^{1/2}}{2^n(n-\frac{1}{2})!}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^{n-1/2}] \qquad (۷۵.۱۳)$$

و

$$U_n(x)=\frac{(-1)^n(n+1)\pi^{1/2}}{2^{n+1}(n+\frac{1}{2})!(1-x^2)^{1/2}}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^{n+1/2}] \qquad (۷۶.۱۳)$$

روابط بازگشتی-مشتقها

مشتقگیری از توابع مولد $T_n(x)$ و $U_n(x)$ نسبت به x، به‌روابط بازگشتی گوناگونی شامل مشتقها می‌انجامد. ازاین میان آنها که مفیدترند عبارت‌اند از

$$(1-x^2)T_n'(x)=-nxT_n(x)+nT_{n-1}(x) \qquad (۷۷.۱۳)$$

و

$$(1-x^2)U_n'(x)=-nxU_n(x)+(n+1)U_{n-1}(x) \qquad (۷۸.۱۳)$$

با استفاده از معادلات (۶۹.۱۳) و (۷۷.۱۳) پی می‌بریم که $T_n(x)$، چندجمله‌ای نوع I چبیشف، درمعادلهٔ زیرصدق می‌کند

$$(1-x^2)T_n''(x)-xT_n'(x)+n^2T_n(x)=0 \qquad (۷۹.۱۳)$$

و $U_n(x)$، چندجمله‌ای نوع II چبیشف، درمعادلهٔ زیرصدق می‌کند

$$(1-x^2)U_n''(x)-3xU_n'(x)+n(n+2)U_n(x)=0 \qquad (۸۰.۱۳)$$

معادلهٔ فراکروی

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}C_n^{(\alpha)}(x)-(2\alpha+1)x\frac{d}{dx}C_n^{(\alpha)}(x)+n(n+2\alpha)C_n^{(\alpha)}(x)=0$$

(۸۱.۱۳)

تعمیم این معادلات دیفرانسیل است که به‌ازای $\alpha=0$ به‌معادلهٔ (۷۹.۱۳) و به‌ازای $\alpha=1$

به‌معادلهٔ (۸۰.۱۳) (و به‌ازای $\alpha = ۱/۲$، به‌معادلهٔ لژاندر) ساده می‌شود.

شکل مثلثاتی

دراین مرحله از بررسی خواص جوابهای چبیشف، خوب است تغییرمتغیر دهیم و به‌جای x کمیت $\cos\theta$ را بنشانیم. با $x = \cos\theta$ و $d/dx = (-۱/\sin\theta)(d/d\theta)$، معادلهٔ (۷۹.۱۳) به صورت معادلهٔ نوسانگر هماهنگ ساده با جوابهای $\cos n\theta$ و $\sin n\theta$ درمی‌آید

$$\frac{d^۲T_n}{d\theta^۲} + n^۲T_n = ۰ \qquad (۸۲.۱۳)$$

ازمقادیر خاص (حاصل شرایط مرزی) جواب زیر را به‌دست می‌آوریم

$$T_n = \cos n\theta = \cos n(\arccos x) \qquad (۸۳.۱۳ \text{ الف})$$

جواب مستقل خطی دوم معادلات (۷۹.۱۳) و (۸۲.۱۳) را به‌صورت زیرمشخص می‌کنیم

$$V_n = \sin n\theta = \sin n(\arccos x) \qquad (۸۳.۱۳ \text{ ب})$$

جوابهای معادلهٔ چبیشف نوع II، معادلهٔ (۸۰.۱۳)، به‌صورت زیراست

$$U_n = \frac{\sin(n+۱)\theta}{\sin\theta} \qquad (۸۴.۱۳ \text{ الف})$$

$$W_n = \frac{\cos(n+۱)\theta}{\sin\theta} \qquad (۸۴.۱۳ \text{ ب})$$

این دومجموعه ازجوابهای نوع I ونوع II به‌صورت زیر به‌هم مربوط می‌شوند

$$V_n(x) = (۱-x^۲)^{۱/۲}U_{n-۱}(x) \qquad (۸۵.۱۳ \text{ الف})$$

$$W_n(x) = (۱-x^۲)^{-۱/۲}T_{n+۱}(x) \qquad (۸۵.۱۳ \text{ ب})$$

همان‌طور که قبلا هم‌از تابع مولد نتیجه گرفتیم، $T_n(x)$ و $U_n(x)$ چندجمله‌ای هستند. آشکار است که $V_n(x)$ و $W_n(x)$ چندجمله‌ای نیستند.

با استفاده ازعبارتهای

$$\begin{aligned} T_n(x) + iV_n(x) &= \cos n\theta + i\sin n\theta \\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)^n \qquad (۸۶.۱۳) \\ &= [x + i(۱-x^۲)]^n, \quad |x| \leqslant ۱ \end{aligned}$$

بسطهای زیر را به‌دست می‌آوریم

$$T_n(x)=x^n-\binom{n}{2}x^{n-2}(1-x^2)+\binom{n}{4}x^{n-4}(1-x^2)^2-\dots \quad (\text{۸۷.۱۳الف})$$

و

$$V_n(x)=\sqrt{1-x^2}\left[\binom{n}{1}x^{n-1}-\binom{n}{3}x^{n-3}(1-x^2)+\binom{n}{5}x^{n-5}(1-x^2)^2-\dots\right] \quad (\text{۸۷.۱۳ب})$$

که در آن ضریب دوجمله‌ای $\binom{n}{m}$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\binom{n}{m}\equiv\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

نمایشهای سری توانی‌را به‌کمك توابع مولد یا بااستفاده از معادلات دیفرانسیل به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$T_n(x)=\frac{n}{2}\sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^m\frac{(n-m-1)!}{m!(n-2m)!}(2x)^{n-2m} \quad (\text{۸۸.۱۳ الف})$$

و

$$U_n(x)=\sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^m\frac{(n-m)!}{m!(n-2m)!}(2x)^{n-2m} \quad (\text{۸۸.۱۳ ب})$$

تعامد

اگر معادلهٔ (۷۹.۱۳) را به صورت خودالحاقی درآوریم (بخش ۱.۹)، تابع $w(x)=(1-x^2)^{-1/2}$ را به عنوان تابع وزنی به دست می‌آوریم. ضریب وزنی متناظر بامعادلهٔ (۸۱.۱۳) عبارت است از $(1-x^2)^{+1/2}$. انتگرالهای تعامد حاصل‌عبارت‌خواهند بود از

$$\int_{-1}^{1}T_m(x)T_n(x)(1-x^2)^{-1/2}dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \frac{\pi}{2}, & m=n\neq 0\\ \pi, & m=n=0\end{cases} \quad (\text{۸۹.۱۳})$$

$$\int_{-1}^{1}V_m(x)V_n(x)(1-x^2)^{-1/2}dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \frac{\pi}{2} & m=n\neq 0\\ 0, & m=n=0\end{cases} \quad (\text{۹۰.۱۳})$$

$$\int_{-1}^{1} U_m(x)U_n(x)(1-x^2)^{1/2}dx=\frac{\pi}{2}\delta_{m,n} \qquad (۹۱.۱۳)$$

و

$$\int_{-1}^{1} W_m(x)W_n(x)(1-x^2)^{1/2}dx=\frac{\pi}{2}\delta_{m,n} \qquad (۹۲.۱۳)$$

این تعامد، پیامد مستقیم نظریهٔ اشتورم ـ لیوویل است که درفصل ۹ در خصوص آن بحث کردیم. ساده‌ترین راه برای رسیدن به‌مقادیر بهنجارش، بهره‌گیری از $x=\cos\theta$ و تبدیل این‌چهارانتگرال به‌انتگرالهای بهنجارش فوریه (درنیم بازهٔ $[0,\pi]$) است.

مسائل

۱.۳.۱۳ یك تابع مولد دیگر چبیشف عبارت است از

$$\frac{1-xt}{1-2xt+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}X_n(x)t^n, \quad |t|<1$$

$X_n(x)$ چه رابطه‌ای با $T_n(x)$ و $U_n(x)$ دارد؟

۲.۳.۱۳ بگیرید

$$(1-x^2)U_n''(x)-3xU_n'(x)+n(n+2)U_n(x)=0$$

نشان دهیدکه $V_n(x)$ درمعادلهٔ زیر، معادلهٔ چبیشف، صدق می‌کند

$$(1-x^2)V_n''(x)-xV_n'(x)+n^2V_n(x)=0$$

۳.۳.۱۳ نشان دهیدکه **رونسکیی** $T_n(x)$ و $V_n(x)$ از رابطهٔ زیربه‌دست می‌آید

$$T_n(x)V_n'(x)-T_n'(x)V_n(x)=-\frac{n}{(1-x^2)^{1/2}}$$

این عبارت نشان می‌دهد که T_n و V_n $(n\neq 0)$ جوابهای مستقل معادلهٔ (۷۹.۱۳) هستند. برعکس، به‌ازای $n=0$، استقلال خطی نداریم. به‌ازای $n=0$ چه پیش می‌آیـد؟ جواب "دوم" چه می‌شود؟

۴.۳.۱۳ نشان دهیدکه $W_n(x)=(1-x^2)^{-1/2}T_{n+1}(x)$ یکی ازجوابهای معادلهٔ زیر است

$$(1-x^2)W_n''(x)-3xW_n'(x)+n(n+2)W_n(x)=0$$

۵.۳.۱۳ رونسکیینی $U_n(x)$ و $W_n(x)=(1-x^2)^{-1/2}T_{n+1}(x)$ را محاسبه کنید.

۶.۳.۱۳ $V_n(x)=(1-x^2)^{1/2}U_{n-1}(x)$ به‌ازای $n=0$ تعریف نشده‌است. نشان دهید که یکی ازجوابهای مستقل دوم معادلهٔ دیفرانسیل چبیشف برای $T_n(x)$ (به‌ازای $n=0$)، عبارت است از $V_0(x)=\arc\cos x$ (یا $V_0=\arcsin x$).

۷.۳.۱۳ نشان دهید که $V_n(x)$، در رابطهٔ بازگشتی سه‌جمله‌ای $T_n(x)$ [معادلهٔ (۶۹.۱۳)] صدق می‌کند.

۸.۳.۱۳ درستی جوابهای سری مربوط به $T_n(x)$ و $U_n(x)$ [معادلات (۸۸.۱۳الف) و (۸۸.۱۳ ب)] را تحقیق کنید.

۹.۳.۱۳ صورت سری $T_n(x)$، معادلهٔ (۸۸.۱۳ الف)، را به‌یک سری توانی صعودی تبدیل کنید.

پاسخ.

$$T_{2n}(x)=(-1)^n n\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{(n+m-1)!}{(n-m)!(2m)!}(2x)^{2m}$$

$$T_{2n+1}(x)=(-1)^n\frac{2n+1}{2}\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{(n+m)!}{(n-m)!(2m+1)!}(2x)^{2m+1}$$

۱۰.۳.۱۳ صورت سری $U_n(x)$، معادلهٔ (۸۸.۱۳ ب)، را به صورت یك سری توانی صعودی بازنویسی کنید.

پاسخ.

$$U_{2n}(x)=(-1)^n\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{(n+m)!}{(n-m)!(2m)!}(2x)^{2m}$$

$$U_{2n+1}(x)=(-1)^n\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{(n+m+1)!}{(n-m)!(2m+1)!}(2x)^{2m+1}$$

۱۱.۳.۱۳ نمایش رودریگز $T_n(x)$ را استخراج کنید

$$T_n(x)=\frac{(-1)^n\pi^{1/2}(1-x^2)^{1/2}}{2^n\left(n-\frac{1}{2}\right)!}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^{n-1/2}]$$

راهنمایی. یکی از راه‌حلها آن است که رابطهٔ زیر را برای تابع فوق‌هندسی به‌کار برید

$${}_2F_1(a,b,c;z)=(1-z)^{-a}{}_2F_1\left(a,c-b,c;\frac{-z}{1-z}\right)$$

با $z=(x-1)/2$. رهیافت دیگر عبارت است از اینکه یك معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول برای $y=(1-x^2)^{n-1/2}$ تشکیل دهید. مشتقگیری مکرر از این معادله به‌معادلهٔ چبیشف منجرمی‌شود.

۱۲.۳.۱۳ (الف) بااستفاده ازمعادلهٔ دیفرانسیل‌مربوط به T_n (به‌صورت‌خود-الحاقی)، نشان

$$\int_{-1}^{1}\frac{dT_m(x)}{dx}\,\frac{dT_n(x)}{dx}(1-x^2)^{1/2}dx=0, \quad m\neq n$$

(ب) باتوجه به‌اینکه رابطهٔ زیررا دراختیارداریم

$$\frac{dT_n(x)}{dx}=nU_{n-1}(x)$$

نتیجهٔ بالا را تأییدکنید.

۱۳.۳.۱۳ بسط یك توان x برحسب یك سری چبیشف به‌انتگرال زیر منجرمی‌شود

$$I_{mn}=\int_{-1}^{1}x^m T_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

(الف) نشان دهیدکه این انتگرال به‌ازای $m<n$ صفرمی‌شود.
(ب) نشان دهیدکه این انتگرال به‌ازای مقدارفرد $m+n$ صفرمی‌شود.

۱۴.۳.۱۳ انتگرال

$$I_{mn}=\int_{-1}^{1}x^m T_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

را به‌ازای $m\geqslant n$ ومقدار زوج $m+n$ به‌کمك روشهای زیرمحاسبه کنید:

(الف) T_n را بانمایش ردریگز آن تعویض‌کنید و x را متغیر بگیرید.
(ب) بااستفاده از $x=\cos\theta$ انتگرال را به‌صورتی‌که درآن θ متغیر است تبدیل کنید.

پاسخ. $I_{mn}=\pi\frac{m!}{(m-n)!}\,\frac{(m-n-1)!!}{(m+n)!!}$, $m\geqslant n$, $m+n$ زوج.

۱۵.۳.۱۳ کرانهای زیر را به‌دست‌آورید $(-1\leqslant x\leqslant 1)$:

(الف) $|U_n(x)| \leqslant n+1$، (ب) $\left|\frac{d}{dx}T_n(x)\right| \leqslant n^2$.

۱۶.۳.۱۳ (الف) کران زیر را به‌دست آورید $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$

$$V_n(x) = 1$$

(ب) نشان دهید که $W_n(x)$ در $-1 \leqslant x \leqslant 1$، بیکران است.

۱۷.۳.۱۳ انتگرالهای تعامد-بهنجارش را برای حالتهای زیر تحقیق کنید

(الف) $T_m(x)$، $T_n(x)$، (ب) $V_m(x)$، $V_n(x)$،

(ج) $U_m(x)$، $U_n(x)$، (د) $W_m(x)$، $W_n(x)$.

راهنمایی. همهٔ این حالتها را می‌توان به انتگرالهای تعامد-بهنجارش فوریه تبدیل کرد.

۱۸.۳.۱۳ نشان دهید

(الف) آیا $T_m(x)$ و $V_n(x)$ روی بازهٔ $[-1, 1]$، نسبت به‌عامل وزنی $(1-x^2)^{-1/2}$ متعامدند یا خیر؟

(ب) آیا $U_m(x)$ و $W_n(x)$ روی بازهٔ $[-1, 1]$ نسبت به‌عامل وزنی $(1-x^2)^{1/2}$ متعامدند یا خیر؟

۱۹.۳.۱۳ روابط زیر را از اتحادهای کسینوس "متناظر" استخراج کنید.

(الف) $$T_{n+1}(x)+T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$$

(ب) $$T_{m+n}(x)+T_{m-n}(x) = 2T_m(x)T_n(x)$$

۲۰.۳.۱۳ دو نوع چندجمله‌ای چبیشف از طریق چند معادله به‌هم‌مربوط می‌شوند. به‌عنوان مثال نشان دهید

$$T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x)$$

و

$$(1-x^2)U_n(x) = xT_{n+1}(x) - T_{n+2}(x)$$

۲۱.۳.۱۳ با استفاده از

(الف) صورتهای مثلثاتی V_n و T_n، و (ب) نمایش ردریگز،

نشان دهید که تساوی

$$\frac{dV_n(x)}{dx} = -n\frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

برقرار است.

۲۲.۳.۱۳ با شروع از $x=\cos\theta$ و $T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ عبارت زیر را بسط دهید

$$x^k = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^k$$

آنگاه نشان دهید که

$$x^k = \frac{1}{2^{k-1}}\left[T_k(x) + \binom{k}{1}T_{k-2}(x) + \binom{k}{2}T_{k-4}(x) + \cdots\right]$$

سری درون کروشه به‌ازای $k=2m+1$ به $\binom{k}{m}T_1(x)$ و به ازای $k=2m$ به $\frac{1}{2}\binom{k}{m}T_0$ ختم می‌شود.

۲۳.۳.۱۳ (الف) توابع چبیشف $V_1(x)$، $V_2(x)$، و $V_3(x)$ را به ازای $x=-1.0(0.1)1.0$ محاسبه و آنگاه آنها را درجدولی درج کنید.

(ب) یکی از جوابهای دوم معادلهٔ دیفرانسیل چبیشف، معادلهٔ (۷۹.۱۳)، به‌ازای $n=0$ عبارت‌است از $y(x)=\sin^{-1}x$. این تابع‌را روی همان‌بازهٔ: $-1.0(0.1)1.0$ درجدولی بیاورید و آنگاه نمایش هندسی‌آن‌را ترسیم کنید.

۲۴.۳.۱۳ برنامه‌ای بنویسید که در شکل چندجمله‌ای مربوط به چندجمله‌ای چبیشف $T_n(x)=\sum_{s=0}^{n}a_s x^s$، ضرایب a_s را تولید کند.

۲۵.۳.۱۳ مقادیر $T_{10}(x)$ را به‌ازای $0.00(0.01)1.00$ در جدولی درج کنید. این جدول حاوی پنج ریشهٔ مثبت T_{10} خواهد بود. اگر یك زیر-برنامهٔ ترسیم منحنی دراختیار داشته باشید، نتایج را به کمك آن ترسیم کنید.

۲۶.۳.۱۳ پنج ریشهٔ‌مثبت $T_{10}(x)$ را ازطریق فراخواندن یك زیر-برنامهٔ ریشه‌یاب تعیین کنید (باپیوست ۱ مقایسه کنید). یا از شناخت‌تان نسبت به‌موضع تقریبی این ریشه‌ها، ناشی ازمسئلهٔ ۲۵.۳.۱۳، استفاده کنید ویا یك برنامهٔ پیگرد برای جستجوی ریشه‌ها بنویسید. این پنج ریشهٔ مثبت (وریشه‌های‌منفی آنها) عبارت‌اند ازنقاط ارزیابی روش کوادراتور ده‌رقمی گاؤس-چبیشف (پیوست۲ را ببینید).

$$x_k = \cos[(2k-1)\pi/20], \quad k=1, 2, 3, 4, 5$$

۴.۱۳ چندجمله ایهای چبیشف ـ کاربردهای عددی

چندجمله ایهای چبیشف $[T_n(x)]$، برعکس چندجمله ایهای لژاندر، هرمیت، و لاگر در توصیف مستقیم جهان فیزیکی هیچ گونه نقش مهمی بازی نمی کنند. اهمیت آنها از کاربردهای فراوان وفزاینده ای که در آنالیز عددی دارند، سرچشمه می گیرد. در زیر چند نمونه از این کاربردها را ذکر می کنیم:

(الف) چندجمله ایهای چبیشف. این توابع تقریب مناسب و نسبتاً دقیقی برای تقریب کم بیشینهٔ یك تابع روی [۱ , ۱ −] فراهم می آورند. تقریب کم بیشینه، تقریبی است که در آن بزرگی بیشینهٔ خطا(ی تقریب) کمینه می شود.

(ب) محاسبهٔ عددی انتگرالها، کوادراتور گاؤس-چبیشف. با پیوست ۲ مقایسه کنید.

(ج) کاربردهای بسیار متنوع، شامل وارونی ماتریسها وانتگرالگیری عددی ازمعادلات دیفرانسیل.

دراینجا توجه خودرا روی بند (الف)، سری چبیشف وکاربر آنها در تقریب سازی توابع متمرکز می کنیم.

صورتهای مثلثاتی

با توجه به بخش قبل داریم

$$T_n(\cos\theta)=\cos n\theta \qquad (\text{۹۳.۱۳ الف})$$

یا

$$T_n(x)=\cos(n\cos^{-1}x) \qquad (\text{۹۳.۱۳ ب})$$

خواصی که به سودمندی این چندجمله ایهای متعامددر آنالیز عددی (روی بازهٔ تعامد [۱ , ۱ −]) می انجامد، با بهره گیری ازهمین صورتهای مثلثاتی حاصل می شوند.

(الف) $|T_n(x)|\leqslant 1$

(ب) درمورد همهٔ بیشینه ها وکمینه ها

$$\max T_n(x)=+1 \quad ,\min T_n(x)=-1 \qquad (\text{۹۴.۱۳})$$

این حکم به خاصیت هم موجی که بعداً پیرامون آن بحث خواهیم کرد، منجر می شود.

(ج) بیشینه ها وکمینه ها درگسترهٔ [۱ , ۱ −] به طور نسبتاً یکنواختی توزیع شده اند.

سری چبیشف

نمایش تابع $f(x)$ ازطریق یك سری از چندجمله ایهای چبیشف نسبت به سری توانی منظم دارای مزایای مهمی است: (۱) همگرایی بسیارسریعتر است[1]، (۲) سرآغازی است برای

---

۱. قضیهٔ اصلی به وسیلهٔ چبیشف اثبات شد.

تکنیك ادغامی (توی هم‌رونده) سریها از جهت به‌دست‌آوردن نمایشهای فشرده‌تر، و (۳) رهیافتی است به‌یك تقریب کم‌بیشینه.

بااستفاده ازعبارت

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x) \tag{۹۵.۱۳}$$

ضرایب a_n را می‌توان بااستفاده‌ازتعامد چندجمله‌ایهای‌چبیشف وبهنجارش،معادلهٔ(۸۷.۱۳)، محاسبه‌کرد. خواهیم داشت

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(x)T_n(x)(1-x^2)^{-1/2}dx, \quad n=1, 2, 3, \cdots \tag{۹۶.۱۳}$$

و نصف این مقدار به‌ازای a_0 به‌دست می‌آید. این رفتار بی‌هنجار ضریب اول در سری کسینوس فوریه در فصل ۱۴ تکرار می‌شود. دقت‌کنیدکه این یك برازش کمترین مربعات به‌شمار می‌آید.

سری چبیشف درواقع یك سری‌کسینوس فوریه درلباس‌مبدل‌است. معادلهٔ (۹۵.۱۳) بااستفاده ازمعادلهٔ (۹۳.۱۳ الف) به‌صورت زیردرمی‌آید

$$f(\cos\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta \tag{۹۷.۱۳}$$

که بامعادلهٔ (۱.۱۴) مشابه‌است.

اگر $f(x)$ یك سری توانی متناهی (یعنی چندجمله‌ای) باشد، ضرایب چبیشف را می‌شودبه‌کمك شگردهای‌دیگری‌تعیین کردکه‌نسبت‌به‌انتگرالگیری مستقیم‌درمعادلهٔ (۹۶.۱۳) سریعترودقیقترند. داریم

$$\sum_{n=0}^{N} b_n x^n = \sum_{n=0}^{N} a_n T_n(x) \tag{۹۸.۱۳}$$

تساوی حدهای‌بالای $n=N$ در دومجموع، بایادآوری‌این‌نکته‌که بالاترین توان در $T_n(x)$ عبارت است از x^n، بهتر فهمیده‌می‌شود. ازاین‌رو $T_n(x)$ درواقع عبارت‌است ازیك‌ترتیب مجدد توانهای x موجود درسری توانی. این برهان‌را می‌توان ازطریق استقرای‌ریاضی یا متعامدسازی گرام‌ـ‌اشمیت دربخش ۳.۹ به‌نحو دقیقتری ارائه‌کرد.

اگرضرایب b_n درسری توانی معلوم باشند، می‌توان برای تعیین ضرایب نامعلوم چبیشف، a_n، ازشگردهای گوناگونی بهره‌گرفت.

ضرب ماتریسی. می‌توانیم درتشابه‌کامل بامسئلهٔ ۱.۲.۱۲ برای چندجمله‌ایهای لژاندر، ماتریس تبدیل چبیشف را تشکیل دهیم و ضرایب a_n را از طریق ضرب ماتریسی به دست آوریم.

می‌توانیم بنویسیم

$$x_n=\sum_{s=0}^{n} c_{ns} T_s \qquad (۹۹.۱۳)$$

c_{ns}ها درمرجع AMS-55، درجدول ۳.۲۲، درج شده‌اند. با نشاندن درمعادلهٔ (۹۸.۱۳) (که درسمت راست‌آن شاخص ظاهری n را با s تعویض کرده باشیم) وبامساوی‌قراردادن ضرایب یکسان T_s، خواهیم داشت

$$\langle b_n | (c_{ns}) = \langle a_s |$$

که درآن $\langle b_n |$ و $\langle a_s |$ بردارهای سطری (برا) و c_{ns} ماتریسی است که درواقع جزء مثلثی‌شکل نیمهٔ چپ پایینی است. الحاقی را به‌صورت زیرمی‌گیریم

$$(c_{sn}) | b_n \rangle = | a_s \rangle \qquad (۱۰۰.۱۳)$$

بردارهای $| b_n \rangle$ و $| a_s \rangle$ بردارهای ستونی (کت) هستند. ماتریس تبدیل سری توانی به‌سری‌چبیشف (c_{sn})، که اکنون یک‌ماتریس‌مثلثی‌راست‌بالایی‌است، به‌صورت‌زیرداده‌می‌شود

$$(c_{sn})=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ & \frac{۳}{۸} & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & \frac{۳}{۴} & ۰ & \frac{۱۰}{۱۶} \\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ & \frac{۴}{۸} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۴} & ۰ & \frac{۵}{۱۶} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۸} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۱۶} \end{pmatrix} \qquad (۱۰۱.۱۳)$$

ستون سمت راست این ماتریس ازرابطهٔ

$$x^{۵}=\frac{۱}{۲^{۴}}\{۱۰T_۱(x)+۵T_۳(x)+۱T_۵(x)\}$$

گرفته شده‌است که یک حالت خاص معادلهٔ (۹۹.۱۳) به‌ازای $n=۵$ به‌شمار می‌آید. ستون

nام به‌ازای $n>0$ حاوی یك عامل $1/2^{n-1}$ است که می‌توان از آن فاکتورگرفت.

یکی ازمحدودیتهای اساسی این شگرد تبدیل ماتریسی، معادلهٔ (۱۰۰.۱۳)، آن‌است که ابعاد ماتریس وبنابراین حد بالای N ثابت است. درحالت قبل: $N=5$. اگر بخواهیم حالت $N=6$ را بررسی کنیم، باید ضرایب x_6 درمعادلهٔ (۹۹.۱۳) را به‌سمت راست (و صفرهایی درانتهای) ماتریس (۱۰۱.۱۳) بیفزاییم.

روش سریع تبدیل فوریه. این روش درفصل ۱۴ مورد بحث قرارمی‌گیرد.

تکرار رابطهٔ بازگشتی. این‌شگرد را در دنبالهٔ مطلب توضیح خواهیم داد.

سریهای توانی مربوط به‌سری چبیشف

چندجمله‌ای خودرا به‌صورت حاصلضرب تودرتوی زیربازنویسی می‌کنیم

$$f(x)=b_0+x(b_1+\dots+x(b_{N-2}+x(b_{N-1}+xb_N))) \qquad (۱۰۲.۱۳)$$

رابطهٔ بازگشتی، معادلهٔ (۶۹.۱۳)، را به‌قرار زیر به‌کارمی‌بریم

$$xT_n(x)=\frac{1}{2}T_{n+1}(x)+\frac{1}{2}T_{n-1}(x),\ n=1,2,\dots \qquad (۱۰۳.۱۳)$$

و

$$xT_0=T_1 \quad (n=0 \text{ به‌ازای}) \qquad (۱۰۴.۱۳)$$

باشروع ازپرانتزداخلی (وبااستفاده ازجدول ۳.۱۳)، خواهیم داشت

$$b_{N-1}+xb_N=b_{N-1}T_0(x)+b_NT_1(x) \qquad (۱۰۵.۱۳)$$

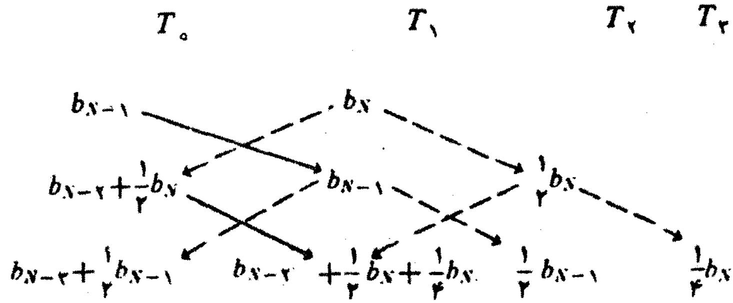
پس ازضرب کردن درx وبابهره‌گیری ازمعادلات (۱۰۳.۱۳) و (۱۰۴.۱۳)، داریم

$$\begin{aligned} b_{N-2}+x(b_{N-1}+xb_N)&=b_{N-2}T_0+x(b_{N-1}T_0+b_NT_1 \\ &=b_{N-2}T_0+b_{N-1}T_1+\frac{1}{2}b_NT_0+\frac{1}{2}b_NT_2 \end{aligned} \qquad (۱۰۶.۱۳)$$

باجمع‌آوری ضرایب، می‌رسیم به

$$b_{N-2}+x(b_{N-1}+xb_N)=\left(b_{N-2}+\frac{1}{2}b_N\right)T_0+b_{N-1}T_1+\frac{1}{2}b_NT_2 \qquad (۱۰۷.۱۳)$$

به‌طور طرحواره داریم (ضرایب T_n درستونهای تحت عنوان T_n آمده‌اند که در هر سطر نسبت به‌سطر بالایی حاصل یك تکرار دیگر درنظرگرفته شده است):



ضریب T_N عبارت است از: $a_n=2^{-(N-1)}b_N$.
به‌این نکته‌ها توجه کنید:

۱. درسطر mام، a_{N-m} به‌ستون T_0 اضافه می‌شود: (b_N در سطر اول در ستون T_1 ظاهرمی‌شود.)
۲. ضریب T_0 هر سطر به‌ستون T_1 یك سطر پایینترمنتقل می‌شود (پیکانهای پیوسته).
۳. همهٔ درایه‌های دیگر (ستونهای T_1، T_2 و . . .) در سطر پایینتـر، بنابر معادلهٔ (۱۰۳.۱۳)، هم به‌چپ وهم به‌راست منتقل می‌شوند، اما یك ضریب ۱/۲ در آنها راه پیدا می‌کند. (پیکانهای خط چین).

روند این دستورالعمل همچنان ادامه پیدا می‌کند تا اینکه آخـرین ضریب b_0 به‌ستون T_0 خورانده شود وسطرمربوط به‌آن تکمیل شود. دراین‌صورت عددی‌که در ستون T_m ظاهر می‌شود ضریب آن، یعنی a_m است. این دستورالعمل به‌عنوان یك‌برنامهٔ کامپیوتری، سریع و دقیق است. این‌مزیت را نیز داردکه به‌هیچ‌گونه‌آگاهی از ضرایب چندجمله‌ایهای چبیشف (فراتر از T_0 و T_1) نیازی ندارد.

سری ادغامی (توی‌هم رونده)

فرض کنیدکه $\cosh x$ دربازهٔ[۱ , ۱ −] توسط یك‌سری‌مك‌لورن‌قطع‌شده‌نمایش‌یافته‌باشد،

$$\cosh x \approx \sum_{n=0}^{6} b_{2n}x^{2n} \qquad (108.13)$$

که درآن $b_{2n}=1/(2n)!$. ازآنجاکه ضرایب، دنباله‌ای سریعاً کاهشی را تشکیل‌می‌دهند، خطـای بیشینه (در $x=1$) تقریباً با اولین جملـه‌ای کـه از آن چشم پوشیده‌ایم، یعنـی $-1/(14)! = 1{,}147\times10^{-11}$ ، برابراست. باتبدیل به‌یك سری چبیشف تا $T_{12}(x)$، داریم

$$\cosh x \approx \sum_{n=0}^{6} b_{2n}x^{2n} = \sum_{n=0}^{6} a_{2n}T_{2n}(x) \qquad (109.13)$$

ضرایب سری مك‌لورن وسری چبیشف درجدول ۶.۱۳ نشان داده شده‌اند. نسبت a_{2n}/b_{2n}

جدول ۶.۱۳

n	ضرایب سری مک‌لورن معادلهٔ(۱۰۸.۱۳)	ضرایب سری چبیشف[1] معادلهٔ(۱۰۹.۱۳)	a_{2n}/b_{2n} چبیشف / مک‌لورن
۰	۱٫۰۰۰ $\times$ ۱۰^{۰}	۱٫۲۶۶۰۶۵۸۷۷۷۴۹۶	۱٫۲۷
۲	۵٫۰۰۰ $\times$ ۱۰$^{-۱}$	۰٫۲۷۱۴۹۵۳۳۹۵۲۹۸	۵٫۴۳ $\times$ ۱۰$^{-۱}$
۴	۴٫۱۶۷ $\times$ ۱۰$^{-۲}$	۰٫۰۰۵۴۷۴۲۴۰۴۳۹۳	۱٫۳۱ $\times$ ۱۰$^{-۱}$
۶	۱٫۳۸۹ $\times$ ۱۰$^{-۳}$	۰٫۰۰۰۰۴۴۹۷۷۳۲۱۵	۳٫۲۴ $\times$ ۱۰$^{-۲}$
۸	۲٫۴۸۰ $\times$ ۱۰$^{-۵}$	۰٫۰۰۰۰۰۰۱۹۹۲۱۲۰	۸٫۰۳ $\times$ ۱۰$^{-۳}$
۱۰	۲٫۷۵۶ $\times$ ۱۰$^{-۷}$	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۵۵۰۵	۲٫۰۰ $\times$ ۱۰$^{-۳}$
۱۲	۲٫۰۸۸ $\times$ ۱۰$^{-۹}$	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۰	۴٫۸۸ $\times$ ۱۰$^{-۴}$

$$\cosh x \approx \sum_{n=0}^{6} b_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{6} a_{2n} T_{2n}(x)$$

۱. همهٔ ضرایب تادقت ۱۳ رقم اعشارمحاسبه شده‌اند.

نیز، برای نمایاندن همگرایی بسیار سریعتر سری چبیشف متناظر دراین جدول گنجانیده شده است.

نسبت آخری، یعنی a_{12}/b_{12}، مطابق انتظار، در همان محدودهٔ دقت چبیشف عبارت است از 2^{-11}.

اینك آخرین جمله در این سری چبیشف هفت‌جمله‌ای عبارت است از $1.0 \times 10^{-12} T_{12}(x)$، که بزرگی بیشینهٔ آن بااستفاده ازمعادلهٔ (۹۴.۱۳) برابر است با 1.0×10^{-12}. از آنجا که تقریب اصلی‌ما برای $\cosh x$ [معادلهٔ (۱۰۸.۱۳)] تنها تـا 1.1×10^{-11} دقت دارد، این‌جملهٔ T_{12} را می‌توان بدون هیچ گونه افت‌دقت حذف‌کرد. سری‌کوتاه شدهٔ شش‌جمله‌ای چبیشف را بازمی‌توان در صورت تمایل به‌یك سری توانی تا x^{10} تبدیل کرد. واین سری توانی ادغامی، اساساً ازهمان دقتی‌که سری اصلی تا x^{12} دارد، برخوردار است.

این فرایند حذف جملهٔ بالاترین مرتبه از سری چبیشف (ادغامی) را اگر بخواهیم می‌توانیم ادامه دهیم. جدول ۷.۱۳، ضرایب سری توانی حاصل را ارائه می‌کند.

خطای‌بیشینه درسری ادغامی شش‌جمله‌ای درحدودخطای بیشینه درسری هفت‌جمله‌ای اصلی است. خطای بیشینه درسری‌ادغامی‌پنج‌جمله‌ای به‌طورقابل‌ملاحظه‌ای کمتر از خطای بیشینه درسری مك‌لورن شش‌جمله‌ای است. این فرایند ادغامی، خطای بیشینه راکم می‌کند (سری

جدول ۷.۱۳ تقریبهای مربوط به $\cosh x$.

n	$\sum_{}^{۷} b_{۲n}x^{۲n}$ سری‌مك‌لورن هفت جمله‌ای b_n	$\sum_{}^{۶} b'_{۲n}x^{۲n}$ ادغامی تا شش جمله b'_n	$\sum_{}^{۵} b''_{۲n}x^{۲n}$ ادغامی تا پنج جمله b''_n
۰	۱٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۰٫۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹	۱٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۵۴۹
۲	۰٫۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۰٫۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۷۳	۰٫۴۹۹۹۹۹۹۷۲۵۵۰
۴	۰٫۰۴۱۶۶۶۶۶۶۶۶۷	۰٫۰۴۱۶۶۶۶۶۵۸۱۰	۰٫۰۴۱۶۶۶۸۸۵۹۹۵
۶	۰٫۰۰۱۳۸۸۸۸۸۸۸۹	۰٫۰۰۱۳۸۸۸۹۲۵۴۲	۰٫۰۰۱۳۸۸۲۷۶۰۲۶
۸	۰٫۰۰۰۰۲۴۸۰۱۵۸۷	۰٫۰۰۰۰۲۴۷۹۴۵۴۱	۰٫۰۰۰۰۲۵۴۹۹۱۳۲
۱۰	۰٫۰۰۰۰۰۰۲۷۵۵۷۳	۰٫۰۰۰۰۰۰۲۸۱۸۳۶	—
۱۲	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۲۰۸۸	—	—
بیشینهٔ خطا	(—۱)۱٫۱۴۷ $\times$ ۱۰$^{-۱۱}$	۱٫۳ $\times$ ۱۰$^{-۱۱}$	۵٫۶ $\times$ ۱۰$^{-۱۰}$
بیشینهٔ خطا درسری مك‌لورن باهمین تعداد جمله		(—)۲٫۱ $\times$ ۱۰$^{-۹}$	(—)۲٫۸ $\times$ ۱۰$^{-۷}$

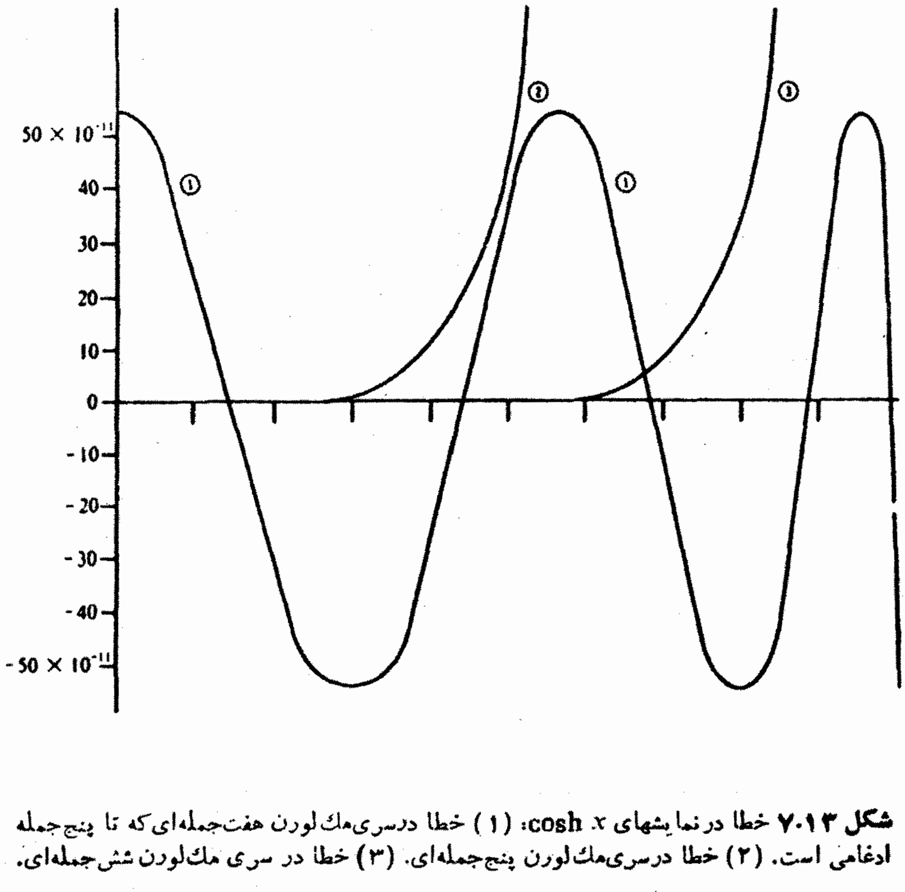
ادغامی را با سری مك‌لورن با همان تعداد جمله مقایسه می‌کنیم) و به‌جای آنکه آن را در $x=\pm1$ متمرکز کند، روی‌بازهٔ $[-1,1]$ به‌طوریکنواخت‌تر پخش‌می‌کند. به‌ازای تعداد ثابتی جمله به‌روشی برای کمینه‌سازی خطای بیشینه، یا یك تقریب کم‌بیشینه، دست یافته‌ایم. این توزیع مجدد خطا (نمایش‌یافته درشکل ۷.۱۳) را آخرین $b_nT_n(x)$ حذف شده، تقریباً به‌صورت هم‌موج، ارائه می‌دهد.

نه‌تقریبهای چبیشف، در جدول ۷.۱۳، به‌صورت

$$\cosh x \approx \sum_{n=0}^{5} b'_{2n}x^{2n} \qquad \text{(۱۰۸.۱۳الف)}$$

$$\approx \sum_{n=0}^{4} b''_{2n}x^{2n} \qquad \text{(۱۰۸.۱۳ب)}$$

تقریبهای کم‌بیشینهٔ دقیق هستند ونه منحنی خطا، شکل ۷.۱۳، دقیقاً هم‌موج است. این‌تقریب را می‌توان ازطریق شگردهای عددی تکراری چنان اصلاح‌کردکه دقیقاً کم‌بیشینه و یا خطا دقیقاً هم‌موج باشد، ولی تقریبهای چبیشف تقریباً برای همهٔ مقاصد کفایت می‌کنند.



شکل ۷۰۱۳ خطا در نمایشهای $\cosh x$: (۱) خطا در سری‌مک‌لورن هفت‌جمله‌ای که تا پنج‌جمله ادغامی است. (۲) خطا درسری‌مک‌لورن پنج‌جمله‌ای. (۳) خطا در سری مک‌لورن شش‌جمله‌ای.

چندجمله ایهای انتقال‌یافتهٔ چبیشف

چندجمله ایهای چبیشف روی بازهٔ خاص $[-1, 1]$ تعریف شده و متعامدند. از آنجا که هر بازهٔ متناهی $a \leqslant x \leqslant b$ را می‌توان به‌کمك تبدیل خطی

$$x=\frac{b-a}{۲}t+\frac{b+a}{۲} \tag{۱۱۰۰۱۳}$$

به‌بازهٔ $-۱ \leqslant t \leqslant ۱$ تبدیل کرد، گزینهٔ $[-۱, ۱]$ کاملا کلی است. ولی بیشتر اوقات بهتراست که دربازهٔ $[۰, ۱]$ عمل کنیم و چندجمله ایهایی را تعریف کنیم که روی این بازه متعامدباشند. بااستفاده ازمعادلهٔ(۱۱۰۰۱۳)،ازتساوی $T_n(t)=T_n(۲x-۱)$ بهره‌می‌گیریم وآنهارا چندجمله ایهای انتقال‌یافتهٔ چبیشف، $T_n^*(x)$، می‌نامیم

$$T_n^*(x)=T_n(۲x-۱), \quad ۰ \leqslant x \leqslant ۱ \quad n=۰, ۱, ۲, \ldots \tag{۱۱۱۰۱۳}$$

چندجمله‌ایهای انتقال‌یافتهٔ چبیشف را می‌توان برحسب زاویهٔ θ مشخص کرد. به‌عنوان‌شناسهٔ T_n داریم

$$۲x-۱=\cos\theta$$

آنگاه

$$x=\frac{۱+\cos\theta}{۲}=\cos^{۲}\frac{\theta}{۲} \qquad (۱۱۲.۱۳)$$

از آنجا که در رفتن از T_n به T_n^*، یك تبدیل خطی انجام داده‌ایم، در اینجا نیز داریم

$$T_n^*(x)=\cos n\theta$$

ولی‌اینك x و θ ازطریق معادلهٔ(۱۱۲.۱۳) به‌هم مربوط‌می‌شوند. خواص $T_n^*(x)$ را می‌توان به‌کمك خواص $T_n(x)$ متناظر استخراج کرد. دراینجا نیز، به‌علت‌آنکه‌گاهی چندجمله‌ایهای انتقال‌یافتهٔ چبیشف‌سودمندند، آی‌بی‌ام ازطریق Scientific Subroutine Package (SSP) زیر-برنامه‌های مناسبی ارائه داده است.

مسائل

۱.۴.۱۳ روابط زیررا استخراج‌کنید

$$\int_{۰}^{۱} T_m^*(x)T_n^*(x)\frac{dx}{(x-x^{۲})^{۱/۲}}=\begin{cases} ۰ & m\neq n \\ \frac{\pi}{۲} & m=n\neq ۰ \\ \pi & m=n=۰ \end{cases}$$

۲.۴.۱۳ (الف) نشان دهیدکه $T_0^*(x)=۱$ و $T_1^*(x)=۲x-۱$.

(ب) رابطهٔ بازگشتی زیر را برای چندجمله‌ای انتقال‌یافتهٔ چبیشف استخراج‌کنید

$$T_{n+1}^*(x)=۲(۲x-۱)T_n^*(x)-T_{n-1}^*(x)$$

به‌کمك این رابطهٔ بازگشتی و نتایج بند (الف)، می‌توان سایر چندجمله‌ایهای انتقال‌یافتهٔ چبیشف را تشکیل داد.

۳.۴.۱۳ بسطهای چبیشف زیر را (برای $[-۱,۱]$) تشکیل دهید:

(الف)
$$(۱-x^{۲})^{۱/۲}=\frac{۲}{\pi}\left[۱-۲\sum_{s=1}^{\infty}(۴s^{۲}-۱)^{-۱}T_{۲s}(x)\right]$$

(ب)
$$\frac{4}{\pi}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(2s+1)^{-1}T_{2s+1}(x)=\begin{cases}+1, & 0<x\leqslant 1\\ -1, & -1\leqslant x<0\end{cases}$$

۴.۴.۱۳ (الف) برای بازهٔ $[-1, 1]$، نشان دهید

$$|x|=\frac{1}{2}+\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s+1}\frac{(2s-3)!!}{(2s+2)!!}(4s+1)P_{2s}(x)$$

$$=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s+1}\frac{1}{4s^2-1}T_{2s}(x)$$

(ب) نشان دهید که نسبت‌ضریب $T_{2s}(x)$ به‌ضریب $P_{2s}(x)$ با $s\to\infty$ به $(\pi s)^{-1/2}$ نزدیك می‌شود. این نسبت، همگرایی نسبتاً سریع سری چبیشف‌را نمایش می‌دهد.

راهنمایی. لژاندر ــ بااستفاده از روابط بازگشتی لژاندر، $xP_n(x)$ را به‌صورت ترکیب‌خطی مشتقها بنویسید. چبیشف ــ جانشانی مثلثاتی $x=\cos\theta$، $T_n(x)=\cos n\theta$ بسیار سودمند است.

۵.۴.۱۳ نشان دهید که

$$\frac{\pi^2}{8}=1+2\sum_{s=1}^{\infty}(4s^2-1)^{-2}$$

راهنمایی. از اتحاد پارسوال (یا رابطهٔ تمامیت) دربارهٔ نتایج مسئلهٔ ۴.۴.۱۳ بهره‌گیرید.

۶.۴.۱۳ نشان دهید

(الف)
$$\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}T_{2n+1}(x)$$

(ب)
$$\sin^{-1}x=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}T_{2n+1}(x)$$

۷.۴.۱۳ (الف) زیر-برنامه‌ای بادقت مضاعف‌بنویسید که سری‌توانی‌متناهی $\sum_{n=0}^{N}b_nx^n$ را به‌سری چبیشف $\sum_{n=0}^{N}a_nT_n(x)$ تبدیل کند. از شگرد تکرار رابطهٔ بازگشتی‌که طرح کلی‌آن در این بخش شرح داده‌شده است، بهره‌گیرید.

(ب) زیر-برنامهٔ خود را فرا خوانید تا ضرایب سری چبیشف را برای (۱) e^x، (۲) e^{-x}، (۳) $\cosh x$، و (۴) $\sinh x$ پیدا کند. جملات‌تا $T_{12}(x)$ رابه‌حساب بیاورید.

یادآوری. این ضرایب چبیشف در مسئلهٔ ۱۶.۵.۱۱ برحسب توابع تعدیل یافتهٔ بسل محاسبه می‌شوند.

۸.۴.۱۳ (الف) با استفاده ازضرایب چبیشف بادقت مضاعف تا $a_{11}T_{11}$ برای $\sinh x$ ازمسئلهٔ ۷.۴.۱۳ یا ۶.۵.۱۱ جملهٔ $a_{11}T_{11}$ را حذف کنید. خطای سری ادغامی خود را باخطا در (۱) سری اصلی، (۲) سری مك‌لورن باهمان تعدادجملات سری‌ادغامی‌مقایسه کنید. این سری چبیشف جدید را به‌یك سری توانی تبدیل کنید.

(ب) بند (الف) راتا حذف a_9T_9 تکرار کنید. منحنی خطای تقریباً هم‌موج‌رامحاسبه کنید و آن‌را بامنحنی خطای سری مك‌لورن تا b_7x_7 مقایسه کنید.

۵.۱۳ توابع فوق هندسی

در فصل ۸ با معادلهٔ فوق هندسی زیر آشنا شدیم[1]

$$x(1-x)y''(x)+[c-(a+b+1)x]y'(x)-aby(x)=0 \qquad (113.13)$$

این معادله صورت بندادی یك معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم خطی، با تکینگیهای منظمی در $x=0, 1, \infty$ به‌شمار می‌آید. یکی از جوابهای این معادله عبارت است از

$$y(x)={}_2F_1(a, b, c; x)$$
$$=1+\frac{a\cdot b}{c}\frac{x}{1!}+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!}+\cdots, \qquad (114.13)$$
$$c\neq 0, -1, -2, -3, \ldots$$

که آن را تابع یا سری فوق‌هندسی می‌نامند. گسترهٔ همگرایی آن، $|x|<1$ و $x=1$، به‌ازای $c>a+b$ و $x=-1$ به‌ازای $c>a+b-1$ است. تابع فوق هندسی برحسب نماد متداول پوکهامر[2]

$$(a)_n=a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)=\frac{(a+n-1)!}{(a-1)!}$$
$$(115.13)$$
$$(a)_0=1$$

به‌صورت زیردرمی‌آید

$${}_2F_1(a, b, c; x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!} \qquad (116.13)$$

---

۱. این معادله راگاهی معادلهٔ دیفرانسیل گاؤس می‌نامند. دراین صورت، جوابهای آن توابع گاؤس‌نامیده می‌شوند.

2. Pochhammer

به‌این ترتیب به‌مفهوم شاخصهای ۲ و ۱ پی می‌بریم. شاخص مقدم۲ نشان می‌دهدکه دو نماد پوکهامر درصورت کسر ظاهر می‌شود و شاخص آخری۱ نشان‌می‌دهدکه یك نماد پوکهامر در مخرج کسر موجود است.[۱] تابع فوق‌هندسی همشار $_1F_1$ با یك نماد پوکهامر در صورت کسر و یکی درمخرج در بخش ۶.۱۳ پدیدارمی‌شود.

ازشکل معادلهٔ(۱۱۴.۱۳) مشاهده می‌کنیم که پارامتر c نمی‌تواند صفر یا عدد درست منفی باشد. از سوی دیگر، چنانچه a و b صفر یا عدد درست منفی باشند، سری پایان می‌پذیرد و تابع فوق‌هندسی به‌یك چندجمله‌ای تبدیل می‌شود.

بسیاری از توابع کمابیش بنیادی‌را می‌توان به‌کمك تابع فوق‌هندسی نمایش داد.[۲] پی می‌بریم که

$$\ln(1+x)=x\,{}_2F_1(1,1,2;-x) \qquad (117.13)$$

برای انتگرالهای بیضوی‌کامل K و E داریم

$$\begin{aligned} K(k^2)&=\int_0^{\pi/2}(1-k^2\sin^2\theta)^{-1/2}d\theta \\ &=\frac{\pi}{2}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;k^2\right) \end{aligned} \qquad (118.13)$$

$$\begin{aligned} E(k^2)&=\int_0^{\pi/2}(1-k^2\sin^2\theta)^{1/2}d\theta \\ &=\frac{\pi}{2}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1;k^2\right) \end{aligned} \qquad (119.13)$$

صورتهای سری صریح و سایرخواص انتگرالهای بیضوی در بخش ۸.۵ به‌تفصیل توضیح داده شده‌اند.

معادلهٔ فوق‌هندسی به‌عنوان یك معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم جواب دیگری نیز دارد. صورت معمولی آن عبارت است از

$$y(x)=x^{1-c}\,{}_2F_1(a+1-c,b+1-c,2-c;x),\ c\neq 2,3,4,\dots \qquad (120.13)$$

خواننده می‌تواند نشان دهد (مسئلهٔ ۱.۵.۱۳) که اگر c عدد درستی باشد، یا دو جواب

---

۱. نماد پوکهامر اغلب درعبارات دیگری که شامل‌فاکتوریلهاست، سودمند واقع می‌شود، مثلاً در

$$(1-z)^{-a}=\sum_{n=0}^{\infty}(a)_n z^n/n! \quad |z|<1$$

۲. با داشتن سه پارامتر a، b، و c تقریباً هر چیزی را می‌توان نمایش داد.

بایکدیگر یکی‌می‌شوند و یایکی ازدوجواب نامتناهی‌می‌شود(که‌البته اگر a یا b عدد درست باشد این وضع پیش نخواهدآمد). درچنین حالتی انتظار می‌رودکه جواب دوم حاوی یك جملهٔ لگاریتمی باشد.

از جملهٔ صورتهای دیگر معادلهٔ فوق‌هندسی، صورتهای زیر را داریم

$$(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2}y\left(\frac{1-z}{2}\right)-[(a+b+1)z$$
$$-(a+b+1-2c)]\frac{d}{dz}y\left(\frac{1-z}{2}\right)-aby\left(\frac{1-z}{2}\right)=0 \quad (121.13)$$

$$(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2}y(z^2)-\left[(2a+2b+1)z+\frac{1-2c}{z}\right]\frac{d}{dz}y(z^2)$$
$$-4aby(z^2)=0 \quad (122.13)$$

روابط تابع مجاور

طریقهٔ وارد شدن پارامترهای a، b، و c به‌همان شیوهٔ وارد شدن پارامتر n متعلق به‌توابع بسل و لژاندر وسایرتوابع خاص است، به‌همان ترتیبی‌که در مورد این توابع پی بردیم، انتظارداریم روابطی بازگشتی متضمن تغییراتی برابرواحد درa، b، وc بیابیم. رسم‌است‌که تابعی فوق‌هندسی راکه درآن یك پارامتر به‌اندازهٔ ۱+ یا ۱− تغییرکند، "تابع مجاور" بنامیم. باتعمیم این اصطلاح وشمول تغییرات واحد همزمان به‌بیش ازیك پارامتر، ۲۶ تابع مجاور با $_2F_1(a, b, c; x)$ می‌یابیم. اگر آنهارا دوتا دوتا درنظربگیریم، می‌توانیم تعداد ۳۲۵ معادله بین توابع مجاور تشکیل دهیم. نمونه‌ای ازاین رابطه‌ها عبارت است از

$$(a-b)\{c(a+b-1)+1-a^2-b^2+[(a-b)^2-1](1-x)\}{}_2F_1(a,b,c;x)$$
$$=(c-a)(a-b+1)b\,{}_2F_1(a-1, b+1, c; x)$$
$$+(c-b)(a-b-1)a\,{}_2F_1(a+1, b-1, c; x) \quad (123.13)$$

یك رابطهٔ دیگرتابع مجاور درمسئلهٔ ۱۰.۵.۱۳ ظاهرمی‌شود.

نمایشهای فوق‌هندسی

معادلهٔ فراکروی (۸۱.۱۳) دربخش ۳.۱۳ حالت خاصی از معادلهٔ (۱۱۳.۱۳) است، از این‌رو می‌بینیم‌که توابع فراکروی (و توابع لژاندر وچبیشف) را می‌توان به‌صورت توابع فوق‌هندسی نمایش داد. برای تابع‌فراکروی داریم

$$T_n^\beta(x)=\frac{(n+2\beta)!}{2^\beta n!\beta!}\,{}_2F_1\left(-n, n+2\beta+1, 1+\beta; \frac{1-x}{2}\right) \quad (124.13)$$

برای توابع لژاندر و وابستهٔ لژاندر

$$P_n(x)={}_2F_1\left(-n,\ n+1,\ 1;\ \frac{1-x}{2}\right) \qquad (125.13)$$

$$P_n^m(x)=\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^m m!}\,{}_2F_1\left(m-n,\ m+n+1,\ m+1;\frac{1-x}{2}\right)$$

(126.13)

صورتهای دیگرعبارت‌اند از

$$P_{2n}(x)=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}n!n!}\ {}_2F_1\left(-n,\ n+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ x^2\right)$$

(127.13)

$$=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,{}_2F_1\left(-n,\ n+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ x^2\right)$$

$$P_{2n+1}(x)=(-1)^n\frac{(2n+1)!}{2^{2n}n!n!}\,x\,{}_2F_1\left(-n,\ n+\frac{3}{2},\ \frac{3}{2};\ x^2\right)$$

(128.13)

$$=(-1)^n\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\,x\,{}_2F_1\left(-n,\ n+\frac{3}{2},\ \frac{3}{2};\ x^2\right)$$

توابع چبیشف برحسب توابع فوق‌هندسی به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$T_n(x)={}_2F_1\left(-n,\ n,\ \frac{1}{2};\ \frac{1-x}{2}\right) \qquad (129.13)$$

$$U_n(x)=(n+1)\,{}_2F_1\left(-n,\ n+2,\ \frac{3}{2};\ \frac{1-x}{2}\right) \qquad (130.13)$$

$$V_n(x)=\sqrt{1-x^2}\,n\,{}_2F_1\left(-n+1,\ n+1,\ \frac{3}{2};\ \frac{1-x}{2}\right) \qquad (131.13)$$

ضرایب پیشرو ازطریق مقایسهٔ مستقیم باسری توانی کامل یا به‌کمک مقایسه باضرایب سری توانی خاصی‌که در دسترس است، یا بامحاسبه در $x=0$ یا $x=1$، وغیره تعیین می‌شوند.

ازسری فوق هندسی برای تعریف توابع‌باشاخصهای غیرعدد درست استفاده‌می‌شود. موارد کاربرد فیزیکی این‌سری بسیار اندك است.

مسائل

۱۰۵۰۱۳ (الف) نشان دهید که هرگاه c عدد درست و a و b عددهای غیردرست باشند، عبارتهای

$$x^{1-c}{}_2F_1(a+1-c,\ b+1-c,\ 2-c;\ x) \text{ و } {}_2F_1(a,\ b,\ c;\ x)$$

تنها یکی ازجوابهای معادلهٔ فوق‌هندسی را به‌دست می‌دهند.

(ب) اگر a عدد درستی باشد، مثلا ۱ $-=a$ و ۲ $-=c$ چه پیش خواهدآمد؟

۲.۵.۱۳ روابط بازگشتی لژاندر، چبیشف I، وچبیشف II متناظر بامعادلهٔ تابع فوق‌هندسی مجاور(۱۲۳.۱۳) را پیداکنید.

۳.۵.۱۳ چندجمله‌ایهای زیررا به‌توابع‌فوق‌هندسی‌باشناسهٔ x^2 تبدیل کنید. (الف) $T_{2n}(x)$؛ (ب) $x^{-1}T_{2n+1}(x)$؛ (ج) $U_{2n}(x)$؛ (د) $x^{-1}U_{2n+1}(x)$.

پاسخ.
$$T_{2n}(x)=(-1)^n{}_2F_1\left(-n,\ n,\ \frac{1}{2};\ x^2\right)$$

$$x^{-1}T_{2n+1}(x)=(-1)^n(2n+1){}_2F_1\left(-n,\ n+1,\ \frac{3}{2};\ x^2\right)$$

$$U_{2n}(x)=(-1)^n{}_2F_1\left(-n,\ n+1,\ \frac{1}{2};\ x^2\right)$$

$$x^{-1}U_{2n+1}(x)=(-1)^n(2n+2){}_2F_1\left(-n,\ n+2,\ \frac{3}{2};\ x^2\right)$$

۴.۵.۱۳ ضریب پیشرو درنمایشهای فوق‌هندسی توابع چبیشف را تحقیق یااستخراج کنید.

۵.۵.۱۳ تحقیق کنیدکه تابع نوع دوم لژاندر $Q_\nu(z)$ ازرابطهٔ زیربه‌دست می‌آید

$$Q_\nu(z)=\frac{\pi^{1/2}\nu!}{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)!(2z)^{\nu+1}}\,{}_2F_1\left(\frac{\nu}{2}+\frac{1}{2},\ \frac{\nu}{2}+1,\ \frac{\nu}{2}+\frac{3}{2};\ z^{-2}\right)$$

$$|z|>1,\quad |\arg z|<\pi,\quad \nu\neq -1,\ -2,\ -3,\ \ldots$$

۶.۵.۱۳ تابع ناکامل بتا، مانند تابع ناکامل‌گاما بنابر تعریف عبارت است از

$$B_x(a,\ b)=\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$$

نشان دهیدکه

$$B_x(a,\ b)=a^{-1}x^a{}_2F_1(a,\ 1-b,\ a+1;\ x)$$

۷.۵.۱۳ درستی نمایش انتگرالی زیر را تحقیق‌کنید

$$ {}_2F_1(a, b, c; z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt $$

چه محدودیتهایی باید درمورد پارامترهای b و c ودرمورد متغیر z وضع کنید؟

یادآوری. محدودیت روی $|z|$ را می‌توان ازطریق تمدیدتحلیلی حذف کرد. به‌ازای مقدارغیردرست a، محورحقیقی درصفحهٔ z از ۱ تا ∞ یك خط برش است.

راهنمایی. این انتگرال احتمالاً شبیه به‌یك تابع بتا به‌نظرمی‌رسد و می‌توان آن را در یك سری از توابع بتا بسط داد.

پاسخ. $\mathcal{R}(c)>\mathcal{R}(b)>0$، و $|z|<1$

۸.۵.۱۳ ثابت کنید

$$ {}_2F_1(a, b, c; 1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \ c\neq 0, \ -1, \ -2, \ \ldots, \ c>a+b $$

راهنمایی. دراینجا فرصتی پیش می‌آید تا ازنمایش انتگرالی مسئلهٔ ۷.۵.۱۳ بهره گیریم.

۹.۵.۱۳ ثابت کنید

$$ {}_2F_1(a, b, c; x)=(1-x)^{-a}{}_2F_1\left(a, c-b, c; \frac{-x}{1-x}\right) $$

راهنمایی. نمایش انتگرالی مسئلهٔ ۷.۴.۱۳ را بیازمایید.

یادآوری. فایدهٔ این رابطه پدید آوردن نمایش ردریگز $T_n(x)$ است (بامسئلهٔ ۱۱.۳.۱۳ مقایسه کنید).

۱۰.۵.۱۳ تحقیق کنید

$$ {}_2F_1(-n, b, c; 1)=\frac{(c-b)_n}{(c)_n}. $$

راهنمایی. دراینجا نیزفرصتی پیش می‌آید تا ازرابطهٔ تابع مجاور

$$ [2a-c+(b-a)x]F(a, b, c; x)=a(1-x)F(a+1, b, c; x) $$
$$ -(c-a)F(a-1, b, c; x) $$

و استقرای ریاضی بهره گیرید. نمایش انتگرالی و تابع بتا را نیز می‌توانید به‌کاربرید.

۶.۱۳ توابع فوق هندسی همشار

معادلهٔ فوق‌هندسی همشار[1]

$$xy''(x)+(c-x)y'(x)-ay(x)=0 \qquad (۱۳۲.۱۳)$$

را می‌توان ازمعادلهٔ فوق‌هندسی بخش۵.۱۳، ازطریق ادغام دوتاازتکینگیها به‌دست آورد. معادلهٔ‌حاصل یك‌تکینگی منظم در $x=0$ ویك‌تکینگی نامنظم در $x=\infty$ دارد. یکی‌ازجوابهای معادلهٔ فوق‌هندسی همشارعبارت است از

$$y(x)={}_1F_1(a,\ c;\ x)=M(a,\ c;\ x)$$

$$=1+\frac{a}{c}\frac{x}{1!}+\frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!}+\cdots,\ c\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots \qquad (۱۳۳.۱۳)$$

این‌جواب به‌ازای همهٔ xها (یا zها)ی متناهی همگراست. برحسب علامت پوکهامر، داریم

$$M(a,\ c;\ x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!} \qquad (۱۳۴.۱۳)$$

روشن است که $M(a,\ c;\ x)$ درصورتی‌که a برابرصفریایك عدد درست منفی باشد، به‌یك چندجمله‌ای‌تبدیل می‌شود. توابع‌کمابیش‌بنیادی بیشماری‌را می‌توان به‌کمك‌تابع فوق‌هندسی همشار نمایش داد. مثلا، تابع خطا وتابع ناکامل‌گاما را می‌توان برشمرد

$$\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\pi^{1/2}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt=\frac{2}{\pi^{1/2}}\,xM\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2};\ -x^2\right) \qquad (۱۳۵.۱۳)$$

$$\gamma(a,x)=\int_0^x e^{-t}t^{a-1}dt$$

(۱۳۶.۱۳)

$$=a^{-1}x^aM(a,\ a+1;\ -x) \quad \Re(a)>0$$ ازمعادلهٔ (۷۱.۱۰)، داریم

آشکار است‌که این عبارت با جواب اول به‌ازای $c=a+1$ یکی است. تابع خطا وتابع ناکامل گاما دربخش ۵.۱۰ مفصلترشرح داده شده‌اند.

یك جواب دیگر معادلهٔ (۱۳۲.۱۳) ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$y(x)=x^{1-c}M(a+1-c,\ 2-c;\ x),\quad c\neq 2,\ 3,\ 4,\ \ldots \qquad (۱۳۷.۱۳)$$

صورت متعارف جواب دوم معادلهٔ (۱۳۲.۱۳) ترکیبی است خطی ازمعادلات(۱۳۳.۱۳) و (۱۳۷.۱۳)

---

۱. این معادله‌را غالباً معادلهٔ کومر می‌نامند. درنتیجه جوابهای آن همان توابع کومرهستند.

$$U(a, c; x)=\frac{\pi}{\sin \pi c}\left[\frac{M(a, c; x)}{(a-c)!(c-1)!}-\frac{x^{1-c} M(a+1-c, 2-c; x)}{(a-1)!(1-c)!}\right] \quad (۱۳۸.۱۳)$$

به‌تشابهی که این تعریف با تعریف تابع نویمان درمعادلهٔ (۶۰.۱۱) دارد توجه کنید. مانند تابع نویمان، معادلهٔ (۶۰.۱۱)، این تعریف $U(a, c; x)$ نیز دراینجا به‌ازای مقدار درست c، مبهم می‌شود.

شکل دیگری ازمعادلهٔ فوق‌هندسی همشار که بعداً به‌کارمی‌آید، با تغییر متغیر مستقلی از x به x^2 به‌دست می‌آید

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x^2)+\left[\frac{2c-1}{x}-2x\right]\frac{d}{dx} y(x^2)-4a y(x^2)=0 \quad (۱۳۹.۱۳)$$

دراینجا نیزمثل توابع‌فوق‌هندسی، توابع مجاوری‌وجود دارندکه درآنها پارامترهای a و c به‌اندازهٔ ± 1 تغییر کرده‌اند. باشمول تغییرات همزمان درهردو پارامتر[1]، هشت‌امکان مختلف داریم. با در نظرگرفتن تابع اصلی و زوج زوج توابع مجاور می‌توانیم جمعاً ۲۸ معادله تشکیل دهیم.[2]

نمایشهای انتگرالی

دربسیاری ازموارد بهتراست‌که توابع فوق‌هندسی همشار را به‌صورت انتگرالی دراختیار داشته باشیم. پی‌می‌بریم‌که (مسئلهٔ ۱۰.۶.۱۳)

$$M(a, c; x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 e^{xt} t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\,dt, \quad \Re(c)>\Re(a)>0 \quad (۱۴۰.۱۳)$$

$$U(a, c; x)=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-xt} t^{a-1}(1+t)^{c-a-1}\,dt, \quad \Re(x)>0, \quad \Re(a)>0 \quad (۱۴۱.۱۳)$$

سه تکنیک مهم برای استخراج یا تحقیق درستی نمایشهای انتگرالی عبارت‌اند از:

۱. تبدیل بسطهای تابع مولد و نمایشهای رددیگز: توابع بسل و لژاندر نمونه‌هایی ازاین رهیافت‌را به‌دست می‌دهند.

۲. انتگرالگیری مستقیم برای ارائهٔ یك سری: این تکنیك مستقیم برای نمایش تابع بسل (مسئلهٔ ۱۸.۱.۱۱) وانتگرال فوق‌هندسی (مسئلهٔ ۷.۵.۱۳) مفید است.

---

۱. اسلیتراینها را توابع وابسته می‌خواند.

۲. روابط بازگشتی توابع بسل، هرمیت، و لاگرحالتهای خاصی از این معادلات‌اند.

۳. (الف) تحقیق این نکته که نمایش انتگرالی در معادلهٔ دیفرانسیل صدق می‌کند. (ب) حذف جواب دیگر. (ج) تحقیق درستی بهنجارش. این همان روشی است که در بخش ۶.۱۱ برای تثبیت نمایش انتگرالی تابع تعدیل‌یافتهٔ بسل $K_\nu(z)$ به‌کار رفته است. این روش دراینجا نیز برای تثبیت معادله‌های (۱۴۰.۱۳) و (۱۴۱.۱۳) کارساز است.

توابع بسل و تعدیل‌یافتهٔ بسل

فرمول اول کومر

$$M(a, c; x)=e^x M(c-a, c; -x) \qquad (۱۴۲.۱۳)$$

برای نمایش توابع بسل و تعدیل‌یافتهٔ بسل مفیداست. درستی این فرمول را می‌توان به‌کمک بسط سری یا بااستفاده ازیك نمایش انتگرالی تحقیق‌کرد (بامسئلهٔ ۱۰.۶.۱۳ مقایسه‌کنید).

همان‌طور که از صورت معادلهٔ فوق‌هندسی همشار و سرشت تکینگیهای آن انتظار داریم، توابع فوق‌هندسی همشار برای نمایش‌تعدادی ازتوابع خاص فیزیك‌ریاضی‌مفیدند. درمورد توابع بسل

$$J_\nu(x)=\frac{e^{-ix}}{\nu!}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu M\left(\nu+\frac{1}{2}, 2\nu+1; 2ix\right) \qquad (۱۴۳.۱۳)$$

درحالی‌که برای توابع تعدیل‌یافتهٔ نوع اول بسل داریم

$$I_\nu(x)=\frac{e^{-x}}{\nu!}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu M\left(\nu+\frac{1}{2}, 2\nu+1; 2x\right) \qquad (۱۴۴.۱۳)$$

توابع هرمیت

توابع هرمیت، بابهره‌گیری ازمعادلهٔ (۱۳۹.۱۳)، از روابط زیر به‌دست می‌آیند

$$H_{2n}(x)=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!} M\left(-n, \frac{1}{2}; x^2\right) \qquad (۱۴۵.۱۳)$$

$$H_{2n+1}(x)=(-1)^n\frac{2(2n+1)!}{n!} xM\left(-n, \frac{3}{2}; x^2\right) \qquad (۱۴۶.۱۳)$$

ازمقایسهٔ معادلهٔ دیفرانسیل لاگر بامعادلهٔ فوق‌هندسی همشار، داریم

$$L_n(x)=M(-n, 1; x) \qquad (۱۴۷.۱۳)$$

باتوجه به‌معادلهٔ (۳۵.۱۳) به‌ازای $x=0$، ثابت c برابرواحد تعیین می‌شود. برای توابع وابستهٔ لاگر داریم

$$L_n^m(x)=(-1)^m\frac{d^m}{dx^m}L_{n+m}(x)$$
$$=\frac{(n+m)!}{n!m!}M(-n,\ m+1;\ x) \qquad (۱۴۸.۱۳)$$

درستی این معادله را در مقایسه با جواب سری توانی [معادلهٔ (۴۱.۱۳)، بخش ۲.۱۳] نیز تحقیق می‌کنیم. توجه کنید که در شکل فوق‌هندسی، برخلاف نمایش ردریگز، نیازی به آن نیست که شاخصهای n و m اعداد درستی باشند، و اگر عدد درست نباشند $L_n^m(x)$ چندجمله‌ای نخواهد بود.

موارد متفرقه

بیان توابع خاص برحسب توابع فوق‌هندسی وفوق‌هندسی همشار، از مزیتهایی برخوردار است. اگر رفتار کلی توابع فوق‌هندسی را بدانیم، رفتار توابع خاصی که بررسی کرده‌ایم به‌عنوان موارد خاص معلوم است. این موضوع می‌تواند درتعیین رفتار مجانبی یا محاسبهٔ انتگرالهای بهنجارش سودمند باشد. رفتارمجانبی $M(a,\ c;\ x)$ و $U(a,\ c;\ x)$ رامی‌توان به‌کمک نمایشهای انتگرالی این‌توابع، معادلات (۱۴۰.۱۳) و (۱۴۱.۱۳)، به‌طور مناسبی به‌دست آورد. مزیت دیگراین نوع بیان آن‌است که روابط بین‌توابع‌خاص‌را مشخص‌می‌کند. مثلا، ازبررسی معادله‌های(۱۴۵.۱۳)، (۱۴۶.۱۳)، و(۱۴۸.۱۳) چنین برمی‌آیدکه توابع هرمیت و لاگر به‌هم مربوط‌اند.

آشکاراست‌که معادلهٔ فوق‌هندسی (۱۳۲.۱۳) خود-الحاقی نیست. به‌این‌دلیل ودلایل دیگربهتراست‌که تابع زیررا تعریف‌کنیم

$$M_{k\mu}(x)=e^{-x/2}x^{\mu+1/2}M\left(\mu-k+\frac{1}{2},\ 2\mu+1;\ x\right) \qquad (۱۴۹.۱۳)$$

این تابع جدید $M_{k\mu}(x)$ تابع ویتاکراست که‌در معادلهٔ خود-الحاقی زیرصدق می‌کند

$$M''_{k\mu}(x)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{k}{x}+\frac{\frac{1}{4}-\mu^2}{x^2}\right)M_{k\mu}(x)=0 \qquad (۱۵۰.۱۳)$$

جواب متناظردیگرعبارت است از

$$W_{k\mu}(x)=e^{-x/2}x^{\mu+1/2}U(\mu-k+\frac{1}{2},\ 2\mu+1;\ x) \qquad (۱۵۱.۱۳)$$

مسائل

۱.۶.۱۳ درستی نمایش فوق‌هندسی همشار مربوط به‌تابع خطا را تحقیق کنید

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{۲x}{\pi^{۱/۲}}\,M\left(\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲}, -x^{۲}\right)$$

۲.۶.۱۳ نشان دهید که انتگرالهای فرنل $C(x)$ و $S(x)$، مسئلهٔ ۲.۱۰.۵، را می‌توان برحسب تابع فوق‌هندسی همشار به‌صورت زیر بیان‌کرد

$$C(x)+iS(x)=xM\left(\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲}; \frac{i\pi x^{۲}}{۲}\right)$$

۳.۶.۱۳ ازطریق مشتقگیری وجانشانی مستقیم تحقیق‌کنیدکه عبارت

$$y=ax^{-a}\int_{۰}^{x} e^{-t}t^{a-۱}dt=ax^{-a}\gamma(a, x)$$

عملا درمعادلهٔ زیر صدق می‌کند

$$xy''+(a+۱+x)y'+ay=۰$$

۴.۶.۱۳ نشان دهید که تابع تعدیل‌یافتهٔ نوع دوم بسل $K_{\nu}(x)$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$K_{\nu}(x)=\pi^{۱/۲}e^{-x}(۲x)^{\nu}U\left(\nu+\frac{۱}{۲}, ۲\nu+۱; ۲x\right)$$

۵.۶.۱۳ نشان دهید که انتگرالهای سینوس وکسینوس بخش ۵.۱۰ را می‌توان برحسب توابع فوق‌هندسی همشار به‌صورت زیربیان‌کرد

$$Ci(x)+isi(x)=-e^{ix}U(۱, ۱; -ix)$$

این رابطه درمحاسبهٔ عددی $Ci(x)$ و $si(x)$ به‌ازای مقادیر بزرگ x به‌کار می‌آید.

۶.۶.۱۳ صورت فوق‌هندسی همشار مربوط به‌چندجمله‌ایهای هرمیت $H_{۲n+۱}(x)$ [معادلهٔ (۱۴۶.۱۳)] را بانشان دادن این نکته‌که:

(الف) $H_{۲n+۱}(x)/x$ درمعادلهٔ فوق‌هندسی همشار با $a=-n$، $c=۳/۲$ وشناسهٔ $x^{۲}$ صدق می‌کند؛

(ب) $$\lim_{x\to ۰}\frac{H_{۲n+۱}(x)}{x}=(-۱)^{n}\frac{۲(۲n+۱)!}{n!}$$

تحقیق‌کنید.

۷.۶.۱۳ نشان دهید که معادلهٔ تابع فوق‌هندسی همشار مجاور

$$(c-a)M(a-1, c; x)+(2a-c+x)M(a, c; x)-aM(a+1, c; x)=0$$

به‌رابطهٔ بازگشتی تابع وابستهٔ لاگر [معادلهٔ (۴۴.۱۳)] می‌انجامد.

۸.۶.۱۳ درستی تبدیلهای کومر زیر را تحقیق کنید

(الف) $M(a, c; x)=e^{x}M(c-a, c; -x)$

(ب) $U(a, c; x)=x^{1-c}U(a-c+1, 2-c; x)$

۹.۶.۱۳ ثابت کنید

(الف) $$\frac{d^n}{dx^n}M(a, c; x)=\frac{(a)_n}{(c)_n}M(a+n, c+n; x)$$

(ب) $$\frac{d^n}{dx^n}U(a, c; x)=(-1)^n(a)_nU(a+n, c+n; x)$$

۱۰.۶.۱۳ درستی نمایشهای انتگرالی زیر را تحقیق کنید

(الف)

$$M(a, c; x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 e^{xt}t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}dt, \quad \Re(c)>\Re(a)>0$$

(ب)

$$U(a, c; x)=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-xt}t^{a-1}(1+t)^{c-a-1}dt, \quad \Re(x)>0, \quad \Re(a)>0$$

در بند (ب) تحت چه شرایطی می‌توانید $\Re(x)=0$ را قبول کنید؟

۱۱.۶.۱۳ بااستفاده از نمایش انتگرالی $M(a, c; x)$ در مسئلهٔ ۱۰.۶.۱۳ (الف)، نشان دهید که

$$M(a, c; x)=e^{x}M(c-a, c; -x)$$

راهنمایی. به‌جای‌متغیر انتگرالگیری t کمیت $1-s$ را بنشانید تا یك ضریب e^x از انتگرال بیرون آید.

۱۲.۶.۱۳ بااستفاده ازنمایش انتگرالی $U(a, c; x)$ درمسئلهٔ۱۰.۶.۱۳(ب)، نشان دهید که انتگرال نمایی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$E_1(x)=e^{-x}U(1, 1; x)$$

راهنمایی. به‌جای متغیر انتگرالگیری t در $E_1(x)$ کمیت $x(1+s)$ را بنشانید.

۱۳.۶.۱۳ با استفاده از نمایشهای انتگرالی $M(a, c; x)$ و $U(a, c; x)$ در مسئلهٔ ۱۰.۶.۱۳ بسطهای مجانبی توابع زیر را تشکیل دهید

(الف) $M(a, c; x)$، (ب) $U(a, c; x)$

راهنمایی. می‌توانید از شگردی که برای $K_\nu(z)$ در بخش ۶.۱۱ به‌کار گرفته شد، بهره گیرید.

پاسخ.

(الف)

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\frac{e^x}{x^{c-a}}\left\{1+\frac{(1-a)(c-a)}{1!x}+\frac{(1-a)(2-a)(c-a)(c-a+1)}{2!x^2}+\cdots\right\}$$

(ب)

$$\frac{1}{x^a}\left\{1+\frac{a(1+a-c)}{1!(-x)}+\frac{a(a+1)(1+a-c)(2+a-c)}{2!(-x)^2}+\cdots\right\}$$

۱۴.۶.۱۳ نشان‌دهید که **رونسکیی** دو تابع فوق‌هندسی همشار $M(a, c; x)$ و $U(a, c; x)$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$MU'-M'U=-\frac{(c-1)!}{(a-1)!}\frac{e^x}{x^c}$$

اگر a صفر یا یك عدد درست منفی باشد، چه پیش می‌آید؟

۱۵.۶.۱۳ معادلهٔ موج کولنی (جزء شعاعی معادلهٔ موج شرودینگر با پتانسیل کولنی) به‌صورت زیر است

$$\frac{d^2y}{d\rho^2}+\left[1-\frac{2\eta}{\rho}-\frac{L(L+1)}{\rho^2}\right]y=0$$

نشان دهید که یکی از جوابهای منظم آن، یعنی $y=F_L(\eta, \rho)$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$F_L(\eta, \rho)=C_L(\eta)\rho^{L+1}e^{-i\rho}M(L+1-i\eta, 2L+2; 2i\rho)$$

۱۶.۶.۱۳ (الف) نشان دهید که جزء شعاعی تابع‌موج هیدروژن، معادلهٔ (۶۰.۱۳)، را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$e^{-\alpha r/2}(\alpha r)^L L_{n-L-1}^{2L+1}(\alpha r)$$

$$=\frac{(n+L)!}{(n-L-1)!(2L+1)!}e^{-\alpha r/2}(\alpha r)^L M(L+1-n, 2L+2; \alpha r)$$

(ب) قبلا فرض کردیم که انرژی کل (جنبشی + پتانسیل) الکترون منفی است. تابع‌موج شعاعی (نابهنجار) را برای الکترون آزاد $E > ۰$ بازنویسی کنید.
پاسخ. موج برونروی $e^{+iar/۲}(\alpha r)^L M(L+۱-in,\ ۲L+۲;\ -i\alpha r)$. این نمایش، برای محاسبهٔ ضرایب یونش فوتونی و بازترکیب تکنیک توانای دیگری به‌شمار می‌آید.

۱۷.۶.۱۳ نشان دهیدکه تبدیل لاپلاس $M(a, c; x)$ به‌صورت زیراست

$$\mathcal{L}\{M(\alpha, c; x)\} = \frac{۱}{s}\,{}_۲F_۱\left(a, ۱, c; \frac{۱}{s}\right)$$

۱۸.۶.۱۳ عبارتهای: (الف) $\int_۰^\infty [M_{k\mu}(x)]^۲ dx$

(ب) $\int_۰^\infty [M_{k\mu}(x)]^۲ \frac{dx}{x}$

راکه‌درآن $۲\mu = ۰, ۱, ۲, \ldots$، $k - \mu - \frac{۱}{۲} = ۰, ۱, ۲, \ldots$ و $a > -۲\mu - ۱$، محاسبه کنید.

پاسخ. (الف) $(۲\mu)!۲k(۲\mu)!$، (ب) $(۲\mu)!$.

مراجع

Abramowitz, M., and Stegun I.A. eds. *Handbook of Mathematical Functions*. Washington, D.C: National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series-55 1964. Paperback edition, New York: Dover 1964.

فصل ۲۲ این‌کتاب خلاصه‌ای است از جزئیات خواص و نمایشهای چندجمله‌ایهای متعامد. در فصلهای دیگر خواص توابع بسل، لژاندر، فوق هندسی، فوق‌هندسی همشار و بسیاری دیگر خلاصه شده است.

Buchholz H, *The Confluent Hypergeometric Function*. New York: Springer-Verlag 1952, translated 1969.

بوخهولتز به‌جای صورتهای کومر برصورتهای ویتاکر تأکید زیادی می‌ورزد. دراین‌کتاب کاربردهای مربوط به‌توابع غیرجبری گوناگون دیگری نیز آورده شده است.

Erdelyi, A. Magnus W., Oberhettinger F., and Tricomi F. G. *Higher Transcendental Functions*, 3 vols. New York: McGraw-Hill (1953; reprinted 1981).

این‌کتاب فهرست مشروح وتقریباً کاملی است ازخواص توابع خاص فیزیک‌ریاضی.

Fox L. and Parker I. B., *Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis*. Oxford: Oxford University Press, 1968.

این کتاب گزارشی است مشروح، کامل و درعین حال قابل مطالعه دربارهٔ چندجمله‌ایهای چبیشف وکاربردهای آنها در آنالیز عددی.

Lebedev, N. N., *Special Functions and their Applications*. Translated by Silverman R. A., Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall 1965. Paperback, New York: Dover 1972.

Luke, Y.L., *The Special Functions and their Approximations*. Academic Press: New York 1969.

این کتاب دو جلد است: جلد اول بررسی نظری کاملی‌است از توابع گاما، توابع فوق‌هندسی، توابع فوق‌هندسی همشار، و توابع مربوط به آنهـا. جلد دوم، تقریبها و سایر شگردهـای کارهای عددی‌را بیان می کند.

Luke Y.L., *Mathematical Functions and their Approximations*. New York: Academic Press, 1975.

این کتاب مکمل روزامدی برای کتابی به‌مشخصات زیر است:

Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables AMS-55.

Magnus W. Oberhettinger F., and Soni R.P., *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*. Springer: New York 1966.

ویرایشی جدید ومفصل ازاین کتاب خلاصه‌ای است تابناك ازآنچه که درعنوان کتاب آمده وحاوی مطالب فصول ۱۰ تا ۱۳ است.

Rainville E.D., *Special Functions*. New York: Macmillan, 1960.

این کتاب، گزارشی است جامع و بدهم پیوسته ازتقریباً تمام توابع خاصی درفیزیك‌ریاضی که خواننده ممکن است با آن‌روبه‌روشود.

Sansone G., *Orthogonal Functions*. Translated by Diamond A.H., New York: Interscience Publishers (1959, reprinted 1977).

Slater L. J., *Confluent Hypergeometric Functions*. Cambridge: Cambridge University Press, 1960.

در این‌کتاب بیان واضح و مشروحی ازخواص توابع فوق هندسی همشار و روابط معادلهٔ فوق هندسی همشار با سایرمعادلات دیفرانسیل در فیزیك‌ریاضی آمده است.

Sneddon I. N., *Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry*, 3rd ed. New York: Longman, 1980.

۱۴

سری فوریه

۱.۱۴ خواص کلی

سری فوریه

سری فوریه را می‌توان بـه‌صورت بسط یا نمایشی از یك تابع، برحسب یك سری از سینوسها وکسینوسها، به‌قرارزیر تعریف کرد

$$f(x)=\frac{a_\circ}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}a_n\cos nx+\sum_{n=۱}^{\infty}b_n\sin nx \qquad (۱.۱۴)$$

ضریبهای $a_\circ$، a_n، و b_n، ازطریق انتگرالهای معین معادلات (۱۱.۱۴) و (۱۲.۱۴)، به‌تابع معلوم $f(x)$ مربوط می‌شوند. پی‌خواهیدبرد که $a_\circ$ به‌خصوص را مستثنی کرده و برای آن یك ضریب ۲/۱ درنظر گرفته‌ایم. علت انجام این‌کار آن است که معادلهٔ (۱۱.۱۴) به‌ازای همهٔ مقادیر a_n از $n=\circ$ گرفته تا $n>\circ$ برقرارباشد.

شرایطی‌که باید روی $f(x)$ وضع کرد تامعادلهٔ (۱.۱۴) برقرارباشد، عبارت‌اند از اینکه $f(x)$ تنها تعـدادی متناهی نـاپیوستگی متناهی و تعدادی متناهـی مقدار فرین، یعنی بیشینه وکمینه داشته باشد.[۱] به‌توابعی‌که ایـن شرایط را برآورده می‌کنند، منظم پاره‌پاره می‌گویند. این شرایط را شرایط دیریکله می‌نامند. هرچند توابع بسیاری هستند که فرم شرایط دیریکله را برآورده نمی‌کنند، اما می‌تـوان آنها را بـرای بسط فوریـه در ردهٔ توابع غیرعادی قرار داد. این‌شرایط دراکثریت عمده‌ای ازمسائل فیزیکی‌که مستلزم سری

۱. این شرایط کافی‌اند ولی لازم نیستند.

فوریه‌اند، صدق می‌کنند. توابعی که در بیشتر مسائل فیزیکی مورد نظر ما هستند انتگرالپذیر مجذوری‌اند (درفضای‌هیلبرت L^{2}، بخش۴.۹). سینوسها و کسینوسها دراین‌فضا، یك‌مجموعهٔ متعامدکامل تشکیل می‌دهند. واین خود بدان معنی‌است که معادلهٔ (۱.۱۴)، به‌مفهوم همگرایی درمیانگین، برقرار است.

با بیان $\sin nx$ و $\cos nx$ به‌صورت نمایی، معادلهٔ (۱.۱۴) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \qquad (۲.۱۴)$$

که دراین

$$c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+ib_n), \quad n>0 \qquad (۳.۱۴)$$

و

$$c_0=\frac{1}{2}a_0$$

تمامیت

به‌چندین روش می‌توان به‌اثبات تمامیت نزدیك‌شد. یکی‌ازاین راهها عبارت‌است از اینکه سری فوریهٔ مثلثاتی را به‌صورت نمایی درآوریم و آن را با یك سری لوران مقایسه کنیم. اگر $f(z)$ را (بافرض تحلیلی بودن) به‌صورت سری لوران[1] بسط دهیم

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n z^n \qquad (۴.۱۴)$$

روی دایرهٔ واحد داریم: $z=e^{i\theta}$ و

$$f(z)=f(e^{i\theta})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\theta} \qquad (۵.۱۴)$$

بسط لوران روی دایرهٔ واحد[معادلهٔ(۵.۱۴)]، وسری‌فوریهٔ مختلط[معادلهٔ(۲.۱۴)] به‌صورت یکسانی صورت می‌گیرد،که هم‌ارزی این دوبسط را می‌نمایاند. ازآنجاکه سری لوران به‌عنوان یك‌سری توانی ازخاصیت تمامیت برخورداراست، می‌بینیم که توابع فوریه، e^{inx}، مجموعهٔ کاملی را تشکیل می‌دهند. دراینجا محدودیت مهمی پیش می‌آید. سری‌لوران وسری توانی‌را نمی‌توان درحوزهٔ ناپیوستگیهایی چون‌یك‌موج مربعی یاموج دندانه‌اره‌ای، شکل ۱.۱۴، به‌کاربرد.

---

۱. بخش ۵.۶، جلد اول.

نظریهٔ فضاهای برداری خطی رهیافت دیگری به‌تعیین تمامیت سینوسها و کسینوسها فراهم می‌آورد. دراینجا تمامیت به‌کمك قضیهٔ وایرشتراوس برای دومتغیر، اثبات می‌شود.

به‌این‌دلیل که‌توابع $\sin nx$ و $\cos nx$ و e^{inx} همگی ویژه‌تابعهای‌معادلهٔ دیفرانسیل خطی خود-الحاقی به‌قرار زیرند

$$y''+n^{2}y=0 \tag{۶.۱۴}$$

می‌توان‌بسط فوریه وخاصیت تمامیت را نیز انتظارداشت. ازطریق انتخاب بازهٔ $[0, p\pi]$، که p عددی درست است، برای برآوردن شرایط مرزی درقضیهٔ اشتورم-لیوویل (فصل ۹)، ویژه‌تابعهای‌متعامدی، به‌ازای مقادیرمختلف ویژه‌مقدار n، به‌دست‌می‌آوریم. اگر $p=2$ را برگزینیم، ویژه‌تابعهای مختلف مربوط به‌یك ویژه‌مقدار n نیز متعامد خواهند بود. داریم

$$\int_{0}^{2\pi} \sin mx \sin n\, dx = \begin{cases}\pi\delta_{m,n}, & m\neq 0\\ 0, & m=0\end{cases} \tag{۷.۱۴}$$

$$\int_{0}^{2\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases}\pi\delta_{m,n}, & m\neq 0\\ 2\pi, & m=n=0\end{cases} \tag{۸.۱۴}$$

$$\int_{0}^{2\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0 \quad \text{به ازای همهٔ مقادیر درست } m \text{ و } n \tag{۹.۱۴}$$

به‌دقت توجه‌کنیدکه هر بازهٔ $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+2\pi$ به‌طور یکسان مورد قبول است. بارها، از $x_0=-\pi$ بهره می‌گیریم و بازهٔ $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ را به‌دست خواهیم آورد. تعامد برای ویژه‌تابعهای مختلط $e^{\pm inx}$ معمولا برحسب همیوغ مختلط یکی از دو عامل تعریف می‌شود

$$\int_{0}^{2\pi} (e^{imx})^{*} e^{inx} dx = 2\pi\delta_{m,n} \tag{۱۰.۱۴}$$

این تعریف بانحوهٔ بررسی هماهنگهای‌کروی (بخش ۶.۱۲) سازگاراست.

نظریهٔ اشتورم - لیوویل

نظریهٔ اشتورم-لیوویل، اعتبارمعادلهٔ (۱.۱۴) را (برای توابعی‌که شرایط دیریکله را ارضا می‌کنند) تضمین می‌کند و محاسبهٔ ضرایب بسط را با بهره‌گیری از روابط تعامد، معادلات (۷.۱۴)، (۸.۱۴)، و (۹.۱۴)، به‌صورت زیر میسر می‌سازد

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(t)\cos nt\, dt \tag{۱۱.۱۴}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt, \quad n=0,1,2,\dots \qquad (12.14)$$

البته با این شرط که انتگرالها وجود داشته باشند. یعنی، اگر $f(t)$ پاره‌پاره پیوسته (یا انتگرال‌پذیر مجذوری) باشد این انتگرالها وجود خواهند داشت. با نشاندن معادله‌های (۱۱.۱۴) و (۱۲.۱۴) درمعادلهٔ (۱.۱۴)، بسط فوریه به‌صورت زیر درمی‌آید

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(t)dt+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos nx\int_{0}^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt\right.$$
$$\left.+\sin nx\int_{0}^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} f(t)\cos n(t-x)dt \qquad (13.14)$$

جملهٔ (ثابت) اول مقدار متوسط $f(x)$ دربازهٔ $[0, 2\pi]$ است. معادلهٔ (۱۳.۱۴) رهیافتی به‌تشکیل انتگرال فوریه و تبدیلهای فوریه، بخش ۱۵.۱۵، ارائه می‌کند.

روش دیگری برای توصیف آنچه که در اینجا انجام می‌دهیم، عبارت ازاین است که $f(x)$ را بخشی ازفضای هیلبرت بینهایت بعدی با توابع متعامد $\sin nx$ و $\cos nx$ به‌عنوان پایه بپنداریم (اگر بخواهیم، همواره می‌توانیم این توابع را به‌واحد باز بهنجار کنیم). این گزاره که $\cos nx$ و $\sin nx$ $(n=0, 1, 2, \dots)$ فضا را می‌تنند، معادل آن است که بگوییم آنها تشکیل یک‌مجموعهٔ کامل می‌دهند. سرانجام ضرایب a_n و b_n نظیر تصویرهای $f(x)$ هستند وحاصلضربهای داخلی‌انتگرالی [معادلات (۱۱.۱۴) و(۱۲.۱۴)] نقش ضرب نقطه‌ای بخش ۳.۱، را بازی می‌کنند. طرح کلی این نکات‌را دربخش ۴.۹ آوردیم.

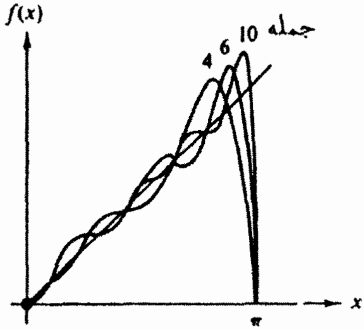
موج دندانه‌اره‌ای

با بررسی بسط تابع مربوط به‌موج دندانه‌اره‌ای

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<\pi \\ x-2\pi, & \pi<x\leqslant 2\pi \end{cases} \qquad (14.14)$$

می‌توان برداشتی ازهمگرایی سری فوریه و خطای حاصل از به‌کارگیری تعدادی متناهی از جمله‌های‌سری به‌دست آورد. برای راحتی‌بازه را از $[0, 2\pi]$ به $[-\pi, \pi]$ منتقل‌می‌کنیم. در این بازه صرفاً خواهیم داشت: $f(x)=x$. با استفاده از معادله‌های (۱۱.۱۴) و (۱۲.۱۴)، می‌توانیم نشان دهیم که بسط باید به‌صورت زیر باشد

$$f(x)=x=2\left[\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\dots+(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+\dots\right] \qquad (15.14)$$



شکل ۱۰۱۴ نمایش فوریهٔ موج دندانه‌اره‌ای.

$f(x)$ به‌ازای $0 \leqslant x < \pi$، برای مجموع ۴، ۶، و۱۰ جمله ازسری، درشکل ۱.۱۴ نشان داده شده است. خوب است که به‌سه جنبهٔ زیراشاره‌کنیم.

۱. به‌تدریج که تعداد جمله‌های گنجانیده شده را زیاد می‌کنیم، افزایش یکنواختی در دقت نمایش فوریه به‌وجود می‌آید.

۲. تمام منحنیها در $x=\pi$ از نقطهٔ میانی، $y=0$، می‌گذرند.

۳. درمجاورت $x=\pi$ جهشی به‌وجودمی‌آیدکه همچنان باقی می‌ماند وهیچ‌نشانه‌ای ازکاهش درآن مشاهده نمی‌شود.

اتفاقاً یکی ازنکات جالب این‌است‌که اگردرمعادلهٔ (۱۵.۱۴) قراردهیم: $x=\pi/2$، به‌روش استخراج دیگری برای فرمول لایب‌نیتس، مسئلهٔ ۶.۷.۵، دست یافته‌ایم.

رفتار ناپیوستگیها

رفتار در $x=\pi$ مثالی است ازاین قاعدهٔ کلی‌که سری در یك ناپیوستگی متناهی به‌میانگین حسابی(واسطهٔ عددی) همگرا می‌شود. برای یك‌ناپیوستگی واقع در $x=x_0$، سری‌عبارت است از

$$f(x_0)=\frac{1}{2}[f(x_0+)+f(x_0-)] \qquad (۱۶.۱۴)$$

یعنی میانگین حسابی راست وچپ تابع درنقطهٔ $x=x_0$. اثبات‌کلی این‌قضیه، بااستفاده ازحاصلجمعهای جزئی، مطابق بخش ۵.۱۴، توسط جفریز و کارسلاؤ ارائه شده است. این اثبات را می‌توان بااستفاده ازتابع دلتای دیراك ساده‌کرد (مسئلهٔ ۱.۵.۱۴).

جهشی که درست پیش از $x=\pi$ دیده می‌شود، مثالی است ازپدیدهٔ گیبس، که در بخش ۵.۱۴ پیرامون‌آن بحث خواهیم‌کرد.

مجموعیابی سری فوریه

معمولا دراین‌فصل بایافتن ضرایب بسط فوریهٔ یك‌تابع معلوم سروکارداریم. گاهی‌ممکن‌است بخواهیم این‌فرایندرا وارون وتابعی‌راکه توسط یك‌سری فوریهٔ معین نمایش داده‌شده‌است، تعیین کنیم.

سری $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)\cos nx$ واقع در بازهٔ $(0, 2\pi)$ را درنظر بگیرید. از آنجا که این‌سری تنها به‌طورمشروط همگراست (و در $x=0$ واگرا می‌شود) حد زیر را درنظر می‌گیریم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=\lim_{r\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n\cos nx}{n} \tag{۱۷.۱۴}$$

که به‌ازای $|r|<1$ مطلقاً همگراست. دستورالعمل ما به‌این ترتیب است که تلاش‌کنیم از طریق تبدیل توابع مثلثاتی به‌توابع نمایی، سری توانی تشکیل دهیم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n\cos nx}{n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^ne^{inx}}{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^ne^{-inx}}{n} \tag{۱۸.۱۴}$$

اینك این سریهای توانی را می‌توان با بسط مك‌لورن $-\ln(1-z)$، re^{-ix} و $z=re^{ix}$ متحد دانست [معادلهٔ (۱۹۵.۵)]، و

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n\cos nx}{n}&=-\frac{1}{2}[\ln(1-re^{ix})+\ln(1-re^{-ix})]\\&=-\ln[(1+r^2)-2r\cos x]^{1/2}\end{aligned} \tag{۱۹.۱۴}$$

باقراردادن $r=1$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}&=-\ln(2-2\cos x)^{1/2}\\&=-\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right),\ (0,\ 2\pi)^*\end{aligned} \tag{۲۰.۱۴}$$

هردو طرف این بسط در 2π و $x\to 0$ واگرا می‌شود.

مسائل

۱.۱.۱۴ می‌خواهیم تابع $f(x)$ (به‌صورت عبارت درجهٔ دوم انتگرالپذیر) را به‌کمك یك

* این حد را می‌توان به $[-\pi, \pi]$ ($x\neq 0$ و) منتقل کرد ودرطرف راست از $|x|$ بهره گرفت.

سری فوریهٔ متناهی نمایش دهیم. معیار مناسبی برای دقت سری به‌کمك انتگرال مربع انحراف به‌قرار زیر به‌دست می‌آید

$$\Delta_p=\int_\circ^{۲\pi}\left[f(x)-\frac{a_\circ}{۲}-\sum_{n=۱}^{p}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right]^۲dx$$

نشان دهیدکه شرط کمینه شدن Δ_p یعنی

$$\frac{\partial\Delta_p}{\partial a_n}=\circ,\quad \frac{\partial\Delta_p}{\partial b_n}=\circ$$

به‌ازای همهٔ مقادیر n، به‌انتخاب a_n و b_n به‌صورتی‌که درمعادله‌های (۱۱.۱۴) و(۱۲.۱۴) داده شده است، می‌انجامد.

یادآوری. ضرایب a_n و b_n از p مستقل‌اند. این‌استقلال پیامدی‌است ازتعامد، و برای توانهای x که ازبرازش یك منحنی با چندجمله‌ایها به‌دست می‌آیند، برقرار نیست.

۳۰۱۰۱۴ در بررسی یك شکل موج پیچیده (کشندهای اقیانوسی، زمین‌لرزه‌ها، نواهای موسیقی، و مانند آنها) بهتر است از سری فوریه‌ای به‌صورت زیر بهره‌گیریم

$$f(x)=\frac{a_\circ}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty}\alpha_n\cos(nx-\theta_n)$$

نشان دهیدکه این معادله بامعادلهٔ (۱.۱۴) هم‌ارزاست ودر آن

$$\alpha_n=\alpha_n\cos\theta_n,\qquad \alpha_n^۲=a_n^۲+b_n^۲$$

$$b_n=\alpha_n\sin\theta_n,\quad \tan\theta_n=b_n/a_n$$

یادآوری. ضرایب $\alpha_n^۲$ به‌صورت تابعی از n چیزی را به‌نام طیف توان تعریف می‌کنند. $\alpha_n^۲$ تحت انتقالی درفاز θ_n ناورداست و از این‌رو حائزاهمیت است.

۳۰۱۰۱۴ تابع $f(x)$ را به‌صورت یك سری فوریهٔ نمایی بسط داده‌ایم

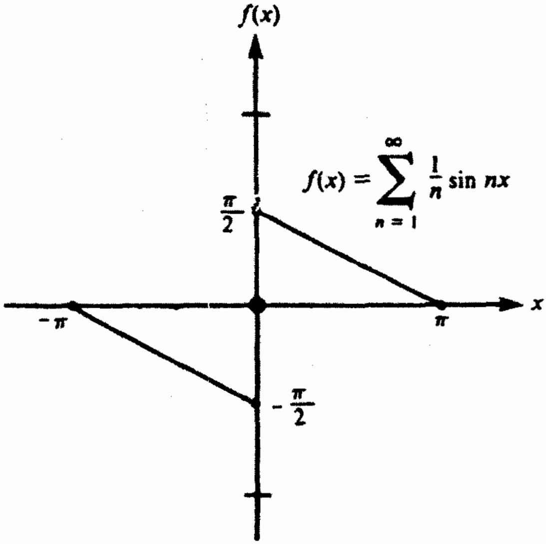
$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$$

اگر $f(x)$ حقیقی باشد، $f(x)=f^*(x)$، چه قیدی روی ضرایب c_n وضع می‌شود؟

۴۰۱۰۱۴ با فرض اینکه $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$ و $\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^۲dx$ متناهی‌اند، نشان دهید که

$$\lim_{m\to\infty}a_m=\circ,\quad \lim_{m\to\infty}b_m=\circ$$

راهنمایی. از $[f(x)-s_n(x)]^۲$ انتگرال بگیرید، که در آن $s_n(x)$ مجموع جزئی



شکل ۲.۱۴

nام است، و ازنامساوی بسل، بخش ۴.۹، استفاده کنید. فرض اینکه $f(x)$ انتگرالپذیر مجذوری است ($\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^{2}\,dx$ متناهی است) براین نکته دلالت می‌کندکه برای بازهٔ متناهی ما $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx$ نیزمتناهی است. عکس این مطلب درست نیست.

۵.۱.۱۴ شگرد مجموعیابی این بخش‌را به‌کاربندید ونشان دهید

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\begin{cases}\frac{1}{2}(\pi-x), & 0<x\leqslant\pi\\ -\frac{1}{2}(\pi+x), & -\pi\leqslant x<0\end{cases}$$

به‌شکل ۲.۱۴ مراجعه‌کنید.

۶.۱.۱۴ مجموع سری مثلثاتی زیررا به‌دست‌آورید

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$$

ونشان دهیدکه این‌مجموع برابر $x/2$ است.

۷.۱.۱۴ مجموع سری مثلثاتی زیر را به‌دست آورید

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

ونشان دهیدکه برابراست با

$$\begin{cases} \frac{\pi}{4}, & 0<x<\pi \\ -\frac{\pi}{4}, & -\pi<x<0 \end{cases}$$

۸.۱.۱۴ مجموع سری متناهی سینوسی فوریه ، معادلهٔ (۵.۱۴)، مربوط به موج دندانه‌اره‌ای به‌معادلهٔ $f(x)=x$ در بازهٔ $(-\pi, \pi)$، رامحاسبه‌کنید. ازسریهای ۴،۶،۸، و ۱۰ جمله‌ای و $x/\pi = 0{,}00(0{,}02)1{,}00$ بهره‌گیرید. اگر برنامه‌ای برای ترسیم دراختیار دارید، نتایج خود را ترسیم و با شکل ۱.۱۴ مقایسه کنید.

۲.۱۴ مزایا و موارد استفادهٔ سری فوریه

تابع ناپیوسته

یکی ازمزیتهای نمایش فوریه نسبت‌به‌سایرنمایشها، مانند سری تایلور، آن است‌که این‌سری را می‌توان برای نمایش یك تابع ناپیوسته به‌کار برد. موج دندانه‌اره‌ای‌که در بخش پیش ازآن نام بردیم، مثالی ازاین‌توابع به‌شمارمی‌آید. مثالهای دیگری دربخش ۳.۱۴ ومسائل ارائه خواهد شد.

توابع دوره‌ای

سری فوریه، درارتباط بامزیت عنوان شده، برای نمایش یك تابع دوره‌ای نیز مفید است. اگر دورهٔ $f(x)$ برابر 2π باشد، احتمالا کاملا طبیعی به‌نظر می‌رسد که آن را به‌صورت یك سری از توابع بادورهٔ 2π، $2\pi/2$، $2\pi/3$، . . . بسط دهیم. انجام این عمل تضمین می‌کندکه اگرتابع دوره‌ای $f(x)$ روی یك بازهٔ $[0, 2\pi]$ یا $[-\pi, \pi]$ نمایش داده شده باشد، این نمایش به‌ازای همهٔ مقادیرمتناهی x برقراراست.

دراین مرحله خوب‌است خواص تقارنی را بررسی‌کنیم. $\sin x$ دربازهٔ $[-\pi, \pi]$ یك تابع فرد و $\cos x$ یك تابع زوج از x به‌شمار می‌آید. ازاین‌رو توسط معادله‌های (۱۱.۱۴) و (۱۲.۱۴)[1] می‌توان نتیجه‌گرفت‌که اگر $f(x)$ فرد باشد همهٔ مقادیر a_n صفر، و اگر $f(x)$ زوج باشد، همهٔ مقادیر b_n صفرند. به‌عبارت دیگر

---

۱. باگسترهٔ انتگرالگیری $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad \text{زوج } f(x) \qquad (۲۱.۱۴)$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad \text{فرد } f(x) \qquad (۲۲.۱۴)$$

این خواص درفرایند بسط یك تابع معلوم بارها به‌کار می‌آیند.

گفته‌ایم که سری فوریه دوره‌ای (تناوبی) است. این خاصیت دربررسی این نکته‌که آیا معادلهٔ (۱.۱۴) دربیرون ازبازهٔ اصلی برقرار است یا خیر، اهمیت دارد. فرض کنید که فقط داشته باشیم

$$f(x)=x, \quad 0 \leqslant x < \pi \qquad (۲۳.۱۴)$$

وبخواهیم $f(x)$ را بایك بسط سری نمایش‌دهیم. سه بسط ازبینهایت بسط ممکن را درنظر می‌گیریم

۱. اگربسط تایلوررا بگیریم، داریم

$$f(x)=x \qquad (۲۴.۱۴)$$

یك سری تك‌ـجمله‌ای. این سری (تك‌ـجمله‌ای) روی همهٔ مقادیرمتناهی a تعریف شده است.

۲. بااستفاده ازسری‌کسینوسی فوریه [معادلهٔ (۲۱.۱۴)] پیش‌بینی می‌کنیم که

$$f(x)\doteq -x, \quad -\pi < x \leqslant 0$$

$$(۲۵.۱۴)$$

$$f(x)=2\pi - x, \quad \pi < x < 2\pi$$

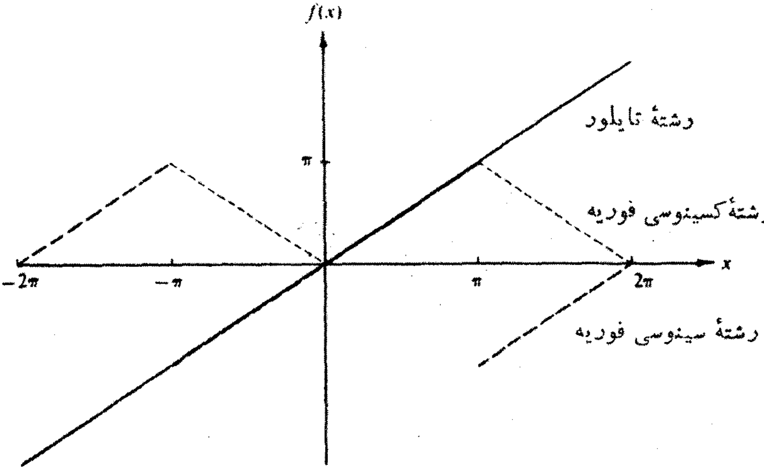
۳. سرانجام، ازبسط سینوسی فوریه [معادلهٔ (۲۲.۱۴)] داریم

$$f(x)=x, \quad -\pi < x \leqslant 0$$

$$(۲۶.۱۴)$$

$$f(x)=x-2\pi, \quad \pi < x < 2\pi$$

این سه بسط ممکن، یعنی سری تایلور، سری‌کسینوسی فوریه، وسری‌سینوسی‌فوریه، هریك دربازهٔ‌اصلی $[0, \pi]$ کاملا برقرارند. ولی‌بیرون ازاین‌بازه رفتارشان به‌نحوچشمگیری فرق می‌کند (این مقایسه درشکل ۳.۱۴ صورت گرفته است). پس کدام‌یك ازاین سه شق صحیح است؟ به‌این‌پرسش نمی‌توان پاسخ‌داد مگرآنکه داده‌های بیشتری درخصوص $f(x)$ دراختیار داشته‌باشیم. $f(x)$ ممکن‌است یکی‌ازاین سه باشد ویااینکه هیچیك ازآنها نباشد. بسطهای فوریه در بازهٔ اصلی برقرارند. ولی جز در حالتی‌که بدانیم $f(x)$ دوره‌ای است و دورهٔ آن برابر بازهٔ اصلی ماویا $(1/n)$ام‌آن است، هیچ‌گونه تضمینی وجود ندارد که نمایش فوریه [معادلهٔ (۱.۱۴)] بیرون از بازهٔ اصلی معنایی داشته باشد.



شکل ۳.۱۴ مقایسهٔ بین سری کسینوسی فوریه، سری سینوسی فوریه، و سری تایلور.

باید خاطر نشان ساخت که مجموعهٔ توابع $\cos nx$، ...، $n=0,1,2,\ldots$، در بازهٔ $[0,\pi]$ یك مجموعهٔ متعامد کامل تشکیل می‌دهند. به‌همین ترتیب، مجموعهٔ توابع $\sin nx$، $n=0,1,2,\ldots$، روی همین بازه یك مجموعهٔ متعامد کامل تشکیل می‌دهند. اینکه کدام مجموعه را برگزینیم، امری اختیاری است، جز در مواردی که شرایط مرزی و یا محدودیتهای تقارنی، گزینهٔ خاصی را ایجاب کنند.

بهره‌گیری ازسری فوریه علاوه برمزیتهایی که درنمایش ناپیوستگیها وتوابع‌دوره‌ای دارد، از مزیت سومی نیز برخوردار است. فرض کنید می‌خواهیم معادلهٔ حرکت یك ذرهٔ نوسانگرتحت تأثیرنیروی محرك دوره‌ای را حل کنیم. بسط فوریهٔ نیروی محرك، جملهٔ‌اصلی ویك سری ازهماهنگها را ارائه خواهد کرد. معادلهٔ دیفرانسیل (خطی) را می‌توان برای هر یك از این هماهنگها به‌طور مجزا حل کرد. این فرایند شاید نسبت به‌پرداختن به‌نیروی محرك اصلی بسیارساده‌تر باشد. آنگاه درصورتی که معادلهٔ دیفرانسیل خطی باشد، می‌توان تمام این‌جوابها را باهم جمع کرد وجواب نهایی را به‌دست آورد.[1] این‌شیوهٔ کار یك حیلهٔ زیرکانهٔ ریاضی است، و به‌یافتن واکنش سیستم نسبت به‌بسامد اساسی و نسبت به‌هر یك از بسامدهای هماهنگ، مربوط می‌شود.

گاهی این سؤال مطرح می‌شود که "آیا این هماهنگها از ابتدا وجود دارند یا اینکه آنالیزفوریهٔ ما آنهارا به‌وجودآورده‌است؟" برای پاسخ‌دادن به‌این‌پرسش، تجزیهٔ یك‌تابع به‌هماهنگهارا باتجزیهٔ یك‌بردار به‌مؤلفه‌های قائم مقایسه می‌کنیم. این مؤلفه‌ها می‌توانند از

---

۱. یکی ازجنبه‌های‌آزارندهٔ معادله‌های دیفرانسیل غیرخطی‌آن است که این اصل برهم‌نهی در مورد آنها صادق نیست.

ابتدا درمسئله حضور داشته باشند به‌این معنا که می‌توان آنها را از یکدیگر مجزا ومشاهده کرد، ولی این تجزیه مسلماً یکتا نیست. از این‌رو بسیاری ازصاحب‌نظران ترجیح می‌دهند که بگویند هماهنگها از طریق بسطی که ما برگزیده‌ایم پدید آمده‌اند. خواننده برای دستیابی به‌بحثی جامعتر باید به‌سلسله یادداشتها ونامه‌ها در امریکن جورنال‌آوفیزیکز[1]، مراجعه کند.

تغییر بازه

تاکنون، منحصراً، بازه‌ای به‌طول 2π مورد توجه ما بوده است. این محدودیت را می‌توان به‌آسانی حذف کرد. اگر $f(x)$ تناوبی و به‌دورهٔ $2L$ باشد، می‌توان نوشت

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right] \qquad (۲۷.۱۴)$$

با

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt,\quad n=0,1,2,3,\cdots \qquad (۲۸.۱۴)$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\,dt,\quad n=0,1,2,3,\cdots \qquad (۲۹.۱۴)$$

این‌معادلات باتعویض x درمعادلهٔ (۱.۱۴) با $\pi x/L$ و t درمعادله‌های (۱۱.۱۴) و(۱۲.۱۴) با $\pi t/L$ به‌دست می‌آیند. [بازه در معادله‌های (۱۱.۱۴) و (۱۲.۱۴) برای راحتی به $-\pi\leqslant t\leqslant\pi$ انتقال یافته‌است.] انتخاب بازهٔ متقارن $(-L, L)$ نقشی اساسی ندارد. در مورد تابع دوره‌ای $f(x)$، بادورهٔ $2L$، هر بازه‌ای مانند (x_0, x_0+2L) را می‌توان به‌کار برد. انتخاب بازه به‌راحتی یاسلیقهٔ شخصی بستگی دارد.

مسائل

۱.۲.۱۴ شرایط مرزی (نظیر $\psi(0)=\psi(l)=0$) جوابهایی به‌صورت $\sin(n\pi x/l)$ را ایجاب و کسینوسهای متناظر را حذف می‌کند.

(الف) تحقیق کنید که دراین‌صورت شرایطی مرزی که درنظریهٔ اشتورم-لیوویل منظور می‌شوند، در بازهٔ $(0, l)$ صدق می‌کنند. دقت کنید که این بازه فقط نصف بازهٔ معمولی فوریه است.

1. Robinson, B. L., "Concerning frequencies resulting from distortion," *Am. J. Phys.* **21**, 391 (1953).
Van Name, F. W., Jr., "Concerning frequencies resulting from distortion," *Am. J. Phys.* **22**, 94 (1954).

(ب) نشان دهید که مجموعهٔ توابع $\varphi_n(x)=\sin(n\pi x/l)$، ... ,۳ ,۲ ,۱ $=n$، در یك رابطهٔ تعامدی به‌صورت زیر صدق می‌کنند

$$\int_{۰}^{l}\varphi_m(x)\varphi_n(x)dx=\frac{l}{۲}\delta_{mn},\quad n>۰$$

۲.۲.۱۴ (الف) تابع $f(x)=x$ را دربازهٔ $(۰,۲L)$ بسط دهید. این‌سری راکه یافته‌اید (سمت‌راست پاسخ‌را) روی $(-۲L,۲L)$ ترسیم کنید.

پاسخ. $x=L-\frac{۲L}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

(ب) $f(x)=x$ را به صورت یك سری سینوسی در نیم بازهٔ $(۰,L)$ بسط دهید. این سری را که یافته‌اید (سمت راست پاسخ را) روی $(-۲L,۲L)$ رسم کنید.

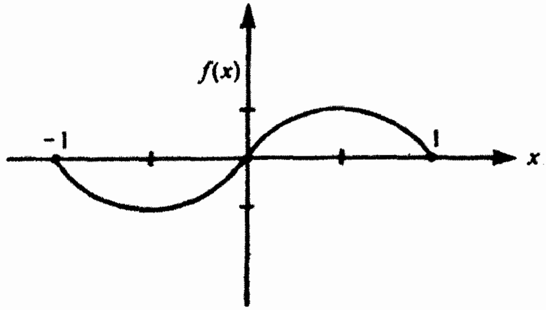
پاسخ. $x=\frac{۲L}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

۳.۲.۱۴ در برخی مسائل بهتر است که $\sin\pi x$ دربازهٔ $[۰,۱]$ را تقریباً توسط سهمی $ax(۱-x)$ نشان‌دهیم که درآن a مقداری‌است ثابت. برای‌آنکه ازمیزان دقت این‌تقریب براوردی به‌دست‌آورید، $۴x(۱-x)$ را به‌صورت یك‌سری سینوسی فوریه بسط‌دهید

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll}۴x(۱-x), & ۰\leqslant x\leqslant ۱\\ ۴x(۱+x), & -۱\leqslant x\leqslant ۰\end{array}\right\}=\sum_{n=۱}^{\infty}b_n\sin n\pi x$$

(به‌شکل ۴.۱۴ توجه‌کنید)

پاسخ. n فرد $b_n=\frac{۳۲}{\pi^۳}\cdot\frac{۱}{n^۳}$، n زوج $b_n=۰$.



شکل ۴.۱۴

۳.۱۴ کاربردهای سری فوریه

مثال ۱.۳.۱۴ موج مربعی-بالا بسامدها

تجزیهٔ یک‌موج "مربعی" (شکل ۵.۱۴) به‌کمک مؤلفه‌های فوریهٔ آن، یکی از کاربردهای سادهٔ سری فوریه‌است که درمدارهای الکترونیکی که برای پالسهای بالاروندهٔ تیز طراحی‌شده باشند، پیش می‌آید. فرض‌کنید موج ما بنابرتعریف عبارت است از

$$f(x)=0, \quad -\pi<x<0$$
$$f(x)=h, \quad 0<x<\pi \tag{۳۰.۱۴}$$

ازمعادله‌های (۱۱.۱۴) و (۱۲.۱۴)، خواهیم داشت

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi h\,dt=h \tag{۳۱.۱۴}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi h\cos nt\,dt=0, \quad n=1,2,3,\ldots \tag{۳۲.۱۴}$$

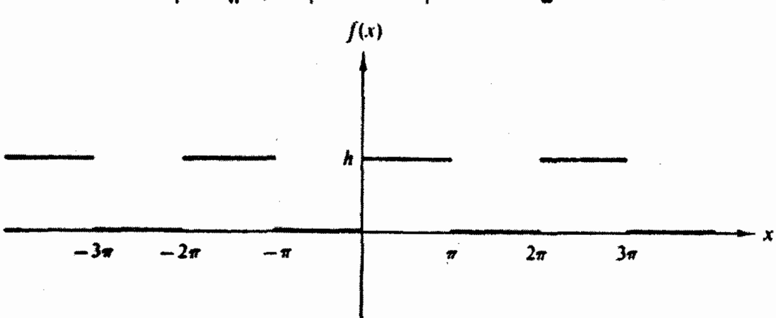
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi h\sin nt\,dt=\frac{h}{n\pi}(1-\cos n\pi) \tag{۳۳.۱۴}$$

$$b_n=\frac{2h}{n\pi}, \quad \text{فرد } n \tag{۳۴.۱۴}$$

$$b_n=0, \quad \text{زوج } n \tag{۳۵.۱۴}$$

سری حاصل به‌این قراراست

$$f(x)=\frac{h}{2}+\frac{2h}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots\right) \tag{۳۶.۱۴}$$



شکل ۵.۱۴ موج مربعی.

تمام جمله‌های کسینوس، جز جملهٔ اول که متوسط $f(x)$ روی بازهٔ $[-\pi, \pi]$ است، صفر شده‌اند. از آنجا که $f(x)-h/۲$ فرد است، یك سری سینوسی فوریه داریم. هرچند در سری سینوسی تنها جمله‌های فرد ظاهر می‌شوند، این جملات فقط به‌صورت $n^{-۱}$ کوچك می‌شوند. این نکته شبیه‌است به‌همگرایی (یا عدم وجود همگرایی) سری هماهنگ. از لحاظ فیزیکی معنی این نکته آن است که موج مربعی ما حاوی مؤلفه‌های بالا بسامد زیـادی است. اگر اسباب الکترونیکی ما این مؤلفه‌ها را ازخود عبور ندهند، ورودی موج مربعی‌ما، کما بیش به‌صورت گردشده، مثلا به‌صورت یك برجستگی آمورف، خارج می‌شود.

مثال ۲.۳.۱۴ یکسوساز تمام‌موج

به‌عنوان دومین مثال، این سؤال را مطرح کنیم که خروجی یك یکسوساز تمام‌موج تا چه حد به‌جریان مستقیم خالص نزدیك است (شکل ۶.۱۴). فرض می‌کنیم که یکسوساز ما قله‌های مثبت موج‌سینوسی ورودی را عبور می‌دهد وقله‌های منفی‌را معکوس می‌کند. درنتیجه

$$f(t)=\sin \omega t, \qquad ۰<\omega t<\pi$$

(۳۷.۱۴)

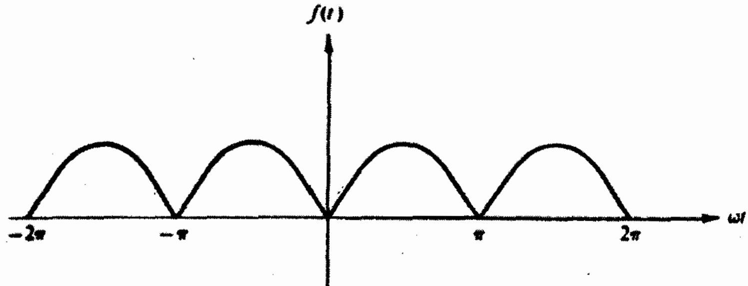
$$f(t)=-\sin \omega t, \quad -\pi<\omega t<۰$$

از آنجا که $f(t)$ بنابر تعریف زوج است، هیچ جملهٔ سینوسی به‌صورت $\sin \omega t$ نخواهیم داشت. دراینجا نیز، بااستفاده ازمعادله‌های (۱۱.۱۴) و(۱۲.۱۴)، داریم

$$a_۰=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{۰} -\sin \omega t \; d(\omega t)+\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\pi} \sin \omega t \; d(\omega t)$$

(۳۸.۱۴)

$$=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} \sin \omega t d(\omega t)=\frac{۴}{\pi}$$



شکل ۶.۱۴ یکسوساز تمام‌موج.

$$a_n=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi}\sin\omega t\cos n\omega t\,d(\omega t)$$

$$=-\frac{۲}{\pi}\frac{۲}{n^{۲}-۱},\quad n \text{ زوج} \qquad (۳۹.۱۴)$$

$$=۰,\quad n \text{ فرد}$$

دقیقاً توجه کنید که $[۰,\pi]$ هم برای سینوس و هم کسینوس، بازهٔ تعامدیی به‌شمار نمی‌آید و به‌ازای مقادیر زوج n صفر به‌دست نمی‌آوریم. سری حاصل عبارت است از

$$f(t)=\frac{۲}{\pi}-\frac{۴}{\pi}\sum_{n=۲,۴,۶,\dots}^{\infty}\frac{\cos n\omega t}{n^{۲}-۱} \qquad (۴۰.۱۴)$$

بسامد اصلی، ω، حذف شده است. کمترین بسامد نوسان عبارت است از ۲ω. مؤلفه‌های بالا بسامد به‌صورت $n^{-۲}$ کوچك می‌شوند و این نکته نشان می‌دهد که یکسوساز تمام‌موج برای جریان مستقیم تقریب نسبتاً خوبی ارائه می‌کند. اینکه این تقریب خوب کافی است یا خیر به‌کاربرد خاصی که موردنظر است بستگی دارد. اگر مؤلفه‌های ac باقیمانده نامناسب باشند، می‌توان آنها را توسط مدارهای پالایهٔ مناسب ضعیفتر کرد.

این دو مثال دو خصوصیت مشخصهٔ بسطهای فوریه را آشکار می‌کنند.[1]

۱. اگر $f(x)$ ناپیوستگیهایی داشته باشد (مثل موج مربعی در مثال ۱.۳.۱۴)، می‌توان انتظار داشت که مؤلفهٔ nام به‌صورت $۱/n$ کوچك شود. در نتیجه همگرایی نسبتاً کند[2] صورت می‌گیرد.

۲. اگر $f(x)$ پیوسته باشد (حتی اگر مانند مورد یکسوساز تمام‌موج در مثال ۲.۳.۱۴ مشتقهای ناپیوسته داشته باشد) می‌توان انتظار داشت که ضریب nام به‌صورت $۱/n^{۲}$ کاهش یابد.

مثال ۳.۳.۱۴ سریهای نامتناهی، تابع زتای ریمان

در آخرین مثالی که مطرح می‌کنیم، مسئلهٔ صرفاً ریاضی بسط $x^{۲}$ را درنظر می‌گیریم

$$f(x)=x^{۲},\quad -\pi<x<\pi \qquad (۴۱.۱۴)$$

همهٔ b_nها به‌علت تقارن صفرند. درمورد a_nها داریم

$$a_{۰}=\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^{۲}dx=\frac{۲\pi^{۲}}{۳}$$

$$(۴۲.۱۴)$$

$$a_n=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi}x^{۲}\cos nx\,dx$$

---

1. Raisbeck, G., "Order of Magnitude of Fourier Coefficients," *Am. Math. Monthly*, **62**, 149–155, (1955).

۲. شگردی برای بهسازی آهنگ همگرایی در مسائل بخش ۴.۱۴ آمده‌است.

$$=\frac{۲}{\pi}\cdot(-۱)^n\frac{۲\pi}{n^۲}$$

(۴۳.۱۴)

$$=(-۱)^n\frac{۴}{n^۲}$$

در نتیجه

$$x^۲=\frac{\pi^۲}{۳}+۴\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^n\frac{\cos nx}{n^۲} \qquad (۴۴.۱۴)$$

معادلهٔ (۴۴.۱۴) به‌همین صورتی‌که هست، اهمیت خاصی ندارد، ولی‌اگر قراردهیم $x=\pi$

$$\cos n\pi=(-۱)^n \qquad (۴۵.۱۴)$$

ومعادلهٔ (۴۴.۱۴) به‌صورت زیردرآید[۱]

$$\pi^۲=\frac{\pi^۲}{۳}+۴\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲} \qquad (۴۶.۱۴)$$

یا

$$\frac{\pi^۲}{۶}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}\equiv\zeta(۲) \qquad (۴۷.۱۴)$$

آنگاه تابع زتای ریمان، $\zeta(۲)$، به‌صورتی بسته (وسازگار با نتیجهٔ حاصل ازعدد برنولی‌در بخش ۹.۵) به‌دست می‌آید. به‌کمك بسط $x^۲$ وبسطهای دیگر توانهای x، می‌توان سریهای نامتناهی بیشمار دیگری‌را محاسبه کرد. مسائلی‌که در زیرفهرست آنهارا آورده‌ایم، چند سری ازاین سریهارا در برمی‌گیرند.

	مرجع	سری فوریه
۱.	مسئلهٔ ۵.۱.۱۴ مسئلهٔ ۳.۴.۱۴	$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}\sin nx=\begin{cases}-\frac{۱}{۲}(\pi+x), & -\pi\leqslant x<۰\\ \frac{۱}{۲}(\pi-x), & ۰\leqslant x<\pi\end{cases}$
۲.	مسئلهٔ ۶.۱.۱۴ مسئلهٔ ۲.۳.۱۴	$\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}\frac{۱}{n}\sin nx=\frac{۱}{۲}x, \quad -\pi<x<\pi$

---

۱. دقت کنید که $x=\pi$ یك نقطهٔ ناپیوستگی نیست.

۳. مسئلهٔ ۷.۱.۱۴ معادلهٔ (۳۶.۱۴)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)x=\begin{cases}-\pi/2, & -\pi<x<0\\ +\pi/2, & 0<x<\pi\end{cases}$$

۴. معادلهٔ (۲۰.۱۴) مسئلهٔ ۱۵.۳.۱۴

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos nx=-\ln\left[2\sin\left(\frac{|x|}{2}\right)\right],\quad -\pi<x<\pi$$

۵. مسئلهٔ ۱۵.۳.۱۴

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\cos nx=-\ln\left[2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right],\quad -\pi<x<\pi$$

۶.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)x=\frac{1}{2}\ln\left[\cot\frac{|x|}{2}\right],\quad -\pi<x<\pi$$

متغیرهای مختلط ـ قضیهٔ آبل

تابع $f(z)$ را، که بایك سری توانی همگرا نشان داده شده باشد، درنظر بگیرید

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n r^n e^{in\theta} \tag{۴۸.۱۴}$$

این همان سری نمایی فوریه، معادلهٔ (۲.۱۴)، است. باجداکردن اجزای حقیقی وموهومی داریم

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n r^n\cos n\theta$$
$$\tag{۴۹.۱۴}$$
$$v(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n r^n\sin n\theta$$

که همان سریهای کسینوسی وسینوسی فوریه‌اند. بنابرقضیهٔ آبل، اگر $u(1,\theta)$ و $v(1,\theta)$ به‌ازای یك‌مقدار معین θ همگرا باشند، آنگاه

$$u(1,\theta)+iv(1,\theta)=\lim_{r\to 1}f(re^{i\theta}) \tag{۵۰.۱۴}$$

یکی ازکاربردهای این قضیه درمسئلهٔ ۱۵.۳.۱۴ مطرح خواهدشد.

مسائل

۱.۳.۱۴ نمایش سری فوریهٔ تابع زیررا تشکیل دهید

$$f(t)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant \omega t\leqslant 0\\ \sin\omega t, & 0\leqslant\omega t\leqslant\pi\end{cases}$$

خروجی یك‌یکسوساز نیم‌موج ساده به‌این‌صورت است. اثر گرمای خورشیدی‌که باعث‌ایجاد "کشند" درجو می‌شود، نیز تقریباً به‌این‌شکل است.

پاسخ. $f(t)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin\omega t-\frac{2}{\pi}\sum_{\substack{n=2,4,6,\ldots\\ \text{زوج}}}^{\infty}\frac{\cos n\omega t}{n^2-1}$.

۲.۳.۱۴ یك موج دندانداره‌ای با تابع زیر بیان می‌شود

$$f(x)=x,\quad -\pi<x<\pi$$

نشان دهید

$$f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

۳.۳.۱۴ یك‌موج دندانه‌اره‌ای دیگررا می‌توان به‌کمك تابع زیرتوصیف‌کرد

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}(\pi+x), & -\pi\leqslant x<0\\ +\frac{1}{2}(\pi-x), & 0<x\leqslant\pi\end{cases}$$

نشان دهیدکه $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\sin nx/n)$.

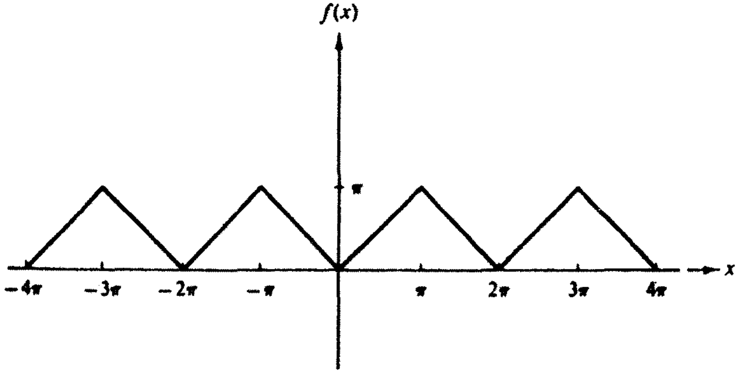
۴.۳.۱۴ موج مثلثی (شکل ۷.۱۴) با تابع زیر نمایش داده می‌شود

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<\pi\\ -x, & -\pi<x<0\end{cases}$$

$f(x)$ را بایك سری فوریه نمایش دهید.

پاسخ. $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{\substack{n=1,3,5,\ldots\\ \text{فرد}}}\frac{\cos nx}{n^2}$.

۵.۳.۱۴ تابع زیررا درمحدودهٔ بازهٔ $[-\pi,\pi]$ بسط دهید

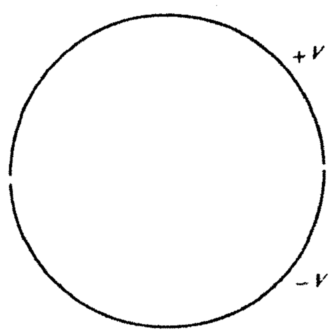


شکل ۷.۱۴ موج مثلثی.

$$f(x)=\begin{cases}1, & x^2<x_0^2\\ 0, & x^2>x_0^2\end{cases}$$

یادآوری. این موج مربعی با پهنای متغیر درموسیقی الکترونیکی حائز اهمیت است.

۶.۳.۱۴ یك لولهٔ استوانه‌ای فلزی به‌شعاع a به‌طور طولی به‌دو نیمهٔ غیرمماس شکافته شده است. نیمهٔ بالایی درپتانسیل $+V$ ونیمهٔ پایینی در پتانسیل $-V$ نگه‌داشته می‌شود (شکل ۸.۱۴)، متغیرهای معادلهٔ لاپلاس‌را جدا کنید وپتانسیل الکتروستاتیکی‌را بدازای $r \leqslant a$ به‌دست آورید. به تشابه بین جوابی که به ازای $r=a$ یافته‌اید و سری فوریهٔ مربوط به موج مربعی توجه کنید.



شکل ۸.۱۴

۷.۳.۱۴ یك استوانهٔ فلزی‌را درمیدان الکتریکی یکنواخت (یکنواخت قبل از قرار دادن

استوانه) $E_\circ$ طوری قرارمی‌دهیم که محور استوانه عمود برامتداد اصلی میدان باشد.
(الف) پتانسیل الکتروستاتیکی مختل‌شده‌را بیابید.
(ب) بارسطحی القایی‌روی استوانه‌را به‌صورت تابعی ازموضع زاویه‌ای پیداکنید.

۸.۳.۱۴ بسط فوریهٔ موج مربعی، مسئلهٔ ۶.۳.۱۴، را به‌یك سری توانی تبدیل‌کنید. نشان دهید که ضرایب x^1 یك سری واگرا تشکیل می‌دهند. این عمل را برای ضرایب x^3 تکرار کنید.

سری توانی‌را نمی‌توان‌برای ناپیوستگی‌به‌کاربرد. این‌ضرایب نامتناهی حاصل‌تلاش برای غلبه براین محدودیت اساسی سری توانی است.

۹.۳.۱۴ (الف) نشان دهیدکه بسط فوریهٔ $\cos ax$ به‌صورت زیراست

$$\cos ax=\frac{2a\sin a\pi}{\pi}\left\{\frac{1}{2a^2}-\frac{\cos x}{a^2-1^2}+\frac{\cos 2x}{a^2-2^2}-\cdots\right\}$$

$$a_n=(-1)^n\frac{2a\sin a\pi}{\pi(a^2-n^2)}$$

(ب) بااستفاده ازنتیجهٔ بند قبل نشان دهید

$$a\pi\cot a\pi=1-2\sum_{p=1}^{\infty}\zeta(2p)a^{2p}$$

این‌معادله روش دیگری‌برای استخراج رابطهٔ بین‌تابع زتای ریمان و اعدادبرنولی، معادلهٔ (۱۵۱.۵)، دراختیار ما می‌گذارد.

۱۰.۳.۱۴ بسط سری فوریهٔ تابع دلتای دیراك $\delta(x)$ را دربازهٔ $-\pi<x<\pi$ به‌دست آورید.
(الف) به‌جملهٔ ثابت چه مفهومی می‌توان نسبت داد؟
(ب) این نمایش درچه ناحیه‌ای صادق است؟
(ج) بااستفاده ازاتحاد

$$\sum_{n=1}^{N}\cos nx=\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}\cos\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)x/2\right]$$

نشان دهیدکه نمایش فوریهٔ $\delta(x)$ بامعادلهٔ (۸۳.۸ د) سازگاراست.

۱۱.۳.۱۴ $\delta(x-t)$ را به‌صورت یك سری فوریه بسط دهید. نتیجه‌ای را که به‌دست آورده‌اید باصورت ده‌خطی معادلهٔ (۸۳.۹) مقایسه‌کنید.

پاسخ.

$$\delta(x-t)=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(\cos nx\cos nt+\sin nx\sin nt)$$

$$=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos n(x-t)\,.$$

۱۲.۳.۱۴ تحقیق کنید که

$$\delta(\varphi_1-\varphi_2)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im(\varphi_1-\varphi_2)}$$

یك تابع دلتای دیراك است؛ برای انجام این کار نشان دهید که این تابع در تعریف دلتای دیراك

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(\varphi_1)\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im(\varphi_1-\varphi_2)}\,d\varphi_1=f(\varphi_2)$$

صدق می‌کند.

راهنمایی. $f(\varphi_1)$ را به‌کمك یك سری نمایی فوریه نمایش دهید.

یادآوری. شبیه پیوستاری این عبارت در بخش ۲.۱۵ پدیدار می‌شود. مهمترین کاربرد این عبارت درتعیین توابع گرین، بخش ۶.۱۶، است.

۱۳.۳.۱۴ (الف) با استفاده از

$$f(x)=x^2,\quad -\pi<x<\pi$$

نشان دهید‌که

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}=\eta(2)$$

(ب) با بهره‌گیری از سری فوریهٔ موج مثلثی که در مسئلهٔ ۴.۳.۱۴ تشکیل شد، نشان دهیدکه

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}=\lambda(2)$$

(ج) با استفاده از

$$f(x)=x^4,\quad -\pi<x<\pi$$

نشان دهید

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}=\zeta(4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720} = \eta(4)$$

(د) بااستفاده از

$$f(x) = \begin{cases} x(\pi - x), & 0 < x < \pi \\ x(\pi + x), & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

سری زیررا استخراج کنید

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{\substack{n=1,3,5,\ldots \\ \text{فرد}}}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

ونشان دهید

$$\sum_{\substack{n=1,3,5,\ldots \\ \text{فرد}}}^{\infty} (-1)^{(n-1)/2} n^{-3} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots = \frac{\pi^3}{32} = \beta(3)$$

(ه) بااستفاده ازسری فوریهٔ مربوط به‌یك موج مربعی نشان دهید

$$\sum_{\substack{n=1,3,5,\ldots \\ \text{فرد}}}^{\infty} (-1)^{(n-1)/2} n^{-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4} = \beta(1)$$

این‌فرمول لایب‌نیتس برای π است‌که قبلا در مسئلهٔ ۶.۷.۵، ازطریق شگرد دیگری به‌دست آمد.

یادآوری. توابع $\eta(2)$، $\eta(4)$، $\lambda(2)$، $\beta(1)$، و $\beta(3)$ به‌کمك‌سریهای‌مشخص‌شده تعریف می‌شوند. تعریفهای‌کلی دربخش ۹.۵ ارائه شده‌اند.

۱۴.۳.۱۴ (الف) نمایش سری فوریهٔ تابع زیررا بیابید

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leqslant 0 \\ x, & 0 \leqslant x < \pi \end{cases}$$

(ب) بااستفاده از بسط فوریه‌ای‌که یافته‌اید، نشان دهید

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots .$$

۱۵.۳.۱۴ داریم $f(z) = \ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} z^n / n$. [این سری به ازای

$|z|\leqslant ۱$ به $\ln(۱+z)$ همگرا می‌شود مگر در نقطهٔ $z=-۱$.]
(الف) با استفاده از اجزای موهومی نشان دهید

$$\ln\left(۲\cos\frac{\theta}{۲}\right)=\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}\frac{\cos n\theta}{n},\quad -\pi<\theta<\pi$$

(ب) به‌کمك تغییرمتغیر، بند (الف) را به‌صورت زیر تبدیل کنید

$$-\ln\left(۲\sin\frac{\varphi}{۲}\right)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n},\quad ۰<\varphi<۲\pi$$

۱۶۰۳۰۱۴ تابع زیر توصیفگر یك پالس مثلثی متقارن با بلندی و پهنای قابل‌تنظیم است

$$f(x)=\begin{cases}a(۱-x/b), & ۰\leqslant|x|\leqslant b\\ ۰, & b\leqslant|x|\leqslant\pi\end{cases}$$

(الف) نشان دهید که ضرایب فوریه عبارت‌اند از

$$a_۰=\frac{ab}{\pi},\quad a_n=\frac{۲ab}{\pi}(۱-\cos nb)/(nb)^۲$$

مجموع سری فوریهٔ متناهی را تا $n=۱۰$ و $n=۱۰۰$ به‌ازای $x/\pi=۰(۱/۹)۱$ بیابید.
فرض کنید که $a=۱$ و $b=\pi/۲$.
(ب) ضرایب فوریهٔ $f(x)$ از $a_۰$ تا $a_{۱۰}$ را از طریق فراخواندن یك زیر-برنامهٔ آنالیز فوریه (اگر به آن دسترسی دارید) محاسبه کنید.

۱۷۰۳۰۱۴ (الف) با استفاده از یك زیر-برنامهٔ آنالیز فوریه، ضرایب کسینوس فوریه از $a_۰$ تا $a_{۱۰}$ تابع زیر را محاسبه کنید

$$f(x)=[۱-(x/\pi)^۲]^{۱/۲},\quad [-\pi,\pi]$$

(ب) نتایج بند (الف) را به‌کمك محاسبهٔ بعضی از ضرایب a_n از طریق کوادراتور عددی مستقیم، در چند حالت بیازمایید.
مقادیر آزمونی. $a_۰=۰٫۷۸۵$ ، $a_۲=۰٫۲۸۴$.

۱۸۰۳۰۱۴ با استفاده از یك زیر-برنامهٔ فوریه، ضرایب تا $a_{۱۰}$ و $b_{۱۰}$ را در موارد زیر محاسبه کنید:
(الف) یکسوساز تمام موج (مثال ۲۰۳۰۱۴)،

(ب) یکسوساز نیم‌موج (مسئلهٔ ۱.۳.۱۴). نتایج حاصل را به‌کمك مقایسه باصورتهای تحلیلی داده شده [معادلهٔ (۳۹.۱۴) ومسئلهٔ ۱.۳.۱۴] بیازمایید.

۴.۱۴ خواص سری فوریه

همگرایی

ابتدا باید خاطر نشان کنیم که نباید انتظار داشت که سری فوریه‌ای که نمایشگر یك تابع ناپیوسته است، به‌طور یکنواخت همگرا باشد. یك سری همگرای یکنواخت از توابع پیوسته ($\cos nx$, $\sin nx$) همواره تابعی پیوسته به دست می‌دهد (با بخش ۵.۵ مقایسه کنید). اما، اگر: (الف) $f(x)$ درمحدودهٔ $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ پیوسته باشد، (ب) $f(-\pi)=f(+\pi)$، و (ج) $f'(x)$ یك تابع قطعه‌ای پیوسته باشد، سری‌فوریهٔ مربوط به $f(x)$ به‌طوریکنواخت همگرا خواهد بود. این محدودیتها ایجاب نمی‌کنند که $f(x)$ حتماً دوره‌ای باشد، ولی توابع دوره‌ای مشتق‌پذیر پیوسته (بادورهٔ 2π) این‌شرایط را خواهند داشت. خواننده خود می‌تواند برای اثبات همگرایی یکنواخت به‌مراجع مربوط به‌این مبحث مراجعه کند.[1] چه $f(x)$ ناپیوستگی داشته باشد ویاخیر، میانگین سری فوریه همگرا خواهد بود (بخش ۴.۹).

انتگرالگیری

انتگرالگیری جمله به‌جمله از سری

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \qquad (51.14)$$

به‌عبارت زیرمی‌انجامد

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx=\frac{a_0 x}{2}\Big|_{x_0}^{x}+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx\Big|_{x_0}^{x}+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \cos nx\Big|_{x_0}^{x} \qquad (52.14)$$

روشن است که اثرانتگرالگیری عبارت‌است ازقراردادن یك‌توان اضافی n در مخرج هر ضریب. حاصل این‌کار همگرایی سریعتری‌نسبت به‌قبل‌است. درنتیجه ازیك‌سری‌فوریهٔ‌همگرا، همواره می‌توان جمله به‌جمله انتگرال‌گرفت، سری حاصل به‌طوریکنواخت به‌انتگرال تابع اصلی همگرامی‌شود. درواقع، حتی اگرسری اصلی [معادلهٔ (۵۱.۱۴)] خود همگرا نباشد، بازهم ممکن‌است انتگرالگیری جمله‌به‌جمله صادق باشد! تنها انتگرالپذیر بودن تابع$f(x)$ کفایت می‌کند. درکتاب جفریز، بخش ۶.۱۴، دراین خصوص بحث شده‌است.

معادلهٔ (۵۲.۱۴) ممکن است، به‌معنای دقیق کلمه، یك سری فوریه نباشد؛ یعنی اگر

---

۱. مثلا، به‌بخش ۳۸ کتابی بامشخصات زیر مراجعه کنید:
Churchill, R. V., *Fourier Series and Boundary Value Problems*. New York: Mc Graw-Hill (1941).

$a_\circ \neq \circ$، آنگاه یك جملهٔ $(1/2)\, a_\circ x$ وجود خواهد داشت. ولی

$$\int_{x_\circ}^{x} f(x)\, dx - \frac{1}{2} a_\circ x \qquad (53.14)$$

بازهم یك‌سری فوریه است.

مشتقگیری

وضعیت مربوط به‌مشتقگیری نسبت به‌وضعیت مربوط به‌انتگرالگیری تفاوت کلی دارد. در اینجا باید هوشیار بود. سری مربوط به‌تابع زیررا درنظر بگیرید

$$f(x) = x, \quad -\pi < x < \pi \qquad (54.14)$$

سری فوریهٔ مربوط به‌این تابع‌را به‌قرارزیربه‌آسانی به‌دست می‌آوریم (بامسئلهٔ ۲.۳.۱۴ مقایسه‌کنید)

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}, \quad -\pi < x < \pi \qquad (55.14)$$

به‌کمك مشتقگیری جمله به‌جمله خواهیم داشت

$$1 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos nx \qquad (56.14)$$

که همگرا نیست! مواظب باشید. مشتق خود را کنترل کنید.

درمورد موجی مثلثی (مسئلهٔ ۴.۳.۱۴) که‌درآن همگرایی سریعتر (ویکنواخت) است، داریم

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,\ \text{فرد}}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \qquad (57.14)$$

به‌کمك مشتقگیری جمله به‌جمله داریم

$$f'(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,\ \text{فرد}}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \qquad (58.14)$$

که عبارت‌است از بسط فوریهٔ موج مربعی به‌قرار زیر

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \circ < x < \pi, \\ -1, & -\pi < x < \circ \end{cases} \qquad (59.14)$$

از وارسی شکل ۷.۱۴ محقق می‌شود که این‌تابع واقعاً مشتق موج مثلثی ماست.

عمل مشتقگیری، به‌عنوان عکس انتگرالگیری یك عامل n اضافی در صورت هر جمله قرارمی‌دهد. این کار، آهنگ همگرایی راکند می‌کند و ممکن است، مانند همان حالت اول که توضیح دادیم، سری مشتقگیری شده را واگرا سازد.
به‌طورکلی، مشتقگیری جمله به‌جمله تحت همان‌شرایطی که برای همگرایی یکنواخت برشمردیم، مجازخواهد بود.

مسائل

۱.۴.۱۴ نشان دهید که انتگرالگیری از بسط فوریهٔ $f(x)=x$، $-\pi<x<\pi$، به‌سری زیرمنجرمی‌شود

$$\frac{\pi^{۲}}{۱۲}=\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^{n+۱}n^{-۲}$$

$$=۱-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۹}-\frac{۱}{۱۶}+\cdots$$

۲.۴.۱۴ اتحاد پارسوال.
(الف) بافرض اینکه بسط فوریهٔ $f(x)$ به‌طوریکنواخت همگراباشد، نشان‌دهیدکه

$$\frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^{۲}\,dx=\frac{a_{\circ}^{۲}}{۲}+\sum_{n=۱}^{\infty} (a_n^{۲}+b_n^{۲})$$

این اتحاد پارسوال است. این در واقع حالت خاصی از رابطهٔ تمامیت، معادلهٔ (۷۲.۹)، است.
(ب) باداشتن

$$x^{۲}=\frac{\pi^{۲}}{۳}+۴\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^n\cos nx}{n^{۲}},\quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi$$

بابهره‌گیری ازاتحاد پارسوال، $\zeta(۴)$ را به‌صورت بسته به‌دست‌آورید.
(ج) شرط همگرایی یکنواخت ضروری نیست. این مطلب را با بهره‌گیری از اتحاد پارسوال دربارهٔ موج مربعی زیر نشان دهید

$$f(x)=\begin{cases}-۱, & -\pi<x<\circ\\ ۱, & \circ<x<\pi\end{cases}$$

$$=\frac{۴}{\pi}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin(۲n-۱)x}{۲n-۱}$$

۳.۴.۱۴ نشان دهید که انتگرالگیری از بسط فوریهٔ تابع دلتای دیراک (مسئلهٔ ۱۰.۳.۱۴) به‌نمایش فوریهٔ موج مربعی معادلهٔ (۳۶.۱۴) با $h=1$ می‌انجامد.

یادآوری. انتگرالگیری از جملهٔ ثابت $(1/2\pi)$ به‌یك جملهٔ $x/2\pi$ منجر می‌شود. چه کاری با این جمله انجام می‌دهید؟

۳.۴.۱۴ الف ازبسط فوریهٔ تابع پله‌ای‌یکهٔ

$$f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi<x<0 \\ x, & 0<x<\pi \end{cases}$$

انتگرال بگیرید. نشان‌دهید که سری‌انتگرالگیری‌شدهٔ حاصل با مسئلهٔ ۱۴.۳.۱۴ سازگاراست.

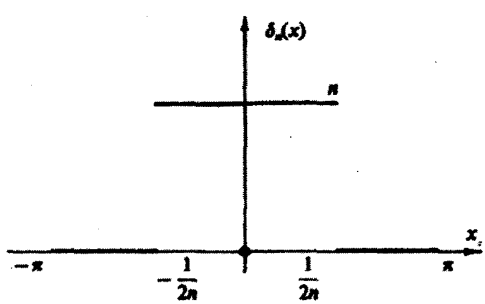
۴.۴.۱۴ در بازهٔ $(-\pi, \pi)$

$$\delta_n(x)=\begin{cases} n, & |x|<\dfrac{1}{2n} \\ 0, & |x|>\dfrac{1}{2n} \end{cases}$$

(شکل ۹.۱۴).

(الف) $\delta_n(x)$ را به‌صورت یك‌سری کسینوسی فوریه بسط دهید.

(ب) نشان‌دهید که سری‌فوریهٔ‌حاصل درحد $n\to\infty$ با بسط فوریهٔ $\delta(x)$ سازگاراست.



شکل ۹.۱۴ پالس مستطیلی.

۵.۴.۱۴ ماهیت تابع دلتایی سری فوریهٔ مسئلهٔ ۴.۴.۱۴ را محقق کنید، برای این‌کار نشان دهید که به‌ازای هر تابع $f(x)$ که دربازهٔ $[-\pi, \pi]$ متناهی و در $x=0$ پیوسته است،

داریم

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)[\delta_\infty(x)\ \text{بسط فوریهٔ}]\, dx = f(0)$$

۶.۴.۱۴ (الف) نشان دهید که بسط سری سینوسی فوریهٔ تابع دلتای دیراك $\delta(x-a)$، در نیم‌بازهٔ $(0, L)$، $(0<a<L)$، ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\delta(x-a) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

دقت کنید که این‌سری عملا تابع زیررا توصیف می‌کند

$$-\delta(x+a)+\delta(x-a) \quad (-L, L)\ \text{در بازهٔ}$$

(ب) باانتگرالگیری ازدوطرف معادلهٔ قبل از 0 تا x، نشان دهیدکه بسط کسینوسی موج مربعی

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < a \\ 1, & a < x < L \end{cases}$$

به‌صورت زیراست

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad 0 \leqslant x < L$$

(ج) تحقیق کنیدکه

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) = \langle f(x)\rangle$$

۷.۴.۱۴ بسط کسینوسی فوریهٔ موج‌مربعی، مسئلهٔ ۶.۴.۱۴ (ب)، را به‌کمك محاسبهٔ‌مستقیم ضرایب فوریه تحقیق کنید.

۸.۴.۱۴ (الف) دوانتهای ریسمانی، $x=0$ و $x=L$، را محکم کرده‌ایم. با درنظرگرفتن ارتعاشهای کم‌دامنه، پی‌می‌بریم که دامنهٔ $y(x, t)$ درمعادلهٔ موج زیرصدق می‌کند

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

که درآن v سرعت موج است. براثر یك‌وزش تند، ریسمان در $x=a$ به‌ارتعاش‌درمی‌آید. ازاین‌روداریم

$$y(x,\,0)=0$$

$$\frac{\partial y(x,\,t)}{\partial t}=Lv_0\,\delta(x-a)\quad t=0 \text{ در}$$

ثابت L را برای به‌توازن درآوردن ابعاد $\delta(x-a)$ (که‌عکس طول است) گنجانیده‌ایم. بااستفاده از $\delta(x-a)$، که درمسئلهٔ ۶.۴.۱۴ (الف) داده‌شد، معادلهٔ‌موج‌را تحت‌این‌شرایط اولیه حل کنید.

پاسخ. $y(x,\,t)=\dfrac{2v_0L}{\pi v}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi a}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi vt}{L}$.

(ب) نشان دهیدکه سرعت عرضی ریسمان، $\partial y(x,\,t)/\partial t$، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{\partial y(x,\,t)}{\partial t}=2v_0\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi a}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi vt}{L}$$

۹.۴.۱۴ ریسمانی‌که دوانتهای آن در $x=0$ و $x=l$ محکم شده است، آزادانه ارتعاش می‌کند. معادلهٔ‌زیرحرکت آن‌را توصیف می‌کند

$$\frac{\partial^2 u(x,\,t)}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 u(x,\,t)}{\partial x^2}$$

سری فوریه‌ای به‌صورت زیر درنظربگیرید

$$u(x,\,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

ضرایب $b_n(t)$ را محاسبه‌کنید. شرایط اولیه عبارت‌اند از

$$u(x,\,0)=f(x)\quad \text{و}\quad \frac{\partial}{\partial t}u(x,\,0)=g(x)$$

یادآوری. این تنها نصف بازهٔ قراردادی برای انتگرال تعامد فوریه است. اما، تا آنجاکه فقط جملات سینوس‌را درنظربگیریم، شرایط مرزی اشتورم-لیوویل هنوزصادق و توابع متعامدند.

پاسخ.

$$b_n(t)=A_n\cos\frac{n\pi vt}{l}+B_n\sin\frac{n\pi vt}{l}$$

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\,,\ B_n=\frac{2}{n\pi v}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

۱۰.۴.۱۴ (الف) در ادامهٔ مسئلهٔ ریسمان مرتعش، مسئلهٔ ۹.۴.۱۴، براثر وجود یك محیط مقاوم ارتعاشات مطابق معادلهٔ زیرمیرا می‌شوند

$$\frac{\partial^2 u(x,\,t)}{\partial t^2}=v^2\,\frac{\partial^2 u(x,\,t)}{\partial x^2}-k\,\frac{\partial u(x,\,t)}{\partial t}$$

سری فوریه‌ای به‌صورت زیردرنظر بگیرید

$$u(x,\,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

وبازضرایب $b_n(t)$ را محاسبه کنید. شرایط اولیه‌را همان‌شرایطی بگیریدکه درمسئلهٔ ۹.۴.۱۴ درنظرداشتیم. فرض کنید میرایی ناچیزاست.

(ب) این مسئله‌را برای میرایی بزرگ تکرار کنید.

پاسخ. (الف)

$$b_n(t)=e^{-kt/2}\{A_n\cos\omega_n t+B_n\sin\omega_n t\},$$

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,$$

$$B_n=\frac{2}{\omega_n l}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx+\frac{k}{2\omega_n}A_n,\quad \omega_n^2=\left(\frac{n\pi v}{l}\right)^2-\left(\frac{k}{2}\right)^2>0$$

(ب)

$$b_n(t)=e^{-kt/2}\{A_n\cosh\sigma_n t+B_n\sinh\sigma_n t\},$$

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,$$

$$B_n=\frac{2}{\sigma_n l}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx+\frac{k}{2\sigma_n}A_n,\quad \sigma_n^2=\left(\frac{k}{2}\right)^2-\left(\frac{n\pi v}{l}\right)^2>0$$

۱۱.۴.۱۴ توزیع باررا روی سطوح داخلی نیمدایره‌های مسئلهٔ ۶.۳.۱۴ پیداکنید.

یادآوری. به‌یك سری واگرا دست می‌یابید واین رهیافت سری فوریه در این مورد کارسازنیست. بااستفاده از شگردهای نگاشت همدیس می‌توانیم نشان دهیم که چگالی بار متناسب است با $\csc\theta$. آیا $\csc\theta$ بسط فوریه‌ای دارد؟

۱۲.۴.۱۴ داریم

$$\varphi_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\begin{cases}-\frac{1}{2}(\pi+x), & -\pi\leqslant x<0\\ \frac{1}{2}(\pi-x), & 0<x\leqslant\pi\end{cases}$$

ازطریق انتگرالگیری نشان دهید

$$\varphi_2(x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\begin{cases}\frac{(\pi+x)^2}{4}-\frac{\pi^2}{12}, & -\pi\leqslant x\leqslant 0\\ \frac{(\pi-x)^2}{4}-\frac{\pi^2}{12}, & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$$

۱۳.۴.۱۴ داریم

$$\psi_{2s}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{2s}}$$

$$\psi_{2s+1}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{2s+1}}$$

روابط بازگشتی زیررا بهدست آورید

(الف) $$\psi_{2s}(x)=\int_0^x \psi_{2s-1}(x)\,dx$$

(ب) $$\psi_{2s+1}(x)=\zeta(2s+1)-\int_0^x \psi_{2s}(x)\,dx$$

یادآوری. این توابع $\psi_n(x)$ و $\varphi_n(x)$های مربوط بهمسئلهٔ قبل را توابع کلاوزن می‌گویند. در نظریه می‌توان ازاین توابع برای اصلاح آهنگ همگرایی سری فوریه بهره گرفت. دراینجا نیزمانند مبحث سریهایی که درفصل ۵ مطرح‌شد، این‌سؤال پیش‌می‌آیدکه ما چقدر محاسبهٔ تحلیلی انجام می‌دهیم وازکامپیوترانجام چقدر محاسبهٔ عددی‌را طلب می‌کنیم. همراه باافزایش توان وکارایی کامپیوترها، این موازنه هرچه‌بیشتر به‌هم می‌خورد، به‌طوری که ماکارکمتری انجام می‌دهیم وازکامپیوترکاربیشتری می‌خواهیم.

۱۴.۴.۱۴ نشان دهید عبارت

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n+1}$$

را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$f(x)=\psi_1(x)-\varphi_2(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2(n+1)}$$

یادآوری. درمسائل قبلی توابع $\psi_1(x)$ و $\varphi_2(x)$ را تعریف‌کرده‌ایم.

۵.۱۴ پدیدهٔ گیبس

پدیدهٔ گیبس عبارت است از یك جهش، یکی از خاصیتهای سری فوریه و سایر سریهای ویژه‌تابعی، دریك ناپیوستگی ساده. نمونه‌ای ازاین پدیده در شکل ۱.۱۴ دیده می‌شود.

مجموعیابی سریها

دربخش ۱.۱۴ چند جملهٔ اول سری فوریهٔ مربوط به‌یك موج دندانه‌اره‌ای را ترسیم کردیم (شکل ۱.۱۴). اینك‌روشی تحلیلی برای جمع کردن r جملهٔ اول‌سری فوریه ارائه‌می‌دهیم. ازمعادلهٔ (۱۳.۱۴) داریم

$$a_n \cos nx+b_n \sin nx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos n(t-x)dt \qquad (۶۰.۱۴)$$

آنگاه مجموع جزئی rام به‌صورت زیردرمی‌آید[1]

$$s_r(x)=\sum_{n=0}^{r}(a_n \cos nx+b_n \sin nx)$$

(۶۱.۱۴)

$$=\mathcal{R}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{r} e^{-i(t-x)n}\right]dt$$

باجمع‌کردن این سری متناهی ازعبارتهای نمایی (تصاعد هندسی)[2]، داریم

$$s_r(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\sin\left[\left(r+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}\,dt \quad (۶۲.۱۴)$$

این انتگرال درهمهٔ نقاط، ازجمله $t=x$، همگراست. عامل

---

۱. شایان ذکراست‌که کاربرد این سری درتحلیل توری پراش (r شکافی) پیش می‌آید.
۲. بامسئلهٔ ۷.۱.۶ به‌ازای مقدار اولیهٔ $n=1$ مقایسه‌کنید.

$$\frac{(2\pi)^{-1}\sin\left[\left(r+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}$$

کرنل دیریکله است که در بخش ۷.۸ از آن به‌عنوان یک توزیع دلتای دیراك یادکردیم.

موج مربعی

برای راحتی محاسبات عددی، رفتار سری فوریه‌ای که موج مربعی دوره‌ای زیر را نمایش می‌دهد. از نظر می‌گذرانیم

$$f(x)=\begin{cases}\frac{h}{2}, & 0<x<\pi\\ -\frac{h}{2}, & -\pi<x<0\end{cases} \qquad (63.14)$$

این عبارت اساساً عبارت است از همان موج مربعی که در بخش ۳.۱۴ آن را به‌کاربردیم و بی‌درنگ می‌بینیم که جواب آن به‌قرار زیر است

$$f(x)=\frac{2h}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\dots\right) \qquad (64.14)$$

با بهره‌گیری ازمعادلهٔ (۶۲.۱۴) برای موج مربعی [معادلهٔ (۶۳.۱۴)]. مجموع r جملهٔ اول را [به‌اضافهٔ $(1/2)a_0$ که دراینجا صفر است] به‌دست می‌آوریم

$$s_r(x)=\frac{h}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(r+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}dt-\frac{h}{4\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin\left(r+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}dt$$

$$(65.14)$$

$$=\frac{h}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(r+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}dt-\frac{h}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(r+\frac{1}{2}\right)(t+x)}{\sin\frac{1}{2}(t+x)}dt$$

این نتیجهٔ آخر از تبدیل زیر به‌دست می‌آید

درانتگرال دوم $t=-t$

هرگاه درانتگرال اول به‌جای $x-t$ کمیت s ودرانتگرال دوم به‌جای $x+t$ کمیت s را بنشانیم، خواهیم داشت

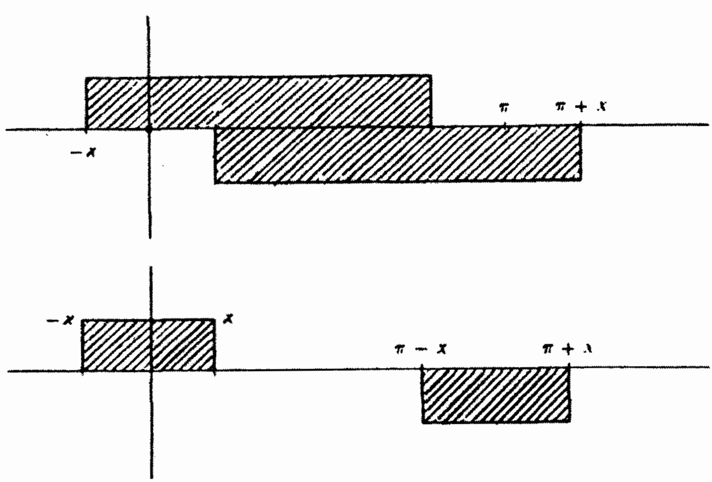
$$s_r(x)=\frac{h}{۴\pi}\int_{-x}^{\pi-x}\frac{\sin\left(r+\frac{۱}{۲}\right)s}{\sin\frac{۱}{۲}s}\,ds-\frac{h}{۴\pi}\int_{x}^{\pi-x}\frac{\sin\left(r+\frac{۱}{۲}\right)s}{\sin\frac{۱}{۲}s}\,ds$$

(۶۶.۱۴)

بازه‌های انتگرالگیری در(بالای) شکل ۱۰.۱۴ نشان داده شده‌اند. از آنجاکه شکل انتگرالده‌ها از نظر ریاضی‌یکسان‌اند، انتگرالهای از x تا $\pi-x$ حذف می‌شوند وگستره‌های انتگرالی که درقسمت پایین شکل ۱۰.۱۴ نشان داده شده‌اند، باقی می‌مانند

$$s_r(x)=\frac{h}{۴\pi}\int_{-x}^{x}\frac{\sin\left(r+\frac{۱}{۲}\right)s}{\sin\frac{۱}{۲}s}\,ds-\frac{h}{۴\pi}\int_{\pi-x}^{\pi+x}\frac{\sin\left(r+\frac{۱}{۲}\right)s}{\sin\frac{۱}{۲}s}\,ds \quad (۶۷.۱۴)$$

مجموع جزئی را در مجاورت ناپیوستگی در $x=۰$ درنظر بگیرید. با $x\to۰$، می‌توان از انتگرال دوم چشم پوشید و انتگرال اول را وابسته به ناپیوستگی در $x=۰$ می‌گیریم. با استفاده از $p=[r+(۱/۲)]$ و $ps=\xi$، خواهیم داشت



شکل ۱۰.۱۴ بازه‌های انتگرالگیری ــ معادلهٔ (۶۶.۱۴).

$$s_r(x)=\frac{h}{2\pi}\int_0^{px}\frac{\sin\xi}{\sin(\xi/2p)}\cdot\frac{d\xi}{p} \qquad (۶۸.۱۴)$$

محاسبهٔ جهش

مجموع جزئی‌ما، $s_r(x)$، ازصفردر $x=0$ شروع می‌شود [سازگار بامعادلهٔ (۱۶.۱۴)] و تا نقطهٔ $\xi=ps=\pi$، که در آن $\sin\xi$ درمخرج منفی‌می‌شود، افزایش‌می‌یابد. به‌ازای مقادیر بزرگ r، وبنا براین مقادیر بزرگ p، صورت کسر مثبت باقی می‌ماند. بادر نظرگرفتن حد بالای $px=\pi$، برای مجموع جزئی مقدار بیشینه‌را به‌دست می‌آوریم. درست درهمین‌نقطهٔ x مشاهده می‌کنیم که موضع بیشینهٔ جهش، با تعداد جملاتی‌که در نظرگرفته‌ایم نسبت عکس دارد

$$x=\frac{\pi}{p}\approx\frac{\pi}{r}$$

ازاین‌رو مقدار بیشینهٔ مجموع جزئی عبارت است از

$$s_r(x)_{\text{بیشینه}}=\frac{h}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\xi\, d\xi}{\sin(\xi/2p)p} \qquad (۶۹.۱۴)$$

$$\approx\frac{h}{2}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\xi}{\xi}d\xi$$

برحسب انتگرال سینوس $si(x)$، دربخش ۵.۱۰، داریم

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\xi}{\xi}d\xi=\frac{\pi}{2}+si(\pi) \qquad (۷۰.۱۴)$$

آشکاراست‌که این انتگرال از $\pi/2$ بزرگتراست، زیرا آن‌را می‌توان به‌صورت‌زیر نوشت

$$\left(\int_0^{\infty}-\int_{\pi}^{2\pi}-\int_{3\pi}^{5\pi}-\cdots\right)\frac{\sin\xi}{\xi}d\xi=\int_0^{\pi}\frac{\sin\xi}{\xi}d\xi \qquad (۷۱.۱۴)$$

دربخش ۲.۷ دیدیم‌که این انتگرال ازصفر تا ∞ برابر $\pi/2$ است. ازاین انتگرال یک‌سری ازجملات منفی راکم می‌کنیم. درنتیجهٔ کوادراتور گاؤسی (پیوست ۲ را ببینید) یا بسط سری توانی وانتگرالگیری جمله به‌جمله داریم

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\xi}{\xi}d\xi=1{,}1789797\ldots \qquad (۷۲.۱۴)$$

یعنی، مطابق شکل ۱۱.۱۴ سری فوریه به‌جهشی حدود ۱۸ درصد در گوشهٔ مثبت و نزولی جهشی به‌همین میزان درگوشهٔ منفی گرایش دارد. شمول تعداد بیشتری از جملات (یعنی افزایش r)، این جهش‌را حذف نمی‌کند وفقط آن‌را به‌نقطهٔ ناپیوستگی نزدیکترمی‌کند. این جهش، پدیدهٔ‌گیبس است، ونمایش سری فوریه به‌دلیل وجود همین‌پدیده ممکن است برای محاسبات عددی، به‌ویژه درمجاورت یك ناپیوستگی بسیارغیرقابل اعتماد باشد.

پدیدهٔ‌گیبس فقط مخصوص سری فوریه نیست. این پدیده درسایر بسطهای ویژه‌تابعی نیزپیش می‌آید. مسئلهٔ ۲۷.۳.۱۲ مثالی است ازپدیدهٔ‌گیبس برای سری لژاندر.

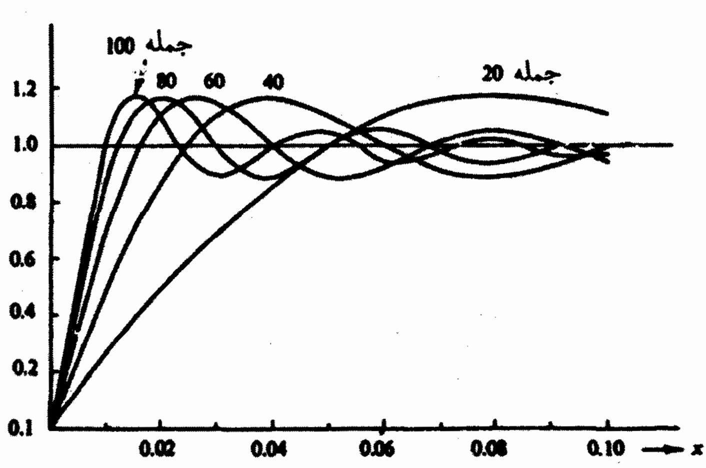
مسائل

۱.۵.۱۴ به‌کمك شگردهای مجموعیابی مجموعهای جزئی‌که دراین بخش آموختیم، نشان دهیدکه سری فوریهٔ $f(x)$، دریك ناپیوستگی $f(x)$، مقدار میانگین حسابی حدود چپ و راست را به‌خود می‌گیرد

$$f(x_\circ)=\frac{۱}{۲}[f(x_\circ+)+f(x_\circ-)]$$

درهنگام محاسبهٔ $\lim_{r\to\infty} s_r(x_\circ)$ شاید بهتر باشدکه بخشی از انتگرالده را بایك تابع دلتای دیراك یکی بگیرید.

۲.۵.۱۴ مجموع جزئی، s_n، سری متعلق به‌معادلهٔ (۶۴.۱۴) را با استفاده از روابط زیر تعیین کنید



شکل ۱۱.۱۴ موج مربعی ـ پدیدهٔ گیبس.

$$\frac{\sin mx}{m}=\int_{\circ}^{x}\cos my\,dy \quad \text{(الف)}$$

و

$$\sum_{p=1}^{n}\cos(2p-1)y=\frac{\sin 2ny}{2\sin y} \quad \text{(ب)}$$

آیا به‌همان نتیجه‌ای می‌رسید که درمعادلهٔ (۶۸.۱۴) به‌آن دست یافتید؟

۳.۵.۱۴ سری تابع پلدای متناهی، معادلهٔ(۶۴.۱۴)، را با $h=2$ بااستفاده از ۱۰۰،۲۰۰، ۳۰۰، ۴۰۰، و ۵۰۰ جمله، بـه‌ازای ۲۰۰ر۰(۰۰۰۵ر۰)۰۰۰۰ر۰ = x محاسبه کنید. نتایج حاصل (پنج منحنی) را ترسیم کنید و یا اگر به‌یك برنامهٔ ترسیم منحنی دسترسی‌دارید، از آن بهره‌گیرید.

۴.۵.۱۴ (الف) مقدارانتگرال پدیدهٔ گیبس

$$I=\frac{2}{\pi}\int_{\circ}^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt$$

را به‌کمك کوادراتور عددی بادقت ۱۲ رقم‌معنی‌دارمحاسبه‌کنید.

(ب) نتیجهٔ حاصل‌رابه‌کمك: (۱) بسط انتگرالده‌به‌صورت‌سری، (۲) انتگرالگیری جمله به‌جمله، و(۳) محاسبهٔ‌سری انتگرالگیری‌شده بیازمایید. این‌کارمحاسبهٔ بادقت مضاعف را می‌طلبد.

پاسخ. $I=1.178979744472$.

۶.۱۴ تعامد گسسته ـ تبدیل فوریهٔ گسسته

درنزد بسیاری ازفیزیکدانان تبدیل فوریه خود به‌خود همان تبدیل پیوستهٔ فوریهٔ فصل ۱۵ به‌شمارمی‌آید. ولی پیوستاری ازمقادیر، درهنگام بهره‌گیری از کامپیوتر رقمی الکترونی، جای خودرا به‌یك‌مجموعهٔ‌گسسته می‌سپارد، وجای انتگرالگیری، مجموعیابی می‌نشیند. تبدیل پیوستهٔ فوریه به‌یك تبدیل گسستهٔ فوریه بدل می‌شودکه مبحث مناسبی است که دراین فصل به‌آن بپردازیم.

تعامد روی نقاط گسسته

تعامد توابع مثلثاتی و عبارتهای نمایی موهومـی طی معادلات (۷.۱۴) تا (۱۰.۱۴) بیان می‌شوند. این بیان، همان تعامد متعارف برای توابـع است: انتگرالگیری از حاصلضرب توابع روی بازهٔ تعامد. سینوسها، کسینوسها، وعبارتهای نمایی موهومی دارای‌این‌خاصیت

شایان ذکر ندکه روی یك‌سری از نقاط گسستهٔ هم‌فاصله روی دوره (بازهٔ تعامد) نیز متعامدند.
مجموعه‌ای از $2N$ مقدارزمانی به‌قرار زیر را

$$t_k = 0,\ \frac{T}{2N},\ \frac{2T}{2N},\ \ldots,\ \frac{(2N-1)T}{2N} \qquad (73.14)$$

دربازهٔ زمانی $(0\,,T)$ درنظر بگیرید. آنگاه

$$t_k = \frac{kT}{2N}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 2N-1 \qquad (74.14)$$

ثابت خواهیم کرد که توابع‌نمایی $\exp(2\pi i p t_k/T)$ و $\exp(2\pi i q t_k/T)$، روی نقاط گسستهٔ t_k، در رابطهٔ تعامد زیرصدق می کنند

$$\sum_{k=0}^{2N-1} [\exp(2\pi i p t_k/T)]^* \exp(2\pi i q t_k/T) = 2N\, \delta_{p,q\pm 2nN} \qquad (75.14)$$

که در آن p، q، و n جملگی اعداد درست‌اند.

اگر به‌جای $q-p$ کمیت s را بنشانیم پی می بریم که سمت چپ معادلهٔ (۷۵.۱۴) به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\sum_{k=0}^{2N-1} \exp(2\pi i s t_k/T) = \sum_{k=0}^{2N-1} \exp(2\pi i s k/2N)$$

سمت راست این‌عبارت را با استفاده ازمعادلهٔ (۷۴.۱۴)، برای نشاندن به‌جای T، به‌دست آورده‌ایم. این‌یك سری هندسی متناهی با جملهٔ اولیهٔ واحد ونسبت

$$r = \exp(\pi i s/N)$$

است. ازمعادلهٔ (۷.۵) داریم

$$\sum_{k=0}^{2N-1} \exp(2\pi i s t_k/T) = \begin{cases} \dfrac{1-r^{2N}}{1-r} = 0, & r \neq 1 \\ 2N, & r = 1 \end{cases} \qquad (76.14)$$

که درنتیجه رابطهٔ اصلی تعامد ما، یعنی معادلهٔ(۷۵.۱۴)، اثبات می‌شود. مقدارصفر بالایی، به‌ازای عدد درست s، پیامد اتحاد زیراست

$$r^{2N} = \exp(2\pi i s) = 1$$

مقدار $2N$ پایینی به‌ازای $r=1$، متناظر است با $p=q$.

تعامد در توابع مثلثاتی متناظر در مسئلهٔ ۱.۶.۱۴ مورد بحث قرار می‌گیرد.

تبدیلهای گسستهٔ فوریه

برای آنکه نمادها را کمی ساده‌تر و ارتباط مستقیمتری با فیزیك برقرار کنیم، به‌اتکای رابطهٔ زیر با فضای (وارون) ω، بسامد زاویه‌ای، آشنا می‌شویم

$$\omega_p = 2\pi p/T, \qquad p = 0, 1, 2, \ldots, 2N-1 \qquad (۷۷.۱۴)$$

p همان اعداد درستی را به‌خود می‌گیرد که k به‌خود می‌گیرد. عبارت نمایی $\exp(\pm 2\pi i\, p t_k/T)$ در معادلهٔ (۷۵.۱۴) به $\exp(\pm i\omega_p t_k)$ تبدیل می‌شود. اینکه علامت $+$ یا $-$ را برگزینیم به‌قرارداد یا به‌راحتی‌کار مربوط می‌شود. در مکانیك کوانتومی برای بیان وابستگی زمانی، علامت منفی برگزیده می‌شود.

تابعی از زمان را درنظر بگیرید که به‌صورت مقادیر زمانی گسستهٔ t_k تعریف (اندازه‌گیری) شده باشد. می‌توانیم تابع زیر را تشکیل دهیم

$$F(\omega_p) = \frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{2N-1} f(t_k)e^{i\omega_p t_k} \qquad (۷۸.۱۴)$$

با بهره‌گیری از رابطهٔ تعامد خواهیم داشت

$$\frac{1}{2N}\sum_{p=0}^{2N-1}\left(e^{i\omega_p t_m}\right)^* e^{i\omega_p t_k} = \delta_{mk} \qquad (۷۸.۱۴\ \text{الف})$$

و آنگاه با نشاندن شاخص پایین k به‌جای m، دامنه‌های $f(t_k)$ به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$f(t_k) = \sum_{p=0}^{2N-1} F(\omega_p)e^{-i\omega_p t_k} \qquad (۷۹.۱۴)$$

تابع زمان، $f(t_k)$، $k=0, 1, 2, \ldots, 2N-1$ و تابع بسامد، $F(\omega_p)$، $p=0, 1, 2, \ldots, 2N-1$، تبدیلهای گسستهٔ فوریهٔ یکدیگر به‌شمار می‌آیند.[1] معادلات (۷۸.۱۴) و (۷۹.۱۴) را با تبدیلهای پیوستهٔ فوریهٔ متناظر، یعنی معادلات (۲۲.۱۵) و (۲۳.۱۵) در فصل ۱۵ مقایسه کنید.

محدودیتها

فرض کنید تبدیلهای گسستهٔ فوریه، به‌عنوان دو رابطهٔ ریاضی، دقیق‌اند. می‌توانیم بگوییم $2N$ بردار $2N$ مؤلفه‌ای $\exp(-i\omega_p t_k)$، $k=0, 1, 2, \ldots, 2N-1$، یك مجموعهٔ کامل

---

۱. دو معادلهٔ تبدیل را می‌توان درصورت تمایل با یك ضریب $(2N)^{-1/2}$ در هر دو معادله، به‌شکل متقارن درآورد.

تشکیل می‌دهند[1] که فضای t_k را می‌تنند. پس $f(t_k)$ در معادلهٔ (۷۷.۱۴)، ترکیب خطی ویژه‌ای از این بردارهاست. به‌عبارت دیگر، می‌توانیم $2N$ مؤلفهٔ اندازه‌گیری شدهٔ $f(t_k)$ را معرف یك بردار $2N$ مؤلفه‌ای درفضای t_k بگیریم. آنگاه معادلهٔ (۷۸.۱۴)، بردار $2N$ مؤلفه‌ای $F(\omega_p)$ را درفضای وارون، ω_p، به‌دست می‌دهد. معادلات (۷۸.۱۴) و(۷۹.۱۴) به‌معادلاتی ماتریسی تبدیل می‌شوندکه در آنها $\exp(i\omega_p t_k)/(2N)^{1/2}$ عناصر یك ماتریس یکانی است.

محدودیتهای تبدیل گسستهٔ فوریه هنگامی بروزمی کنند که‌مامعادلات (۷۸.۱۴)و(۷۹.۱۴) را دربارهٔ سیستمهای فیزیکی به‌کاربریم وبکوشیم یك تعبیر فیزیکی وتعمیم $F(\omega_p)\rightarrow F(\omega)$ ازآن به‌دست دهیم. مثال ۱.۶.۱۴ مسئله‌ای را که ممکن است پیش بیاید نمایش مـی‌دهد. مهمترین اقدام احتیاطی‌که برای اجتناب ازاین مشکل باید اتخاذ کنیم آن است که N را چندان بـزرگ بگیریـم که هیچ مؤلفهٔ بسامد زاویه‌ای با بسامد زاویـه‌ای بزرگتـر از $\omega_N=2\pi N/T$ وجود نداشته باشد. خواننده‌می‌تواند جزئیات‌مربوط به‌خطاهاومحدودیتهایی راکه دراستفاده ازتبدیل گسستهٔ فوریه پیش می‌آیند، درتألیفات برگلند وهمینگ بیابد.

مثال ۱.۶.۱۴ تبدیل گسستهٔ فوریه ــ دگرنامی

حالت نسبتاً سادهٔ $T=2\pi$، $N=2$، و $f(t_k)=\cos t_k$ را درنظربگیرید. با استفاده از

$$t_k=kT/4=k\pi/2,\quad k=0,1,2,3 \tag{۸۰.۱۴}$$

$f(t_k)=\cos(t_k)$ توسط بردار چهارمؤلفه‌ای زیر نمایش داده می‌شود

$$f(t_k)=(1,0,-1,0) \tag{۸۱.۱۴}$$

بسامدهای ω_p ازمعادلهٔ (۷۷.۱۴) به‌دست می‌آیند

$$\omega_p=2\pi p/T=p \tag{۸۲.۱۴}$$

روشن است که $\cos t_k$ تنها یك مؤلفهٔ $p=1$ را ایجاب می‌کند و نه هیچ مؤلفهٔ بسامدی دیگری را.

ماتریس تبدیل

$$(2N)^{-1}\exp(i\omega_p t_k)=(2N)^{-1}\exp(ipk\pi/2)$$

به‌صورت زیردرمی‌آید

---

۱. این دوبردار به‌دلیل معادلهٔ (۷۶.۱۴) متعامدند، بنابراین مستقل خطی‌اند.

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \qquad (83.14)$$

توجه کنید که این ماتریس $2N \times 2N$ فقط $2N$ مؤلفهٔ مستقل دارد. همین تکرار مقادیر است که شگرد تبدیل فوریهٔ سریع را میسر می‌سازد.

وقتی این ماتریس روی بردار ستونی $f(t_k)$ عمل کند، بردار ستونی زیر به‌دست می‌آید

$$F(\omega_p)=\left(0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right) \qquad (84.14)$$

ظاهراً یك مؤلفهٔ بسامدی $p=3$ نیز حضور دارد. $f(t_k)$ را به کمك معادلهٔ (۷۹.۱۴) بازسازی می‌کنیم و خواهیم داشت

$$f(t_k)=\frac{1}{2}\,e^{-it_k}+\frac{1}{2}\,e^{-3it_k} \qquad (85.14)$$

با در نظر گرفتن اجزای حقیقی، این معادله را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$f(t_k)=\frac{1}{2}\cos t_k+\frac{1}{2}\cos 3t_k \qquad (86.14)$$

واضح است که این جواب معادلهٔ (۸۶.۱۴) با جواب اصلی، $f(t_k)=\cos t_k$، یکی نیست. ولی در $t_k=0,\ \pi/2,\pi,\ 3\pi/2$، داریم: $\cos t_k=(1/2)\cos t_k+(1/2)\cos 3t_k$. $\cos t_k$ و $\cos 3t_k$، به دلیل تعداد محدود نقاط داده‌ای (گزینهٔ ویژهٔ نقاط داده‌ای) همانند یکدیگرند. این خطا را، که یك بسامد شبیه به بسامد دیگر باشد، دگرنامی می‌گویند. این خطا را می‌توان از طریق گنجاندن تعداد بیشتری نقاط داده‌ای کمینه کرد.

تبدیلهای سریع فوریه

تبدیل سریع فوریه روش خاصی است برای فاکتورگیری و بازآرایی جملات در مجموعهای تبدیلهای گسستهٔ فوریه. اهمیت این روش، که کولی و توکی[1] توجه جامعهٔ علمی را به آن جلب کردند، در کاهش شدید و مؤثری نهفته است که در تعداد عملهای عددی مورد لزوم ایجاد می‌کند. تبدیل سریع فوریه به‌دلیل افزایش سرعت (و کاهش هزینهٔ) فاحشی که به‌وجود

---

1. Cooley, J.W., and J. W. Tukey, *Math. Computation* 19, 297, (1965).

می‌آورد، به‌عنوان یکی ازمعدود پیشرفتهای به‌راستی باارزش در آنالیز عددی درچند دههٔ اخیر شناخته شده‌است.

یکی ازمحاسبات مستقیم تبدیل گسستهٔ فوریه، به‌ازای N مقدار (اندازه‌گیری)زمانی، حدود $N^{۲}$ عمل‌ضرب‌را دربرمی‌گیرد. روش تبدیل‌سریع فوریهٔ‌کولی وتوکی تعدادضربهای لازم‌را، به‌ازای مقداری از N که مساوی توانی از ۲ باشد، به $(N/۲)\log_{۲} N$ کاهش می‌دهد. اگر $N = ۱۰۲۴ (= ۲^{۱۰})$، تبدیل سریع فوریه کاهش محاسبه‌ای به‌اندازهٔ ضریبی بزرگتر از ۲۰۰ ایجاد می‌کند. علت‌اطلاق صفت‌سریع درمفهوم تبدیل‌سریع فوریه نیزهمین است، و به‌همین دلیل است که این‌روش، درپردازش رقمی‌شکل موجها، به‌معنای‌دقیق کلمه، انقلابی به‌وجودآورده است.

تبدیل سریع فوریه باید درهرمرکز کامپیوتری قابل‌حصول‌باشد. این روش در SSP* هم آمده‌است. جزئیات مربوط به‌عمل درونی آن را می‌توان درمقالهٔ‌کولی‌وتوکی و درمقالهٔ برگلند یافت.[1]

مسائل

۱.۶.۱۴ صورتهای مثلثاتی تعامدگسستهٔ متناظر بامعادلهٔ (۷۵.۱۴) را استخراج کنید

$$\sum_{k=۰}^{۲N-۱} \cos(۲\pi p t_k/T)\sin(۲\pi q t_k/T) = ۰$$

$$\sum_{k=۰}^{۲N-۱} \cos(۲\pi p t_k/T)\cos(۲\pi q t_k/T) = \begin{cases} ۰, & p \neq q \\ N, & p = q \neq ۰, N \\ ۲N, & p = q = ۰, N \end{cases}$$

$$\sum_{k=۰}^{۲N-۱} \sin(۲\pi p t_k/T)\sin(۲\pi q t_k/T) = \begin{cases} ۰, & p \neq q \\ N, & p = q \neq ۰, N \\ ۰, & p = q = ۰, N \end{cases}$$

راهنمایی. می‌توان ازاتحادهای مثلثاتی نظیراتحاد زیر سود جست

$$\sin A \cos B = \frac{۱}{۲}[\sin(A+B) + \sin(A-B)]$$

۲.۶.۱۴ معادلهٔ (۷۵.۱۴) تعامد را باجمع زدن روی نقاط زمانی نمایش می‌دهد. نشان دهید که باجمع زدن روی نقاط بسامدی نیزهمین رابطهٔ تعامدی را خواهیم داشت

---

* IBM Scientific Subroutine Package (SSP).

1. Bergland, G. D., *A Guided Tour of the Fast Fourier Transform*, IEEE Spectrum, pp. 41–52 (July 1969).

$$\frac{1}{2N}\sum_{p=0}^{2N-1}(e^{i\omega_p t_m})^* e^{i\omega_p t_k}=\delta_{mk}$$

۳.۶.۱۴ به‌طور مشروح نشان دهید که چگونه از رابطهٔ

$$F(\omega_p)=\frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{2N-1}f(t_k)e^{i\omega_p t_k}$$

به‌رابطهٔ زیر می‌رسیم

$$f(t_k)=\sum_{p=0}^{2N-1}F(\omega_p)e^{-i\omega_p t_k}$$

۴.۶.۱۴ توابع $f(t_k)$ و $F(\omega_p)$ تبدیلهای گسستهٔ فوریهٔ یکدیگرند. روابط تقارنی زیر را استخراج کنید:

(الف) اگر $f(t_k)$ حقیقی باشد، $F(\omega_p)$ متقارن هرمیتی است؛ یعنی

$$F(\omega_p)=F^*\left(\frac{4\pi N}{T}-\omega_p\right)$$

(ب) اگر $f(t_k)$ موهومی محض باشد، داریم

$$F(\omega_p)=-F^*\left(\frac{4\pi N}{T}-\omega_p\right)$$

یادآوری. تقارن موجود در بند (الف) نمایشی است از دگرنامی. بسامد $4\pi N/T-\omega_p$ زیر نقاب ω_p پنهان می‌شود.

۵.۶.۱۴ باداشتن $N=2$، $T=2\pi$، و $f(t_k)=\sin t_k$،

(الف) $F(\omega_p)$ را به‌ازای $p=0, 1, 2, 3$ پیدا کنید.

(ب) با استفاده از $F(\omega_p)$، $f(t_k)$ را بازسازی کنید ودگرنامی $\omega_1=1$ و $\omega_3=3$ را نمایش دهید.

پاسخ (الف) $F(\omega_p)=(0,\ i/2,\ 0,\ -i/2)$،

(ب) $f(t_k)=\frac{1}{2}\sin t_k-\frac{1}{2}\sin 3t_k$.

۶.۶.۱۴ نشان دهید که چندجمله‌ایهای چبیشف، $T_m(x)$، دررابطهٔ تعامدگسستهٔ زیر صدق می‌کنند

$$\frac{1}{2}T_m(-1)T_n(-1)+\sum_{s=1}^{N-1}T_m(x_s)T_n(x_s)+\frac{1}{2}T_m(1)T_n(1)=\begin{cases}0, & m\neq n\\ N/2, & m=n\neq 0\\ N & m=n=0\end{cases}$$

دراینجا $x_s=\cos\theta_s$، که در آن $(N+1)\theta_s$ها به‌طور همفاصله روی محور θ قراردارند

$$\theta_s=\frac{s\pi}{N},\quad s=0,1,2,\ldots,N$$

مراجع

Carslaw, H. S., *Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals*. 2nd ed. London: Macmillan, 1921 ; 3 rd ed., paperback, New York: Dover, 1952

کتابی کلاسیك بامطالب مشروح است که بحث مبسوطی در خصوص پدیدهٔ گیبس درفصل ۹ آن آمده است.

Hamming, R. W., *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, 2nd ed., New York: McGraw-Hill, 1973.

فصل ۳۳ این کتاب یك توصیف عالی برای تبدیل سریع فوریه ارائه می‌کند.

Jeffreys, H. and B. S. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics*, 3rd ed., Cambridge: Cambridge University Press, 1966.

Kufner, A. and J. Kadlec, *Fourier Series*. London: Iliffe, 1971.

این کتاب سری فوریه‌را در زمینهٔ فضای هیلبرت به‌روشنی توضیح می‌دهد.

Lanczos, C., *Applied Analysis*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1956.

دراین کتاب تکنیك همگرایی Lanczos (که نوسانهای پدیدهٔ گیبس را حذف می‌کند) به‌خوبی ارائه شده است. این تکنیك و چند مطلب دیگر، از دیدگاه ریاضیدانی ارائه شده است که فقط درپی قضیه‌های وجودی مطلق نبوده بلکه نتایج عددی مفید را نیز جستجو می‌کند.

Oberhettinger, F., *Fourier Expansions, A Collection of Formulas*. New York and London: Academic Press, 1973.

Zygmund, A., *Trigonometric Series*. Cambridge: Cambridge University Press, 1977.

این کتاب حاوی شرح بسیارکاملی است شامل نتایج نسبتاً جدید درحوزهٔ ریاضیات محض.

۱۵

تبدیلهای انتگرالی

۱.۱۵ تبدیلهای انتگرالی

درفیزیك ریاضی بارها بەزوجهایی ازتوابع برمی‌خوریم که عباراتی بەصورت زیر آنها را بەهم مربوط می‌کنند

$$g(\alpha)=\int_a^b f(t)K(\alpha, t)dt \qquad (۱.۱۵)$$

تابع $g(\alpha)$ را تبدیل (انتگرالی) تابع $f(t)$ توسط هستهٔ $K(\alpha, t)$ می‌نامند. این عمل را می‌توان بەعنوان نگاشت تابع $f(t)$ درفضای t، به تابع $g(\alpha)$ درفضای α، نیز توصیف کرد. این تعبیر، دررابطهٔ زمان ـ بسامد در مثال ۱.۳.۱۵ و در روابط فضای واقعی ـ فضای تکانه، بخش ۶.۱۵، اهمیت فیزیکی پیدا می‌کند.

تبدیل فوریه

ازمیان تعداد بسیارزیادی تبدیل ممکن، مهمترین آنها تبدیل فوریه‌است که بارابطهٔ زیر بیان می‌شود

$$g(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\alpha t}dt \qquad (۲.۱۵)$$

در بخش ۳.۱۵ تعدیلهایی در این تبدیل وارد می‌شود و تبدیلهای کسینوس و سینوس فوریه

بەصورت زیر بیان خواهند شد

$$g_c(\alpha)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{۰}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt \qquad (۳.۱۵)$$

$$g_s(\alpha)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\int_{۰}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt \qquad (۴.۱۵)$$

تبدیل فوریه بر پایۀهستۀ $e^{i\alpha t}$، واجزای حقیقی وموهومی آن یعنی $\cos\alpha t$ و $\sin\alpha t$، بەطور جداگانه، استوار است. از آنجا که این هستەها توابعی‌اند که برای توصیف امـواج بەکار می‌روند. دربررسی امواج واستخراج دادەهایی ازامواج، بەویژه هنگامی که دادەهای فازی مطرح باشند، تبدیلهای فوریه بارها پدیدارمی‌شوند. مثلا، خروجی تداخل سنج ستارەای‌حاوی تبدیل فوریۀ درخشندگی درسطح یك‌قرص ستارەای است. توزیع الکترونی در یك اتم را می‌توان ازتبدیل فوریۀ دامنۀ پرتوی x پراکنده بەدست آورد. درمکانیك‌کوانتومی، ماهیت موجی ماده و توصیفی که برای مـاده برحسب امواج در دست داریم، منشأ فیزیکی روابط فوریۀ بخش ۶.۱۵ را تشکیل می‌دهند.

تبدیلهای لاپلاس، ملین، وهنکل

سه هستۀ مفید دیگرعبارت‌اند از

$$e^{-\alpha t}, \quad tJ_n(\alpha t), \quad t^{\alpha-۱}$$

این هستەها بەتبدیلهای زیرمنجرمی‌شوند

$$g(\alpha)=\int_{۰}^{\infty} f(t)e^{-\alpha t}\,dt, \qquad (۵.۱۵) \text{ تبدیل لاپلاس}$$

$$g(\alpha)=\int_{۰}^{\infty} f(t)t\,J_n(\alpha t)dt, \qquad (۶.۱۵) \text{ تبدیل هنکل(فوریه-بسل)}$$

$$g(\alpha)=\int_{۰}^{\infty} f(t)t^{\alpha-۱}\,dt, \qquad (۷.۱۵) \text{ تبدیل ملین}$$

روشن است‌که تعداد انواع تبدیلهای ممکن نامحدوداست. تبدیلهای بالا درآنالیز ریاضی ودرکاربردهای فیزیکی مفید واقع می‌شوند. در واقع، قبلا ازتبدیل ملین بدون ذکر نام آن استفاده کردەایم؛ یعنی $g(\alpha)=(\alpha-۱)!$ تبدیل ملین $f(t)=e^{-t}$ بەشمار می‌آیـد. البته می‌توانستیم $g(\alpha)=n!/\alpha^{n+۱}$ را تبدیل‌لاپلاس $f(t)=t^n$ نیز بەحساب آوریم. ازاین‌سه، کاربرد تبدیل‌لاپلاس ازدوتبدیل دیگرخیلی بیشتر است. در باب این تبدیـل، در بخشهای ۸.۱۵ تا ۱۲.۱۵ بەتفصیل بحث خواهیم کرد. تبدیل‌هنکل، که تبدیل فوریه برای یك بسط

تابع بسل به‌شمارمی‌آید، حالت حدی یك‌سری بسل-فوریه‌است. این‌تبدیل درمسائل پتانسیل درمختصات استوانه‌ای ظاهرمی‌شود وکاربرد آن درآکوستیك بسیار زیاد است.

خطی بودن

همهٔ تبدیلهای انتگرالی‌فوق خطی‌اند؛ یعنی

$$\int_a^b [c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)]K(\alpha, t)dt$$

$$= \int_a^b c_1 f_1(t)K(\alpha, t)dt + \int_a^b c_2 f_2(t)K(\alpha, t)dt \qquad (۸.۱۵)$$

$$\int_a^b c f(t)K(\alpha, t)dt = c\int_a^b f(t)K(\alpha, t)dt \qquad (۹.۱۵)$$

که درآن c_1 و c_2 ثابت و $f_1(t)$ و $f_2(t)$ توابعی‌اند که عمل تبدیل برای آنها تعریف شده است.

اگر تبدیل انتگرالی خطی‌را توسط عملگر $\mathcal{L}$ نمایش دهیم، خواهیم داشت

$$g(\alpha) = \mathcal{L} f(t) \qquad (۱۰.۱۵)$$

انتظارمی‌رودکه یك عملگر وارون $\mathcal{L}^{-1}$ چنان وجود داشته باشدکه[1]

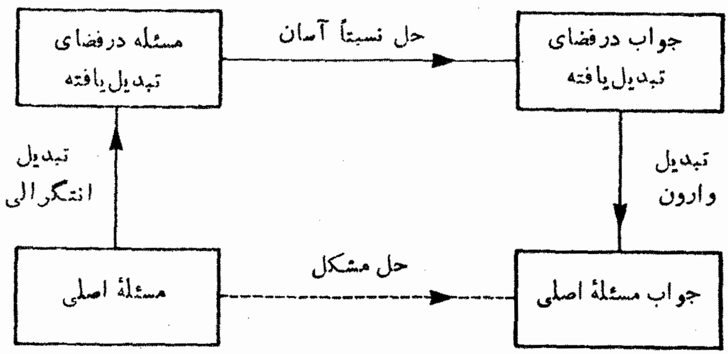
$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} g(\alpha) \qquad (۱۱.۱۵)$$

$\mathcal{L}^{-1}$ برای سه‌تبدیل فوریه دربخش ۳.۱۵ داده شده است. به‌هنگام استفاده از تبدیلهای انتگرالی معمولا مسئلهٔاصلی تعیین‌تبدیل واروناست. تبدیل وارون‌لاپلاس‌را دربخش ۱۲.۱۵ مورد بحث‌قرارخواهیم داد. می‌توان به‌جزئیات مربوط به‌تبدیلهای وارون هنکل و وارون ملین در مراجعی‌که در انتهای این فصل‌آمده است، دست یافت.

تعبیرها وکاربردهای فیزیکی خاص تبدیلهای انتگرالی بسیاراست‌که در همین فصل به‌آنها می‌پردازیم. متداولترین این‌کاربردها درشکل ۱.۱۵ خلاصه شده‌است. حل یك مسئلهٔ بنیادین درمختصات (فضای) اصلی، اگر هم میسر باشد، با دشواری صورت می‌گیرد. اغلب اوقات پیش می‌آیدکه تبدیل مسئله‌را می‌توان نسبتاً به‌سادگی حل کرد. دراین‌صورت تبدیل وارون، جواب را از مختصات تبدیل‌یافته به‌دستگاه اصلی می‌برد. مثال ۱.۴.۱۵ و مسئلهٔ ۱.۴.۱۵ این شگرد را نمایش می‌دهند.

---

۱. این انتظار،اثبات وجود نیست، در اینجا، اثبات وجود، به‌دلیل آنکه عملا در یك فضای بینهایت-بعدی هیلبرت هستیم، پیچیده‌است. وجود تبدیل وارون را درموارد به‌خصوصی که‌مورد توجه است، ازطریق انجام این‌تبدیل عملا اثبات می‌کنیم.



شکل ۱۰۱۵

مسائل

۱۰۱۰۱۵ تبدیلهای فوریه برای تابعی بادومتغیرعبارت‌اند از

$$F(u, v)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int f(x, y)e^{i(ux+vy)}\,dx\,dy$$

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int F(u, v)e^{-i(ux+vy)}\,du\,dv$$

با استفاده از $f(x, y)=f([x^2+y^2]^{1/2})$، نشان دهید که تبدیلهای مرتبهٔ صفر هنکل

$$F(\rho)=\int_0^{\infty} r f(r)J_0(\rho r)\,dr$$

$$f(r)=\int_0^{\infty} \rho F(\rho)J_0(\rho r)\,d\rho$$

حالتهای خاصی از تبدیلهای فوریه‌اند.

این شگرد را می‌توان تعمیم داد و تبدیلهای هنکل ازمرتبهٔ ν، $\nu=0, 1/2, 1, 3/2, 2, \ldots$، را استخراج کرد.[1] رهیافت کلیتری که به‌ازای $\nu>-1/2$ صادق است، در کتاب کاربرد تبدیلهای انتگرالی تألیف اسندون آمده‌است.[2] خاطرنشان‌می‌کنیم که تبدیلهای هنکل ازمرتبهٔ غیرعدد درست $\nu=\pm 1/2$ به‌تبدیلهای کسینوس وسینوس فوریه ساده می‌شوند.

---

۱. مقایسه‌کنید با،

Sneddon, I. N., *Fourier Transforms.*

2. Sneddon, I. N., *The Use of Integral Transforms.*

۲.۱.۱۵ بافرض اعتبارمعادلات مربوط به‌تبدیل هنکل و تبدیل وارون هنکل

$$g(\alpha)=\int_{\circ}^{\infty} f(t)J_n(\alpha t)t\,dt$$

$$f(t)=\int_{\circ}^{\infty} g(\alpha)J_n(\alpha t)\alpha\,d\alpha$$

نشان دهیدکه نمایش انتگرالی بسل تابع دلتای دیراك به‌صورت زیر است

$$\delta(t-t')=t\int_{\circ}^{\infty} J_n(\alpha t)J_n(\alpha t')\alpha\,d\alpha$$

این رابطه درتشکیل توابع‌گرین‌درمختصات استوانه‌ای،که درآن‌ویژه‌تابعها، عبارت‌اند از توابع بسل، سودمند واقع می‌شود.

۳.۱.۱۵ بااستفاده از تبدیلهای فوریه، معادلات(۲۲.۱۵)و(۲۳.۱۵)، نشان‌دهیدکه تبدیل

$$t \rightarrow \ln x$$

$$i\omega \rightarrow \alpha-\gamma$$

به‌رابطهٔ

$$G(\alpha)=\int_{\circ}^{\infty} F(x)x^{\alpha-1}dx$$

و

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} G(\alpha)x^{-\alpha}\,d\alpha$$

می‌انجامد. اینها عبارت‌اند ازتبدیلهای ملین. دربخش۱۲.۱۵ برای دستیابی به‌تبدیل وارون لاپلاس، ازتغییرمتغیرمشابهی استفاده می‌شود.

۴.۱.۱۵ درستی تبدیلهای ملین زیررا تحقیق‌کنید

(الف) $\int_{\circ}^{\infty} x^{\alpha-1}\sin(kx)dx=k^{-\alpha}(\alpha-1)!\sin\frac{\pi\alpha}{2},\quad -1<\alpha<1$

(ب) $\int_{\circ}^{\infty} x^{\alpha-1}\cos(kx)\,dx=k^{-\alpha}(\alpha-1)!\cos\frac{\pi\alpha}{2},\quad 0<\alpha<1$

راهنمایی. می‌توانید انتگرالهارا ازطریق درج یك عامل همگرایی e^{-bx} درآنها و

(پس از انتگرالگیری) قرار دادن $b \to 0$، به‌صورتی حل‌شدنی درآورید. همچنین داریم $\cos kx + i \sin kx = \exp ikx$.

۲.۱۵ گسترش انتگرال فوریه

درفصل ۱۴ نشان داده‌شد که سری فوریه برای نمایش توابعی معین دریکی ازدوحالت زیر سودمند واقع می‌شود: (۱) درگستره‌ای محدود، $[0, 2\pi]$، $[-L, L]$، و غیره، (۲) در بازهٔ نامتناهی $(-\infty, \infty)$، به‌شرط آنکه تابع دوره‌ای باشد. اینك توجه خود رابه‌مسئلهٔ نمایش یك تابع غیردوره‌ای در گسترهٔ نامتناهی معطوف می‌کنیم. از نظر فیزیکی، این کار بەمعنای تجزیهٔ یك تك پالس یا بسته‌موج به‌امواج سینوسی است.

دیده‌ایم که (در بخش ۲.۱۴) برای بازهٔ $[-L, L]$ ضرایب a_n و b_n را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t) \cos \frac{n\pi t}{L}\, dt \qquad (۱۲.۱۵)$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t) \sin \frac{n\pi t}{L}\, dt \qquad (۱۳.۱۵)$$

سری فوریهٔ حاصل عبارت است از

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\, dt + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{L}\int_{-L}^{L} f(t) \cos \frac{n\pi t}{L}\, dt$$

$$+ \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L}\int_{-L}^{L} f(t) \sin \frac{n\pi t}{L}\, dt \qquad (۱۴.۱۵)$$

یا

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\, dt + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} f(t) \cos \frac{n\pi}{L}(t - x)\, dt \qquad (۱۵.۱۵)$$

اکنون پارامتر L را به‌بینهایت سوق می‌دهیم و بازهٔ متناهی $[-L, L]$ را به‌بازهٔ نامتناهی $(-\infty, \infty)$ تبدیل می‌کنیم. قرارمی‌دهیم

$$\frac{n\pi}{L} = \omega, \quad \frac{\pi}{L} = \Delta\omega, \quad L \to \infty \text{ با}$$

آنگاه داریم

$$f(x) \to \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \Delta\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(t - x)\, dt \qquad (۱۶.۱۵)$$

یا، پس از تعویض علامت مجموعیابی نامتناهی با انتگرال روی ω

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega(t-x)\,dx \qquad (۱۷.۱۵)$$

جملهٔ اول (متناظر با a_0)، بافرض‌اینکه $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt$ وجود داشته باشد، حذف‌می‌شود.

بایدتأکیدکرد که این نتیجه [یعنی‌معادلهٔ (۱۷.۱۵)] صرفاًصوری‌است. آن‌رابه‌عنوان یك استنتاج دقیق نیاورده‌ایم، ولی می‌شود دقتش را بیشتر کرد.[۱] به‌معادلهٔ (۱۷.۱۵) عنوان انتگرال فوریه‌را اطلاق می‌کنیم. این معادله موکول به‌این شرط است‌که $f(x)$ اولاً به‌طور پاره پاره پیوسته باشد، ثانیاً مشتقپذیر باشد، و ثالثاً به‌طور مطلق انتگراپذیر ـ یعنی $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ متناهی، باشد.

انتگرال فوریه ـ صورت نمایی

انتگرال فوریه [معادلهٔ (۱۷.۱۵)] را می‌توان به‌صورت نمایی درآورد، به‌این ترتیب که

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega(t-x)dt \qquad (۱۸.۱۵)$$

درحالی‌که

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega(t-x)dt=0 \qquad (۱۹.۱۵)$$

$\cos\omega(t-x)$ تابع زوجی‌ازω و $\sin\omega(t-x)$ تابع‌فردی ازω به‌شمارمی‌آید. باافزودن معادلات (۱۸.۱۵) و (۱۹.۱۵) (بایك ضریب i)، خواهیم داشت

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\omega t}dt \qquad (۲۰.۱۵)$$

متغیرω یك متغیراختیاری ریاضی است. ولی دربسیاری ازمسائل فیزیکی، این متغیرمتناظر است بابسامد زاویه‌ای‌ω. دراین موارد می‌توان معادلهٔ (۱۸.۱۵) یا (۲۰.۱۵)رابه‌صورت نمایش $f(x)$ برحسب توزیعی از قطار موجهای سینوسی بینهایت بلند بابسامد زاویه‌ای ω تعبیر کرد که در آن این بسامد متغیری پیوسته است.

تعیین تابع دلتای دیراك

اگر درمعادلهٔ (۲۰.۱۵) ترتیب انتگرالگیری‌را وارون کنیم، می‌توانیم بنویسیم

---

۱. مقایسه کنید با: Sneddon, I. N., *Fourier Transform,* Section 3.2.

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-x)}d\omega\right\} dt \qquad (\text{۲۰.۱۵ الف})$$

آشکار است که کمیت داخل آکولاد مثل یك تابع دلتا، $\delta(t-x)$، رفتار می‌کند. پس می‌توانیم معادلهٔ (۲۰.۱۵ الف) را ارائه کنندهٔ نمایشی برای تابع دلتای دیراك بدانیم. یا می‌توانیم آن‌را برای یك روش جدید اثبات قضیهٔ انتگرال فوریه به‌عنوان یك‌سرنخ تلقی کنیم.

ازمعادلهٔ (۱۱۴.۸) (با انتقال تکینگی از $t=0$ به $t=x$) داریم

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_n(t-x)dt \qquad (\text{۲۱.۱۵ الف})$$

که در آن $\delta_n(t-x)$ دنباله‌ای است که معرف $\delta(t-x)$ به‌شمار می‌آید. دقت کنید که در معادلهٔ (۲۱.۱۵ الف) فرض کرده‌ایم که $f(t)$ در $t=x$ پیوسته است.

با استفاده ازمعادلهٔ (۱۱۱.۸)، تابع $\delta_n(t-x)$ را به‌صورت زیردرنظر می‌گیریم

$$\delta_n(t-x)=\frac{\sin n(t-x)}{\pi(t-x)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} e^{i\omega(t-x)}d\omega \qquad (\text{۲۱.۱۵ ب})$$

با نشاندن درمعادلهٔ (۲۱.۱۵ الف)، داریم

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\int_{-n}^{n} e^{i\omega(t-x)}d\omega\, dt \qquad (\text{۲۱.۱۵ ج})$$

پس از تعویض ترتیب انتگرالگیری و آنگاه با گرفتن حد $n\to\infty$، معادلهٔ (۲۰.۱۵) یعنی قضیهٔ انتگرال فوریه‌را به‌دست می‌آوریم.

اتحاد زیر

$$\delta(t-x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-x)}d\omega \qquad (\text{۲۱.۱۵ د})$$

بادرك این نکته که $\delta(t-x)$ مانند معادلهٔ (۲۱.۱۵ الف) به‌زیرعلامت انتگرال تعلق دارد، نمایش بسیارسودمندی برای تابع دلتا فراهم می‌کند. استفاده از این نمایش در بخشهای ۵.۱۵ و ۶.۱۵ دارای مزیتهای زیادی است.

۳.۱۵ تبدیلهای فوریه-قضیهٔ وارونی

اینك تابع $g(\omega)$، تبدیل فوریهٔ تابع $f(t)$، را به‌صورت‌زیر تعریف می‌کنیم

$$g(\omega)\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt \qquad (\text{۲۲.۱۵})$$

تبدیل نمایی

اکنون ازمعادلهٔ (۲۰.۱۵) به‌رابطهٔ وارون زیردست می‌یابیم

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-i\omega x}d\omega \qquad (۲۳.۱۵)$$

خاطرنشان کنیم که معادلات (۲۲.۱۵) و (۲۳.۱۵) تقریباً ولی نه کاملا متقارن‌اند، و تنها اختلاف آنها درعلامت i است.

دراینجا دونکته شایان توضیح است. نخست آنکه تقارن درضریب $1/\sqrt{2\pi}$ صرفاً انتخابی است وحتماً لازم‌نیست. بسیاری ازمؤلفان تمامی ضریب $1/2\pi$ معادلهٔ (۲۰.۱۵) را به‌یکی ازدومعادلهٔ (۲۲.۱۵) یا (۲۳.۱۵) منسوب می‌کنند. دوم آنکه، گرچه انتگرال فوریه، معادلهٔ(۲۰.۱۵)، درنوشتارهای ریاضی بسیارمورد توجه بوده‌است، توجه ما عمدتاً به‌تبدیل فوریه و وارون آن معطوف است. اینها معادلاتی به‌شمار می‌آیندکه ارزش فیزیکی دارند.

اگرزوج تبدیل فوریه‌را به‌فضای سه‌بعدی ببریم، خواهیم داشت

$$g(\mathbf{k})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int f(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\,d^3x \qquad (۲۳.۱۵ \text{ الف})$$

$$f(\mathbf{r})=\frac{2}{(2\pi)^{3/2}}\int g(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}d^3k \qquad (۲۳.۱۵ \text{ ب})$$

انتگرالها روی کل فضاست. اگر بخواهیم این‌روابط‌را اثبات کنیم، می‌توانیم سمت چپ یك معادله را در انتگرالده معادلهٔ دیگر بنشانیم وازتابع دلتای دیراك سه بعدی[1] استفاده کنیم. معادلهٔ (۲۳.۱۵ ب) را می‌توان به‌صورت پیوستاری از بسط تابع $f(\mathbf{r})$ در ویژه‌تابعهای موج تخت تعبیر کرد. آنگاه $g(\mathbf{k})$ دامنهٔ موج $\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ خواهدبود.

تبدیل کسینوس

اگر $f(x)$ فرد یا زوج باشد، تبدیلهای فوق‌را می‌توان به‌صورتی تقریباً متفاوت نوشت.

---

1. $\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)=\delta(x_1-x_2)\delta(y_1-y_2)\delta(z_1-z_2)$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp[ik_1(x_1-x_2)]dk_1\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp[ik_2(y_1-y_2)]dk_2\cdot$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp[ik_3(z_1-z_2)]dk_3$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)]d^3k$$

نخست $f(x)$ زوج، $f(x)=f(-x)$، را در نظر بگیرید. عبارت نمایی معادلهٔ (۲۲.۱۵) را به‌صورت مثلثاتی می‌نویسیم، داریم

$$g_c(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_c(t)(\cos\omega t+i\sin\omega t)dt$$

(۲۴.۱۵)

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f_c(t)\cos\omega t\, dt$$

انتگرالگیری از جزء وابسته به $\sin\omega t$، روی بازهٔ متقارن $(-\infty, \infty)$ صفر می‌شود. به‌همین ترتیب از آنجا که $\cos\omega t$ زوج است، معادلهٔ (۲۳.۱۵) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$f_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} g_c(\omega)\cos\omega x\, d\omega \qquad (۲۵.۱۵)$$

معادلات (۲۴.۱۵) و (۲۵.۱۵) به‌تبدیلهای کسینوس فوریه مشهورند.

تبدیل سینوس

درمورد $f(x)$ فرد، $f(x)=-f(-x)$، و بادرنظر گرفتن استدلالهای تقارنی‌مشابه‌فوق، زوج تبدیلهای سینوس فوریهٔ متناظر به‌دست می‌آیند. این معادلات عبارت‌اند از

$$g_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f_s(t)\sin\omega t\, dt^{*} \qquad (۲۶.۱۵)$$

$$f_s(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} g_s(\omega)\sin\omega x\, d\omega \qquad (۲۷.۱۵)$$

ازمعادلهٔ‌دوم می‌توان به‌این تعبیر فیزیکی رسید که $f(x)$ توسط پیوستاری از امواج سینوسی توصیف‌شده‌است. دامنهٔ $\sin\omega x$ از رابطهٔ $\sqrt{2/\pi}\,g_s(\omega)$ به‌دست می‌آید که در آن $g_s(\omega)$ تبدیل سینوس فوریهٔ $f_s(x)$ است. مشاهده می‌شود کـه معادلهٔ (۲۷.۱۵) مشابه انتگرالی مجموعیابی درمعادلهٔ (۱۸.۱۴) است. تعبیرهای مشابهی هم برای حالتهای نمایی و کسینوس به‌کارمی‌رود.

اگرمعادله‌های (۲۲.۱۵)، (۲۴.۱۵)، و (۲۶.۱۵) راتبدیلهای انتگرالـی مستقیمی بگیریم که توسط $\mathcal{L}$ در معادلهٔ (۱۰.۱۵) (بخش ۱.۱۵) توصیف شدنـد، تبدیلهای وارون متناظر، یعنی $\mathcal{L}^{-1}$ درمعادلهٔ (۱۱.۱۵) توسط معادلات (۲۳.۱۵)، (۲۵.۱۵)، و(۲۷.۱۵) به‌دست می‌آیند.

---

* دقت‌کنید که یك عامل i دراین $g(\omega)$ گنجانده شده است.

خاطر نشان کنیم که تبدیلهای کسینوس فوریه و تبدیلهای سینوس فوریه هر یك تنها حاوی مقادیر مثبت (وصفر) شناسه‌ها هستند. برای تثبیت این تبدیلها از پاریتهٔ $f(x)$ بهره گرفتیم، ولی پس از آنکه این تبدیلها تثبیت شدند، رفتار f و g به‌ازای شناسه‌های منفی دیگر مطرح نیست. درواقع معادلات تبدیل، خودشان پاریتهٔ معینی‌وضع‌می‌کنند؛ زوج برای تبدیل کسینوس فوریه وفرد برای تبدیل سینوس فوریه.

مثال ۱۰۳۰۱۵ قطارموج متناهی

یکی ازکاربردهای مهم تبدیل فوریه درتجزیهٔ یك‌پالس متناهی به‌امواج سینوسی‌است.فرض کنیدکه یك قطار موج سینوسی نامتناهی $\sin \omega_0 t$ را با استفاده از سلول کریا سلول رزینه‌ای اشباعی قطع‌کرده باشیم، به‌طوری که

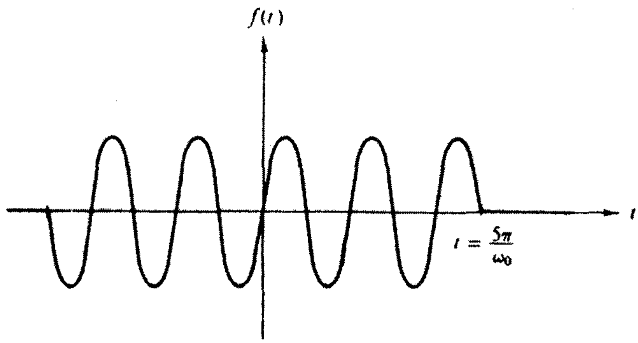
$$f(t)=\begin{cases}\sin \omega_0 t, & |t|<\dfrac{N\pi}{\omega_0}\\[2ex] 0 & |t|>\dfrac{N\pi}{\omega_0}\end{cases} \tag{۲۸.۱۵}$$

این روند متناظر است با N چرخهٔ قطار موج اصلی (شکل ۲.۱۵). ازآنجا که $f(t)$ فرد است، می‌توانیم ازتبدیل سینوس فوریه [معادلهٔ (۲۶.۱۵)] استفاده‌کنیم، خواهیم داشت

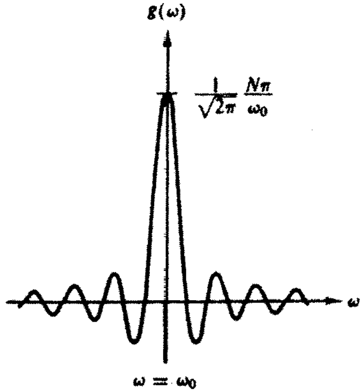
$$g_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{N\pi/\omega_0} \sin \omega_0 t \sin \omega t \, dt \tag{۲۹.۱۵}$$

تابع دامنه‌را ازطریق انتگرالگیری به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$g_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\sin[\omega_0-\omega)(N\pi/\omega_0)]}{2(\omega_0-\omega)}-\frac{\sin[(\omega_0+\omega)(N\pi/\omega_0)]}{2(\omega_0+\omega)}\right] \tag{۳۰.۱۵}$$



شکل ۲.۱۵ قطارموج متناهی.



شکل ۳.۱۵ تبدیل فوریهٔ قطارموج متناهی.

این نکته بسیار اهمیت داردکه ببینیم $g_\circ(\omega)$ چگونه به‌بسامد وابسته است. به‌ازای مقادیر بزرگ $\omega_\circ$ و $\omega\approx\omega_\circ$، تنها، جملهٔ اول اهمیت خواهد داشت. این‌جمله درشکل ۳.۱۵ ترسیم شده‌است. این‌همان منحنی دامنهٔ نقش پراش تك‌شکافی است. صفرهایی در نقاط زیر وجود دارند

$$\frac{\omega_\circ-\omega}{\omega_\circ}=\frac{\Delta\omega}{\omega_\circ}=\pm\frac{1}{N},\quad \pm\frac{2}{N},\cdots \qquad (۳۱.۱۵)$$

$g_\circ(\omega)$ را می‌توان به‌عنوان توزیع دلتای دیراك بخش ۷.۸ نیز تعبیر کرد. ازآنجا که سهم مربوط به‌قسمتهای خارج ازبیشینهٔ مرکزی ناچیز است، می‌توانیم عبارت

$$\Delta\omega=\frac{\omega_\circ}{N} \qquad (۳۲.۱۵)$$

را مقیاس مناسبی از پخش بسامد در پالس موج به‌حساب آوریم. روشن است که اگر N بزرگ باشد (یك‌پالس بلند)، پخش بسامدکوچك خواهد بود. برعکس اگرپالس را کوتاه ببریم، توزیع بسامد پهنترخواهد شد.

اصل عدم‌قطعیت

اینك یك مشابه کلاسیکی برای اصل مشهور عدم‌قطعیت مکانیك‌کوانتومی به‌دست آورده‌ایم. دربررسی امواج الکترومغناطیسی داریم

$$\frac{h\omega}{2\pi}=E, \qquad \text{انرژی (پالس موج یافوتون)}$$

$$(۳۳.۱۵)$$

$$\frac{h\,\Delta\omega}{2\pi}=\Delta E$$

h ثابت پلانك است؛ این رابطه، عدم‌قطعیت را در انرژی پالس نمایش می‌دهد. در زمان نیز عدم‌قطعیتی وجود دارد، زیرا $2N\pi/\omega_0$ ثانیه طول می‌کشد تاموج N چرخه‌ای ماعبور کند. بافرض اینکه

$$\Delta t=\frac{2N\pi}{\omega_0} \tag{۳۴.۱۵}$$

حاصلضرب این دوعدم‌قطعیت را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$\Delta E.\Delta t=\frac{h\Delta\omega}{2\pi}\cdot\frac{2\pi N}{\omega_0}$$

$$=h\,\frac{\omega_0}{2\pi N}\cdot\frac{2\pi N}{\omega_0}=h \tag{۳۵.۱۵}$$

درواقع بنابراصل عدم‌قطعیت هایزنبرگ

$$\Delta E\cdot\Delta t\geqslant\frac{h}{4\pi} \tag{۳۶.۱۵}$$

وروشن است‌که این اصل درمثال ماصدق می‌کند.

مسائل

۱.۳.۱۵ (الف) نشان‌دهیدکه شرط‌لازم‌وکافی برای‌حقیقی‌بودن $f(x)$ عبارت‌است ازاینکه

$$g(-\omega)=g^*(\omega)$$

(ب) نشان دهید که شرط لازم وکافی برای موهومی محض بودن $f(x)$، آن است که $g(-\omega)=-g^*(\omega)$.

یادآوری. شرط بند (الف) درتشکیل روابط پاشندگی بخش ۴.۷ به‌کار می‌رود.

۲.۳.۱۵ فرض کنید که $F(\omega)$ تبدیل (نمایی) فوریهٔ $f(x)$ و $G(\omega)$ تبدیل فوریهٔ $g(x)=f(x+a)$ باشد. نشان دهیدکه

$$G(\omega)=e^{-ia\omega}F(\omega)$$

۳.۳.۱۵ تابع

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

یك تابع پله‌ای متناهی متقارن است.

(الف) مطلوب است محاسبهٔ $g_c(\omega)$، تبدیل کسینوس فوریهٔ $f(x)$.

(ب) بامحاسبهٔ تبدیل وارون‌کسینوس نشان دهید

$$f(x)=\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega x}{\omega}\,d\omega$$

(ج) بااستفاده از بند (ب) نشان دهید

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega x}{\omega}d\omega=\begin{cases}۰, & |x|>۱\\ \frac{\pi}{۴}, & |x|=۱\\ \frac{\pi}{۲}, & |x|<۱\end{cases}$$

۴.۳.۱۵ (الف) نشان دهید که تبدیلهای‌کسینوس وسینوس فوریهٔ e^{-ax} عبارت‌اند از

$$g_s(\omega)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\,\frac{\omega}{\omega^{۲}+a^{۲}}$$

$$g_c(\omega)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\,\frac{a}{\omega^{۲}+a^{۲}}$$

راهنمایی. هریك‌ازاین تبدیلهارا می‌توان به‌کمك انتگرالگیری جزء به‌جزء به‌تبدیل دیگرمربوط کرد.

(ب) نشان دهید

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{\omega\sin\omega x}{\omega^{۲}+a^{۲}}d\omega=\frac{\pi}{۲}e^{-ax},\quad x>۰$$

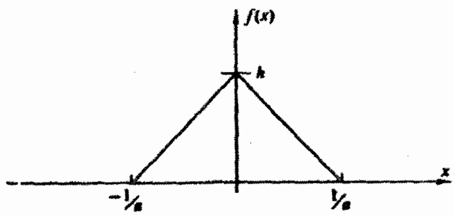
$$\int_{۰}^{\infty}\frac{\cos\omega x}{\omega^{۲}+a^{۲}}d\omega=\frac{\pi}{۲a}e^{-ax},\quad x>۰$$

این نتایج‌را می‌توان ازطریق انتگرال پربندی نیز به‌دست‌آورد (مسئلهٔ ۱۴.۲.۷).

۵.۳.۱۵ تبدیل فوریهٔ پالس مثلثی زیررا پیدا کنید

$$f(x)=\begin{cases}h(۱-a|x|), & |x|<۱/a\\ ۰, & |x|>۱/a\end{cases}$$

یادآوری. این تابع به ازای $h=a$ و $a \to \infty$، دنبالهٔ دلتای دیگری را به‌دست می‌دهد.



۶.۳.۱۵ می‌توان دنبالهٔ زیر را تعریف کرد

$$\delta_n(x)=\begin{cases} n, & |x|<۱/۲n \\ ۰, & |x|>۱/۲n \end{cases}$$

[این معادلهٔ (۱۵۸.۸) است]. $\delta_n(x)$ را (توسط قضیهٔ انتگرال فوریه، تبدیل وارون، وجز اینها) به‌صورت یك انتگرال فوریه مشخص کنید. سرانجام نشان دهید که می‌توانیم بنویسیم

$$\delta(x)=\lim_{n\to\infty}\delta_n(x)=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\,dk$$

۷.۳.۱۵ با استفاده از دنبالهٔ

$$\delta_n(x)=\frac{n}{\sqrt{\pi}}\exp(-n^۲x^۲)$$

نشان دهید که

$$\delta(x)=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}dk$$

یادآوری. به‌خاطر داشته باشید که $\delta(x)$ برحسب رفتارش به‌عنوان بخشی از یك انتگرالده،بخش ۷.۸، خصوصاً معادلات (۱۱۴.۸) و (۱۱۵.۸) تعریف می‌شود.

۸.۳.۱۵ نمایشهای سینوسی و کسینوسی $\delta(t-x)$ را که با نمایش نمایی درمعادلهٔ (۲۱.۱۵د) قابل مقایسه باشند، به‌دست آورید.

پاسخ. $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\omega t \sin\omega x \, d\omega$ ، $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\omega t \cos\omega x \, d\omega$.

۹.۳.۱۵ نوسان الکترومغناطیسی با بسامد ω_0 در یک کاواک مشدد به‌صورت زیر میرا می‌شود

$$A(t)=A_0 e^{-\omega_0 t/2Q} e^{-i\omega_0 t}, \quad t>0$$

[$A(t)$ را به‌ازای $t<0$ برابر صفر بگیرید.]
پارامتر Q مقیاسی است از نسبت انرژی ذخیره‌شده به انرژی تلف‌شده درهرچرخه. توزیع بسامد نوسان، $a^*(\omega)a(\omega)$، را محاسبه کنید، $a(\omega)$ عبارت است از تبدیل فوریهٔ $A(t)$.

یادآوری. هرچه Q بزرگتر باشد، خط تشدید تیزتر خواهد بود.

پاسخ. $a^*(\omega)a(\omega)=\frac{A_0^2}{2\pi}\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+(\omega_0/2Q)^2}$.

۱۰.۳.۱۵ ثابت کنید که

$$\frac{\hbar}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}d\omega}{E_0-i\Gamma/2-\hbar\omega}=\begin{cases}\exp(-\Gamma t/2\hbar)\exp(-iE_0 t/\hbar), & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

این انتگرال فوریه در مسائل گوناگونی در مکانیک کوانتومی پدیدار می‌شود: نفوذ سد WKB، پراکندگی، نظریهٔ اختلال وابسته به‌زمان، و غیره.

راهنمایی. انتگرالگیری پربندی را به‌کار برید.

۱۱.۳.۱۵ تحقیق کنید که عبارات زیر تبدیلهای انتگرالی فوریهٔ یکدیگرند

(الف) $J_0(ay)$ ، $\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, & |x|<a\\ 0, & |x|>a\end{cases}$

(ب) $N_0(a|y|)$ ، $\begin{cases}0, & |x|<a\\ -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} & |x|>a\end{cases}$

(ج) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ و $K_0(a|y|)$

(د) آیا می‌توانید بگویید که چرا $I_0(ay)$ در این سیاهه وارد نشده است؟
راهنمایی. J_0، N_0، و K_0 را با استفاده از نمایش انتگرالی، معکوس کردن ترتیب انتگرالگیری، و به کارگیری شکل نمایی تابع دلتای دیراك (بخش ۲.۱۵) می‌توان به آسانی تبدیل کرد. این موارد را می‌توان به‌صورت تبدیلهای کسینوسی فوریه نیز بررسی کرد.
یادآوری. رابطهٔ K به‌صورت پیامدی از معادلهٔ تابع گرین در مسئلهٔ ۱۴.۶.۱۶ پدیدار می‌شود.

۱۲.۳.۱۵ محاسبهٔ میدان مغناطیسی یك حلقهٔ جریان دایره‌ای در مختصات استوانه‌ای به انتگرال زیر می‌انجامد

$$\int_0^\infty \cos kz\, k\, K_1(ka)\,dk$$

نشان دهید که این انتگرال عبارت است از

$$\frac{\pi a}{2(z^2+a^2)^{3/2}}$$

راهنمایی. ازعبارت مربوط به‌مسئلهٔ ۱۱.۳.۱۵ (ج) مشتق بگیرید.

۱۳.۳.۱۵ به‌عنوان تعمیمی ازمسئلهٔ ۱۱.۳.۱۵، نشان دهید:

(الف) $\int_0^\infty J_0(y)\,dy = 1$،

(ب) $\int_0^\infty N_0(y)\,dy = 0$.

(ج) $\int_0^\infty K_0(y)\,dy = \frac{2}{\pi}$،

۱۴.۳.۱۵ انتگرال فوریه، معادلهٔ (۱۸.۱۵)، در حالت $f(t)=\cos\alpha t$، بی‌معنی است. با بهره‌گیری از تابع دلتای دیراك، نشان دهید که انتگرال فوریه را می‌توان تعمیم داد تا تابع $f(t)=\cos\alpha t$ را نیز شامل شود.

۱۵.۳.۱۵ نشان دهید که

$$\int_0^\infty \sin ka\, J_0(k\rho)\,dk = \begin{cases} (a^2-\rho^2)^{-1/2}, & \rho<a \\ 0, & \rho>a \end{cases}$$

در اینجا a و ρ مثبت‌اند. این معادله در تعیین توزیع بار روی یك قرص رسانای منزوی

به‌شعاع a، به‌دست می‌آید.

توجه کنیدکه تابع سمت راست یك ناپیوستگی نامتناهی در $\rho=a$ دارد.

یادآوری. روشی مبتنی براستفاده از تبدیل لاپلاس درمسئلهٔ ۸.۱۰.۱۵ ظاهرمی‌شود.

۱۶.۳.۱۵ تابع $f(\mathbf{r})$ دارای تبدیل نمایی فوریه به‌شکل زیراست

$$g(\mathbf{k})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int f(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}}d^3x=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}k^2}$$

$f(\mathbf{r})$ را تعیین کنید.

راهنمایی. درفضای k ازمختصات قطبی کروی استفاده کنید.

پاسخ. $f(\mathbf{r})=\dfrac{1}{4\pi r}$.

۱۷.۳.۱۵ (الف) تبدیل نمایی فوریهٔ $f(x)=e^{-a|x|}$ را محاسبه کنید.

(ب) تبدیل وارون را با به‌کاربستن حساب مانده‌ها (بخش ۲.۷) محاسبه کنید.

۱۸.۳.۱۵ نشان دهیدکه توابع زیرتبدیل فوریهٔ یکدیگرند

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}T_n(x)(1-x^2)^{-1/2}, & |x|<1\\ 0, & |x|>1\end{cases} \quad \text{و} \quad i^nJ_n(t)$$

$T_n(x)$ چندجمله‌ای مرتبهٔ nام چبیشف است.

راهنمایی. باتوجه به‌تساوی، $T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$، تبدیل $T_n(x)(1-x^2)^{-1/2}$ به‌یك نمایش انتگرالی $J_n(t)$ می‌انجامد.

۱۹.۳.۱۵ نشان دهیدکه تبدیل نمایی فوریهٔ

$$f(\mu)=\begin{cases}P_n(\mu), & |\mu|\leqslant 1\\ 0, & |\mu|>1\end{cases}$$

برابراست با $(2i^n/2\pi)j_n(kr)$. $P_n(\mu)$ چندجمله‌ای لژاندر $j_n(kr)$ تابع کروی بسل است.

۲۰.۳.۱۵ نشان دهیدکه تبدیل نمایی سه‌بعدی فوریهٔ یك تابع باتقارن شعاعی را می‌توان به‌صورت یك تبدیل سینوسی فوریه نوشت

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty} f(r)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}d^3r=\frac{1}{k}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}[rf(r)]\sin kr\,dr.$$

۲۱۰۳۰۱۵(الف) نشان دهید که $f(x)=x^{-1/2}$ تحت هردو تبدیل سینوس و کسینوس فوریه خود-وارون است؛ یعنی

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} x^{-1/2}\cos xt\,dx=t^{-1/2}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} x^{-1/2}\sin xt\,dx=t^{-1/2}$$

(ب) از نتیجهٔ بند (الف) برای محاسبهٔ انتگرالهای فرنل $\int_0^\infty \cos(y^2)dy$ و $\int_0^\infty \sin(y^2)dy$ استفاده کنید.

۴.۱۵ تبدیل فوریهٔ مشتقها

درشکل ۱.۱۵، بخش ۱.۱۵، شگردهای کلی مربوط بهاستفاده ازتبدیلهای فوریه وتبدیلهای وارون برای حل یك مسئله جمعبندی شده است. دراینجا بهمرحلهٔ اصلی در حل یك معادلهٔ دیفرانسیل، یعنی یافتن تبدیل فوریهٔ یك مشتق، میپردازیم.

تبدیل فوریهٔ $f(x)$ بااستفاده ازصورت نمایی عبارت است از

$$g(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}dx \qquad (۳۷.۱۵)$$

وتبدیل فوریهٔ $df(x)/dx$ عبارت است از

$$g_1(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{df(x)}{dx}e^{i\omega x}dx \qquad (۳۸.۱۵)$$

ازطریق انتگرالگیری جزء بهجزء ازمعادلهٔ (۳۸.۱۵)، داریم

$$g_1(\omega)=\frac{e^{i\omega x}}{\sqrt{2\pi}}f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}-\frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}dx \qquad (۳۹.۱۵)$$

اگر $f(x)$ در $x\to\pm\infty$ صفرشود،[1] داریم

$$g_1(\omega)=-i\omega g(\omega) \qquad (۴۰.۱۵)$$

---

۱. جز درمواردی نظیرمسئلهٔ ۶.۳.۱۵، $f(x)$ بایددر $x\to\pm\infty$ صفرشود تا آنکه تبدیل فوریهٔ $f(x)$ وجود داشته باشد.

یعنی تبدیل مشتق، $(-i\omega)$ برابر تبدیل تابع اصلی‌است. این موضوع‌را می‌توان به‌آسانی برای مشتق nام تعمیم داد و نوشت

$$g_n(\omega)=(-i\omega)^n g(\omega) \tag{۴۱.۱۵}$$

مشروط بر آنکه همهٔ‌اجزای انتگرالگیری‌شده در $x\to\pm\infty$ صفر شوند. این‌امر نقطهٔ قدرت تبدیل فوریه است و به‌همین دلیل است که تبدیل فوریه درحل معادلات دیفرانسیل (جزئی) چنین سودمنداست. یك‌عمل ضرب به‌جای عمل مشتقگیری نشسته‌است.

مثال ۱۰۴.۱۵ معادلهٔ موج

استفاده ازاین شگرد درمعادلات دیفرانسیل جزئی سودمند است. برای آنکه این شگرد را نمایش دهیم عبارت‌آشنایی را در فیزیك پایه استخراج می‌کنیم. ریسمانی به‌طول نامتناهی آزادانه ارتعاش می‌کند. دامنهٔ ارتعاشهای(کوچك)آن، y، درمعادلهٔ موج زیرصدق‌می‌کند

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{۴۲.۱۵}$$

شرط اولیهٔ زیررا درنظرمی‌گیریم

$$y(x,\,0)=f(x) \tag{۴۳.۱۵}$$

با بهره‌گیری از تبدیل فوریه، یعنی ضرب‌کردن در $e^{i\alpha x}$ و انتگرال‌گرفتن روی x، داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 y(x,\,t)}{\partial x^2}\,e^{i\alpha x}dx=\frac{1}{v^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 y(x,\,t)}{\partial t^2}\,e^{i\alpha x}dx \tag{۴۴.۱۵}$$

یا

$$(-i\alpha)^2 Y(\alpha,\,t)=\frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 Y(\alpha,\,t)}{\partial t^2} \tag{۴۵.۱۵}$$

دراینجا ازرابطهٔ

$$Y(\alpha,\,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}y(x,\,t)e^{i\alpha x}dx \tag{۴۶.۱۵}$$

ومعادلهٔ (۴۱.۱۵) برای مشتق دوم استفاده‌کرده‌ایم. توجه‌کنیدکه قسمت انتگرالگیری شدهٔ معادلهٔ (۳۹.۱۵) صفرمی‌شود. موج هنوز به‌∞ نرسیده است. ازآنجاکه هیچ‌مشتقی نسبت

به α وجود ندارد، معادلهٔ (۴۵.۱۵) عملا یك معادلهٔ دیفرانسیل معمولی ــ در واقع معادلهٔ نوسانگر خطی ــ است. این تبدیل از یك معادلهٔ دیفرانسیل جزئی به یك معادلهٔ دیفرانسیل معمولی گام بلندی است. معادلهٔ (۴۵.۱۵) را در شرایط اولیهٔ مناسب حل می‌کنیم. معادلهٔ (۴۶.۱۵)، در $t=0$، با به‌کار بردن معادلهٔ (۴۳.۱۵)، به‌صورت زیر ساده می‌شود

$$Y(\alpha, 0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx \tag{۴۷.۱۵}$$

$$=F(\alpha)$$

جواب عمومی معادلهٔ (۴۵.۱۵)، به‌صورت نمایی عبارت است از

$$Y(\alpha, t)=F(\alpha)e^{\pm iv\alpha t} \tag{۴۸.۱۵}$$

با استفاده از فرمول وارونی [معادلهٔ (۲۳.۱۵)]، داریم

$$y(x, t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} Y(\alpha, t)e^{-i\alpha x}d\alpha \tag{۴۹.۱۵}$$

و با استفاده از معادلهٔ (۴۸.۱۵) داریم

$$y(x, t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha(x\mp vt)}d\alpha \tag{۵۰.۱۵}$$

از آنجا که $f(x)$ تبدیل وارون فوریهٔ $F(\alpha)$ است، داریم

$$y(x, t)=f(x\mp vt) \tag{۵۱.۱۵}$$

این عبارت متناظر با امواجی است که به‌ترتیب در جهتهای $+x$ و $-x$ پیش می‌روند.

شرط مرزی، معادلهٔ (۴۳.۱۵)، و شرط مرزی دیگری، مثلا قیدی روی $\partial y/\partial t$، ترکیب خطی خاصی از این امواج را که جواب مسئله است تعیین می‌کنند.

در اینجا، در خاتمهٔ مبحث تبدیل فوریه، نکته‌ای شایان تأکید است. تبدیل فوریه، یك معادلهٔ دیفرانسیل جزئی را به یك معادلهٔ دیفرانسیل معمولی تبدیل کرد، که در نتیجه "درجهٔ غیر جبری بودن" مسئله کاهش یافت. در بخش ۹.۱۵، برای تبدیل معادلات دیفرانسیل معمولی (با ضرایب ثابت) به معادلات جبری، از تبدیل لاپلاس استفاده می‌شود. باز هم درجهٔ غیرجبری بودن کاهش می‌یابد. مسئله، همان‌طور ساده می‌شود که در شکل ۱.۱۵ جمعبندی شد.

مسائل

۱.۴.۱۵ معادلهٔ یك‌بعدی عمر فرمی دربارهٔ پخش نوترونهایی که در محیطی (مانند گرافیت)

کند می‌شوند به‌صورت زیر است

$$\frac{\partial^2 q(x,\tau)}{\partial x^2}=\frac{\partial q(x,\tau)}{\partial \tau}$$

دراینجا q تعداد نوترونهایی درواحد حجم است که در هر ثانیه کند می‌شوند، و انرژی آنها ازمقدار معینی کمتر می‌شود. τ، عمرفرمی، مقیاسی‌است ازاتلاف انرژی.

اگر $q(x,0)=S\delta(x)$ متناظر با یك چشمهٔ نوترونی تخت در $x=0$ باشد که S نوترون به‌ازای واحد سطح درهر ثانیه گسیل می‌کند، جواب زیر را استخراج کنید

$$q=S\frac{e^{-x^2/4\tau}}{\sqrt{4\pi\tau}}$$

راهنمایی. به‌جای $q(x,\tau)$ عبارت زیر را قراردهید

$$p(k,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} q(x,\tau)e^{ikx}dx$$

این‌عمل مشابه پخش‌گرما درمحیطی نامتناهی است.

۲.۴.۱۵ از معادلهٔ (۴۱.۱۵)، تبدیل فوریهٔ مشتق دوم $f(x)$ را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$g_2(\omega)=-\omega^2 g(\omega)$$

می‌توان درمورد شرط $f(x)\to 0$ به‌ازای $x\to\pm\infty$، اندکی تساهل به‌خرج‌داد. کمترین شرط محدودکننده‌ای‌را بیابید که لازمهٔ برقراری معادلهٔ بالا برای $g_2(\omega)$ است.

پاسخ. $\left[\frac{df(x)}{dx}-i\omega f(x)\right]e^{i\omega x}\Big|_{-\infty}^{\infty}=0$

۳.۴.۱۵ معادلهٔ پخش یك‌بعدی نوترون با یك‌چشمه (تخت) به‌صورت زیراست

$$-D\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}+K^2 D\varphi(x)=Q\,\delta(x)$$

که در آن $\varphi(x)$ شارنوترون، $Q\delta(x)$ چشمه (تخت) در $x=0$، و D و K^2 ثابت‌اند. تبدیل فوریه را به‌کاربرید. معادله را در فضای تبدیل حل کنید. جواب خود را به‌فضای x ببرید.

پاسخ. $\varphi(x)=\frac{Q}{2KD}e^{-|Kx|}$.

۳.۴.۱۵الف معادلهٔ پخش سه بعدی نوترون برای چشمهٔ نقطه‌ای واقع در مبدأ به‌صورت زیر درمی‌آید

$$-D\nabla^2\varphi(\mathbf{r})+K^2D\varphi(\mathbf{r})=Q\delta(\mathbf{r})$$

تبدیل سه‌بعدی فوریه را به‌کار ببندید. معادلهٔ تبدیل‌یافته را حل کنید. جواب را به‌فضای $\mathbf{r}$ تبدیل کنید.

۴.۴.۱۵ (الف) بافرض آنکه $F(\mathbf{k})$ تبدیل سه‌بعدی فوریهٔ $f(\mathbf{r})$ و $F_1(\mathbf{k})$ تبدیل سه‌بعدی فوریهٔ $\nabla f(\mathbf{r})$ باشد، نشان دهید که

$$F_1(\mathbf{k})=(-i\mathbf{k})F(\mathbf{k})$$

این‌عبارت تعمیم سه‌بعدی معادلهٔ (۴۵.۱۵) بدشمار می‌آید.

(ب) نشان دهید که تبدیل سه‌بعدی فوریهٔ $\nabla\cdot\nabla f(\mathbf{r})$ عبارت است از

$$F_2(\mathbf{k})=(-i\mathbf{k})^2F(\mathbf{k})$$

یادآوری. $\mathbf{k}$ بردار یکه درامتداد محور z نیست. این‌بردار، برداری است درفضای تبدیل. دربخش ۶.۱۵ عبارت $\hbar\mathbf{k}=\mathbf{p}$، تکانهٔ خطی، را نیزخواهیم‌داشت.

۵.۱۵ قضیهٔ پیچش

پیچشها را برای حل معادلات دیفرانسیل، بهنجارش تابع‌موجهای تکانه (بخش ۶.۱۵)، و بررسی توابع انتقال (بخش ۷.۱۵) به‌کار می‌بریم.

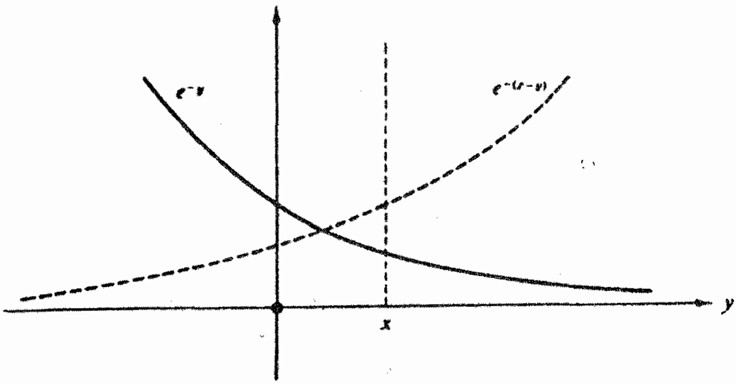
دوتابع $f(x)$ و $g(x)$ و تبدیل فوریهٔ آنهاراکه به‌ترتیب عبارت است از $F(t)$ و $G(t)$ درنظر بگیرید. عمل‌زیررا تحت‌عنوان پیچش دوتابع f و g روی بازهٔ $(-\infty, \infty)$ تعریف می‌کنیم

$$f*g\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(y)f(x-y)dy \qquad (۵۲.۱۵)$$

این‌قبیل انتگرالها درنظریهٔ احتمال برای تعیین چگالی‌احتمال دومتغیرمستقل کاتوره‌ای‌ظاهر می‌شوند. جواب معادلهٔ پواسون، معادلهٔ (۹۹.۸)، را می‌توان به‌عنوان پیچش توزیع بار $\rho(\mathbf{r}_2)$ وتابع وزنی $(4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)^{-1}$ تعبیر کرد. دربرخی‌نوشتارها، پیچش‌را فالتونگ: "*Faltung*"نامیده‌اند، فالتونگ واژهٔ آلمانی به‌معنای"تاکردن"[1] است. اینک انتگرال معادلهٔ (۵۲.۱۵) را بامعرفی تبدیلهای فوریهٔ زیر تبدیل می‌کنیم

---

۱. $f(y)$ و $f(x-y)$ برای تابع $f(y)=e^{-y}$ درشکل ۴.۱۵ ترسیم شده‌اند. روشن است که $f(y)$ و $f(x-y)$ نسبت به‌خط قائم $y=x/2$ تصویر آینه‌ای یکدیگرند، یعنی می‌توانستیم با تاکردن $f(y)$ حول خط $y=x/2$، $f(x-y)$ را ایجاد کنیم.



شکل ۴.۱۵

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(x-y)dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-it(x-y)}dt\,dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\,e^{ity}dy\right]e^{-itx}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\,G(t)e^{-itx}dt \qquad (۵۳.۱۵)$$

که در آن ترتیب انتگرالگیری را تعویض و $g(y)$ را تبدیل کرده‌ایم. این نتیجه را می‌توان به‌صورت زیر تعبیر کرد: تبدیل وارون فوریهٔ حاصلضرب تبدیلهای فوریه برابر است با پیچش توابع اصلی، یعنی $f*g$.

درمورد خاص $x=0$، داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\,G(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(-y)\,g(y)\,dy \qquad (۵۴.۱۵)$$

علامت منفی در $-y$ طلب می‌کند که تغییرهایی را پدید آوریم. اکنون این کار را با استفاده از شگرد متفاوتی دربارهٔ g^* به‌جای g انجام خواهیم داد.

رابطهٔ پارسوال

برای تبدیلهای سینوس و کسینوس فوریه نیز می‌توان روابطی مشابه معادلات (۵۳.۱۵) و (۵۴.۱۵) استخراج کرد (مسائل ۱.۵.۱۵ و ۲.۵.۱۵). معادلهٔ (۵۴.۱۵) و پیچشهای سینوس

وکسینوس متناظر را غالباً، درتشابه با قضیهٔ پارسوال دربارهٔ سری فوریه (فصل۱۴، مسئلهٔ ۲.۴.۱۴)، روابط "پارسوال" می‌خوانند.

رابطهٔ پارسوال[۱] زیر را می‌توان به‌نحوی بسیار زیبا بااستفاده از نمایش تابع دلتای دیراك، معادلهٔ (۲۱.۱۵ د)، استخراج کرد

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, G^*(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g^*(t)\, dt \qquad (۵۵.۱۵)$$

داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega . \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G^*(x) e^{ixt} dx dt$$

(۵۶.۱۵)

که درآن از تبدیل $g(t)$ همیوغ مختلط گرفته شده است. ابتدا روی t انتگرال می‌گیریم و بااستفاده ازمعادلهٔ (۲۱.۱۵ د) به‌دست می‌آوریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} G^*(x) \delta(x-\omega) dx\, d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G^*(\omega) d\omega \qquad (۵۷.۱۵)$$

که همان رابطهٔ پارسوال مطلوب است. اگر داشته باشیم: $f(t) = g(t)$، آنگاه انتگرالهای رابطهٔ پارسوال، همان انتگرالهای بهنجارش خواهند بود (بخش ۴.۹). معادلهٔ (۵۷.۱۵) تضمین می‌کندکه اگر تابع $f(t)$ به‌واحد بهنجار باشد، تبدیل آن‌هم، $F(\omega)$، به‌یك بهنجار خواهد بود. این نکته، همان‌طورکه در بخش بعد تشریح خواهد شد، در مکانیك کوانتومی اهمیت بسیار زیادی دارد.

می‌توان نشان‌دادکه تبدیل فوریه (درفضای هیلبرت L^2، یافضای توابع انتگرالپذیر مجذوری) عملی‌است یکانی. رابطهٔ پارسوال بازتاب همین‌خاصیت یکانی‌بودن است‌ـشبیه به‌آنچه درمسئلهٔ ۲۶.۵.۴ برای ماتریسها داشتیم.

درنورشناخت پراش فرانهوفر، (دامنهٔ) نقش پراش به‌صورت تبدیل‌تابعی‌که روزنه را توصیف می‌کند ظاهرمی‌شود(بامسئلهٔ ۵.۵.۱۵ مقایسه‌کنید). باتوجه‌بداینکه شدت بامجذور دامنه متناسب است، رابطهٔ پارسوال براین نکته اشاره می‌کندکه به‌نظرمی‌رسد انرژیی‌که‌از روزنه‌عبورمی‌کند درجایی از نقش پراش وجود دارد (بیان‌پایستگی انرژی).

---

۱. توجه‌کنید که برخلاف معادلهٔ (۵۴.۱۵)، دراینجا همهٔ شناسه‌ها مثبت‌اند. بعضی ازمؤلفان ترجیح می‌دهند که اسم پارسوال را تنها برای سریها به‌کار برند و معادلهٔ (۵۵.۱۵) را قضیهٔ ریلی می‌خوانند.

روابط پارسوال را می‌توان مستقل از تبدیل فوریه برقرار، آنگاه از آنها برای استخراج دقیق تبدیل وارون استفاده کرد. مشروح این عمل در بخش ۸.۴ کتاب مورس و فشباخ[1] آمده است (همچنین مسئلهٔ ۴.۵.۱۵ را ببینید).

مسائل

۱.۵.۱۵ معادلهٔ پیچش متناظر بامعادلهٔ (۵۳.۱۵) را درحالتهای زیر به‌دست آورید
(الف) تبدیلهای سینوس فوریه

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(x-y)dy=-\int_{0}^{\infty} F_s(s)G_s(s)\cos sx\, ds$$

که درآن f و g توابعی فردند.
(ب) تبدیلهای کسینوس فوریه

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, f(x-y)dy=-\int_{0}^{\infty} F_c(s)G_c(s)\cos sx\, ds$$

که‌در آن f و g توابعی زوج‌اند.

۲.۵.۱۵ $F(\rho)$ و $G(\rho)$ به‌ترتیب تبدیلهای هنکل $f(r)$ و $g(r)$ هستند (مسئلهٔ ۱.۱.۱۵). رابطهٔ پارسوال تبدیل هنکل‌را استخراج کنید

$$\int_{0}^{\infty} F^*(\rho)\, G(\rho)\rho\, d\rho=\int_{0}^{\infty} f^*(r)g(r)r\, dr$$

۳.۵.۱۵ نشان دهیدکه رابطهٔ پارسوال برای هردوتبدیل سینوس وکسینوس فوریه به‌صورت زیر است

$$\int_{0}^{\infty} F(t)\, G(t)\, dt=\int_{0}^{\infty} f(y)\, g(y)\, dy$$

۴.۵.۱۵ از رابطهٔ پارسوال [معادلهٔ (۵۴.۱۵)] شروع کنید و در بازهٔ $0 \leqslant y \leqslant \alpha$ قرار دهید: $g(y) = 1$، ودرجاهای دیگرقراردهید $g(y) = 0$. آنگاه تبدیل وارون‌فوریه[معادلهٔ (۲۳.۱۵)] را استخراج کنید.
راهنمایی. نسبت به α مشتق بگیرید.

---

1. Morse, P. M., and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*. New York: McGraw-Hill (1953).

۵.۵.۱۵ (الف) یك پالس مستطیلی با تابع زیر توصیف می‌شود

$$f(x)=\begin{cases} ۱, & |x|<a \\ ۰, & |x|>a \end{cases}$$

نشان دهید که تبدیل نمایی فوریه عبارت است از

$$F(t)=\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\frac{\sin at}{t}$$

این‌همان مسئلهٔ پراش تك‌شکاف در نورشناخت فیزیکی است. شکاف به‌کمك تـابع $f(x)$ توصیف می‌شود. دامنهٔ نقش پراش توسط تبدیل فوریه، $F(t)$، داده می‌شود.

(ب) با استفاده از رابطهٔ پارسوال انتگرال‌زیر را محاسبه کنید

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^۲ t}{t^۲}\,dt$$

این انتگرال‌را می‌توان با استفاده ازحساب مانده‌ها (مسئلهٔ ۱۲.۲.۷) محاسبه کرد.

پاسخ. (ب) π.

۶.۵.۱۵ معادلهٔ پواسون $\nabla^۲\psi(\mathbf{r})=-\rho(\mathbf{r})/\varepsilon_۰$ را با دنبال کردن سلسله عملیات زیر حل کنید:

(الف) ازدوطرف این‌معادله تبدیل فوریه بگیرید. تبدیل فوریهٔ $\psi(\mathbf{r})$ را از معادلهٔ حاصل به‌دست آورید.

(ب) با استفاده ازمشابه سه‌بعدی قضیهٔ پیچش، معادلهٔ (۵۳.۱۵)، تبدیل وارون‌فوریه را انجام دهید.

۷.۵.۱۵ (الف) باداشتن $f(x)=۱-|x/۲|$ دربازهٔ $-۲\leqslant x\leqslant ۲$ و $f(x)=۰$ در جاهای‌دیگر، نشان‌دهید که‌تبدیل‌فوریهٔ $f(x)$ عبارت‌است‌از $F(t)=\sqrt{(۲/\pi)}(\sin t/t)^۲$.

(ب) بااستفاده ازرابطهٔ پارسوال، انتگرال زیررا محاسبه کنید

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^۴ dt$$

پاسخ. (ب) $\frac{۲\pi}{۳}$.

۸.۵.۱۵ $F(t)$ و $G(t)$ به‌ترتیب تبدیلهای فوریهٔ $f(x)$ و $g(x)$ به‌شمار می‌آیند. نشان دهید که

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)-g(x)|^2\, dx=\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)-G(t)|^2\, dt$$

اگر $g(x)$ تقریبی برای $f(x)$ باشد، رابطهٔ بالا نشان می‌دهد که انحراف میانگین مربعی در فضای t باانحراف میانگین مربعی درفضای x برابر است.

۹.۵.۱۵ ازرابطهٔ پارسوال برای محاسبهٔ انتگرالهای زیر استفاده کنید

(الف) $$\int_0^{\infty}\frac{d\omega}{(\omega^2+a^2)^2}$$

(ب) $$\int_0^{\infty}\frac{\omega^2\, d\omega}{(\omega^2+a^2)^2}$$

راهنمایی. بامسئلهٔ ۴.۳.۱۵ مقایسه کنید.

پاسخ. (الف) $\frac{\pi}{4a^3}$، (ب) $\frac{\pi}{4a}$.

۶.۱۵ نمایش تکانه

در دینامیك پیشرفته و در مکانیك کوانتومی، تکانهٔ خطی و مکان فضایی در موقعیتهایی شبیه به‌یکدیگر ظاهر می‌شوند. دراین بخش ازتوزیع فضایی معمولی آغاز کرده و توزیع تکانه‌ای متناظر را استخراج می‌کنیم. تابع‌موج $\psi(x)$، که یکی ازجوابهای معادلهٔ موج شرودینگر است، درحالت یك‌بعدی خواص زیر را دارد:

۱. $\psi^*(x)\,\psi(x)\,dx$ احتمال یافتن ذرهٔ کوانتومی بین x و $x+dx$ است و

۲. $$\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\,\psi(x)dx=1 \qquad (۵۸.۱۵)$$

متناظر با یك ذره (درامتداد محور x).

علاوه براین، داریم

۳. $$\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\, x\,\psi(x)\, dx \qquad (۵۹.۱۵)$$

$\langle x\rangle$ مکان متوسط ذره درامتداد محور x است. این کمیت را غالباً ارزش انتظاری می‌نامند.

تابعی می‌خواهیم، مانند $g(p)$، که همین اطلاعات را دربارهٔ تکانه در اختیار ما قرار دهد.

۱. $g^*(p)g(p)\,dp$ عبارت از آن احتمالی باشد که تکانهٔ ذرهٔ کوانتومی مابین p و $p+dp$ باشد.

۲. $$\int_{-\infty}^{\infty} g^*(p)g(p)dp=1 \qquad (60.15)$$

۳. $$\langle p\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} g^*(p)p\,g(p)dp \qquad (61.15)$$

به‌طوری که در ادامهٔ همین بحث نشان خواهیم داد، چنین تابعی توسط تبدیل فوریهٔ $\psi(x)$، تابع فضایی ما، به‌دست می‌آید. به‌عبارت دقیق[1]

$$g(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)e^{-ipx/\hbar}dx \qquad (62.15)$$

$$g^*(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)e^{ipx/\hbar}dx \qquad (63.15)$$

تابع تکانه‌ای سه‌بعدی متناظر عبارت است از

$$g(\mathbf{p})=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\iiint_{-\infty}^{\infty}\psi(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}/\hbar}d^3x$$

برای تحقیق درستی معادلات (۶۲.۱۵) و (۶۳.۱۵)، خاصیتهای ۲ و ۳ را امتحان می‌کنیم. خاصیت ۲، یعنی بهنجارش، به‌خودی خود به عنوان یك رابطهٔ پارسوال، معادلهٔ (۵۵.۱۵)، ارضا می‌شود. اگر $\psi(x)$، تابع فضایی، به‌یك بهنجار باشد، $g(p)$، تابع تکانه‌ای نیز به‌یك بهنجار خواهد بود.

برای آنکه خاصیت ۳ را بیازماییم، باید نشان دهیم که

$$\langle p\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} g^*(p)p\,g(p)dp=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\psi(x)dx \qquad (64.15)$$

---

۱. با استفاده از عدد موج، k، به‌جای p، $p=k\hbar$ (و $\mathbf{p}=\mathbf{k}\hbar$)، می‌توان از ظاهرشدن $\hbar$ در رابطه جلوگیری کرد، به‌طوری که

$$\varphi(k)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int\psi(x)e^{-ikx}dx$$

نمونه‌ای از این نمادگذاری در بخش ۱.۱۶ خواهد آمد.

که‌در آن $(\hbar/i)(d/dx)$ عملگر تکانه در نمایش فضایی است. به‌جای توابع تکانه‌ای، تبدیلهای فوریهٔ توابع فضایی‌را قرار می‌دهیم، اولین انتگرال به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int\int_{-\infty}^{\infty}\int pe^{-ip(x-x')/\hbar}\psi^*(x')\psi(x)\,dp\,dx'\,dx \qquad (۶۵.۱۵)$$

اکنون

$$pe^{-ip(x-x')/\hbar}=\frac{d}{dx}\left[-\frac{\hbar}{i}e^{-ip(x-x')/\hbar}\right] \qquad (۶۶.۱۵)$$

با نشاندن درمعادلهٔ (۶۵.۱۵) وانتگرالگیری جزءبه‌جزء وباثابت نگه‌داشتن x' و p، به‌دست خواهیم آورد

$$\langle p\rangle=\int\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ip(x-x')/\hbar}dp\right]\cdot\psi^*(x')\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\psi(x)dx'\,dx$$

(۶۷.۱۵)

دراینجا فرض‌کرده‌ایم‌که $\psi(x)$ در $x\to\pm\infty$ صفرمی‌شود، ودر نتیجه جزء انتگرالگیری شده حذف می‌شود. بازهم با استفاده ازتابع دلتای دیراک، معادلهٔ (۲۱.۱۵ ج)، معادلهٔ (۶۷.۱۵) بمعادلهٔ (۶۴.۱۵) ساده می‌شود ودرستی خاصیت۳ برای نمایش تکانه‌ای‌متحقق می‌شود. خاطر نشان می‌کنیم‌که ازلحاظ تکنیکی درمعادلهٔ (۶۲.۱۵)، تبدیل وارون فوریه‌را به‌کار گرفته‌ایم. این روش‌را عمداً برگزیدیم تا درمعادلهٔ (۶۷.۱۵)، به‌علامت مناسب‌دست یابیم.

مثال ۱۰۶.۱۵ اتم هیدروژن

حالت پایهٔ اتم هیدروژن[1] را می‌توان توسط تابع‌موج فضایی زیر توصیف‌کرد

$$\psi(\mathbf{r})=\left(\frac{1}{\pi a_0^3}\right)^{1/2}e^{-r/a_0} \qquad (۶۸.۱۵)$$

که در آن a_0 شعاع بور وبرابر $\hbar^2/me^2$ است. اکنون یك‌تابع‌موج سه‌بعدی داریم. تبدیل متناظر بامعادلهٔ (۶۲.۱۵) به‌قرار زیراست

$$g(\mathbf{p})=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int\psi(\mathbf{r})\,e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}d^3r \qquad (۶۹.۱۵)$$

---

۱. بررسی حالتهای $l=0$ اتم هیدروژن بااستفاده ازنمایش تکانه‌ای‌را درمقالهٔ زیرببینید
Ivash, E. V., "A momentum representation treatment of the hydrogen atom problem" *Am. J. Phys.* 40, 1095, 1972.

بانشاندن معادلهٔ (۶۸.۱۵) درمعادلهٔ (۶۹.۱۵) و بااستفاده از

$$\int e^{-ar+i\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}}d^3r=\frac{8\pi a}{(a^2+b^2)^2} \tag{۷۰.۱۵}$$

تابع موج تکانه‌ای هیدروژن را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$g(\mathbf{p})=\frac{2^{3/2}}{\pi}\frac{a_0^{3/2}\hbar^{5/2}}{(a_0^2p^2+\hbar^2)^2} \tag{۷۱.۱۵}$$

چنین توابع تکانه‌ای درمسائلی مانند پراکندگی کامپتون توسط الکترونهای اتمی و توزیع طول‌موجهای تابش پراکنده که به توزیع تکانهٔ الکترونهای هدف وابسته است، به‌کار می‌آیند.

رابطهٔ بین نمایش فضایی معمولی ونمایش تکانه‌ای‌را می‌توان بادرنظرگرفتن روابط جابه‌جایی اساسی درمکانیك کوانتومی روشنتر کرد. از هامیلتونی کلاسیکی به‌معادلهٔ موج شرودینگر می‌رسیم؛ بااین شرط که تکانهٔ p و مکان x جابه‌جا نشوند. این شرط را وضع می‌کنیم که

$$[p,x]\equiv(px-xp)=-i\hbar \tag{۷۲.۱۵}$$

درحالت چندبعدی به‌جای معادلهٔ (۷۲.۱۵)، معادلهٔ زیر را به‌کارمی‌بریم

$$[p_i,x_j]=-i\hbar\delta_{ij} \tag{۷۳.۱۵}$$

نمایش (فضایی) شرودینگررا بااستفاده ازعملگرهای زیر به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} x_j&\to x_j\\ p_i&\to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}\end{aligned} \tag{x}$$

که درآن تکانه‌را بایك مشتق جزئی فضایی تعویض کرده‌ایم. خواننده به‌آسانی پی خواهد برد که

$$[p,x]\psi(x)=-i\hbar\psi(x) \tag{۷۴.۱۵}$$

ولی، عملگرهای زیرهم به‌همان ترتیب در معادلهٔ (۷۲.۱۵) صدق می‌کنند

$$\begin{aligned} x_j&\to i\hbar\frac{\partial}{\partial p_j}\\ p_i&\to p_i\end{aligned} \tag{p}$$

این نمایش تکانه‌ای است. درنتیجه داریم

$$[p,\ x]\, g(p) = -i\hbar g(p) \qquad (۷۵.۱۵)$$

ازاین‌رو نمایش (x) یکتا نیست؛ (p) یك امکان دیگر به‌شمارمی‌آید.

نمایش شرودینگر، (x)، که به‌معادلهٔ موج شرودینگرمی‌انجامد، معمولاً مناسبتراست، زیرا انرژی پتانسیل V معمولاً به‌صورت تابعی ازمکان، $V(x,\ y,\ z)$، داده‌می‌شود. نمایش تکانه‌ای (p) معمولاً به‌یك‌معادلهٔ انتگرالی می‌انجامد (مزیتها وکمبودهای معادلات‌انتگرالی درفصل ۱۶ آمده‌است). به‌عنوان یك حالت استثنا، نوسانگر هماهنگ‌را درنظربگیرید.

مثال ۲.۶.۱۵ نوسانگرهماهنگ

هامیلتونی کلاسیکی (انرژی جنبشی+انرژی پتانسیل=انرژی‌کل) عبارت است از

$$H(p,\ x) = \frac{p^{۲}}{۲m} + \frac{۱}{۲} k x^{۲} = E \qquad (۷۶.۱۵)$$

که درآن k ثابت قانون هوك است.

درنمایش شرودینگری معادلهٔ زیررا به‌دست می‌آوریم

$$-\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\, \frac{d^{۲}\psi(x)}{dx^{۲}} + \frac{۱}{۲} k x^{۲}\psi(x) = E\psi(x) \qquad (۷۷.۱۵)$$

به‌ازای انرژی‌کل E برابر با $\sqrt{(k/m)}\hbar/۲$، جواب زیررا داریم (بخش ۱.۱۳)

$$\psi(x) = e^{-(\sqrt{mk}/۲\hbar)x^{۲}} \qquad (۷۸.۱۵)$$

نمایش تکانه‌ای به‌معادلهٔ زیرمی‌انجامد

$$\frac{p^{۲}}{۲m}\, g(p) - \frac{\hbar^{۲}k}{۲}\, \frac{d^{۲}g(p)}{dp^{۲}} = E g(p) \qquad (۷۹.۱۵)$$

بازهم، به‌ازای

$$E = \sqrt{\frac{k}{m}}\, \frac{\hbar}{۲} \qquad (۸۰.۱۵)$$

جواب زیردرمعادلهٔ موج تکانه‌ای (۷۹.۱۵) صدق می‌کند

$$g(p) = e^{-p^{۲}/(۲\hbar\sqrt{mk})} \qquad (۸۱.۱۵)$$

ازهریك ازاین دونمایش فضایی وتکانه‌ای (وتعدادبسیارزیادی امکانهای دیگر) بسته به‌اینکه، درمسئلهٔ خاص موردنظر کدام‌یك مناسبتراست، می‌توان استفاده کرد.

نشان دادن این‌نکته‌که $g(p)$ تابع‌موج تکانه‌ای متناظر بامعادلهٔ (۷۸۰۱۵)، یعنی‌تبدیل وارون فوریهٔ معادلهٔ (۷۸۰۱۵)، است به‌مسئلهٔ ۳.۶.۱۵ واگذارمی‌شود.

مسائل

۱.۶.۱۵ تابع $e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}}$ موج تختی، باتکانهٔ $\mathbf{p}=\hbar\mathbf{k}$، راکه به‌چگالی یك بهنجار شده است توصیف‌می‌کند (وابستگی زمانی $e^{-i\omega t}$ مفروض‌است). نشان‌دهیدکه این تابع‌موجهای تخت دررابطهٔ تعامد زیرصدق می‌کنند

$$\int (e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}})^* e^{i\mathbf{k}'.\mathbf{r}} dx\, dy\, dz = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$$

۲.۶.۱۵ یك موج تخت نامتناهی درمکانیك‌کوانتومی‌را می‌توان توسط تابع‌زیر نمایش‌داد

$$\psi(x) = e^{ip'x/\hbar}$$

تابع توزیع تکانه‌ای‌متناظر رابیابید. دقت‌کنیدکه این‌تابع یك بینهایت دارد و $\psi(x)$ بهنجار نیست.

۳.۶.۱۵ یك نوسانگر کوانتومی خطی درحالت پایه‌اش دارای تابع‌موج زیراست

$$\psi(x) = a^{-1/2}\pi^{-1/4}e^{-x^2/2a^2}$$

نشان دهیدکه تابع تکانه‌ای متناظرعبارت است از

$$g(p) = a^{1/2}\pi^{-1/4}\hbar^{-1/2}e^{-a^2p^2/2\hbar^2}$$

۴.۶.۱۵ nامین حالت برانگیختهٔ نوسانگرخطی‌کوانتومی توسط تابع زیرتوصیف‌می‌شود

$$\psi_n(x) = a^{-1/2}2^{-n/2}\pi^{-1/4}(n!)^{-1/2}e^{-x^2/2a^2}H_n(x/a)$$

که در آن $H_n(x/a)$، چندجمله‌ای nام هرمیت است (بخش ۱۰۱۳). به‌عنوان تعمیمی از مسئلهٔ ۳.۶.۱۵، تابع تکانه‌ای متناظر با $\psi_n(x)$ را بیابید.

راهنمایی. $\psi_n(x)$ را می‌توان با $\mathfrak{L}_+^n\psi_0(x)$ نمایش دادکه درآن $\mathfrak{L}_+$ عملگرفزایندهٔ مسئلهٔ ۱۶.۱.۱۳ است.

۵.۶.۱۵ درمکانیك‌کوانتومی، یك ذرهٔ‌آزاد توسط موج تخت زیرتوصیف می‌شود

$$\psi_k(x,\ t) = e^{i[kx-(\hbar k^2/2m)t]}$$

باترکیب کردن امواج متناظر باتکانه‌های مختلف دریك عامل وزنی دامنه، $\varphi(k)$، بسته موج زیررا تشکیل می‌دهیم

$$\Psi(x,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(k)e^{i[kx-(\hbar k^{2}/2m)t]}dk$$

(الف) بافرض اینکه

$$\Psi(x,\ 0)=e^{-x^{2}/2a^{2}}$$

$\varphi(k)$ را بیابید.

(ب) بااستفاده ازمقدارمعلوم $\varphi(k)$، انتگـرال فوق را محاسبه کنید تا شکل صریح $\Psi(x,\ t)$ را بیابید. توجه‌کنیدکه این بسته موج درزمان پخش یاگسترده می‌شود.

پاسخ. $\Psi(x,t)=\dfrac{e^{-\{x^{2}/2[(a^{2}+i\hbar/m)t]\}}}{[1+(i\hbar t/ma^{2})]^{1/2}}$.

یادآوری. بلایندر[1] بحث‌جالبی دربارهٔ این‌مسئله ازنقطه‌نظر عملگر تحول ارائه‌می‌کند.

۶.۶.۱۵ تابع‌موج تکانه‌ای وابسته به‌زمان $g(k,\ t)$ متناظربا $\Psi(x,\ t)$ مسئلهٔ ۵.۶.۱۵ را پیداکنید. نشان دهیدکه بسته موج تکانه‌ای $g^{*}(k,\ t)g(k,\ t)$ مستقل اززمان است.

۷.۶.۱۵ دوترون، در مسئلهٔ ۲.۱.۹، را می‌توان به‌نحو نسبتاً خوبی بایك تابع‌موج هولدن به‌صورت زیرنمایش داد

$$\psi(\mathbf{r})=A[e^{-\alpha r}-e^{-\beta r}]/r$$

که درآن A، α، و β، ثابت‌اند. $g(\mathbf{p})$، تابع تکانه‌ای متناظر، را بیابید.

یادآوری. تبدیل فوریه‌را می‌توان به‌صورت تبدیلهای سینوس وکسینوس فوریه ویا به‌صورت یك تبدیل لاپلاس، بخش ۸.۱۵، بازنویسی کرد.

۸.۶.۱۵ ضریب‌شکل هسته‌ای، $F(k)$، وتوزیع بار، $\rho(r)$، تبدیلهای سه‌بعدی فوریهٔ یکدیگرند

$$F(k)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\rho(r)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}d^{3}r$$

اگرضریب شکل اندازه‌گیری شده به‌صورت زیرباشد

$$F(k)=(2\pi)^{-3/2}\left(1+\frac{k^{2}}{a^{2}}\right)^{-1}$$

---

1. Blinder, S. M., "Evolution of a Gaussian wavepacket," *Am. J. Phys.* 36, 525 (1968).

توزیع بارمتناظر را بیابید.

پاسخ. $\rho(r)=\frac{a^{۲}}{۴\pi}\frac{e^{-ar}}{r}$.

۹.۶.۱۵ بهنجارش تابع‌موج تکانه‌ای هیدروژن

$$g(\mathbf{p})=\frac{۲^{۳/۲}}{\pi}\frac{a_{\circ}^{۳/۲}\hbar^{۵/۲}}{(a_{\circ}^{۲}p^{۲}+\hbar^{۲})^{۲}}$$

را توسط محاسبهٔ مستقیم انتگرال زیر بیازمایید

$$\int g^{*}(p)g(p)d^{۳}p$$

۱۰.۶.۱۵ با $\psi(\mathbf{r})$، تابع‌موجی در فضای معمولی و $\varphi(\mathbf{p})$، تابع تکانه‌ای متناظـر با آن، نشان دهیدکه

(الف) $$\frac{۱}{(۲\pi\hbar)^{۳/۲}}\int \mathbf{r}\psi(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}/\hbar}\,d^{۳}x=i\hbar\nabla_{p}\,\varphi(\mathbf{p})$$

(ب) $$\frac{۱}{(۲\pi\hbar)^{۳/۲}}\int \mathbf{r}^{۲}\psi(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}/\hbar}d^{۳}x=(i\hbar\nabla_{p})^{۲}\varphi(\mathbf{p})$$

یادآوری. ∇_{p} شیب در فضای تکانه است

$$\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial p_{x}}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial p_{y}}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial p_{z}}$$

این نتایج‌را می‌توان به‌هر توان عدد درست مثبتی از r ودر نتیجه به‌هر تـابع (تحلیلی) که بتوان آن‌را بصورت یك‌سری مك‌لورن برحسب r بسط داد، تعمیم داد.

۱۱.۶.۱۵ تابع‌موج فضای معمولی $\psi(\mathbf{r},t)$ در معادله شرودینگر وابسته به‌زمان زیرصدق می‌کند

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\nabla^{۲}\psi+V(\mathbf{r})\psi$$

نشان دهیدکه تابع تکانه‌ای وابسته به‌زمان متناظر درمعادلهٔ مشابه زیرصدق می‌کند

$$i\hbar\frac{\partial\varphi(\mathbf{p},t)}{\partial t}=\frac{p^{۲}}{۲m}\varphi+V(i\hbar\nabla_{p})\varphi$$

یادآوری. فرض‌کنیدکه $V(\mathbf{r})$ را بتوان توسط یك سری مك‌لورن مشخص کرد؛ از مسئلهٔ ۱۰.۶.۱۵ استفاده کنید.
$V(i\hbar\nabla_p)$ همان تابعی است ازمتغیر $i\hbar\nabla_p$، که $V(\mathbf{r})$ ازمتغیر $\mathbf{r}$ است.

۱۲.۶.۱۵ معادلهٔ موج مستقل اززمان شرودینگر به‌صورت زیر است

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+V(x)\psi(x)=E\psi(x)$$

درمورد خاصی‌که $V(x)$ تابعی تحلیلی از x باشد، نشان دهیدکه معادلهٔ موج تکانه‌ای متناظر عبارت است از

$$V\left(i\hbar\frac{d}{dp}\right)g(p)+\frac{p^2}{2m}\,g(p)Eg(p)$$

این معادلهٔ موج تکانه‌ای را به‌کمك تبدیل فوریه، معادلهٔ (۶۲.۱۵)، و وارون آن استخراج کنید. برای این‌کار جانشانی $x\to i\hbar(d/dp)$ را مستقیماً به‌کارنبرید.

۷.۱۵ توابع انتقال

می‌توان فرض کرد کـه یك پالس الکتریکـی وابسته به‌زمان از برهـم‌نهش امواج تخت با بسامدهای مختلف تشکیل شده است. سهم بسامد زاویه‌ای ω دراین پالس عبارت‌است از

$$F(\omega)e^{i\omega t}$$

دراین‌صورت پالس‌کامل را می‌توان به‌صورت زیرنوشت

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad (۸۲.۱۵)$$

ازآنجاکه بسامد زاویه‌ایω به‌صورت

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}$$

به‌بسامد خطی ν مربوط می‌شود، مرسوم است که تمامی ضریب $1/2\pi$ را بااین انتگرال همراه‌کنیم.

حال اگرω یك بسامد باشد، منظور از بسامدهای منفی چیست؟ ωهای منفی‌را می‌توان یك طرح ریاضی دانست‌که برای‌اجتناب ازکارکردن بادوتابع ($\cos\omega t$ و $\sin\omega t$) مجزا ازهم به‌کارگرفته می‌شوند (با بخش ۱.۱۴ مقایسه کنید).

از آنجاکه معادلهٔ (۸۲.۱۵) به‌صورت یك تبدیل فوریه است، می‌توانیم $F(\omega)$ را

توسط تبدیل وارون به‌دست آوریم

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \qquad (۸۳.۱۵)$$

معادلهٔ (۸۳.۱۵)، تفکیك پالس $f(t)$ به مؤلفه‌های بسامد زاویه‌ای‌اش را نمایش می‌دهد. معادلهٔ (۸۲.۱۵) ترکیب پالس از مؤلفه‌هایش را بیان می‌کند.

دستگاهی نظیر یك سروومکانیسم یا یك تقویت‌کنندهٔ استریو با ورودی $f(t)$ وخروجی $g(t)$ را درنظر بگیرید (شکل ۵.۱۵). اگر ورودی به‌صورت تك‌بسامد ω، یعنی $f_\omega(t)=e^{i\omega t}$ باشد، تقویت‌کننده ممکن‌است دامنه وهمچنین فاز را تغییر دهد. این‌تغییرات احتمالاً به‌بسامد بستگی خواهند داشت. ازاین‌رو

$$g_\omega(t)=\varphi(\omega)f_\omega(t) \qquad (۸۴.۱۵)$$

این تابع تغییردهندهٔ فاز ودامنه، $\varphi(\omega)$، را یك‌تابع انتقال می‌نامند. این‌تابع معمولاًمختلط است

$$\varphi(\omega)=u(\omega)+iv(\omega) \qquad (۸۵.۱۵)$$

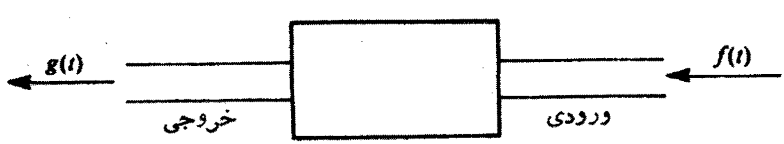
که در آن توابع $u(\omega)$ و $v(\omega)$ حقیقی‌اند.

درمعادلهٔ (۸۴.۱۵) فرض می‌کنیم که تابع انتقال $\varphi(\omega)$ مستقل از دامنهٔ ورودی و حضوریا عدم حضورمؤلفه‌های بسامدی دیگر است. یعنی‌فرض می‌کنیم که نگاشت $f(t)$ روی $g(t)$ خطی است. درنتیجه خروجی کل‌را می‌توان به‌کمك انتگرالگیری روی تمامی‌ورودی که توسط تقویت‌کننده تغییرمی‌کند، به‌دست آورد

$$g(t)=\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\omega)F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad (۸۶.۱۵)$$

تابع انتقال مشخصهٔ تقویت‌کننده است. اگر تابع انتقال معلوم‌باشد (به‌صورت‌تجربی یا ازطریق محاسبه)، برای هر ورودی $f(t)$ می‌توان خروجی $g(t)$ را محاسبه‌کرد. فرض کنیدکه $\varphi(\omega)$ تبدیل (وارون) فوریهٔ تابعی مانند $\Phi(t)$ باشد

$$\varphi(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(t)e^{-i\omega t}dt \qquad (۸۷.۱۵)$$



شکل ۵.۱۵

در نتیجه معادلهٔ (۸۶.۱۵) تبدیل فوریهٔ دو تبدیل وارون است. با استفاده از بخش ۵.۱۵، پیچش این دو تابع‌را به‌دست می‌آوریم

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\Phi(t-\tau)d\tau \qquad (۸۸.۱۵)$$

معادلهٔ (۸۸.۱۵) را چنین تعبیر می‌کنیم که یك ورودی ــ یا یك "علت"ــ $f(\tau)$، داریم که توسط $\Phi(t-\tau)$ تغییر می‌کند و خروجی‌ــ یا "معلول"ــ $g(t)$ راایجاد می‌کند. با پذیرفتن مبحث علیت مبنی بر اینکه علت‌قبل ازمعلول واقع‌می‌شود، باید داشته‌باشیم $\tau<t$. این‌شرط را به‌این‌ترتیب برقرار‌می‌کنیم که

$$\Phi(t-\tau)=0, \quad \tau>t \qquad (۸۹.۱۵)$$

درنتیجه معادلهٔ (۸۸.۱۵) به‌صورت زیردرمی‌آید

$$g(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\Phi(t-\tau)d\tau \qquad (۹۰.۱۵)$$

پذیرفتن معادلـهٔ (۸۹.۱۵) در اینجا و همین‌طور در نظریهٔ پاشندگی، بخش ۳.۷، پیامدهای‌قابل ملاحظه‌ای خواهد داشت.

معنای $\Phi(t)$

برای‌آنکه مفهوم Φ مشخص شود، فرض‌کنید‌که $f(\tau)$ ضربه‌ای ناگهانی باشد‌که در $\tau=0$ آغازشده است

$$f(\tau)=\delta(\tau)$$

که درآن $\delta(\tau)$ یك توزیع دلتای دیراك، درطرف مثبت مبدأ است. آنگاه معادلهٔ(۹۰.۱۵) به‌صورت زیردرمی‌آید

$$g(t)=\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\Phi(t-\tau)d\tau$$

$$g(t)=\begin{cases}\Phi(t), & t>0\\ 0, & t<0\end{cases} \qquad (۹۱.۱۵)$$

به‌این‌ترتیب $\Phi(t)$ تابع خروجی‌متناظر با یك‌ضربهٔ واحد در $t=0$ است. علاوه‌براین، معادلهٔ (۹۱.۱۵) نشان می‌دهد‌که $\Phi(t)$ حقیقی است. تابع انتقال اصلی‌ما، خروجی حالت پایای متناظر با یك ورودی تك‌بسامد بادامنهٔ واحد را به‌دست‌می‌دهد. $\Phi(t)$ و $\varphi(\omega)$ تبدیلهای‌فوریهٔ یکدیگرند.

اکنون ازمعادلهٔ (۸۷۰۱۵) داریم

$$\varphi(\omega)=\int_{\circ}^{\infty}\Phi(t)e^{-i\omega t}dt \qquad (۹۲۰۱۵)$$

که درآن حد پایین‌را بااستفاده ازعلیت [معادلهٔ (۸۹۰۱۵)] برابرصفر قرارداده‌ایم. باتوجه به‌اینکه $\Phi(t)$ به‌اعتبارمعادلهٔ (۹۱۰۱۵) حقیقی است، اجزای حقیقی وموهومی $\varphi(\omega)$ را از یکدیگر جدا می کنیم ومی‌نویسیم

$$u(\omega)=\int_{\circ}^{\infty}\Phi(t)\cos\omega t\,dt$$

(۹۳۰۱۵)

$$v(\omega)=-\int_{\circ}^{\infty}\Phi(t)\sin\omega t\,dt,\quad t>\circ$$

ازاین روابط مشاهده می‌شود که جزء حقیقی $\varphi(\omega)$، یعنی $u(\omega)$، زوج وجزء موهومی آن، یعنی $v(\omega)$، فرد است

$$u(-\omega)=u(\omega)$$

$$v(-\omega)=-v(\omega)$$

این‌نتیجه‌را بامسئلهٔ ۱۰۳۰۱۵ مقایسه‌کنید.

معادلهٔ (۹۳۰۱۵) را تبدیلهای سینوس وکسینوس فوریه تعبیرمی‌کنیم، وداریم

$$\Phi(t)=\frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\infty}u(\omega)\cos\omega t\,d\omega$$

(۹۴۰۱۵)

$$=-\frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\infty}v(\omega)\sin\omega t\,d\omega,\quad t>\circ$$

باترکیب معادلات (۹۳۰۱۵) و (۹۴۰۱۵)، خواهیم داشت

$$v(\omega)=-\int_{\circ}^{\infty}\sin\omega t\left\{\frac{۲}{\pi}\int_{\circ}^{\infty}u(\omega')\cos\omega' t\,d\omega'\right\}dt \qquad (۹۵۰۱۵)$$

این‌نشان می‌دهدکه اگرتابع انتقال مایك جزء حقیقی داشته باشد، یك جزء موهومی نیز خواهدداشت (وبرعکس). البته دراین استدلال فرض شده‌است که تبدیلهای فوریه وجود دارند، بنابراین حالتهایی ازقبیل $\Phi(\omega)=۱$ حذف شده‌اند.

اعمال روابط علیتی‌منجر به‌یك وابستگی متقابل دراجزای حقیقی وموهومی تابع‌انتقال

شده است. این‌مبحث‌را با‌نتایج نظریهٔ پاشندگی در بخش ۳.۷، که آن‌هم شامل علیت است، مقایسه کنید.

اثبات این نکته‌که خاصیتهای پاریتهٔ $u(\omega)$ و $v(\omega)$ باعث می‌شوند که $\Phi(t)$ به‌ازای مقدارمنفی؛ صفرشود، شاید به‌کار آید. با وارون‌کردن معادلهٔ (۸۷.۱۵) داریم

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[u(\omega)+iv(\omega)][\cos\omega t+i\sin\omega t]d\omega \quad (۹۶.۱۵)$$

با علم به این نکته که $u(\omega)$ زوج و $v(\omega)$ فرد است، معادلهٔ (۹۶.۱۵) به صورت زیر درمی‌آید

$$\Phi(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}u(\omega)\cos\omega t\,d\omega-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}v(\omega)\sin\omega t\,d\omega, \quad t>0 \quad (۹۷.۱۵)$$

ازمعادلهٔ (۹۴.۱۵) داریم

$$\int_{0}^{\infty}u(\omega)\cos\omega t\,d\omega=-\int_{0}^{\infty}v(\omega)\sin\omega t\,d\omega, \quad t>0 \quad (۹۸.۱۵)$$

اگر علامت t را تغییر دهیم، علامت $\sin\omega t$ عوض می‌شود و از معادلهٔ (۹۷.۱۵) خواهیم داشت

$$\Phi(t)=0, \quad t<0$$

(که سازگاری درونی تحلیل را به‌نمایش می‌گذارد).

مسئله

۱.۷.۱۵ پیچش زیر را استخراج کنید

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\Phi(t-\tau)d\tau$$

۸.۱۵ تبدیلهای بنیادی لاپلاس

تعریف

تبدیل‌لاپلاس، $f(s)$ یا $\mathcal{L}$ ازتابع $F(t)$ به‌کمک رابطهٔ زیر تعریف‌می‌شود[1]

---

۱. این تبدیل‌را گاهی تبدیل یك‌طرفهٔ لاپلاس می‌نامند؛ انتگرال از $-\infty$ تا $+\infty$ را‌تبدیل دوطرفهٔ لاپلاس می‌خوانند. برخی مؤلفان یك ضریب s اضافی معرفی می‌کنند. به‌نظرمی‌آید که این s اضافی چندان حسنی ندارد وهمواره دست وپاگیراست (تذکرات‌بیشتری دراین مورد را دربخش ۱۳.۱۴ کتاب جفریز و جفریز ببینید). s را عموماً حقیقی ومثبت می‌گیریم. می‌توان s مختلط هم داشت مشروط برآنکه داشته باشیم: $\mathcal{R}(s)>0$.

$$f(s)=\mathcal{L}\{F(t)\}=\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-st}F(t)dt \tag{۹۹.۱۵}$$

$$=\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt$$

چندنکته درمورد وجود این انتگرال شایان ذکر است. نیازی نیست که انتگرال نامتناهی $F(t)$

$$\int_0^\infty F(t)dt$$

موجود باشد. مثلا، $F(t)$ می‌تواند به‌شکل نمایی به‌ازای مقدار بزرگ t واگرا شود. ولی اگر ثابتی مانند s_0 وجود داشته باشد، به‌طوری که به ازای مقدار به‌اندازهٔ کافی بزرگ t، $t>t_0$، داشته باشیم

$$|e^{-s_0t}F(t)|\leqslant M \tag{۱۰۰.۱۵}$$

که درآن M یك ثابت مثبت‌است، آنگاه تبدیل لاپلاس [معادلهٔ (۹۹.۱۵)] به‌ازای $s>s_0$ وجود خواهد داشت؛ ومی‌گوییم $F(t)$ از مرتبهٔ نمایی است. به‌عنوان یك مثال مخالف، $F(t)=e^{t^2}$ درشرطی‌که درمعادلهٔ (۱۰۰.۱۵) داده‌شده صدق نمی‌کند و از مرتبهٔ نمایی نیست. $\mathcal{L}\{e^{t^2}\}$ وجود ندارد.

همچنین‌ممکن‌است تبدیل لاپلاس به‌دلیل وجود یك تکینگی به‌اندازهٔ کافی‌قوی در تابع $F(t)$ به‌ازای $t\to0$ موجود نباشد؛ یعنی

$$\int_0^\infty e^{-st}t^n dt$$

به‌ازای $n\leqslant-1$ در مبدأ واگرا می‌شود. تبدیل لاپلاس $\mathcal{L}\{t^n\}$ به‌ازای $n\leqslant-1$ وجود ندارد.

از آنجاکه برای دوتابع $F(t)$ و $G(t)$، که برای آنها انتگرالهای فوق وجوددارند، داریم

$$\mathcal{L}\{aF(t)+bG(t)\}=a\mathcal{L}\{F(t)\}+b\mathcal{L}\{G(t)\} \tag{۱۰۱.۱۵}$$

عملی که با $\mathcal{L}$ مشخص‌شده خطی است.

توابع بنیادی

برای معرفی تبدیل لاپلاس، این‌عمل‌را روی چند تابع بنیادی به‌کارمی‌بریم. در همهٔ موارد

فرض می‌کنیم که به‌ازای $t<0$، داشته باشیم $F(t)=0$

$$F(t)=1, \quad t>0$$

انگاه

$$\mathscr{L}\{1\}=\int_0^\infty e^{-st}dt=\frac{1}{s}, \quad s>0 \text{ به‌ازای} \qquad (102.15)$$

و یا

$$F(t)=e^{kt}, \quad t>0$$

تبدیل لاپلاس به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\mathscr{L}\{e^{kt}\}=\int_0^\infty e^{-st}e^{kt}dt=\frac{1}{s-k}, \quad s>k \text{ به‌ازای} \qquad (103.15)$$

با استفاده ازاین رابطه، می‌توان تبدیل لاپلاس برخی توابع‌دیگررا به‌سادگی به‌دست آورد. ازآنجاکه

$$\cosh kt=\frac{1}{2}(e^{kt}+e^{-kt})$$
$$(104.15)$$
$$\sinh kt=\frac{1}{2}(e^{kt}-e^{-kt})$$

داریم

$$\mathscr{L}\{\cosh kt\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k}+\frac{1}{s+k}\right)=\frac{s}{s^2-k^2}$$
$$(105.15)$$
$$\mathscr{L}\{\sinh kt\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k}-\frac{1}{s+k}\right)=\frac{k}{s^2-k^2}$$

که هردو به‌ازای $s>k$ برقرارند. روابط زیررا داریم

$$\cos kt=\cosh ikt$$
$$(106.15)$$
$$\sin kt=-i\sinh ikt$$

بااستفاده‌ازمعادلات (۱۰۵.۱۵)، وتعویض k با ik تبدیلهای‌لاپلاس‌را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$\mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^{۲}+k^{۲}}$$

(۱۰۷.۱۵)

$$\mathcal{L}\{\sin kt\} = \frac{k}{s^{۲}+k^{۲}}$$

که هردو به‌ازای $s > ۰$ برقرارند. تبدیل آخری را به‌روش دیگری دربخش بعد استخراج می‌کنیم. توجه کنید که $\lim\limits_{s\to ۰} \mathcal{L}\{\sin kt\} = ۱/k$. از این رو تبدیل لاپلاس برای $\int_{۰}^{\infty} \sin kt\, dt$ مقدار $۱/k$ را به‌دست می‌دهد.

سرانجام، به‌ازای $F(t) = t^n$، داریم

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_{۰}^{\infty} e^{-st} t^n\, dt$$

که همان تابع فاکتوریل است. بنابراین

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+۱}}, \quad s > ۰, \quad n > -۱ \qquad (۱۰۸.۱۵)$$

دقت خواننده‌را به‌این نکته جلب می‌کنیم که درهمهٔ این‌تبدیلها، متغیر s را در مخرج، یعنی یک‌توان منفی s، داریم؛ به‌ویژه‌آنکه: $\lim\limits_{s\to\infty} f(s) = ۰$. اهمیت این نکته در آن است که اگر $f(s)$ حاوی توانهای مثبت s می‌بود $(\lim\limits_{s\to\infty} f(s) \to \infty)$، آنگاه تبدیل وارون لاپلاس وجود نمی‌داشت.

تبدیل وارون

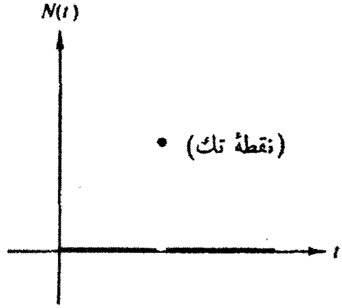
این عملیات تنها درصورتی اهمیت پیدا می‌کنند که، مانند تبدیل فوریه، تبدیل وارون آنها نیزوجود داشته باشد. یعنی اگر

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$$

آنگاه

$$\mathcal{L}^{-۱}\{f(s)\} = F(t) \qquad (۱۰۹.۱۵)$$

این تبدیل وارون به‌معنای دقیق‌کلمه یکتا نیست. دوتابع $F_۱(t)$ و $F_۲(t)$ ممکن‌است دارای یک تبدیل $f(s)$ باشند. ولی دراین‌صورت



شکل ۶۰۱۵ یك تابع پوچ ممکن.

$$F_1(t)-F_2(t)=N(t)$$

که‌در آن $N(t)$ یك‌تابع پوچ‌است(شکل ۶۰۱۵)، یعنی آنکه به‌ازای‌همهٔ مقادیرمثبت t_0، داریم

$$\int_0^{t_0} N(t)dt=0$$

این‌نتیجه‌را قضیهٔ لرچ می‌خوانند. بنابراین ازنظر فیزیکدانان ومهندسان، $N(t)$ را می‌توان همواره برابرصفر گرفت وبه‌این ترتیب عمل وارون یکتا می‌شود.

تبدیل وارون را به‌طرق گوناگون می‌توان تعیین کرد. (۱) می‌توان یك‌جدول تبدیل تهیه‌کرد وازآن به‌همان‌صورتی برای یافتن تبدیل وارون استفاده‌کرد که‌آنتی لگاریتم‌را از یك‌جدول لگاریتم به‌دست می‌آورند. تبدیلهایی راکه دربالا به‌دست آمد می‌توان سرآغاز تدوین چنین جدولی دانست. مجموعهٔ کاملتری ازتبدیلهای لاپلاس‌درجدول ۲.۱۵ یادرفصل ۲۹ کتاب AMS-55 ارائه شده‌است. بااستفاده‌از بسط به‌کسرهای جزئی‌وقضیه‌های‌عملگری گوناگون،که دربخشهای بعد درنظرگرفته می‌شوند، می‌توان باسهولت بیشتری ازجدولهای تبدیل‌لاپلاس استفاده‌کرد. این‌ظن چندان نابجایی نیست‌که چنین جدولهایی احتمالا بیشتر برای‌حل تمرینهای‌کتاب درسی به‌کارمی‌آیند تاحل‌مسائل دنیای واقعی. (۲)دربخش۱۲۰۱۵ بابهره‌گیری ازحساب مانده‌ها، روشی کلی برای یافتن $\mathcal{L}^{-1}$ معرفی می‌کنیم. (۳) مشکلات وامکانات یك رهیافت عددی ــ یعنی وارون‌سازی عددی ــ درانتهای این بخش بررسی شده است.

تجزیه به‌کسرهای جزئی

استفاده ازجدول تبدیلها(برای‌یافتن تبدیلهای وارون) به‌کمك بسط $f(s)$ برحسب کسرهای جزئی میسر می‌شود.

تبدیل‌ما، $f(s)$، بارها به‌صورت $g(s)/h(s)$ پیش‌می‌آید، که‌در آن $g(s)$ و $h(s)$ چندجمله‌ایهایی‌اندکه هیچ عامل مشترکی ندارند، و $g(s)$ نسبت به‌$h(s)$ از مرتبهٔ پایینتری است. اگرهمهٔ عوامل $h(s)$ خطی ومتمایز باشند، بااستفاده ازنظریهٔ توابع جزئی می‌توانیم بنویسیم

$$f(s)=\frac{c_1}{s-a_1}+\frac{c_2}{s-a_2}+\dots+\frac{c_n}{s-a_n} \qquad (110.15)$$

که در آن c_iها مستقل از s، و a_iها ریشه‌های $h(s)$اند. اگر یکی از ریشه‌ها، مثلا a_1، چندگانه باشد (m بار رخ دهد)، آنگاه $f(s)$ به‌صورت زیرخواهد بود

$$f(s)=\frac{c_{1,m}}{(s-a_1)^m}+\frac{c_{1,m-1}}{(s-a_1)^{m-1}}+\dots+\frac{c_{1,1}}{(s-a_1)}+\sum_{i=2}^{n}\frac{c_i}{s-a_i} \qquad (111.15)$$

وسرانجام، اگریکی ازعوامل درجهٔ دوباشد، (s^2+ps+q)، صورت به‌جای آنکه صرفاً برابر یك‌عدد ثابت باشد، به‌شکل زیرخواهدبود

$$\frac{as+b}{s^2+ps+q}$$

ثابتهای معرفی شده را به‌شیوه‌های گوناگونی می‌توان تعیین کرد. مثلا در معادلهٔ (۱۱۰.۱۵)، دوطرف‌را در $(s-a_i)$ ضرب می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم

$$c_i=\lim_{s\to a_i}(s-a_i)f(s) \qquad (112.15)$$

درحالتهای ساده، حل مستقیم معمولا ساده‌ترین‌کار است.

مثال ۱۰.۸.۱۵ تجزیه به‌کسرهای جزئی

فرض‌کنیدکه

$$f(s)=\frac{k^2}{s(s^2+k^2)}=\frac{c}{s}+\frac{as+b}{s^2+k^2} \qquad (113.15)$$

ازطرف راست این‌معادله مخرج‌مشترك می‌گیریم وتوانهای همانندs در صورتها را باهم مساوی قرارمی‌دهیم، خواهیم داشت

$$\frac{k^2}{s(s^2+k^2)}=\frac{c(s^2+k^2)+s(as-b)}{s(s^2+k^2)} \qquad (114.15)$$

$$c+a=0,\quad s^2$$

$$b=0,\quad s^1$$

و

$$ck^2=k^2,\quad s^0$$

این معادلات را حل می‌کنیم، (با $s\neq 0$) داریم

$$c=1$$

$$b=0$$

$$a=-1$$

که درنتیجه

$$f(s)=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+k^2} \tag{115.15}$$

وبااستفاده ازمعادلات (۱۰۲.۱۵) و (۱۰۷.۱۵) داریم

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}=1-\cos kt \tag{116.15}$$

مثال ۲۰.۸.۱۵ تابع پله‌ای

به‌عنوان یکی ازکاربردهای تبدیلهای لاپلاس، محاسبهٔ انتگرال زیررا درنظر بگیرید

$$F(t)=\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}\,dx \tag{117.15}$$

فرض کنیدکه تبدیل لاپلاس این‌انتگرال معین (وناسره) را بگیریم

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}\,dx\right\}=\int_0^\infty e^{-st}\int_0^\infty\frac{\sin tx}{x}\,dx\,dt \tag{118.15}$$

اینك ترتیب انتگرالگیری‌را عوض می‌کنیم (که البته باید توجیه‌شود!)[1] وخواهیم‌داشت

$$\int_0^\infty \frac{1}{x}\left[\int_0^\infty e^{-st}\sin tx\,dt\right]dx=\int_0^\infty\frac{dx}{s^2+x^2} \tag{119.15}$$

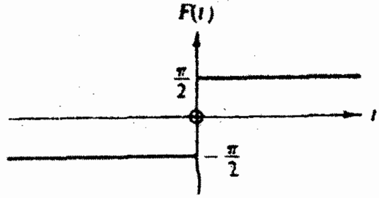
زیرا عاملی‌که درداخل کروشه آمده، همان تبدیل لاپلاس $\sin tx$ است. بااستفاده ازجدول انتگرالها داریم

$$\int_0^\infty \frac{dx}{s^2+x^2}=\frac{1}{s}\tan^{-1}\left(\frac{x}{s}\right)\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{2s}=f(s) \tag{120.15}$$

تبدیل وارون معادلهٔ (۱۰۲.۱۵) را محاسبه می‌کنیم ومی‌رسیم به

---

۱. فصل ۱ کتاب جفریز و جفریز (همگرایی یکنواخت انتگرالها) را ببینید.



شکل ۷.۱۵ $F(t)=\int_{\circ}^{\infty}\frac{\sin tx}{x}dx$، تابع پله‌ای.

$$F(t)=\frac{\pi}{۲}, \quad t>\circ \qquad (۱۲۱.۱۵)$$

که با نتیجهٔ حاصل ازحساب مانده‌ها (بخش ۲.۷) سازگاراست. در محاسبهٔ $F(t)$ فرض کرده‌ایم که $t>\circ$. برای محاسبهٔ $F(-t)$ تنها توجه به‌این نکته کافی است که $\sin(-tx)=-\sin tx$، در نتیجه $F(-t)=-F(t)$. سرانجام، به‌ازای $t=\circ$، روشن است که $F(\circ)$ باید صفر باشد. بنابراین

$$\int_{\circ}^{\infty}\frac{\sin tx}{x}\,dx=\begin{cases}\frac{\pi}{۲}, & t>\circ\\ \circ, & t=\circ\\ -\frac{\pi}{۲}, & t<\circ\end{cases} \qquad (۱۲۲.۱۵)$$

$$=\frac{\pi}{۲}\left[۲u(t)-۱\right]$$

توجه کنید که $\int_{\circ}^{\infty}(\sin tx/x)dx$، به‌عنوان تابعی از t، یک تابع پله‌ای را، پله‌ای به‌ارتفاع π در $t=\circ$، توصیف می‌کند (شکل ۷.۱۵). این روند با معادلهٔ (۱۱۱.۸) سازگاراست.

شگردی که دراین مثال به‌کارگرفته‌شد عبارت بود از: (۱) معرفی یک انتگرالگیری دوم یعنی تبدیل لاپلاس، (۲) تعویض ترتیب انتگرالگیری، وسپس محاسبهٔ انتگرال، و (۳) گرفتن تبدیل وارون لاپلاس. حالتهای بسیاری پیش‌می‌آیدکه در آن این‌شگرد تعویض‌ترتیب انتگرالگیری را می‌توان به‌کارگرفت وبسیارهم سودمند واقع می‌شود. مسئلهٔ ۶.۸.۱۵ شکل تغییریافته‌ای از این شگرد است.

وارون‌سازی عددی

تبدیل لاپلاس، به‌عنوان یک انتگرال، عملی‌است بسیارپایدار-پایداربه‌این معنی است که در

هنگام تعیین مساحت زیر یك منحنی، میانگین افت‌وخیزها (یاخطاها)ی کوچك در $F(t)$ را می‌گیرند و آنهارا حذف می‌کنند. همچنین، عامل وزنی e^{-st} به‌این معناست که از رفتار $F(t)$ درمقدار بزرگ t عملا چشمپوشی می‌شود ــ مگر آنکه s کوچك باشد. درنتیجهٔ این‌دو عامل، یك تغییر بزرگ در $F(t)$ به‌ازای مقدار بزرگ t، تغییر کوچك و شاید غیرقابل ملاحظه‌ای در $f(s)$ را نشان می‌دهد. ولی رفتن از $f(s)$ به $F(t)$، برخلاف عمل تبدیل لاپلاس، شدیداً ناپایدار است. تغییر کوچکی در $f(s)$ ممکن است به‌تغییر بسیار بزرگی در $F(t)$ بینجامد. تا جایی که حتی ممکن است همهٔ ارقام بامعنی $F(t)$ حذف شوند. در فرمولبندی ماتریسی، ماتریس مربوط، نسبت به‌وارون سازی، خوشرفتار نیست.

روش عددی کلی وکاملا رضایت بخشی برای‌وارون‌سازی تبدیلهای لاپلاس وجودندارد. ولی اگرتوجه خود را تنها به‌توابع نسبتاً هموار معطوف کنیم، امکانات گوناگونی برای ما وجود خواهد داشت. بلمن، کالابا، و لاکت[1] تبدیل لاپلاس را به‌تبدیل ملین مبدل می‌کنند $(x=e^{-t})$، و کوادراتورهای عددی مبتنی بر چندجمله‌ایهای انتقال‌یافتهٔ لژاندر، $P_n^*(x)=P_n(1-2x)$، را به‌کارمی‌برند. گام اصلی عبارت است از وارون‌سازی تحلیلی ماتریس حاصل. کریلف و اسکوبلیا[2] توجه خود را روی محاسبهٔ انتگرال برامویچ (بخش ۱۲۰۱۵) متمرکز می‌کنند. یکی ازشگردهای آنها این‌است که انتگرالده‌را با یك چندجمله‌ای درونیاب باتوانهای منفی تعویض می‌کنند وازآنها به‌طورتحلیلی انتگرال می‌گیرند.

مسائل

۱۰۸۰۱۵ ثابت کنید که

$$\lim_{s\to\infty} sf(s)=\lim_{t\to+0} F(t)$$

راهنمایی. فرض کنیدکه $F(t)$ را بتوان به‌صورت $F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n$ مشخص کرد.

۲۰۸۰۱۵ نشان دهید که

$$\frac{1}{\pi}\lim_{s\to 0}\mathcal{L}\{\cos xt\}=\delta(x)$$

۳۰۸۰۱۵ تحقیق کنیدکه

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\cos at-\cos bt}{b^2-a^2}\right\}=\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)},\quad a^2\neq b^2$$

---

1. Bellman, R., R. E. Kalaba, and J. A. Lockett, *Numerical Inversion of the Laplace Transforms*. New York: American Elsevier, 1966.
2. Krylov, V. I., and N. S. Skoblya, *Handbook of Numerical Inversion of Laplace Transforms*. Translated by D. Louvish, 1969.

۴.۸.۱۵ بااستفاده ازتجزیه به‌کسرهای جزئی، نشان دهیدکه

(الف) $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+a)(s+b)}\right\}=\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}, \qquad a\neq b$$

(ب) $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+a)(s+b)}\right\}=\frac{ae^{-at}-be^{-bt}}{a-b}, \quad a\neq b$$

۵.۸.۱۵ بااستفاده ازتجزیه به‌کسرهای جزئی، نشان دهیدکه

(الف)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right\}=-\frac{1}{a^2-b^2}\left\{\frac{\sin at}{a}-\frac{\sin bt}{b}\right\}, \; a^2\neq b^2$$

(ب)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right\}=\frac{1}{a^2-b^2}\{a\sin at-b\sin bt\}, \; a^2\neq b^2$$

۶.۸.۱۵ پتانسیل الکتروستاتیکی ناشی ازیك قرص رسانای باردار به‌شکل‌کلی زیر است (درمختصات استوانه‌ای)

$$\Phi(\rho, z)=\int_0^\infty e^{-k|z|}J_0(k\rho)f(k)dk$$

که در آن $f(k)$ مجهول‌است. پتانسیل درفواصل بزرگ ($z\to\infty$) باید به‌پتانسیل‌کولنی $Q/4\pi\varepsilon_0 z$ نزدیك شود. نشان‌دهیدکه

$$\lim_{k\to 0} f(k)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}$$

راهنمایی. می‌توانید قرار دهید $\rho=0$ و فرض‌کنیدکه یك بسط مك‌لورن از $f(k)$ وجود دارد یا با استفاده از e^{-kz} یك دنبالهٔ دلتا تشکیل دهید.

۷.۸.۱۵ نشان دهیدکه

(الف) $$\int_0^\infty \frac{\cos s}{s^\nu}\,ds=\frac{\pi}{2(\nu-1)!\sin(\nu\pi/2)}, \quad 0<\nu<1$$

(ب) $$\int^\infty \frac{\sin s}{s^\nu}ds=\frac{\pi}{2(\nu-1)!\sin(\nu\pi/2)}, \quad 0<\nu<2$$

چرا برای بند (الف)ν را به(۱ , ۰) وبرای بند (ب)ν را به(۲ , ۰)محدودکردیم؟ این انتگرالها را می‌توان به عنوان تبدیلهای فوریهٔ $s^{-\nu}$ و تبدیلهای ملین $\sin s$ و $\cos s$ تعبیر کرد.

راهنمایی. $s^{-\nu}$ را با انتگرال تبدیل لاپلاس $\mathcal{L}\{t^{\nu-1}\}/(\nu-1)!$ تعویض کنید. سپس نسبت به s انتگرال بگیرید. با انتگرال حاصل می‌توان مانند یك تابع بتا عمل کرد (بخش ۴.۱۰).

۸.۸.۱۵ تابع $F(t)$ را می‌توان دریك‌سری توانی (مك‌لورن) بسط داد؛ یعنی

$$F(t)=\sum_{n=0} a_n t^n$$

دراین‌صورت

$$\mathcal{L}\{F(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}\sum_n a_n t^n dt$$

$$=\sum_n a_n \int_0^\infty e^{-st} t^n dt$$

نشان‌دهید که $f(s)$، تبدیل لاپلاس $F(t)$، حاوی هیچ توانی از s نیست که بزرگتر از s^{-1} باشد. نتیجه‌را به‌کمك محاسبهٔ $\mathcal{L}\{\delta(t)\}$ بیازمایید. دلیل این فقدان توانهارا از روی تعمق توضیح دهید.

۹.۱۵ تبدیل لاپلاس مشتق

شاید بتوان‌گفت که‌کاربرد عمدهٔ تبدیل لاپلاس درتبدیل‌معادلات دیفرانسیل‌است به‌صورتهای ساده‌تری و با شیوه‌های حل آسانتری مثلا، خواهیم‌دید که معادلات دیفرانسیل جفت‌شده با ضرایب ثابت به‌دستگاه معادلات جبری خطی تبدیل می‌شوند.

مشتق اول $F(t)$ را تبدیل می‌کنیم

$$\mathcal{L}\{F'(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}\frac{dF(t)}{dt}\,dt$$

باانتگرالگیری جزء به‌جزء، داریم

$$\mathcal{L}\{F'(t)\}=e^{-st}F(t)\Big|_0^\infty+s\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt$$

$$=s\mathcal{L}\{F(t)\}-F(0) \qquad (۱۲۳.۱۵)$$

به‌بیان دقیقتر، $F(0)=F(+0)$ [1] و لازم است که dF/dt به‌ازای $0\leqslant t<\infty$، دست‌کم پاره‌پاره پیوسته باشد. طبیعتاً، هم $F(t)$ و هم مشتق آن باید به‌گونه‌ای باشند که انتگرالها واگرا نشوند. تصادفاً، معادلهٔ (۱۲۳.۱۵) مسئلهٔ ۱.۸.۱۵ را به‌طریق‌دیگری اثبات می‌کند.

با تعمیم رابطهٔ بالا داریم

$$\mathcal{L}\{F^{(2)}(t)\}=s^2\mathcal{L}\{F(t)\}-sF(+0)-F'(+0) \qquad (۱۲۴.۱۵)$$

$$\mathcal{L}\{F^{(n)}(t)\}=s^n\mathcal{L}\{F(t)\}-s^{n-1}F(+0)-s^{n-2}F'(+0)$$
$$-\dots-F^{(n-1)}(+0) \quad . \qquad (۱۲۵.۱۵)$$

تبدیل لاپلاس‌هم، مثل تبدیل فوریه، به‌جای دیفرانسیل گیری ضرب‌را قرارمی‌دهد. درمثالهای زیر، معادلات دیفرانسیل به‌معادلات جبری تبدیل می‌شوند. مرتبهٔ غیر جبری بودن کاهش می‌یابد، وحل مسئله ساده‌ترمی‌شود. توانایی و کارایی تبدیل لاپلاس در این مورد به‌خوبی نمایان می‌شود. برای‌آنکه ببینید درصورتی‌که ضرایب ثابت نباشند چه‌پیش‌می‌آید، به‌مثال ۳.۱۰.۱۵ مراجعه‌کنید.

به‌چگونگی واردشدن شرایط اولیه، $F(+0)$ و $F'(+0)$، وماننداینها، در تبدیل دقیقاً توجه‌کنید. ازمعادلهٔ (۱۲۴.۱۵) می‌توان برای استخراج $\mathcal{L}\{\sin kt\}$ استفاده کرد. ازاتحاد زیر بهره می‌گیریم

$$-k^2\sin kt=\frac{d^2}{dt^2}\sin kt \qquad (۱۲۶.۱۵)$$

آنگاه ازطریق کاربرد عمل تبدیل لاپلاس، داریم

$$-k^2\mathcal{L}\{\sin kt\}=\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}\sin kt\right\}$$

(۱۲۷.۱۵)

$$=s^2\mathcal{L}\{\sin kt\}-s\sin(0)-\frac{d}{dt}\sin kt\Big|_{t=0}$$

ازآنجاکه $\sin(0)=0$ و $d/dt\sin kt|_{t=0}=k$، داریم

$$\mathcal{L}\{\sin kt\}=\frac{k}{s^2+k^2} \qquad (۱۲۸.۱۵)$$

بدین‌ترتیب درستی معادلهٔ (۱۰۷.۱۵) تأیید می‌شود.

---

۱. ازطرف مثبت به‌صفر نزدیك می‌شویم.

مثال ۱.۹.۱۵ نوسانگر هماهنگ ساده

به‌عنوان یك‌مثال ساده ولی مطلقاً فیزیکی، جرم m را درنظر بگیریدکه تحت تأثیر یك فنر ایده‌آل، باثابت فنری k، نوسان می‌کند. طبق معمول ازاصطکاك چشمپوشی می‌کنیم. دراین صورت قانون‌دوم نیوتون به‌صورت زیردرمی‌آید

$$m\frac{d^2X(t)}{dt^2}+kX(t)=0 \qquad (۱۲۹.۱۵)$$

همچنین

$$X(0)=X_0$$
$$X'(0)=0$$

با بهره‌گیری ازتبدیل لاپلاس، داریم

$$m\mathcal{L}\left\{\frac{d^2X}{dt^2}\right\}+k\,\mathcal{L}\{X(t)\}=0 \qquad (۱۳۰.۱۵)$$

که بااستفاده ازمعادلهٔ (۱۲۲.۱۵) به‌صورت زیردرمی‌آید

$$ms^2\,x(s)-ms\,X_0+kx(s)=0 \qquad (۱۳۱.۱۵)$$

$$x(s)=X_0\frac{s}{s^2+\omega_0^2},\quad \text{با } \omega_0^2\equiv\frac{k}{m} \qquad (۱۳۲.۱۵)$$

با توجه به‌معادلهٔ (۱۰۷.۱۵) پی‌می‌بریم‌کــه این معادله تبدیل $\cos\omega_0 t$ است؛ در نتیجه، همان‌طورکه انتظارمی‌رفت، داریم

$$X(t)=X_0\cos\omega_0 t \qquad (۱۳۳.۱۵)$$

مثال ۲.۹.۱۵ رقص محوری زمین

به‌عنوان یك‌مثال نسبتاً پیچیده‌تر می‌توان رقص‌محوری (حرکت تقدیمی بدون نیرو) قطبهای زمین‌را درنظرگرفت. اگرزمین‌را یك‌کرموار (پخت) صلب بگیریم، معادلات حرکت‌اویلر به‌صورت زیردرمی‌آیند

$$\frac{dX}{dt}=-aY$$
$$(۱۳۴.۱۵)$$
$$\frac{dY}{dt}=+aX$$

که در آن

$$a \equiv [(I_z - I_x)/I_z]\omega_z$$

$$X = \omega_x$$

$$Y = \omega_y$$

که $(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \boldsymbol{\omega}$ بردار سرعت زاویه‌ای است (شکل ۸.۱۵)، وگشتاور لختی حول محور z برابر است با I_z و $I_y = I_x$ گشتاور لختی حول محور x (یا y) به‌شمار می‌آید. محور z بر محور تقارن زمین منطبق است. اختلاف این محور با محور چرخش روزانهٔ زمین، یعنی $\boldsymbol{\omega}$، در قطبها به‌حدود ۱۵ متر می‌رسد. از تبدیل این معادلات دیفرانسیل جفت‌شده، خواهیم‌داشت

$$\begin{aligned} s\,x(s) - X(0) &= -a\,y(s) \\ s\,y(s) - Y(0) &= a\,x(s) \end{aligned} \qquad (۱۳۵.۱۵)$$

با ترکیب این دومعادله $y(s)$ را حذف می‌کنیم، داریم

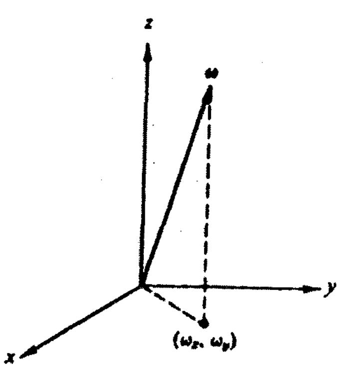
$$s^2\,x(s) - sX(0) + a\,Y(0) = -a^2 x(s)$$

یا

$$x(s) = X(0)\frac{s}{s^2 + a^2} - Y(0)\,\frac{a}{s^2 + a^2} \qquad (۱۳۶.۱۵)$$

بنابراین

$$X(t) = X(0)\cos at - Y(0)\sin at \qquad (۱۳۷.۱۵)$$



شکل ۸.۱۵

وبه‌همین‌ترتیب

$$Y(t)=X(0)\sin at+Y(0)\cos at \qquad (۱۳۸.۱۵)$$

دیده می‌شود که این کمیت (به‌ازای $a>0$) چرخش پادساعتگــرد بردار (X, Y) حول محورz به‌اندازهٔ زاویهٔ $\theta=at$ وباسرعت زاویه‌ایa به‌شمارمی‌آید.

باانتخاب محور زمان به‌صورتی‌که $Y(0)=0$، می‌توانیم به‌یك‌تفسیر بی‌واسطه دست یابیم. دراین‌صورت

$$X(t)=X(0)\cos at$$
$$Y(t)=X(0)\sin at \qquad (۱۳۹.۱۵)$$

که همان معادلات پارامتری مربوط به‌چرخش(X, Y) دریك‌مدار دایره‌ای به‌شعاع$X(0)$، باسرعت زاویه‌ایa درسوی پادساعتگرد است.

درمورد بردار سرعت زاویه‌ای زمین، $X(0)$ حدود۱۵ متراست، در حــالی که a، به‌صورتی‌که تعریف‌آن دراینجا آمد، بایك دورهٔ $(2\pi/a)$ حدود۳۰۰ روز متناظراست. در واقع، به‌علت انحراف ازپیکرهٔ صلب‌ایده‌آل‌که در روند استنتاج معادلات اویلرفرض شد، این دوره حدود۴۲۷روزاست.[1]

اگردرمعادلهٔ (۱۳۴.۱۵) قراردهیم

$$X(t)=L_x$$
$$Y(t)=L_y$$

که درآن

$L_x,\ L_y=$ مؤلفه‌های x وy تکانهٔ زاویه‌ای $\mathbf{L}$

$$a=-g_L B_z$$

$g_L=$ نسبت ژیرومغناطیسی

$B_z=$ میدان مغناطیسی (درامتداد محورz)

معادلهٔ(۱۳۴.۱۵) حرکت تقدیمی لارمور اجسام باردار درمیدان مغناطیسی یکنواخت، B_z، را توصیف می‌کند.

---

1. Menzel, D., ed., *Fundamental Formulas of Physics*, p. 695. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall (1955).

تابع دلتای دیراك

استفاده از تبدیلی دیگر، یعنی تبدیل تابع دلتای دیراك، در حوزهٔ معادلات دیفرانسیل به‌ما کمك خواهد کرد[1]

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_\circ)\}=\int_\circ^\infty e^{-st}\delta(t-t_\circ)dt=e^{-st_\circ}, \quad t_\circ \geqslant \circ \text{ به‌ازای } \qquad (۱۴۰.۱۵)$$

و به‌ازای $t_\circ=\circ$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\}=۱ \qquad (۱۴۱.۱۵)$$

دراینجا فرض می‌شودکه ازنمایشی برای تابع دلتای دیراك بهره می‌گیریم که

$$\delta(t)=\circ \quad t>\circ \text{ به‌ازای } \quad \text{و} \int_\circ^\infty \delta(t)dt=۱ \qquad (۱۴۲.۱۵)$$

روش دیگرعبارت ازاین‌است‌که، $\delta(t)$ را می‌توان به‌صورت حد $\varepsilon\to\circ$ تابع $F(t)$ درنظر گرفت، که درآن

$$F(t)=\begin{cases}\circ, & t<\circ\\ \varepsilon^{-۱}, & \circ<t<\varepsilon\\ \circ, & t>\varepsilon\end{cases} \qquad (۱۴۳.۱۵)$$

به‌کمك محاسبهٔ مستقیم

$$\mathcal{L}\{F(t)\}=\frac{۱-e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s} \qquad (۱۴۴.۱۵)$$

بامحاسبهٔ حدانتگرال (به‌جای انتگرال‌حد)، داریم

$$\lim_{\varepsilon\to\circ}\mathcal{L}\{F(t)\}=۱$$

یا همان معادلهٔ (۱۴۱.۱۵)

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\}=۱$$

این‌تابع دلتارا درموارد زیادی تابع ضربه خوانده‌اند، زیرا درتوصیف نیروهای‌ضربه‌ای،

---

۱. به‌بیان دقیقتر، تابع دلتای دیراك تعریف نشده‌است. اما، انتگرال روی‌آن به‌خوبی‌تعریف شده‌است. این رهیافت دربخش ۷.۸ بااستفاده ازدنباله‌های دلتا مطرح شده است.

یعنی نیروهایی که مدت دوام اثر آنها کوتاه‌است، مفید واقع می‌شود.

مثال ۳.۹.۱۵ نیروهای ضربه‌ای

قانون دوم نیوتون دربارهٔ نیرویی ضربه‌ای که برذره‌ای به‌جرم m وارد می‌آید، به‌صورت زیراست

$$m\frac{d^2X}{dt^2}=P\,\delta(t) \qquad (۱۴۵.۱۵)$$

که درآن P کمیتی ثابت است.

باتبدیل کردن، داریم

$$ms^2x(s)-msX(0)-mX'(0)=P \qquad (۱۴۶.۱۵)$$

در مورد ذره‌ای که از سکون شروع به‌حرکت می‌کند، $X'(0)=0$.[۱] همچنین می‌گیریم $X(0)=0$. دراین‌صورت

$$x(s)=\frac{P}{ms^2} \qquad (۱۴۷.۱۵)$$

و

$$X(t)=\frac{P}{m}t \qquad (۱۴۸.۱۵)$$

$$\frac{dX(t)}{dt}=\frac{P}{m}\ \text{ثابت} \qquad (۱۴۹.۱۵)$$

اثرضربهٔ $P\delta(t)$ عبارت است ازانتقال (لحظه‌ای) Pواحد تکانهٔ خطی به‌ذره.

درموردگالوانومتر بالیستیکی نیز تحلیل مشابهی اعمال‌می‌شود. گشتاور نیروی وارد برگالوانومتر درآغاز با کمیت ki بیان می‌شود، که درآن i یك پالس جریان و k ثابت تناسب است. ازآنجاکه مدت دوام i کوتاه است، قرارمی‌دهیم

$$ki=kq\,\delta(t) \qquad (۱۵۰.۱۵)$$

که درآن q کل باری است که جریان i حمل‌می‌کند. دراین‌صورت، با گشتاورلختی I داریم

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=kq\,\delta(t) \qquad (۱۵۱.۱۵)$$

---

۱. این کمیت درواقع باید به‌صورت $X'(+0)$ باشد. برای آنکه اثرضربه را هم به‌حساب آوریم، فرض می‌کنیم که ضربه درلحظهٔ $t=\varepsilon$ وارد می‌آید وقرارمی‌دهیم $\varepsilon\to 0$.

مانند قبل تبدیل می‌کنیم، پی‌می‌بریم که اثر پالس جریان عبارت است از انتقال kq واحد تکانهٔ زاویه‌ای به‌گالوانومتر.

مسائل

۱.۹.۱۵ بااستفاده ازعبارت مربوط به‌تبدیل مشتق دوم، تبدیل $\cos kt$ را به‌دست آورید.

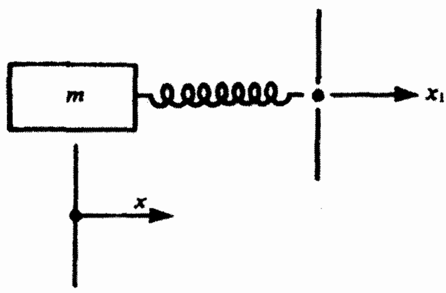
۲.۹.۱۵ جرم m به‌یك‌سر فنر کشیده نشده‌ای، باثابت فنری k، متصل است. در لحظهٔ $t=0$ برسر آزاد فنرشتاب ثابت a، جدا ازجرم m، وارد می‌آید. با بهره‌گیری از تبدیل لاپلاس،

(الف) مکان، x، جرم m را به‌صورت تابعی از زمان به‌دست آورید.

(ب) صورت حدی $x(t)$ را به‌ازای مقادیر کوچك t تعیین کنید.

پاسخ. (الف) $x=\frac{1}{2}at^2-\frac{a}{\omega^2}(1-\cos\omega t),\ \omega^2=\frac{k}{m}$

(ب) $\omega t \leqslant 1$, $x=\frac{a\omega^2}{4!}t^4$.



۳.۹.۱۵ هسته‌های پرتوزا بنابرقانون زیر وا می‌پاشند

$$\frac{dN}{dt}=-\lambda N$$

که درآن N غلظت هسته‌ای معلوم، و λ ثابت واپاشی متناظر آن است. این معادله‌را می‌توان چنین تعبیر کردکه آهنگ واپاشی باتعداد هسته‌های پرتوزای موجود متناسب، و واپاشی هر یك مستقل ازدیگری است.

در یك‌سری پرتوزا شامل n هستهٔ متفاوت، که از N_1 شروع می‌شود، داریم

$$\frac{dN_1}{dt}=-\lambda_1 N_1$$

$$\frac{dN_2}{dt}=\lambda_1 N_1-\lambda_2 N_2,\ \ldots$$

$$\frac{dN_n}{dt}=\lambda_{n-1}N_{n-1}\ \text{پایدار}$$

$N_1(t)$، $N_2(t)$، و $N_3(t)$ را بافرض $n=3$ ، $N_1(0)=N_0$ و $N_2(0)=N_3(0)=0$ بهدست آورید.

پاسخ.

$$N_1(t)=N_0\, e^{-\lambda_1 t}$$

$$N_2(t)=N_0\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t}\right)$$

$$N_3(t)=N_0\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_1 t}+\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}e^{-\lambda_2 t}\right)$$

برای N_2 و N_3 عبارتهایی تقریبی بهدست آورید، که بهازای مقادیر کوچك t و $\lambda_2\approx\lambda_1$ صادق باشد.

پاسخ. $N_2\approx N_0\lambda_1 t$ ، $N_3\approx\frac{N_0}{2}\lambda_1\lambda_2 t^2$.

عبارتهایی تقریبی برای N_2 و N_3 بهدست آوریدکه بهازای مقادیر بزرگ t درحالتهای زیر صادق باشد

(الف) $\lambda_1\gg\lambda_2$ ، (ب) $\lambda_1\ll\lambda_2$

پاسخ. (الف) $N_2\approx N_0\, e^{-\lambda_2 t}$ ، $N_3\approx N_0(1-e^{-\lambda_2 t}),\ \lambda_1 t\gg 1$

(ب) $N_2\approx N_0\frac{\lambda_1}{\lambda_2}e^{-\lambda_1 t}$ ، $N_3\approx N_0(1-e^{-\lambda_1 t}),\ \lambda_2 t\gg 1$.

۱۵.۹.۴ تشکیل یك ایزوتوپ دریك رآکتور هستهای بارابطهٔ زیر بیانمیشود

$$\frac{dN_2}{dt}=nv\sigma_1 N_{10}-\lambda_2 N_2(t)-nv\sigma_2 N_2(t)\ .$$

دراینجاحاصلضرب nv عبارتاست ازشارنوترونها برحسبتعداد درسانتیمترمکعبضربدر

سرعت متوسط برحسب سانتیمتر بر ثانیه؛ σ_1 و σ_2 (به‌سانتیمترمربع) به‌ترتیب احتمال‌جذب نوترون توسط ایزوتوپ‌اصلی باغلظت N_{10}، که ثابت فرض‌می‌شود، وایزوتوپ نوتشکیل باغلظت N_2 را نشان می‌دهند. ثابت واپاشی پرتوزای این‌ایزوتوپ λ_2 است.

(الف) N_2، غلظت ایزوتوپ نو، را به‌صورت تابعی اززمان به‌دست آورید.

(ب) اگرعنصراصلی Eu^{153} باشد،آنگاه $\sigma_1 = 400 = $ بارن $400 \times 10^{-24} cm^2$ و $\sigma_2 = 1000 = $ بارن $1000 \times 10^{-24} cm^2$ و $\lambda_2 = 1.4 \times 10^{-9} s^{-1}$. اگر $N_{10} = 10^{20}$ و $(nv) = 10^9 cm^{-2} s^{-1}$، غلظت N_2 Eu^{154} را پس از یك سال تابش پیوسته به‌دست‌آورید. آیا فرض ثابت بودن N_1 محقق‌می‌شود؟

۵.۹.۱۵ دریك رآکتورهسته‌ای Xe^{135}، هم به‌صورت‌محصول‌مستقیم شکافت وهم به‌صورت محصول واپاشی، I^{135} بانیم‌عمر ۶٫۷ ساعت تشکیل می‌شود. نیم عمر Xe^{135}، ۹٫۲ ساعت است. ازآنجاکه Xe^{135} نوترونهای گرمایی‌را قویاً جذب ودرنتیجه رآکتور هسته‌ای را "مسموم" می‌کند، غلظت‌آن موضوع بسیارمهمی است. معادلات مربوطه عبارت‌اند از

$$\frac{dN_I}{dt} = \gamma_I \varphi \sigma_f N_U - \lambda_I N_I$$

$$\frac{dN_X}{dt} = \lambda_I N_I + \gamma_X \varphi \sigma_f N_U - \lambda_X N_X - \varphi \sigma_X N_X$$

در اینجا N_I غلظت I^{135}، N_X غلظت Xe^{135}، و N_U غلظت U^{235} است. فرض کنید: $N_U = $ ثابت.

$\gamma_I = $ محصول I^{135} درهرشکافت $= 0.060$

$\gamma_X = $ محصول مستقیم Xe^{135} ازشکافت $= 0.003$

$\lambda_I (\lambda_X$ یا$) = $ ثابت واپاشی I^{135} (یا Xe^{135}) $= \dfrac{\ln 2}{t_{1/2}} = \dfrac{0.693}{t_{1/2}}$

$\sigma_f = $ سطح مقطع شکافت U^{235} برای نوترونهای‌گرمایی

$\sigma_X = $ سطح مقطع جذب نوترونهای گرمایی برای Xe^{135} $= 3.5 \times 10^6$ بارن $= 3.5 \times 10^{-18} cm^2$

(σ_I، سطح مقطع جذب I^{135} چشم پوشیدنی است.)

$\varphi = $ شارنوترون $= $ [(تعداد نوترونها $/cm^3) \times$ سرعت متوسط (cm/s)]

(الف) $N_X(t)$ را برحسب φ، شارنوترون، وحاصلضرب $\sigma_f N_U$ به‌دست آورید.

(ب) $N_X(t \to \infty)$ را پیداکنید.

(ج) پس ازآنکه N_X به‌تعادل برسد،کاررآکتورمتوقف می‌شود، $\varphi = 0$. $N_X(t)$ را پس ازتوقف به‌دست‌آورید. توجه‌کنیدکه N_X افزایش می‌یابد و این افزایش می‌تواند تا چند ساعت بعد در راه‌اندازی مجدد رآکتور دخالت‌کند.

۱۰.۱۵ چند خاصیت دیگر

جانشانی

اگر در تعریف تبدیل لاپلاس [معادلهٔ (۹۹.۱۵)] به‌جای پارامتر s، پارامتر $s-a$ را بنشانیم، داریم

$$f(s-a)=\int_{0}^{\infty} e^{-(s-a)t}F(t)dt=\int_{0}^{\infty} e^{-st}e^{at}F(t)dt$$

$$=\mathcal{L}\{e^{at}F(t)\} \qquad (۱۵۲.۱۵)$$

بدینسان تعویض s با $s-a$ متناظر است باضرب $F(t)$ در e^{at} و برعکس. ازاین نتیجه می‌توان برای توسعهٔ جدول تبدیلها بهره‌برداری کرد. از معادلهٔ (۱۰۷.۱۵)، بلافاصله پی‌می‌بریم

$$\mathcal{L}\{e^{at}\sin kt\}=\frac{k}{(s-a)^{2}+k^{2}} \qquad (۱۵۳.۱۵)$$

و نیز

$$\mathcal{L}\{e^{at}\cos kt\}=\frac{s-a}{(s-a)^{2}+k^{2}},\quad s>a$$

مثال ۱.۱۰.۱۵ نوسانگرمیرا

وقتی یك جرم نوسان‌کننده با میرایی متناسب باسرعت را بررسی می‌کنیم، عبارتهای بالا به کارمان می‌آیند. معادلهٔ (۱۲۹.۱۵)، پس از درنظر گرفتن این میرایی، به صورت زیر درمی‌آید

$$mX''(t)+bX'(t)+kX(t)=0 \qquad (۱۵۴.۱۵)$$

که در آن b ثابت تناسب است. فرض می‌کنیم که ذره در $X(0)=X_0$ از حالت سکون، $X'(0)=0$، شروع به‌حرکت می‌کند. معادلهٔ تبدیل‌یافته عبارت است از

$$m[s^{2}x(s)-sX_{0}]+b[sx(s)-X_{0}]+kx(s)=0 \qquad (۱۵۵.۱۵)$$

و

$$x(s)=X_{0}\frac{ms+b}{ms^{2}+bs+k} \qquad (۱۵۶.۱۵)$$

اکنون جملات تابع s در مخرج را به‌صورت مربع کامل درمی‌آوریم، یعنی

$$s^{۲}+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}=\left(s+\frac{b}{۲m}\right)^{۲}+\left(\frac{k}{m}-\frac{b^{۲}}{۴m^{۲}}\right) \qquad (۱۵۷.۱۵)$$

اگرمیرایی کوچك باشد، $b^{۲}<۴km$، جملهٔ آخر مثبت خواهد بود و آن را با $\omega_{۱}^{۲}$ نمایش می‌دهیم

$$x(s)=X_{\circ}\frac{s+b/m}{(s+b/۲m)^{۲}+\omega_{۱}^{۲}}$$

$$=X_{\circ}\frac{s+b/۲m}{(s+b/۲m)^{۲}+\omega_{۱}^{۲}}+X_{\circ}\frac{(b/۲m\omega_{۱})\omega_{۱}}{(s+b/۲m)^{۲}+\omega_{۱}^{۲}} \qquad (۱۵۸.۱۵)$$

با استفاده ازمعادلهٔ (۱۵۳.۱۵)

$$X(t)=X_{\circ}e^{-(b/۲m)t}\left(\cos\omega_{۱}t+\frac{b}{۲m\omega_{۱}}\sin\omega_{۱}t\right)$$

$$=X_{\circ}\frac{\omega_{\circ}}{\omega_{۱}}e^{-(b/۲m)t}\cos(\omega_{۱}t-\varphi) \qquad (۱۵۹.۱۵)$$

که درآن

$$\tan\varphi=\frac{b}{۲m\omega_{۱}}$$

$$\omega_{\circ}^{۲}=\frac{k}{m}$$

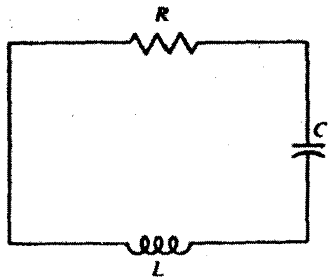
روشن است که این جواب، به‌ازای $b\to\circ$، به جواب نامیرا تبدیل می‌شود (بخش ۹.۱۵).

شباهت با مدارهای RLC

تشابه میان این نوسان هماهنگ سادهٔ میرای یك جرم درانتهای فنر با یك مدار RLC (مقاومت، القاگر، وخازن) شایان توجه است (شکل ۹.۱۵). مجموع اختلاف پتانسیلهای دور تا دور حلقه درهر لحظه باید صفر باشد (قانون کیرشهوف، بقای انرژی). داریم

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{۱}{C}\int^{t}I\,dt=\circ \qquad (۱۶۰.۱۵)$$

بامشتقگیری ازجریان I نسبت به‌زمان (برای حذف انتگرال) داریم



شکل ۹.۱۵ مدار RLC.

$$L\frac{d^{2}I}{dt^{2}}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=0 \qquad (۱۶۱.۱۵)$$

اگر $I(t)$ را با $X(t)$، L را با m، R را با b، C^{-1} را با k تعویض کنیم، معادلهٔ (۱۶۱.۱۵) بامسئلهٔ مکانیکی یکسان می‌شود. این تنها یکی از مواردی است که ریاضیات وحدتی بین شاخه‌های مختلف فیزیك برقرار می‌کند. برای دستیابی بـه‌بحث کاملتری در این خصوص می‌توانیدبه‌کتاب السون مراجعه کنید.[1]

انتقال

این‌بار $f(s)$ را در e^{-bs}، $b>0$، ضرب می‌کنیم

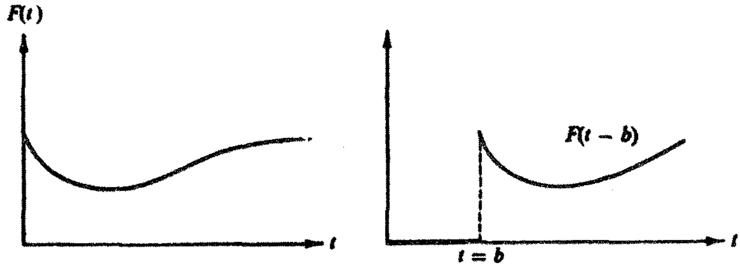
$$\begin{aligned} e^{-bs}f(s) &= e^{-bs}\int_{0}^{\infty}e^{-st}F(t)dt \\ &= \int_{0}^{\infty}e^{-s(t+b)}F(t)dt \end{aligned} \qquad (۱۶۲.۱۵)$$

اکنون قرارمی‌دهیم: $t+b=\tau$. معادلهٔ (۱۶۲.۱۵) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} e^{-bs}f(s) &= \int_{b}^{\infty}e^{-s\tau}F(\tau-b)d\tau \\ &= \int_{0}^{\infty}e^{-s\tau}F(\tau-b)u(\tau-b)d\tau \end{aligned} \qquad (۱۶۳.۱۵)$$

که در آن $u(\tau-b)$ تابع پله‌ای واحد است. غالباً این رابطه را "قضیهٔ انتقال هویساید" می‌نامند (شکل ۱۰.۱۵).

1. Olson, H. F., *Dynamical Analogies*. New York: Van Nostrand, 1943.



شکل ۱۰.۱۵ انتقال.

از آنجاکه فرض کرده‌ایم $F(t)$ به‌ازای $t<0$ برابر صفر است، به‌ازای $0<\tau<b$، داریم: $F(\tau-b)=0$. بنابراین می‌توانیم حد پایین‌را تا صفر بسط دهیم بدون‌اینکه درمقدار انتگرال تغییری حاصل شود. سپس با توجه به اینکه τ صرفاً یك متغیر انتگرالگیری است، خواهیم داشت

$$e^{-bs}f(s)=\mathcal{L}\{F(t-b)\} \qquad (۱۶۴.۱۵)$$

مثال ۲.۱۰.۱۵ امواج الکترومغناطیسی

معادلهٔ موج الکترومغناطیسی با $E=E_y$ یا $E=E_z$، یعنی موجی عرضی که درامتداد محور x منتشر می‌شود، به‌صورت زیر است

$$\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2}=0 \qquad (۱۶۵.۱۵)$$

با تبدیل این‌معادله برحسب t، داریم

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}\{E(x,t)\}-\frac{s^2}{v^2}\mathcal{L}\{E(x,t)\}+\frac{s}{v^2}E(x,0)+\frac{1}{v^2}\left.\frac{\partial E(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0$$

(۱۶۶.۱۵)

اگر برای شرط اولیه داشته باشیم: $E(x,0)=0$ و

$$\left.\frac{\partial E(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0$$

آنگاه

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}\{E(x,t)\}=\frac{s^2}{v^2}\mathcal{L}\{E(x,t)\} \qquad (۱۶۷.۱۵)$$

جواب (این معادلهٔ دیفرانسیل معمولی) عبارت است از

$$\mathcal{L}\{E(x,t)\}=c_1e^{-(s/v)x}+c_2e^{+(s/v)x} \qquad (۱۶۸.۱۵)$$

"ثابتهای" c_1 و c_2 را شرایط مرزی دیگری تعیین می‌کنند. این‌دو کمیت نسبت به x ثابت‌اند، ولی می‌توانند به s وابسته باشند. اگر موج ما به‌ازای $x \to \infty$ متناهی باقی بماند، $\mathcal{L}\{E(x,t)\}$ نیز متناهی باقی خواهد ماند. بدینسان $c_2=0$.

اگر $E(0,t)$ را با $F(t)$ نمایش دهیم، آنگاه $c_1=f(s)$ و

$$\mathcal{L}\{E(x,t)\}=e^{-(s/v)x}f(s) \qquad (۱۶۹.۱۵)$$

با استفاده ازخاصیت انتقال [معادلهٔ (۱۶۴.۱۵)]، بلافاصله می‌یابیم

$$E(x,t)=\begin{cases} F\left(t-\dfrac{x}{v}\right), & t\geqslant \dfrac{x}{v} \\ 0, & t<\dfrac{x}{v} \end{cases} \qquad (۱۷۰.۱۵)$$

بامشتقگیری وجانشانی درمعادلهٔ (۱۶۵.۱۵)، می‌توان درستی معادلهٔ (۱۷۰.۱۵) را تأیید کرد. جواب ما نمایانگر موجی (یا پالسی) است که با سرعت v در راستای مثبت x حرکت می‌کند. توجه کنید که ناحیهٔ متناظر با $x>vt$ دست نخورده باقی‌می‌ماند؛ یعنی این پالس هنوز به آنجا نرسیده است. اگرمی‌خواستیم سیگنالی در راستای منفی محور x منتشر شود، باید c_1 را صفر قرار می‌دادیم و به‌دست می‌آوردیم

$$E(x,t)=\begin{cases} F\left(t+\dfrac{x}{v}\right), & t\geqslant -\dfrac{x}{v} \\ 0, & t<-\dfrac{x}{v} \end{cases} \qquad (۱۷۱.۱۵)$$

یعنی موجی درامتداد منفی محور x.

مشتق تبدیل

هرگاه $F(t)$، که‌دست‌کم پاره‌پاره پیوسته‌است، و s را طوری بگیریم که $e^{-st}F(t)$ به‌ازای مقادیر بزرگ s به‌طور نمایی همگرا شود، انتگرال

$$\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt$$

به‌طور یکنواخت همگراست ومی‌توان از آن (زیر علامت انتگرال) نسبت به s مشتق گرفت. دراین‌صورت

$$f'(s)=\int_{0}^{\infty}(-t)e^{-st}F(t)dt=\mathcal{L}\{-tF(t)\} \qquad (۱۷۲.۱۵)$$

باادامهٔ این فرایند، خواهیم داشت

$$f^{(n)}(s)=\mathcal{L}\{(-t)^{n}F(t)\} \qquad (۱۷۳.۱۵)$$

همهٔ انتگرالهایی‌که به‌این صورت به‌دست می‌آیند، به‌دلیل رفتار نزولی نمایی $e^{-st}F(t)$، به‌طوریکنواخت همگرایند.

بابهره‌گیری ازهمین شگرد می‌توانیم تبدیلهای دیگری پدید آوریم. مثلا

$$\mathcal{L}\{e^{kt}\}=\int_{0}^{\infty}e^{-st}e^{kt}dt$$

$$=\frac{1}{(s-k)}, \quad s>k \qquad (۱۷۴.۱۵)$$

پس ازمشتقگیری نسبت به s (یا k) داریم

$$\mathcal{L}\{te^{kt}\}=\frac{1}{(s-k)^{2}}, \quad s>k \qquad (۱۷۵.۱۵)$$

مثال ۳.۱۰.۱۵ معادلهٔ بسل

یکی از کاربردهای جالب تبدیل لاپلاسی که به‌صورت دیفرانسیلی باشد در جواب معادلهٔ بسل با $n=0$ ظاهرمی‌شود. ازفصل ۱۱ داریم

$$x^{2}y''(x)+xy'(x)+x^{2}y(x)=0 \qquad (۱۷۶.۱۵)$$

طرفین این‌معادله‌رابر x تقسیم‌می‌کنیم وقرارمی‌دهیم $t=x$ و $F(t)=y(x)$ تابانمادگذاری معمول دراین فصل سازگاری برقرارشود، می‌بینیم که معادلهٔ بسل به‌صورت زیر درمی‌آید

$$tF''(t)+F'(t)+tF(t)=0 \qquad (۱۷۷.۱۵)$$

به‌یك جواب منظم، درحالت خاص $F(0)=1$، نیازداریم. ازمعادلهٔ (۱۷۷.۱۵) با $t=0$، داریم $F'(+0)=0$. علاوه براین، فرض می‌کنیم که تابع نامعلوم ما، $F(t)$، دارای یك تبدیل باشد. آنگاه، باتبدیل وبهره‌گیری از معادله‌های (۱۲۴.۱۵) و(۱۷۲.۱۵)، داریم

$$-\frac{d}{ds}[s^{2}f(s)-s]+sf(s)-1-\frac{d}{ds}f(s)=0 \qquad (178.15)$$

ازبازآرایی معادلهٔ (۱۷۸.۱۵) خواهیم داشت

$$(s^{2}+1)f'(s)+sf(s)=0 \qquad (179.15)$$

یا

$$\frac{df}{f}=-\frac{sds}{s^{2}+1} \qquad (180.15)$$

که معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اولی است. پس ازانتگرالگیری

$$\ln f(s)=-\frac{1}{2}\ln(s^{2}+1)+\ln C \qquad (181.15)$$

که می‌توان آن‌را به‌صورت زیر بازنویسی‌کرد

$$f(s)=\frac{C}{\sqrt{s^{2}+1}} \qquad (182.15)$$

$f(s)$ را در یك سری از توانهای منفیs، که به‌ازای $s>1$ همگراست، بسط می‌دهیم تا بتوانیم از معادلهٔ (۱۰۸.۱۵) بهره‌گیریم

$$f(s)=\frac{C}{s}\left(1+\frac{1}{s^{2}}\right)^{-1/2}$$

$$=\frac{C}{s}\left[1-\frac{1}{2s^{2}}+\frac{1\times 3}{2^{2}\times 2!s^{4}}-\dots+\frac{(-1)^{n}(2n)!}{(2^{n}n!)^{2}s^{2n}}+\dots\right] \qquad (183.15)$$

پس ازتبدیل جمله به‌جمله، داریم

$$F(t)=C\sum_{n=0}\frac{(-1)^{n}t^{2n}}{(2^{n}n!)^{2}} \qquad (184.15)$$

که درآن اگرباتوجه به‌شرط اولیه $F(0)=1$، C را یك بگیریم، $F(t)$ همان $J_0(t)$، یعنی تابع‌آشنای مرتبهٔ صفرم بسل است. بنابراین

$$\mathcal{L}\{J_{0}(t)\}=\frac{1}{\sqrt{s^{2}+1}} \qquad (185.15)$$

به‌یاد داشته باشیدکه فرض کرده‌ایم $s>1$. اثبات ایــن مسئله را به‌ازای $s>0$ به‌عنوان

تمرین به‌خواننده واگذارمی‌کنیم.

شایان ذکر است که علت توفیق ما در این کاربرد و نیز اینکه نسبتاً آسان بود، آن است که ما معادلهٔ بسل‌را با $n=0$ درنظر گرفتیم. همین‌امر باعث‌شد که بتوانیم یك عامل x (یا t) را حذف‌کنیم. درغیر این‌صورت، جملاتی به‌شکل $t^2F(t)$ یك مشتق دوم $f(s)$ را وارد می‌کردند وحل معادلهٔ حاصل به‌هیچ وجه‌آسانتر ازمعادلهٔ اصلی نمی‌شد.

اگر از معادلات دیفرانسیل خطی باضرایب ثابت فراتر برویم، بازهم می‌توان تبدیل لاپلاس‌را به‌کاربرد، ولی هیچ تضمینی وجود نداردکه این کارچندان سودمند باشد.

کاربرد تبدیل‌لاپلاس برای معادلهٔ بسل‌با $n\neq 0$ را می‌توان درمراجع‌گوناگون‌یافت. علاوه‌براین، می‌توانیم بانمایش $J_n(t)$ به‌صورت یك‌سری نامتناهی‌وتبدیل کردن‌جمله‌به‌جملهٔ آن نشان دهیم که

$$\mathcal{L}\{J_n(at)\}=\frac{a^{-n}(\sqrt{s^2+a^2}-s)^n}{\sqrt{s^2+a^2}} \qquad (۱۸۶.۱۵)$$

انتگرالگیری ازتبدیلها

بازهم برای $F(t)$، که دست‌کم پاره‌پاره پیوسته‌است، و x آنقدربزرگ‌که $e^{-xt}F(t)$ (در حد $x\to\infty$) به‌صورت نمایی‌نزول‌کند، انتگرال‌زیر نسبت‌به x به‌صورت یکنواخت‌همگراست

$$f(x)=\int_0^\infty e^{-xt}F(t)dt \qquad (۱۸۷.۱۵)$$

به‌همین دلیل می‌توانیم ترتیب انتگرالگیری را درمعادلهٔ زیرمعکوس کنیم

$$\begin{aligned}\int_s^b f(x)dx &= \int_s^b\int_0^\infty e^{-xt}F(t)dt\,dx \\ &= \int_0^\infty \frac{F(t)}{t}(e^{-st}-e^{-bt})dt\end{aligned} \qquad (۱۸۸.۱۵)$$

که در قسمت آخر، انتگرال برحسب x را محاسبه‌کرده‌ایم. حد پایین s را چندان بزرگ می‌گیریم که $f(s)$ درون‌ناحیهٔ همگرایی یکنواخت‌قرارگیرد. اکنون باقراردادن $b\to\infty$، داریم

$$\begin{aligned}\int_s^\infty f(x)dx &= \int_0^\infty \frac{F(t)}{t}e^{-st}dt \\ &= \mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\}\end{aligned} \qquad (۱۸۹.۱۵)$$

مشروط بر آنکه $F(t)/t$ در $t=0$ متناهی بماند و یا به‌صورتی ضعیفتر از t^{-1} واگرا شود (به‌طوری که $\mathcal{L}\{F(t)/t\}$ وجود داشته باشد).

حدود انتگرالگیری ـ تابع پله‌ای واحد

حدود واقعی انتگرال مربوط به‌تبدیل لاپلاس را می‌توان با تابع پله‌ای واحد (هویساید) مشخص کرد

$$u(t-k)=\begin{cases}0, & t<k\\ 1, & t>k\end{cases}$$

مثلا

$$\mathcal{L}\{u(t-k)\}=\int_k^\infty e^{-st}\,dt$$
$$=\frac{1}{s}e^{-ks}$$

هر پالس مستطیلی به‌عرض k و ارتفاع واحد را می‌توان به‌کمك $F(t)=u(t)-u(t-k)$ توصیف کرد. پس از گرفتن تبدیل لاپلاس، داریم

$$\mathcal{L}\{u(t)-u(t-k)\}=\int_0^k e^{-st}dt$$
$$=\frac{1}{s}(1-e^{-ks})$$

تابع پله‌ای واحد در معادلهٔ (۱۶۳.۱۵) هم به‌کار رفته است، و می‌توان آن را در مسئلهٔ ۱۳.۱۰.۱۵ نیز جستجو کرد.

مسائل

۱.۱۰.۱۵ معادلهٔ (۱۵۴.۱۵) را که توصیفگر یك نوسانگر هماهنگ سادهٔ میراست، با شرایط $X(0)=X_0$، $X'(0)=0$ در هریك از حالتهای زیر حل کنید

(الف) $b^2=4km$ (میرای بحرانی)،

(ب) $b^2>4km$ (تند میرا).

پاسخ. (الف) $X(t)=X_0e^{-(b/2m)t}\left(1+\frac{b}{2m}t\right)$.

۲.۱۰.۱۵ معادلهٔ (۱۵۴.۱۵)، که توصیفگر یك نوسانگر هماهنگ سادهٔ میراست، باشرایط $X(0)=0$، $X'(0)=v_0$، درهریك ازحالتهای زیرحل کنید

(الف) $b^2<4km$ (کند میرا)،

(ب) $b^2=4km$ (میرای بحرانی).

پاسخ. (الف) $X(t)=\dfrac{v_0}{\omega_1}e^{-(b/2m)t}\sin\omega_1 t$

(ب) $X(t)=v_0 t\, e^{-(b/2m)t}$

(ج) $b^2>4km$ (تند میرا).

۳.۱۰.۱۵ حرکت جسمی را که در یك محیط مقاوم سقوط می‌کند، می‌توان توسط معادلهٔ زیر توصیف کرد

$$m\frac{d^2X(t)}{dt^2}=mg-b\frac{dX(t)}{dt}$$

که درآن نیروی ترمزی باسرعت متناسب است. $X(t)$ و $dX(t)/dt$ را برای شرایط اولیهٔ زیر به‌دست آورید

$$X(0)=\left.\frac{dX}{dt}\right|_{t=0}=0$$

۴.۱۰.۱۵ مدار حلقه‌ای. در برخی مدارهای الکترونیکی، مقاومت، القاگر، و خازن را به‌صورت موازی درمدارمسطح قرارمی‌دهند (شکل ۱۱.۱۵). ولتاژ ثابتی در دوسر عناصر موازی درمدار برقرارمی‌شود که خازن‌را باردارمی‌کند. در لحظهٔ $t=0$ منبع ولتاژرا ازمدار خارج می‌کنیم. ولتاژ دوسر عناصر موازی R، L، و C را به‌صورت تابعی‌از زمان به‌دست آورید. R را بزرگ بگیرید.

راهنمایی. ازقوانین کیرشهوف داریم

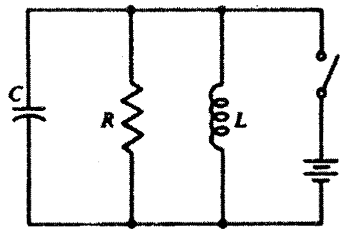
$$I_R+I_C+I_L=0 \quad \text{و} \quad E_R=E_C=E_L$$

که در آن

$$E_R=I_R R$$

$$E_C=\frac{q_0}{C}+\frac{1}{C}\int_0^t I_C\,dt$$

$$E_L=L\frac{dI_L}{dt}$$



شکل ۱۱۰۱۵ مدارحلقه‌ای.

$$q_{\circ} = \text{باراولیهٔ خازن}$$

اگر امپدانس dc عبارت باشد از $L=\circ$، قرار دهید $I_L(\circ)=I_{\circ}$، $E_L(\circ)=\circ$. یعنی: $q_{\circ}=\circ$.

۵۰۱۰۰۱۵ برای $J_{\circ}(t)$ که به‌صورت یک انتگرال پربندی بیان شده است، از عمل تبدیل لاپلاس استفاده کنید، ترتیب انتگرالگیری‌را معکوس کنید واز آنجا نشان دهید که

$$\mathcal{L}\{J_{\circ}(t)\}=(s^{\text{۲}}+\text{۱})^{-\text{۱}/\text{۲}}, \quad s>\circ \text{ به‌ازای}$$

۶۰۱۰۰۱۵ بااستفاده ازرابطهٔ بازگشتی تابع بسل، تبدیل لاپلاس $J_n(t)$ را از $\mathcal{L}\{\mathbf{J}_{\circ}(t)\}$ به‌دست آورید.

راهنمایی. دراینجا فرصت خوبی فراهم آمده که ازاستقرای ریاضی بهره‌گیرید.

۷۰۱۰۰۱۵ در محاسبهٔ میدان مغناطیسی یک حلقهٔ دایره‌ای جریان در مختصات استوانه‌ای، به‌انتگرال زیر برمی‌خوریم

$$\int_{\circ}^{\infty} e^{-kz}\, kJ_{\text{۱}}(ka)\,dk, \quad \mathcal{R}(z)\geqslant \circ$$

نشان دهید که جواب این انتگرال عبارت است از $a/(z^{\text{۲}}+a^{\text{۲}})^{\text{۳}/\text{۲}}$.

۸۰۱۰۰۱۵ پتانسیل الکتروستاتیکی بارنقطه‌ای q واقع درمبدأ مختصات استوانه‌ای عبارت است از

$$\frac{q}{\text{۴}\pi\varepsilon_{\circ}}\int_{\circ}^{\infty} e^{-kz} J_{\circ}(k\rho)\,dk=\frac{q}{\text{۴}\pi\varepsilon_{\circ}}\cdot\frac{\text{۱}}{(\rho^{\text{۲}}+z^{\text{۲}})^{\text{۱}/\text{۲}}}, \quad \mathcal{R}(z)\geqslant \circ$$

با استفاده از این رابطه نشان دهیــد که تبدیلهـای فوریهٔ کسینوسی و سینـوسی $J_{0}(k\rho)$ عبارت‌اند از

(الف)
$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}F_{c}\{J_{0}(k\rho)\}=\int_{0}^{\infty}J_{0}(k\rho)\cos k\zeta dk=\begin{cases}(\rho^{2}-\zeta^{2})^{-1/2}, & \rho>\zeta\\ 0, & \rho<\zeta\end{cases}$$

(ب)
$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}F_{s}\{J_{0}(k\rho)\}=\int_{0}^{\infty}J_{0}(k\rho)\sin k\zeta\, dk=\begin{cases}0, & \rho>\zeta\\ (\zeta^{2}-\rho^{2})^{-1/2}, & \rho<\zeta\end{cases}$$

راهنمایی. به‌جای z عبارت $z+i\zeta$ را بنشانید وحد $z\to 0$ را بگیرید.

۹.۱۰.۱۵ نشان دهید که

$$\mathcal{L}\{I_{0}(at)\}=(s^{2}-a^{2})^{-1/2},\quad s>a$$

۱۰.۱۰.۱۵ درستی تبدیلهای لاپلاس زیر را تحقیق کنید

(الف)
$$\mathcal{L}\{j_{0}(at)\}=\mathcal{L}\left\{\frac{\sin at}{at}\right\}=\frac{1}{a}\cot^{-1}\left(\frac{s}{a}\right)$$

(ب) $\mathcal{L}\{n_{0}(at)\}$ وجود ندارد.

(ج)
$$\mathcal{L}\{i_{0}(at)\}=\mathcal{L}\left\{\frac{\sinh at}{at}\right\}=\frac{1}{2a}\ln\frac{s+a}{s-a}$$

$$=\frac{1}{a}\coth^{-1}\left(\frac{s}{a}\right)$$

(د) $\mathcal{L}\{k_{0}(at)\}$ وجود ندارد.

۱۱.۱۰.۱۵ جواب تبدیل لاپلاس معادلهٔ لاگرزیر را به‌دست آورید

$$tF''(t)+(1-t)F'(t)+nF(t)=0$$

توجه کنید که به‌مشتق تبدیل و تبدیل مشتقها نیاز دارید حل مسئله را تا آنجا که می‌توانید با $n=n$ ادامه دهید؛ آنگاه (و نه پیش از آن) قرار دهید $n=0$.

۱۲.۱۰.۱۵ نشان دهید کــه تبدیل لاپلاس چندجملــه‌ای لاگر $L_n(at)$ از رابطهٔ زیــر به‌دست می‌آید

$$\mathcal{L}\{L_n(at)\}=\frac{(s-a)^n}{s^{n+1}}, \quad s>0$$

۱۳.۱۰.۱۵ نشان دهید

$$\mathcal{L}\{E_1(t)\}=\frac{1}{s}\ln(s+1), \quad s>0$$

که در آن

$$E_1(t)=\int_t^{\infty}\frac{e^{-\tau}d\tau}{\tau}=\int_1^{\infty}\frac{e^{-xt}}{x}\,dx$$

$E_1(t)$ تابع انتگرال نمایی است.

۱۴.۱۰.۱۵ (الف) با استفاده از معادلهٔ (۱۸۹.۱۵) نشان دهید که

$$\int_0^{\infty} f(x)dx=\int_0^{\infty}\frac{F(t)}{t}\,dt$$

مشروط بر آنکه انتگرالها وجود داشته باشند.

(ب) با استفاده از نتیجهٔ بالا نشان دهید

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}$$

که با معادلات (۱۲۲.۱۵) و(۴۱.۷) سازگار است.

۱۵.۱۰.۱۵ (الف) نشان دهید

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin kt}{t}\right\}=\cot^{-1}\left(\frac{s}{k}\right)$$

(ب) با استفاده از این نتیجه (با $k=1$)، ثابت کنید

$$\mathcal{L}\{si(t)\} = -\frac{1}{s}\tan^{-1}s$$

که در آن $si(t)$، انتگرال سینوس، بنابر تعریف عبارت است از

$$si(t) = -\int_t^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

۱۶۰۱۰۰۱۵ اگر $F(t)$ تابعی دوره‌ای بادورهٔ تناوب a باشد (شکل ۱۲۰۱۵) به‌طوری که به‌ازای همهٔ مقادیر $t \geqslant 0$ داشته باشیم: $F(t+a) = F(t)$، نشان دهید

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{\int_0^a e^{-st}F(t)dt}{1-e^{-as}}$$

که در آن انتگرالگیری فقط روی اولین دورهٔ تناوب $F(t)$ صورت می‌گیرد.

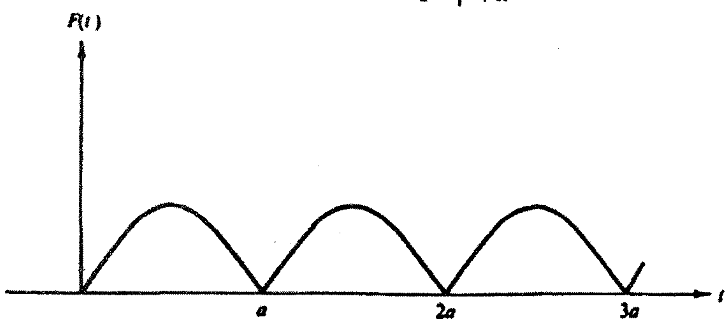
۱۷۰۱۰۰۱۵ تبدیل لاپلاس موج مربعی (بادورهٔ تناوب a) را بیابید که بنابرتعریف عبارت است از

$$F(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < a/2 \\ 0, & a/2 < t < a \end{cases}$$

پاسخ. $f(s) = \frac{1}{s} \times \frac{1-e^{-as/2}}{1-e^{-as}}$.

۱۸۰۱۰۰۱۵ نشان دهید

(الف) $$\mathcal{L}\{\cosh at \cos at\} = \frac{s^3}{s^4+4a^4}$$



شکل ۱۲۰۱۵ تابع دوره‌ای.

$$\mathcal{L}\{\cosh at \sin at\} = \frac{as^۲ + ۲a^۳}{s^۴ + ۴a^۴} \qquad \text{(ب)}$$

$$\mathcal{L}\{\sinh at \cos at\} = \frac{as^۲ - ۲a^۳}{s^۴ + ۴a^۴} \qquad \text{(ج)}$$

$$\mathcal{L}\{\sinh at \sin at\} = \frac{۲a^۲ s}{s^۴ + ۴a^۴} \qquad \text{(د)}$$

۱۹.۱۰.۱۵ نشان دهید

$$\mathcal{L}^{-۱}\{(s^۲ + a^۲)^{-۲}\} = \frac{۱}{۲a^۳}\sin at - \frac{۱}{۲a^۲} t \cos at \qquad \text{(الف)}$$

$$\mathcal{L}^{-۱}\{s(s^۲ + a^۲)^{-۲}\} = \frac{۱}{۲a} t \sin at \qquad \text{(ب)}$$

$$\mathcal{L}^{-۱}\{s^۲(s^۲ + a^۲)^{-۲}\} = \frac{۱}{۲a}\sin at + \frac{۱}{۲} t \cos at \qquad \text{(ج)}$$

$$\mathcal{L}^{-۱}\{s^۳(s^۲ + a^۲)^{-۲}\} = \cos at - \frac{a}{۲} t \sin at \qquad \text{(د)}$$

۲۰.۱۰.۱۵ نشان دهید

$$\mathcal{L}\{(t^۲ - k^۲)^{-۱/۲} u(t-k)\} = K_\circ(ks)$$

راهنمایی. راه حل زیررا امتحان کنید: یك نمایش انتگرالی $K_\circ(ks)$ را به‌انتگرال تبدیل لاپلاس برگردانید.

۲۱.۱۰.۱۵ تبدیل لاپلاس

$$\int_\circ^\infty e^{-xs} x J_\circ(x)\, dx = \frac{s}{(s^۲+۱)^{۳/۲}}$$

را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\frac{۱}{s^۲}\int_\circ^\infty e^{-y} y J_\circ(y/s)\, dy = \frac{s}{(s^۲+۱)^{۳/۲}}$$

که به‌صورت کوادراتور گاوس-لاگر است. این انتگرال را به‌ازای ... , ۸ر٥ , ۹ر٥ , ۰ر۱ = s محاسبه کنید. یعنی s با گامهای ۱ر٥ نزولی باشد، تا جایی که خطای نسبی تا ده درصد افزایش

یابد (کاهش s باعث می‌شود که انتگرالده، در واحد طول y، تندتر نوسان کند، و در نتیجه دقت کوادراتور عددی کاهش می‌یابد).

۲۲.۱۰.۱۵ (الف) انتگرال

$$\int_{0}^{\infty} e^{-kz}\, k\, J_1(ka)\, dk$$

را به‌کمك کوادراتور گاؤس-لاگر محاسبه کنید. قرار دهید $a=1$ و $z = 0.1 (0.1) 1.0$.

(ب) با استفاده از صورت تحلیلی، مسئلهٔ ۷.۱۰.۱۵، خطای مطلق و خطای نسبی را محاسبه کنید.

۱۱.۱۵ قضیهٔ پیچش یا قضیهٔ فالتونگ

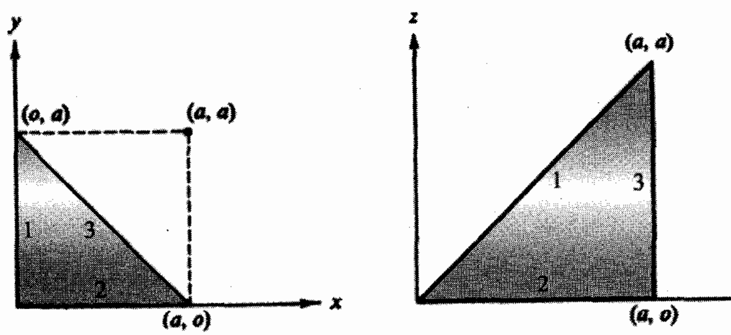
یکی ازمهمترین خواص تبدیل لاپلاس آن است که به‌کمك قضیهٔ پیچش یا فالتونگ بیان می‌شود.[1] دوتبدیل زیر را درهم‌ضرب می‌کنیم

$$f_2(s)=\mathcal{L}\{F_2(t)\} \quad \text{و} \quad f_1(s)=\mathcal{L}\{F_1(t)\} \qquad (۱۹۰.۱۵)$$

برای گریز از پیچیدگیهای ممکن در ضمن عملیات تغییر متغیر، حدود بالایی‌را متناهی نگه می‌داریم

$$f_1(s)\cdot f_2(s)=\lim_{a\to\infty}\int_{0}^{a} e^{-sx}F_1(x)\,dx \int_{0}^{a-x} e^{-sy}F_2(y)\,dy \qquad (۱۹۱.۱۵)$$

حدهای بالایی را چنان برگزیده‌ایم که‌مساحت انتگرالگیری، مطابق شکل ۱۳.۱۵ (الف)، مثلث سایه‌دار، و نه مربع، باشد. اگر روی مربعی درصفحهٔ xy انتگرال بگیریم، در صفحهٔ



شکل ۱۳.۱۵ تغییرمتغیرها، (الف) صفحهٔ xy، (ب) صفحهٔ zt.

---

۱. یك راه دیگربرای استخراج این قضیه آن است که از انتگرال برامویچ (بخش ۱۲.۱۵) بهره‌گیریم. این‌کاردرا موضوع مسئلهٔ ۳.۱۲.۱۵ قرارداده‌ایم.

tz یك‌متوازی‌الاضلاع خواهیم‌داشت، که صرفاً موضوع‌را پیچیده‌ترمی‌کند. علت مجاز بودن این اصلاح آن‌است که فرض‌می‌شود دوانتگرالده به‌صورت نمایی‌افت می‌کنند. سهم‌انتگرال روی مثلث باسطح بدون سایه، در حد $a \to \infty$، صفر است. ناحیهٔ انتگرالگیری، به‌کمك جانشانی $x = t - z$؛ $z = y$، روی مثلثی مطابق شکل ۱۳.۱۵ (ب)، نگاشته‌می‌شود. برای تحقیق دردرستی این‌نگاشت، رئوس $t = x + y$ و $z = y$ را بنگارید. برای تبدیل عنصر مساحت، از ژاکوبی بهره می‌گیریم

$$dx\,dy = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial x}{\partial z} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix} dt\,dz = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} dt\,dz \qquad (۱۹۲.۱۵)$$

یا $dx\,dy = dt\,dz$. معادلهٔ (۱۹۱.۱۵) بااین جانشانی به‌صورت زیردرمی‌آید

$$f_1(s) \cdot f_2(s) = \lim_{a \to \infty} \int_0^a e^{-st} \int_0^t F_1(t-z) F_2(z)\,dz\,dt$$

$$(۱۹۳.۱۵)$$

$$= \mathcal{L}\left\{ \int_0^t F_1(t-z) F_2(z)\,dz \right\}$$

برای راحتی‌کار این انتگرال‌را بانماد زیرنمایش می‌دهند

$$\int_0^t F_1(t-z) F_2(z)\,dz \equiv F_1 * F_2 \qquad (۱۹۴.۱۵)$$

آن‌را پیچش می‌خوانند، که به‌پیچش فوریه خیلی شبیه است (بخش ۵.۱۵). اگر قراردهیم $w = t - z$، خواهیم داشت

$$F_1 * F_2 = F_2 * F_1 \qquad (۱۹۵.۱۵)$$

که نمایانگرتقارن این رابطه است.

باانجام تبدیل وارون، همچنین خواهیم داشت

$$\mathcal{L}^{-1}\{f_1(s) \cdot f_2(s)\} = \int_0^t F_1(t-z) F_2(z)\,dz \qquad (۱۹۶.۱۵)$$

این رابطه درایجاد تبدیلهای جدید و یا به‌عنوان راه حل دیگری برای بسط کسر جزئی سودمند است. یکی‌ازموارد استفادهٔسریع آن‌درحل‌معادله‌های‌انتگرالی‌است (بخش ۲.۱۶ را ببینید). از آنجا که کران بالایی t متغیراست، پیچش لاپلاس درحل‌معادله‌های‌انتگرالی ولترا سودمند

است. پیچش فوریه با کرانهای (نامتناهی) ثابت برای معادله‌های انتگرالی فردهوتم به‌کار می‌رود.

مثال ۱۰۱۱۰۱۵ نوسانگر واداشتهٔ میرا

برای نمایش موارد استفادهٔ قضیهٔ پیچش، باز جرم m روی فنری‌که دارای میرایی است، این‌بار با نیروی محرك $F(t)$را درنظرمی‌گیریم. اکنون معادلهٔحرکت(۱۲۹۰۱۵) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$mX''(t)+bX'(t)+kX(t)=F(t) \tag{۱۹۷۰۱۵}$$

ازشرایطاولیهٔ $X(0)=0$، $X'(0)=0$ برای ساده‌کردن این‌نمایش استفاده‌می‌کنیم.معادلهٔ تبدیل‌شده عبارت است از

$$ms^2x(s)+bs\ x(s)+k\ x(s)=f(s) \tag{۱۹۸۰۱۵}$$

یا

$$x(s)=\frac{f(s)}{m}\times\frac{1}{(s+b/2m)^2+\omega_1^2} \tag{۱۹۹۰۱۵}$$

که درآن، مانند قبل، داریم: $\omega_1^2\equiv(k/m)-(b^2/4m^2)$.

بااستفاده ازقضیهٔ پیچش [معادلهٔ (۱۹۳۰۱۵) یا (۱۹۶۰۱۵)] داریم

$$X(t)=\frac{1}{m\omega_1}\int_0^t F(t-z)e^{-(b/2m)z}\sin\omega_1 z\,dz \tag{۲۰۰۰۱۵}$$

اگر نیرو ضربه‌ای باشد، یعنی $F(t)=P\,\delta(t)$،[1] آنگاه

$$X(t)=\frac{P}{m\omega_1}e^{-(b/2m)t}\sin\omega_1 t \tag{۲۰۱۰۱۵}$$

P نمایانگر تکانه‌ای‌است‌که توسط یك ضربه منتقل‌شده‌است وثابت P/m جای سرعت‌اولیهٔ $X'(0)$ را می‌گیرد.

اگر $F(t)=F_0\sin\omega t$، می‌توان ازمعادلهٔ (۲۰۰۰۱۵) بهره گرفت، ولی شاید بسطی برحسب کسرجزئی مناسبتر باشد. بااعتنا به‌عبارت

$$f(s)=\frac{F_0\omega}{s^2+\omega^2}$$

معادلهٔ (۱۹۹۰۱۵) به‌صورت زیردرمی‌آید

---

۱. توجه‌کنید‌که $\delta(t)$ در داخل بازهٔ $[0, t]$ قرار می‌گیرد.

$$x(s)=\frac{F_0\omega}{m}\times\frac{1}{s^2+\omega^2}\times\frac{1}{(s+b/2m)^2+\omega_1^2}$$

$$=\frac{F_0\omega}{m}\left[\frac{a's+b'}{s^2+\omega^2}+\frac{c's+d'}{(s+b/2m)^2+\omega_1^2}\right] \qquad (۲۰۲.۱۵)$$

ضرایب a'، b'، c'، و d' از s مستقل‌اند. محاسبهٔ مستقیم نشان می‌دهد

$$a'=\frac{b}{m}\omega^2+\frac{m}{b}(\omega_0^2-\omega^2)^2$$

$$b'=-\frac{m}{b}(\omega_0^2-\omega^2)\left[\frac{b}{m}\omega^2+\frac{m}{b}(\omega_0^2-\omega^2)^2\right]$$

با توجه به‌اینکه c' و d' به‌جملاتی (گذرا) منجرمی‌شوندکه به‌صورت نمایی کاهش‌می‌یابند، همین‌جا آنها راکنار می‌گذاریم. پس ازانجام عمل وارون، جواب حالت‌پایا را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$X(t)=\frac{F_0}{[b^2\omega^2+m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2]^{1/2}}\sin(\omega t-\varphi) \qquad (۲۰۳.۱۵)$$

که در آن

$$\tan\varphi=\frac{b\omega}{m(\omega_0^2-\omega^2)}$$

بامشتقگیری ازمخرج، پی‌می‌بریم دامنه هنگامی دارای یك‌بیشینه است که

$$\omega^2=\omega_0^2-\frac{b^2}{2m^2}=\omega_1^2-\frac{b^2}{4m^2} \qquad (۲۰۴.۱۵)$$

این تساوی شرط تشدید به‌شمار می‌آید.[1] درحالت تشدید دامنه برابر $F_0/b\omega_1$ می‌شودکه نشان می‌دهد اگرازمیرایی چشم بپوشیم ($b=0$)، جرم m درحالت تشدید، بینهایت نوسان خواهدکرد. شایان توجه است‌که درحالت تشدید سه بسامد مشخصهٔ متفاوت داریم:
تشدید برای نوسانهای واداشتهٔ میرا

$$\omega_2^2=\omega_0^2-\frac{b^2}{2m^2}$$

بسامد نوسان آزاد، بامیرایی

---

۱. (مجذور) دامنه نوعاً دارای مخرج تشدیدی، به‌شکل خط لورنتس است (مسئلهٔ ۹.۳.۱۵).

$$\omega_1^2=\omega_0^2-\frac{b^2}{4m^2}$$

و نوسان آزاد، بدون میرایی

$$\omega_0^2=\frac{k}{m}$$

این سه نوسان، فقط درشرایط بدون میرایی مساوی خواهند بود.

به‌معادله‌های (۱۹۷.۱۵) و (۱۹۹.۱۵) باز می‌گردیم، معادلهٔ (۱۹۷.۱۵) عبارت است از معادله‌ای دیفرانسیلی که نمایانگر پاسخ یك سیستم دینامیکی به‌یك نیروی محرك اختیاری‌است. روشن‌است که پاسخ نهایی‌هم به‌نیروی محرك بستگی‌دارد وهم به‌مشخصه‌های سیستم. این وابستگی دوگانه درفضای تبدیل جدا می‌شود. تبدیل پاسخ (خروجی) درمعادلهٔ (۱۹۹.۱۵) به‌صورت حاصلضرب دوعامل ظاهرمی‌شود، یکی‌از آنها نیروی محرك(ورودی) ودیگری سیستم دینامیکی‌را توصیف می‌کند. این عامل‌دوم‌را، که ورودی را اصلاح می‌کندو خروجی‌را می‌دهد، غالباً تابع انتقال می‌نامند. درحالت خاص، $[(s+b/2m)^2+\omega_1^2]^{-1}$ عبارت است ازتابع انتقال‌متناظر بانوسانگر میرا. مفهوم تابع انتقال درحوزهٔ سرووه‌مکانیسم کاربرد وسیعی دارد. غالباً مشخصه‌های یك سرووه‌مکانیسم خاص را باارائهٔ تابع انتقال آن توصیف می‌کنند. آنگاه قضیهٔ پیچش، سیگنال خروجی مربوط به‌یك سیگنال ورودی خاص را به‌دست می‌دهد.

مسائل

۱.۱۱.۱۵ بااستفاده ازقضیهٔ پیچش نشان دهید

$$\frac{1}{s}f(s)=\mathcal{L}\left\{\int_0^t F(x)\,dx\right\}$$

که در آن $f(s)=\mathcal{L}\{F(t)\}$.

۲.۱۱.۱۵ اگر $F(t)=t^a$ و $G(t)=t^b$، $a>-1$، $b>-1$

(الف) نشان دهیدکه پیچش عبارت‌است از

$$F*G=t^{a+b+1}\int_0^1 y^a(1-y)^b\,dy$$

(ب) بااستفاده ازقضیهٔ پیچش نشان دهید

$$\int_0^1 y^a(1-y)^b\,dy=\frac{a!b!}{(a+b+1)!}$$

اگر به‌جای a کمیت $1-a$ و به‌جای b کمیت $1-b$ را بنشانیم، فرمول اویلر را برای تابع بتا [معادلهٔ (۶۰.۱۰)] به‌دست می‌آوریم.

۳.۱۱.۱۵ با استفاده از انتگرال پیچش، تبدیل وارون زیر را محاسبه کنید

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right\}, \quad a^2 \neq b^2$$

۴.۱۱.۱۵ یک نوسانگر نامیرا تحت تأثیر نیروی محرک $F_0 \sin \omega t$ واقع می‌شود. جابه‌جایی را به‌صورت تابعی از زمان مشخص کنید. توجه کنید که این جابه‌جایی ترکیبی خطی است از دو حرکت هماهنگ ساده، یکی با بسامد نیروی محرک و دیگری با بسامد، ω_0، نوسانگر آزاد [فرض کنید که $X(0)=X'(0)=0$].

پاسخ. $X(t)=\dfrac{F_0/m}{\omega^2-\omega_0^2}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\sin \omega_0 t-\sin \omega t\right)$.

مسائل دیگری که متضمن پیچش لاپلاس باشند، در بخش ۲.۱۶ می‌آیند.

۱۲.۱۵ تبدیل وارون لاپلاس

انتگرال برامویچ

اینک عبارتی را برای تبدیل وارون لاپلاس، $\mathcal{L}^{-1}$، تشکیل می‌دهیم که در معادلهٔ زیر ظاهر می‌شود

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} \qquad (۲۰۵.۱۵)$$

یکی از رهیافتها، استفاده از تبدیل فوریه است که رابطهٔ وارون‌را درمورد آن می‌دانیم. ولی بر سر انجام این کار مشکلی وجود دارد. تابع تبدیل‌پذیر فوریهٔ ما بایددر شرایط دیریکله صدق کند. علی‌الخصوص اینکه، باید داشته باشیم

$$\lim_{\omega \to \infty} G(\omega)=0 \qquad (۲۰۶.۱۵)$$

به‌طوری که انتگرال نامتناهی خوش‌تعریف باشد.[1] در حالی که اکنون با توابعی مانند $F(t)$ سروکار داریم که ممکن است به‌صورت نمایی واگرا شوند. برای رفع این مشکل، یک عامل نمایی، $e^{\gamma t}$، را از تابع لاپلاس (احتمالا) واگرا جدا می‌کنیم و می‌نویسیم

$$F(t)=e^{\gamma t}\, G(t) \qquad (۲۰۷.۱۵)$$

---

۱. اگر توابع دلتا را منظور کنیم، $G(\omega)$ می‌تواند یک کسینوس باشد، باوجودآنکه این تابع در معادلهٔ (۲۰۶.۱۵) صدق نمی‌کند، ولی بازهم محدود است.

اگر $F(t)$ به‌صورت $e^{\alpha t}$ واگرا شود، این شرط را قرار می‌دهیم که γ از α چندان بزرگتر باشد که $G(t)$ همگرا شود. اینك با این $G(t)$ که به‌ازای $t<0$ برابر صفر است، و در سایر حالتها به‌اندازهٔ کافی محدود است به‌طوری که می‌توان آن‌را توسط یك انتگرال فوریه نمایش داد [معادلهٔ (۲۰۰۱۵)]، داریم

$$G(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}du\int_{0}^{\infty} G(v)\,e^{-iuv}\,dv \qquad (۲۰۸۰۱۵)$$

معادلهٔ (۲۰۸۰۱۵) را، با بهره‌گیری ازمعادلهٔ (۲۰۷۰۱۵) به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$F(t)=\frac{e^{\gamma t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\,du\int_{0}^{\infty} F(v)\,e^{-\gamma v}e^{-iuv}\,dv \qquad (۲۰۹۰۱۵)$$

اکنون انتگرال روی v، با تغییر متغیر

$$s=\gamma+iu \qquad (۲۱۰۰۱۵)$$

به‌صورت یك تبدیل لاپلاس درمی‌آید

$$\int_{0}^{\infty} F(v)e^{-sv}\,dv=f(s) \qquad (۲۱۱۰۱۵)$$

اکنون s متغیری مختلط است و برای آنکه همگرایی تضمین شود، باید داشته باشیم: $\mathcal{R}(s)\geqslant\gamma$. دقت کنید که تبدیل لاپلاس، تابعی‌را که روی محور حقیقی مثبت مشخص شده‌است روی صفحهٔ مختلط در $\mathcal{R}(s)\geqslant\gamma$ می‌نگارد.[1]

به‌ازای مقدار ثابت γ داریم: $ds=idu$. با نشاندن معادلهٔ (۲۱۱۰۱۵) در معادلهٔ (۲۰۹۰۱۵)

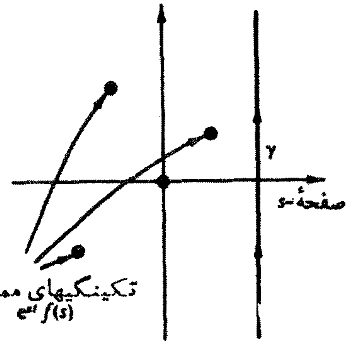
$$F(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}f(s)\,ds \qquad (۲۱۲۰۱۵)$$

این عبارت همان تبدیل وارون مورد نظر ماست. خط انتگرالگیری را (با استفاده از $ds=idu$) ۹۰° چرخانده‌ایم. مسیر به‌یك خط قائم نامتناهی در صفحهٔ مختلط مبدل شده است؛ ثابت γ را طوری گرفته‌ایم که همهٔ تکینگیهای $f(s)$ درسمت چپ این‌خط قرار گیرد (شکل ۱۴۰۱۵).

تبدیل وارون، معادلهٔ (۲۱۲۰۱۵)، را معمولاً انتگرال برامویچ می‌نامند، گرچه گاهی

۱. یکی از روشهای استخراج تبدیل وارون لاپلاس تنها با استفاده ازمتغیرهای حقیقی را می‌توان درمقالهٔ زیر یافت:

Bohn, C. L., and R. W. Flynn, "Real Variable Inversion of Laplace Transforms: An Application in Plasma Physics." *Am. J. Phys.* **46**, 1250, (1978).



شکل ۱۴.۱۵ تکینگیهای $e^{st}f(s)$.

هم آن‌را قضیهٔ فوریه‌ـملین یاانتگرال فوریه‌ـملین می‌گویند. اکنون می‌توان این انتگرال را باروشهای متداول انتگرالگیری پربندی (فصل ۷) محاسبه کرد. اگر $t>0$، پربند را می‌توان توسط یك نیمدایرهٔ نامتناهی درنیم صفحهٔ سمت چپی بست. آنگاه بااستفاده از قضیهٔ مانده (بخش ۲.۷) داریم

$$F(t)=\sum(\text{مانده‌های موجود در } \mathcal{R}(s)<\gamma) \qquad (۲۱۳.۱۵)$$

ممکن‌است این‌نحوهٔ محاسبهٔ انتگرال، کـه درآن $\mathcal{R}(s)$ درگسترهٔ مقادیـر منفی قرار می‌گیرد، از لحاظ شرط قبلی $\mathcal{R}(s)>\gamma$، یك پارادوکس بنماید. این پارادوکس وقتی از بین می‌رودکه به‌خاطر بیاوریم، شرط تعریف کنندهٔ $f(s)$، یعنی $\mathcal{R}(s)\geqslant\gamma$، برای تضمین همگرایی انتگرال تبدیل لاپلاس برقرار شده است. هنگامی که $f(s)$ را به‌دست آوردیم، می‌توانیم ادامه دهیم و خواص آن را، در هر جاکه بخواهیم، به‌عنوان یك تابع تحلیلی در صفحهٔ‌مختلط مورداستفاده قراردهیم.[1] درواقع درست همان‌طورکه‌از رابطهٔ بازگشتی‌مربوط به‌تابع فـاکتوریل برای ادامه دادن تعریف انتگـرال اویلر [معادلهٔ (۵.۱۰)] به‌نیم صفحهٔ سمت چپ استفاده شد، دراینجا هم برای به‌دست آوردن $\mathcal{L}\{F(t)\}$ درنیم‌صفحهٔ سمت چپ تمدید تحلیلی‌را به‌کاربرده‌ایم.

شاید یکی دومثال نحوهٔ محاسبهٔ معادلهٔ (۲۱۲.۱۵) را روشنترسازد.

مثال ۱.۱۲.۱۵ وارون‌سازی ازطریق حساب مانده‌ها

اگر $f(s)=a/(s^2-a^2)$، آنگاه

---

۱. ممکن است درمحاسبات عددی، $f(s)$ تنها بـه‌ازای مقادیرمثبت، حقیقی، و گسستهٔ s قابل حصول‌باشد. درآن‌صورت روشهای عددی مشخص‌می‌شوند. بخش ۸.۱۵ ومرجع‌مربوط به‌کریلوف و اسکوبلیا را ببینید.

$$e^{st}f(s)=\frac{ae^{st}}{s^{2}-a^{2}}=\frac{ae^{st}}{(s+a)(s-a)} \qquad (۲۱۴.۱۵)$$

مانده‌ها را می‌توان با استفاده از مسئلهٔ ۱.۱.۷ یا به‌طریقی دیگر به‌دست آورد. قدم اول مشخص کردن تکینگیها، یا قطبهاست. دراینجا یك قطب ساده در $s=a$ ویك قطب سادهٔ دیگر در $s=-a$ داریم. مانده در $s=a$، بااستفاده ازمسئلهٔ ۱.۱.۷ برابر $(1/2)e^{at}$ است ومانده در $s=-a$ برابر $(-1/2)e^{-at}$ است. لذا داریم

$$\text{مانده‌ها}=\left(\frac{1}{2}\right)(e^{at}-e^{-at})=\sinh at=F(t) \qquad (۲۱۵.۱۵)$$

که بامعادلهٔ (۱۰۵.۱۵) سازگار است.

مثال ۲.۱۲.۱۵

اگر داشته باشیم

$$f(s)=\frac{1-e^{-as}}{s}$$

آنگاه داریم

$$e^{st}f(s)=\frac{e^{st}}{s}-e^{-as}\left(\frac{e^{st}}{s}\right) \qquad (۲۱۶.۱۵)$$

اولین جملهٔ سمت راست یك قطب ساده در $s=0$ دارد بامانده‌ای برابر واحد. بنابراین بااستفاده ازمعادلهٔ (۲۱۳.۱۵) داریم

$$F_1(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases} \qquad (۲۱۷.۱۵)$$
$$=u(t)$$

که درآن $u(t)$ تابع پله‌ای واحد است. جملهٔ دوم سمت راست نیز، مستقل از علامت منها و e^{-as}، یك قطب ساده در $s=0$ دارد بامانده‌ای برابر واحد. باتوجه به‌خاصیت انتقال [معادلهٔ (۱۶۴.۱۵)]، داریم

$$F_2(t)=\begin{cases}1, & t-a>0\\ 0, & t-a<0\end{cases} \qquad (۲۱۸.۱۵)$$
$$=u(t-a)$$

بنابراین

$$F(t)=F_1(t)-F_2(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & 0<t<a \\ 0, & t>a \end{cases} \qquad (۲۱۹.۱۵)$$
$$=u(t)-u(t-a)$$

یك تابع پله‌ای به‌ارتفاع واحد وطول a (شکل ۱۵.۱۵).

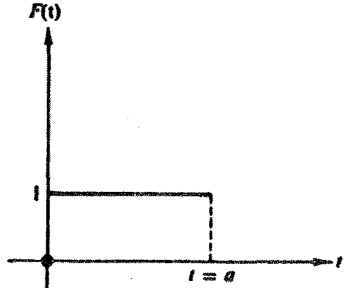
دونکته شایان ذکر است. نخست آنکه این دومثال حتی گوشه‌ای از فواید و کارایی انتگرال برامویچ‌را نیزنشان‌نمی‌دهند. این‌انتگرال همواره، درمواردی‌که جدول تبدیلهای لاپلاس کفایت نمی‌کند، برای یافتن تبدیل وارون قابل حصول است.

ثانیاً، این استنتاج چندان دقیق جلوه‌نمی‌کند. بلکه به‌صورت برهانی موجه‌نما ارائه می‌شود، هرچندکه می‌توان آن‌را به‌دقت هم بیان‌کرد. تعیین تبدیل وارون تـا حدودی شبیه به‌حل یك معادلهٔ دیفرانسیل است. چگونگی دستیابی به‌جواب دراصل قضیه تفاوت‌چندانی پدید نمی‌آورد. در صورت تمایل می‌توانید آن‌را حدس بزنید. درستی جواب را همواره می‌توان بانشاندن آن درمعادلهٔ دیفرانسیل اصلی تحقیق‌کرد. به‌همین‌ترتیب، $F(t)$ رامی‌توان (و برای‌آزمودن خطاهای بی‌انتها باید) ازاین طریق‌آزمودکه معادلهٔ (۹۹.۱۵) در رابطهٔ زیرصدق می‌کند یا خیر

$$\mathcal{L}\{F(t)\}=f(s)$$

دوروش دیگراستخراج انتگرال برامویچ موضوع مسائل۱.۱۲.۱۵ و ۲.۱۲.۱۵را تشکیل می‌دهند.

به‌عنوان آخرین مثال‌ازمواردا‌ستفادهٔ تبدیل وارون لاپلاس، نتایجی ازکارهای بریلوئن و زومرفلد (۱۹۱۴) درنظریهٔ الکترومغناطیسی را بیان می‌کنیم.



شکل ۱۵.۱۵ تابع پله‌ای به‌طول متناهی $u(t)-u(t-a)$.

مثال ۳.۱۲.۱۵ سرعت امواج الکترومغناطیسی در یك محیط پاشنده سرعت‌گروه امواج پیشرونده، u، به‌واسطهٔ معادلهٔ زیر به‌سرعت فاز ربط پیدا می‌کند

$$u=v-\lambda\frac{dv}{d\lambda} \tag{۲۲۰.۱۵}$$

در اینجا λ طول‌موج است. در مجاورت یك خط جذب (تشدیدی)، $dv/d\lambda$ می‌تواند آنقدر منفی باشد که $u>c$ (شکل ۱۶.۱۵). بلافاصله این سؤال مطرح می‌شود که آیا یك سیگنال می‌تواند با سرعتی بیش از c، سرعت نور در خلأ، انتقال یابد؟ این پرسش که طرح آن بر پایهٔ بامعنی بودن سرعت‌گروه مبتنی است، در نظریهٔ نسبیت خاص دارای اهمیت زیادی است.

برای معادلهٔ موج

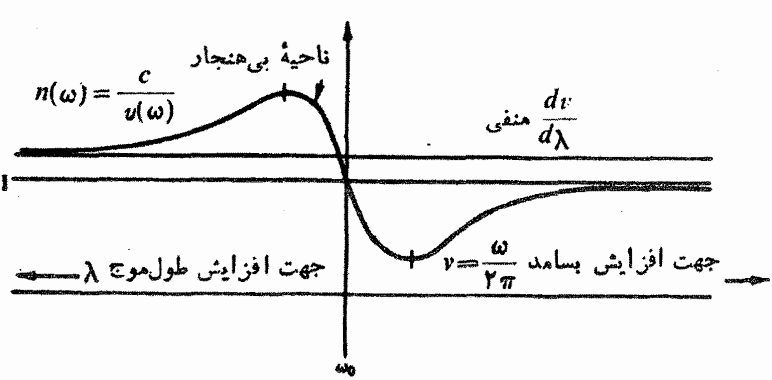
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{۲۲۱.۱۵}$$

به‌جوابی نیاز داریم که با ارتعاشی هماهنگ متناظر باشد که در لحظهٔ صفر از مبدأ شروع می‌شود. از آنجا که محیط موردنظر، پاشنده است، v تابعی از بسامد زاویه‌ای است. مثلاً، موج تختی با بسامد زاویه‌ای ω در نظر بگیرید که بر روزنه‌ای واقع در مبدأ فرود آید. در $t=0$، روزنه (فوراً) بازمی‌شود و موج می‌تواند در امتداد محور x مثبت پیش‌رود.

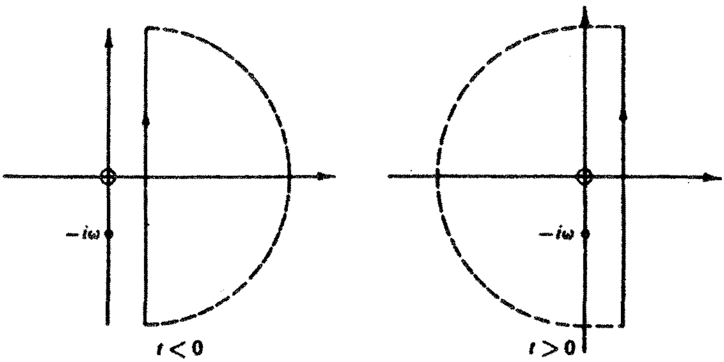
جوابی را تشکیل دهیم که در $x=0$ شروع می‌شود. بهتر است که از فرمول انتگرال کوشی، معادلهٔ (۴۳.۶)، بهره گیریم

$$\psi(0,t)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{e^{-izt}}{z-z_0}\,dz=e^{-iz_0t}$$

(روی پربندی که $z=z_0$ را درسوی مثبت دور می‌زند). با استفاده از $s=-iz$ و $z_0=\omega$، خواهیم داشت



شکل ۱۶.۱۵ پاشندگی اپتیکی.



شکل ۱۷۰۱۵ پربندهای بستهٔ ممکن.

$$\psi(0, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{st}}{s+i\omega}\,ds = \begin{cases} 0, & t<0 \\ e^{-i\omega t}, & t>0 \end{cases} \qquad (222.15)$$

برای آنکه حلقه کامل شود، مطابق شکل ۱۷۰۱۵، انتگرال را روی خط عمودی $\mathcal{R}(s)=\gamma$ و یك نیمدایرهٔ نامتناهی می‌گیریم. مکان نیمدایرهٔ نامتناهـی را طوری انتخاب می‌کنیم که انتگرال روی آن صفر شود. یعنی به‌ازای $t<0$، نیمدایره‌ای‌را می‌گیریم که درنیم‌صفحهٔ‌چپ واقع باشد ومانده‌هارا دربرگیرد. به‌ازای $t>0$، نیم صفحهٔ راست را انتخاب می‌کنیم که هیچ‌گونه تکینگی‌را دربرنمی‌گیرد. این نکته‌راکه این‌انتگرال همان انتگرال برامویچ‌است می‌توان بابهره‌گیری ازتبدیل لاپلاس ونیزباتوجه به‌عبارت زیراثبات کرد

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ e^{-i\omega t}, & t>0 \end{cases} \qquad (223.15)$$

تابع تبدیل شده، $f(s)$، به‌صورت زیرخواهد بود

$$f(s) = \frac{1}{s+i\omega} \qquad (224.15)$$

انتگرال کوشی-برامویچ، وابستگی زمانی موجی‌را به‌دست می‌دهدکه در $t=0$ مبدأ را ترك می‌کند. برای اینکه وابستگی مکانی را به‌حساب آوریم به‌این‌نکته توجه می‌کنیم که

$$e^{s(t-x/v)}$$

درمعادلهٔ موج صدق‌می‌کند. بااستفاده ازاین سرنخ به‌جای t عبارت $t-x/v$ را می‌نشانیم ویکی از جوابهارا به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\psi(x, t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{e^{s(t-x/v)}}{s+i\omega}\,ds \qquad (۲۲۵.۱۵)$$

موقع استخراج انتگرال براموییچ دیدیم که در تبدیل فوریه متغیر s به‌جای ω می‌نشیند. به‌این دلیل سرعت موج، v، به‌صورت تابعی از s، یعنی $v(s)$، درمی‌آید. شکل خاصی از این تابع‌را در اینجا درنظر نداریم. فقط به‌خاصیت زیر نیاز داریم

$$\lim_{|s|\to\infty} v(s)=\text{const.}, c \qquad (۲۲۶.۱۵)$$

این نکته از رفتار مجانبی منحنی سمت‌راست شکل ۱۶.۱۵ ناشی می‌شود.[1]

معادلهٔ (۲۲۵.۱۲) را به‌کمك حساب مانده‌ها محاسبه می‌کنیم، برای این کار با اتکا به‌شرط

$$t-\frac{x}{c}<0$$

مسیر انتگرالگیری‌را با نیمدایرهٔ واقع در نیم‌صفحهٔ راست می‌بندیم. لذا

$$\psi(x, t)=0, \quad t-\frac{x}{c}<0 \qquad (۲۲۷.۱۵)$$

معنی‌این نکته آن‌است که سیگنال‌ما نمی‌تواند باسرعتی بیش‌ازسرعت‌نوردرخلأ، c، حرکت کند. زومرفلد و بریلوئن برای نمایش چگونگی پیشروی موج در محیط‌پاشنده، به‌این‌نتیجهٔ ساده ودرعین حال مهم دست یافتند.

جمعبندی ـ وارونی تبدیل لاپلاس

۱. استفادهٔ مستقیم از جدولها، جدول ۲.۱۵، و مراجع؛ استفاده ازکسرهای جزئی (بخش ۸.۱۵) وقضیه‌های عملگری جدول ۱.۱۵.

۲. انتگرال براموییچ، معادلهٔ (۲۱۲.۱۵)، وحساب مانده‌ها.

۳. وارون‌سازی عددی بخش ۸.۱۵ ومراجع.

مسائل

۱.۱۲.۱۵ انتگرال براموییچ را ازفرمول انتگرال کوشی به‌دست آورید.

راهنمایی. تبدیل وارون $\mathcal{L}^{-1}$ را درمورد تابع زیر به‌کار ببندید

---

۱. معادلهٔ (۲۲۶.۱۵) بادقت زیاد ازنظریهٔ پاشندگی بی‌هنجار به‌دست‌می‌آید. روابط پاشندگی اپتیکی کرونیگ‌ـ‌کرامرز دربخش ۳.۷ را نیزببینید.

$$f(s)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\alpha\to\infty}\int_{\gamma-i\alpha}^{\gamma+i\alpha}\frac{f(z)}{s-z}\,dz$$

که درآن $f(z)$ بهازای $\mathcal{R}(z)\geqslant\gamma$ تحلیلی است.

۲.۱۲.۱۵ عملیات خود را باانتگرال زیر آغاز کنید

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{st}f(s)ds$$

آنگاه بامعرفی تساوی

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-sz}F(z)dz$$

نشان دهیدکه می‌توانیم یك انتگرال را بهشکل نمایش فوریهٔ تابع دلتای دیراك درآوریم. تبدیل وارون لاپلاس‌را ازاین عبارت استخراج کنید.

۳.۱۲.۱۵ قضیهٔ پیچش تبدیل لاپلاس‌را بابهره‌گیری ازانتگرال براومیچ استخراج کنید.

۴.۱۲.۱۵ تبدیل وارون

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-k^2}\right\}$$

را بهدوروش زیر پیداکنید

(الف) ازطریق بسط برحسب‌کسرهای جزئی، (ب) بااستفاده ازانتگرال براومیچ.

۵.۱۲.۱۵ تبدیل وارون

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k^2}{s(s^2+k^2)}\right\}$$

را بههریك ازروشهای زیر محاسبه‌کنید.

(الف) بااستفاده از بسط برحسب کسرهای جزئی، (ب) بااستفاده از قضیهٔ پیچش، (ج) بااستفاده ازانتگرال براومیچ.

پاسخ. $F(t)=1-\cos kt$.

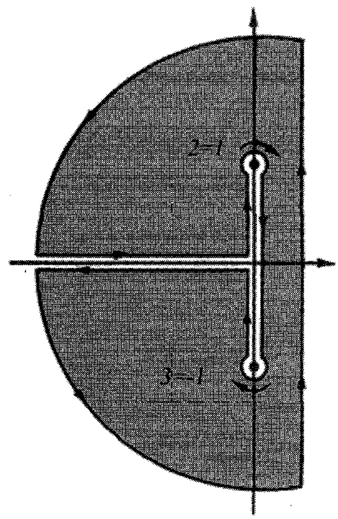
۶.۱۲.۱۵ بااستفاده ازانتگرال براومیچ تابعی‌را بهدست آورید که تبدیلش بهصورت $f(s)=s^{-1/2}$ باشد. توجه‌کنیدکه $f(s)$ یك‌نقطهٔ انشعاب دره $s=0$ دارد. محور x منفی را می‌توان خط برش‌گرفت.

پاسخ. $F(t)=(\pi t)^{-1/2}$.

۷.۱۲.۱۵ بامحاسبهٔ انتگرال برامویچ نشان‌دهید که

$$\mathcal{L}^{-1}\{(s^2+1)^{-1/2}\}=J_0(t)$$

راهنمایی. انتگرال برامویچ موردنظر را به‌صورت یك نمایش انتگرالی مربوط به $J_0(t)$ درآورید. شکل ۱۸.۱۵ یك پربند ممکن برای این‌کار را به‌نمایش می‌گذارد.



شکل ۱۸.۱۵ یك پربند ممکن برای وارونی به $J_0(t)$.

۸.۱۲.۱۵ تبدیل وارون لاپلاس

$$\mathcal{L}^{-1}\{(s^2-a^2)^{-1/2}\}$$

را به‌هریك ازروشهای زیرمحاسبه کنید:

(الف) به‌صورت یك‌سری بسط دهید وجمله به‌جمله تبدیل کنید.

(ب) انتگرال برامویچ‌را مستقیماً محاسبه‌کنید.

(ج) در انتگرال برامویچ تغییر متغیر زیر را انجام‌دهید: $s=(a/2)(z+z^{-1})$.

۹.۱۲.۱۵ نشان دهید که

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\ln s}{s}\right\}=-\ln t-\gamma$$

که در آن $\gamma = 0{,}5772\ldots$ ثابت اویلر- ماشرونی است.

۱۰.۱۴.۱۵ انتگرال برامویچ متناظر با تابع زیر را محاسبه کنید

$$f(s)=\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$$

۱۱.۱۴.۱۵ قضیهٔ بسط هویساید. اگر بتوان تبدیل $f(s)$ را به‌صورت نسبت زیر نوشت

$$f(s)=\frac{g(s)}{h(s)}$$

که درآن $g(s)$ و $h(s)$ توابع تحلیلی‌اند، و $h(s)$ صفرهای منزوی وساده در $s=s_i$ دارد، نشان دهید

$$F(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{g(s)}{h(s)}\right\}=\sum_i \frac{g(s_i)}{h'(s_i)}\, e^{s_i t}$$

راهنمایی. مسئلهٔ ۲.۱.۷ را ببینید.

۱۲.۱۴.۱۵ با بهره‌گیری از انتگرال برامویچ، $f(s)=s^{-2}e^{-ks}$ را تبدیل کنید. $F(t)=\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$ را برحسب تابع پله‌ای واحد (انتقال‌یافته)، $u(t-k)$، بیان کنید.
پاسخ. $F(t)=(t-k)u(t-k)$.

۱۳.۱۴.۱۵ تبدیل لاپلاس زیر را داریم

$$f(s)=\frac{1}{(s+a)(s+b)}, \quad a\neq b.$$

این تبدیل را به‌هریک از سه روش زیر وارون کنید.
(الف) کسرهای جزئی و استفاده از جدولها، (ب) قضیهٔ پیچش، (ج) انتگرال برامویچ.
پاسخ. $F(t)=\dfrac{e^{-bt}-e^{-at}}{a-b}$.

جدول ۱.۱۵ عملیات تبدیل لاپلاس

عملیات		معادله
۱. تبدیل لاپلاس	$f(s)=\mathcal{L}\{F(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt$	(۹۹.۱۵)
۲. تبدیل مشتق	$sf(s)-F(+0)=\mathcal{L}\{F'(t)\}$	(۱۲۳.۱۵)
	$s^2f(s)-sF(+0)-F'(+0)=\mathcal{L}\{F''(t)\}$	
۳. تبدیل انتگرال	$\frac{1}{s}f(s)=\mathcal{L}\left\{\int_0^t F(x)dx\right\}$	(مسئلهٔ ۱۰.۱۱.۱۵)
۴. جانشانی	$F(s-a)=\mathcal{L}\{e^{at}F(t)\}$	(۱۵۲.۱۵)
۵. انتقال	$e^{-bs}f(s)=\mathcal{L}\{F(t-b)\}$	(۱۶۴.۱۵)
۶. مشتق تبدیل	$f^{(n)}(s)=\mathcal{L}\{(-t)^nF(t)\}$	(۱۷۳.۱۵)
۷. انتگرال تبدیل	$\int_s^\infty f(x)dx=\mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\}$	(۱۸۹.۱۵)
۸. پیچش	$f_1(s)\cdot f_2(s)=\mathcal{L}\left\{\int_0^t F_1(t-z)F_2(z)dz\right\}$	(۱۹۳.۱۵)
۹. تبدیل وارون، انتگرال برامویچ	$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}f(s)ds=F(t)$	(۲۱۲.۱۵)

جدول ۲.۱۵ تبدیلهای لاپلاس

	$f(s)$	$F(t)$	محدودیت	معادله
۱.	۱	$\delta(t)$	تکینگی در $+0$	(۱۴۱.۱۵)
۲.	$\frac{1}{s}$	۱	$s>0$	(۱۰۲.۱۵)

جدول ۲.۱۵ (ادامه)

۳.	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	t^n	$s>0$, $n>-1$	(۱۰۸.۱۴)
۴.	$\dfrac{1}{s-k}$	e^{kt}	$s>k$	(۱۰۳.۱۵)
۵.	$\dfrac{1}{(s-k)^2}$	te^{kt}	$s>k$	(۱۷۵.۱۵)
۶.	$\dfrac{s}{s^2-k^2}$	$\cosh kt$	$s>k$	(۱۰۵.۱۵)
۷.	$\dfrac{k}{s^2-k^2}$	$\sinh kt$	$s>k$	(۱۰۵.۱۵)
۸.	$\dfrac{s}{s^2+k^2}$	$\cos kt$	$s>0$	(۱۰۷.۱۵)
۹.	$\dfrac{k}{s^2+k^2}$	$\sin kt$	$s>0$	(۱۰۷.۱۵)
۱۰.	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$	$e^{at}\cos kt$	$s>a$	(۱۵۳.۱۵)
۱۱.	$\dfrac{k}{(s-a)^2+k^2}$	$e^{at}\sin kt$	$s>a$	(۱۵۳.۱۵)
۱۲.	$\dfrac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$	$t\cos kt$	$s>0$	(۱۷۲.۱۵)
۱۳.	$\dfrac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$	$t\sin kt$	$s>0$	(۱۷۲.۱۵)
۱۴.	$(s^2+a^2)^{-1/2}$	$J_0(at)$	$s>0$	(۱۸۵.۱۵)
۱۵.	$(s^2-a^2)^{-1/2}$	$I_0(at)$	$s>a$	(مسئلهٔ ۱۰.۱۰.۱۵)
۱۶.	$\dfrac{1}{a}\cot^{-1}\left(\dfrac{s}{a}\right)$	$j_0(at)$	$s>0$	(مسئلهٔ ۱۱.۱۰.۱۵)

جدول ۲۰۱۵ (ادامه)

۱۷.	$\begin{cases} \frac{1}{2a}\ln\frac{s+a}{s-a} \\ \frac{1}{a}\coth^{-1}\left(\frac{s}{a}\right) \end{cases}$	$i_0(at)$	$s>a$	(مسئلهٔ ۱۱.۱۰.۱۵)
۱۸.	$\frac{(s-a)^n}{s^{n+1}}$	$L_n(at)$	$s>0$	(مسئله ۱۳.۱۰.۱۵)
۱۹.	$\frac{1}{s}\ln(s+1)$	$E_1(x)=-E_i(-x)$	$s>0$	(مسئلهٔ ۱۴.۱۰.۱۵)
۲۰.	$\ln s/s$	$-\ln t-C$	$s>0$	(مسئلهٔ ۹.۱۲.۱۵)

بیان کاملتری ازجدول تبدیل لاپلاس در فصل ۲۹ کتاب AMS-55 یافت می‌شود.

مراجع

Champeney, D. C., *Fourier Transforms and Their Physical Applications.* New York; Academic Press, 1973.

تبدیلهای فوریه دراین کتاب بدقت وباروشی ساده برای پیگیری مطالب، ارائه‌شده است. تقریباً شصت درصد مطالب این کتاب به کاربردهایی می‌پردازد که باحوزهٔ فیزیك ومهندسی سروکار دارند.

(جلدهای اول ودوم)

Erdelyi, A., Ed., *Tables of Integral Transforms*, Bateman Manuscript Project. New York: McGraw-Hill.

جلد اول:

Fourier, Laplace, Mellin Transforms.

جلد دوم:

Hankel Transforms and Special Functions.

این کتاب مجموعه‌ای است به‌صورت دائرةالمعارف که تبدیلها، توابع خاص، وخواص آنها را دریك‌جا گردآورده است؛ ازاین‌رو، به‌عنوان یك‌مرجع عمده، نقش‌مفیدی بازی‌می‌کند.

Erdelyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. G. Tricomi, *Tables of Integral Transforms.* 2 vols. New York: McGraw - Hill, 1954.

این کتاب جدولهایی‌جامع ازتبدیلهای سینوسی وکسینوسی ونمایی فوریه، تبدیلهای‌لاپلاس ووارون لاپلاس، تبدیلهای ملین ووارون ملین، تبدیلهای هنکل، وسایرتبدیلهای انتگرالی تخصصی‌تر را دربرمی‌گیرد.

Hanna, J. R., *Fourier Series and Integrals of Boundary Value Problems*. Somerset, N. J.: Wiley, 1982.

دراین‌کتاب درزمینهٔ حل فوریهٔ مسائل مقدار مرزی بررسی جامعی ارائه می‌شود. مفاهیم همگرایی وتمامیت دقیقاً مورد بررسی قرارمی‌گیرند.

Jeffreys, H., and B. S. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics*, 3th ed., Cambridge: Cambridge University Press, 1966.

Krylov, V. I., and N. S. Skoblya, *Handbook of Numerical Inversion of Laplace Transform*. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1969.

Le Page, W.R., *Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers*. New York: McGraw - Hill, 1961; New York; Dover, 1980.

دراین‌کتاب آنالیز متغیرهای مختلط دقیقاً ارائه شده است سپس درخصوص تبدیلهای فوریه و لاپلاس از آنها استفاده شده است. این‌کتاب برای مطالعهٔ دانشجویان نوشته شده است، ولی بیشتر به‌درد دانشجوی کوشا می‌خورد.

McCollum, P. A., and B. F. Brown, *Laplace Transform Tables and Theorems*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1965.

Miles, J. W., *Integral Transforms in Applied Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1971.

این‌کتاب به‌طورخلاصه ولی جالب ومفید مخصوصاً برای دانشجوی ممتاز دورهٔ کارشناسی به‌بررسی مطالب می‌پردازد. تأکیدکتاب عمدتاً درخصوص کاربردهاست تا نظریهٔ ریاضی محض.

Papoulis, A., *The Fourier Integral and Its Applications*. New York: McGraw-Hill, 1962.

دراین‌کتاب تبدیلهای فوریه و لاپلاس دقیقاً مطرح می‌شوند، و درحوزه‌های متعددی درعلوم ومهندسی به‌کارمی‌آیند.

Roberts, G.E., and H. Kaufman, *Table of Laplace Transforms*. Philadelphia: W. B. Saunders, 1966.

Sneddon, I. H., *The Use of Integral Transforms*. New York: McGraw-Hill, 1972.

این‌کتاب به‌زبانی نوشته شده است‌که برای دانشجویان علوم ومهندسی قابل درك باشد و حاوی همهٔ تبدیلهای انتگرالی است‌که دراین‌فصل ودرچند فصل دیگر آمده‌اند. مواردکاربرد زیادی نیز درآن بررسی شده است.

Sneddon, I. N., *Fourier Transforms*, New York: McGraw-Hill, 1951.

دراین کتاب بررسی مشروح وجامعی ارائه شده است وکتاب ازکاربردهای مربوط به‌زمینه‌های متنوعی درفیزیك نوین وکلاسیك، آکنده است.

Vander Pol, B., and H. Bremmer, *Operational Calculus Based on the Two-sided Laplace Integral*, 2th ed., Cambridge: Cambridge University Press, 1955.

دراین‌کتاب گسترهٔ انتگرالگیری به‌جای آنکه گسترهٔ مفید از ۰ تا ∞+ باشد، از ∞− تا ∞+ گرفته شده است. فصل ۵ کتاب حاوی بررسی مشروح تابع دلتای دیراك (تابع ضربه) است.

Wolf, K. B., *Integral Transforms in Science and Engineering*. NewYork: Plenum Press, 1979.

دراین‌کتاب تبدیلهای انتگرالی‌وکاربردهای‌آنها به‌صورت بسیارجامعی‌بررسی شده است.

۱۶

معادلات انتگرالی

۱.۱۶ مقدمه

تاکنون، بداستثنای تبدیلهای انتگرالی فصل پیش، بهمعادلاتی نظر داشتدایم که حاوی رابطه‌هایی بین تابع مجهول $\varphi(x)$ ویك یاچند مشتق آن بوده‌اند. اکنون درادامهٔ مطلب به‌بررسی معادلاتی می‌پردازیم که درآنها تابع مجهول درداخل یك انتگرال گنجیده است. دراینجا نیزمانند معادلات دیفرانسیل، توجه عمدهٔ خود را به‌روابط خطی، یعنی معادلات انتگرالی خطی معطوف می‌کنیم. معادله‌های انتگرالی را بدوروش رده‌بندی می‌کنند:

۱. اگرحدود انتگرالگیری ثابت‌باشد، معادله را معادلهٔ فردهولم‌می‌خوانیم؛ اگریکی ازحدها ثابت باشد، آن را معادلهٔ ولترا می‌نامیم.

۲. اگر تابع مجهول فقط در زیر علامت انتگرال ظاهر شود، معادله را "نوع اول" می‌خوانند. اگرتابع مجهول هم درزیرعلامت‌انتگرال وهم بیرون ازآن‌ظاهرشود، معادله را "نوع دوم" می‌گویند.

تعریفها

ازلحاظ نمادی، معادلهٔ فردهولم نوع اول عبارت است از

$$f(x)=\int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt \qquad (۱.۱۶)$$

معادلهٔ فردهولم نوع دوم به‌این قرارخواهد بود

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)dt \qquad (۲.۱۶)$$

معادلهٔ ولترای نوع اول

$$f(x)=\int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)dt \qquad (۳.۱۶)$$

معادلهٔ ولترای نوع دوم

$$\varphi(x)=f(x)+\int_a^x K(x,t)\,\varphi(t)dt \qquad (۴.۱۶)$$

درهرچهارمورد $\varphi(t)$ تابع مجهول است. $K(x,t)$ که به‌آن هسته‌یا کرنل می‌گویند، و $f(x)$ معلوم فرض می‌شوند. اگر $f(x)=0$، معادله را همگن می‌گوییم.

شایدخواننده‌تعجب کند، وتاحدودی هم‌حق‌دارد، که‌چرا، زحمت‌واردکردن معادله‌های انتگرالی را به‌خود می‌دهیم. رویهمرفته، معادلات دیفرانسیل تاکنون جهان فیزیکی ما را به‌خوبی توصیف کرده‌اند. برای توجیه واردکردن معادلات انتگرالی چند دلیل داریم.

برجواب معادلهٔ دیفرانسیل تحت شرایط مرزی به‌خصوص به‌طورقابل ملاحظه‌ای تأکیدکرده‌ایم. مثلاً، شرط مرزی در $r=0$ تعیین می‌کند که آیا تابع نویمان $N_n(r)$ در جواب معادلهٔ بسل موجود است یاخیر. شرط مرزی در $r\to\infty$ این نکته را تعیین می‌کند که‌آیا $I_n(r)$ در جواب معادلهٔ تعدیل‌یافتهٔ بسل وجود دارد یاخیر. معادلهٔ انتگرالی تابع مجهول را نه‌تنها به‌مقدارآن تابع درنقاط مجاور (مشتقها) بلکه به‌مقدارش درتمامی ناحیه، ازجمله مرز، مرتبط می‌کند. درواقع، شرایط مرزی به‌جای آنکه درمرحلهٔ آخرحل معادله وضع شوند، درمعادلهٔ انتگرالی تعبیه می‌شوند. بعداً، درموقع تشکیل کرنلها (بخش ۵.۱۶)، خواهیم دیدکه شکل کرنل به‌مقادیر روی مرز بستگی دارد. ازاین‌رو، معادله‌های انتگرالی جمع‌وجورترند و می‌توانندنسبت به‌معادلات دیفرانسیل‌مناسبتر وکارامدتر باشند. غالباً راه‌حل مسائل ریاضی نظیروجود، یکتایی، وتمامیت به‌صورت انتگرالی‌آسانترمی‌شود وازظرافت هم برخوردار است. سرانجام، خواه ناخواه، به‌مسائلی نظیرپدیده‌های پخش و ترابرد برمی‌خوریم که نمی‌توان آنها را بامعادلات دیفرانسیل‌نمایش داد. برای حل‌این نوع مسائل، باید به‌حل معادلات انتگرالی بپردازیم. یکی ازمهمترین نمونه‌های این نوع موقعیتهای فیزیکی را درزیرشرح می‌دهیم.

مثال ۱.۱.۱۶ نظریهٔ ترابرد نوترون ــ معادلهٔ بولتزمن

معادلهٔ اساسی نظریهٔ ترابرد نوترون، درواقع همان عبارت معادلهٔ پیوستگی نوترونهاست

تولید = اتلاف + نشت

در روند تولید، چشمه‌هایی داریم

$$S(v, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r})dvd\mathbf{\Omega}$$

که وارد شدن S نوترون درسانتیمترمکعب درهرثانیه را نمایش می‌دهد؛ بزرگی سرعت آن در راستای Ω درداخل زاویهٔ فضایی $d\Omega$ بین v و $v+dv$ است.

علاوه براین، چشمهٔ دیگری هم از طریق برخوردهای‌پراکنده‌سازفراهم‌می‌شود که نوترونها را به‌گستره‌ای که هم‌اکنون شرح داده شد پراکنده می‌کنند. آهنگ پراکندگی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\sum_{s}(v, v', \mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}')\, \varphi(v', \mathbf{\Omega}', \mathbf{r})$$

که درآن $\sum_s$ احتمال (ماکروسکوپی) آن است که نوترونی باسرعتی به‌بزرگی v'، در راستای $\mathbf{\Omega}'$، باسرعت برایندی به‌بزرگی v درراستای $\mathbf{\Omega}$ پراکنده شود. کمیت $\varphi(v', \mathbf{\Omega}', \mathbf{r})$ شار نوترونهاست. $\boldsymbol{\varphi}=\mathbf{\Omega}\varphi$ که به‌صورت یك‌بردار درآمده است، در راستای‌سرعت نوترون بوده وبزرگی‌آن برابراست باتعداد نوترونهایی‌که درهرثانیه باسرعتی به‌بزرگی v از واحد سطح درمکان $\mathbf{r}$ ودر راستای $\mathbf{\Omega}$ عبورمی‌کنند (شکل ۱۰۱۶).

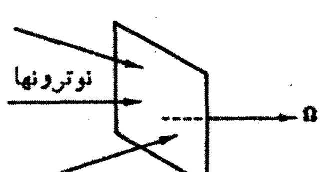
باانتگرالگیری‌روی همهٔ بزرگی سرعتهای اولیهٔ موجود (v') ودرهمهٔ راستاها (Ω')، دومین جملهٔ مربوط به‌تولید را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$\int\int \sum_{s}(v, v', \mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}')\, \varphi(v', \mathbf{\Omega}', \mathbf{r})\, dv'd\mathbf{\Omega}'$$

اتلافها یاحاصل نشت‌اندکه ازرابطهٔ زیربه‌دست می‌آید

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}(v, \mathbf{\Omega}, \mathbf{r})$$

ویا ازجذب وپراکندگی به‌درون‌گسترهٔ سرعتی دیگر (کمتر) ناشی می‌شوند. این اتلافها عبارت‌اند از



شکل ۱۰۱۶ شارنوترون.

$$\left[\sum_a(v)+\sum_s(v)\right]\varphi(v,\mathbf{\Omega},\mathbf{r})$$

اگر محیط همگن و همسانگرد نباشد، ممکن است $\sum$ها علاوه بروابستگی به‌بزرگی سرعت یاانرژی‌که قبلا درنظرگرفته شد، به‌مکان وراستا هم بستگی داشته باشند.

سرانجام معادلهٔ پیوستگی به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\int\int\sum_s(v,\ v',\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega}')\,\varphi(v',\mathbf{\Omega}',\mathbf{r})\,dv'\,d\mathbf{\Omega}'+S(v,\mathbf{\Omega},\mathbf{r}) \tag{۵.۱۶}$$
$$=\nabla\cdot\varphi(v,\mathbf{\Omega},\mathbf{r})+\left[\sum_a(v)+\sum_s(v)\right]\varphi(v,\mathbf{\Omega},\mathbf{r})$$

این معادله عبارت‌است ازمعادلهٔ حالت پایای‌بولتزمن، که یك معادلهٔ انتگرالی-دیفرانسیلی است. کارکردن بااین‌صورت معادلهٔ بولتزمن تقریباً ناممکن‌است. قسمت عمدهٔ نظریهٔ ترابرد نوترون را دستیابی به‌روشهایی تشکیل می‌دهدکه بین‌دقت فیزیکی وامکان‌پذیر بودن ریاضی سازشی برقرار می‌کنند.[1]

هرمعادلهٔ انتگرالـی ممکن است عمداً براساس منـاسبتر بودن، یا نیاز به توانایی ریاضی فرمولبندی معادلهٔ انتگرالی، انتخاب شود.

مثال ۲.۱.۱۶ نمایش تکانه‌ای درمکانیك‌کوانتومی

معادلهٔ شرودینگر (درنمایش فضایی معمولی) به‌صورت زیر است

$$-\frac{\hbar^{2}}{2m}\nabla^{2}\psi(\mathbf{r})+V(\mathbf{r})\,\psi(\mathbf{r})=E\psi(\mathbf{r}) \tag{۶.۱۶}$$

یا

$$(-\nabla^{2}+a^{2})\,\psi(\mathbf{r})=v(\mathbf{r})\,\psi(\mathbf{r}) \tag{۷.۱۶}$$

که درآن

$$a^{2}=\frac{2m}{\hbar^{2}}\,E$$

$$v(\mathbf{r})=\frac{2m}{\hbar^{2}}\,V(\mathbf{r})$$

۱. با فصل سوم ازقسمت (الف) ویرایش دوم ازجلد سوم‌کتاب زیرمقایسه‌کنید
Soodak, H., Ed. *Reactor Handbook*, *Physics*, New York: Interscience Publishers (1962).

می‌توانیم معادلهٔ (۷.۱۶) را به‌صورت زیر تعمیم دهیم

$$(-\nabla^{2}+a^{2})\psi(\mathbf{r})=\int v(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\psi(\mathbf{r}')d^{3}r' \qquad (۸.۱۶)$$

معادلهٔ (۸.۱۶) درحالت خاص زیر

$$v(\mathbf{r},\mathbf{r}')=v(\mathbf{r}')\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \qquad (۹.۱۶)$$

که نمایشگر برهم‌کنش موضعی است، به‌معادلهٔ (۷.۱۶) ساده می‌شود. حال معادلهٔ (۸.۱۶) را تحت تبدیل فوریه قرارمی‌دهیم (با بخش ۶.۱۵ مقایسه کنید)

$$\Phi(\mathbf{k})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\psi(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{r}}d^{3}r$$

(۱۰.۱۶)

$$\psi(\mathbf{r})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\Phi(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}}d^{3}k$$

دراینجا علامت اختصاری زیررا وارد می‌کنیم

$$\frac{\mathbf{p}}{\hbar}=\mathbf{k}\quad(\text{عدد موج}) \qquad (۱۱.۱۶)$$

از تعمیم معادلهٔ (۱۰.۱۶) داریم

$$\int(-\nabla^{2}+a^{2})\psi(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{r}}d^{3}r=\int\int v(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\psi(\mathbf{r}')e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{r}}d^{3}r'\,d^{3}r$$

(۱۲.۱۶)

دقت کنیدکه درسمت چپ معادله، ∇^{2} فقط روی $\psi(\mathbf{r})$ عمل می‌کند. ازسمت چپ انتگرال جزء به‌جزء می‌گیریم وازمعادلهٔ (۱۰.۱۶) به‌جای $\psi(\mathbf{r})$ درسمت راست مقدارش راقرار می‌دهیم، خواهیم داشت

$$\int(k^{2}+a^{2})\psi(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{r}}d^{3}r=(2\pi)^{3/2}(k^{2}+a^{2})\Phi(\mathbf{k})$$

(۱۳.۱۶)

$$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\int\int v(\mathbf{r},\mathbf{r}')\Phi(\mathbf{k}')e^{-i(\mathbf{k}.\mathbf{r}-\mathbf{k}'.\mathbf{r}')}\,d^{3}r'd^{3}rd^{3}k'$$

بااستفاده ازرابطهٔ

$$f(\mathbf{k},\ \mathbf{k}')=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\int v(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')\, e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}')}\, d^3r'd^3r \qquad (۱۴.۱۶)$$

معادلهٔ (۱۳.۱۶) به‌صورت زیردرمی‌آید

$$(k^2+a^2)\,\Phi(\mathbf{k})=\int f(\mathbf{k},\mathbf{k}')\,\Phi(\mathbf{k}')d^3k' \qquad (۱۵.۱۶)$$

یك معادلهٔ فردهولم همگن ازنوع دوم‌که درآن پارامتر a^2 با ویژه‌مقدارمتناظراست.

معادلهٔ (۹.۱۶)، دراین حالت خاص اما مهم، یعنی برهم‌کنش موضعی، به‌نتیجهٔ زیر منجرمی‌شود

$$f(\mathbf{k},\ \mathbf{k}')=f(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \qquad (۱۶.۱۶)$$

این نمایش تکانه‌ای بایك‌پتانسیل برهم‌کنش استاتیکی معمولی درفضای‌معمولی‌معادل است. تابع تکانه‌ای ما، $\Phi(\mathbf{k})$، در معادلهٔ انتگرالی [معادلهٔ (۱۵.۱۶)] صدق‌می‌کند. باید گفت‌که همواره فرض‌کرده‌ایم انتگرال فوریهٔ لازم وجود دارد. انتگرالهای لازم‌برای‌یك پتانسیل نوسانگرخطی $V(\mathbf{r})=r^2$ وجود نخـواهند داشت. معادلهٔ (۱۰.۱۶) به‌نوسانهای واگرا می‌انجامد ومعادلهٔ (۱۵.۱۶) را نخواهیم داشت.

تبدیل معادلهٔ دیفرانسیل به‌یك معادلهٔ انتگرالی

غالباً درشرایطی قرار می‌گیریم که آزادی انتخاب داریم. مسئلهٔ فیزیکی خود را می‌توانیم به‌کمك معادلهٔ انتگرالی یا معادلهٔ دیفرانسیل نمایش دهیم. فرض‌کنید که معادلهٔ دیفرانسیلی داریم ومی‌خواهیم آن‌را به‌یك معادلهٔ انتگرالی تبدیل‌کنیم. از یك معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم خطی شروع می‌کنیم

$$y''+A(x)y'+B(x)y=g(x) \qquad (۱۷.۱۶)$$

باشرایط اولیهٔ

$$y(a)=y_0$$
$$y'(a)=y_0'$$

پس ازانتگرالگیری خواهیم داشت

$$y'=-\int_a^x A\,y'\,dx-\int_a^x B\,y\,dx+\int_a^x g\,dx+y_0' \qquad (۱۸.۱۶)$$

انتگرال اول سمت راست را باروش جزء به‌جزء حل می‌کنیم

$$y' = -Ay - \int_a^x (B - A')y\,dx + \int_a^x g\,dx + A(a)y_0 + y'_0 \qquad (۱۹.۱۶)$$

توجه کنید که شرایط اولیهٔ ما چگونه دراین روایت جدید مسئله جذب شد. برای بار دوم انتگرال می‌گیریم و به‌دست می‌آوریم

$$y = -\int_a^x Ay\,dx - \int_a^x\int_a^x [B(t) - A'(t)]y(t)dt\,dx$$
$$(۲۰.۱۶)$$
$$+ \int_a^x\int_a^x g(t)dt\,dx + [A(a)y_0 + y'_0](x-a) + y_0$$

برای آنکه این معادله را به‌صورت آراسته‌تر و جمع وجوری درآوریم، ازرابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم

$$\int_a^x\int_a^x f(t)dt\,dx = \int_a^x (x-t)f(t)dt \qquad (۲۱.۱۶)$$

درستی این‌رابطه‌را می‌توان به‌کمك مشتقگیری ازدوطرف آن تحقیق کرد. از آنجا که‌مشتقها باهم برابرند، اختلاف عبارتهای اصلی فقط می‌تواند به‌اندازهٔ یك مقدار ثابت باشد. درحد $x\to a$، می‌بینیم که این‌ثابت بایدصفر باشد و لذا معادلهٔ (۲۱.۱۶) تثبیت می‌شود. بااعمال این‌حد درمعادلهٔ (۲۰.۱۶)، خواهیم داشت

$$y(x) = -\int_a^x \{A(t) + (x-t)[B(t) - A'(t)]\}y(t)dt$$
$$(۲۲.۱۶)$$
$$+ \int_a^x (x-t)g(t)dt + [A(a)y_0 + y'_0](x-a) + y_0$$

اکنون اختصارهای زیررا وارد می‌کنیم

$$K(x, t) = (t-x)[B(t) - A'(t)] - A(t)$$
$$(۲۳.۱۶)$$
$$f(x) = \int_a^x (x-t)g(t)dt + [A(a)y_0 + y'_0](x-a) + y_0$$

معادلهٔ (۲۲.۱۶) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)y(t)dt \qquad (۲۴.۱۶)$$

این‌عبارت یك‌معادلۀولترای‌نوع‌دوم‌است. این‌فرمولبندی مجددبه‌صورت یك‌معادلۀانتگرالی ولترا، درهنگام بررسی مسئلۀوجود ویکتایی، مزیتهای خاصی‌دارد.

مثال ۳.۱.۱۶ معادلۀ نوسانگرخطی

به‌عنوان یك‌مثال ساده، معادلۀ نوسانگرخطی‌را در نظر می‌گیریم

$$y''+\omega^{2}y=0 \tag{۲۵.۱۶}$$

با

$$y(0)=0$$

$$y'(0)=1$$

ازاینجا داریم

$$A(x)=0$$

$$B(x)=\omega^{2}$$

$$g(x)=0$$

پس از نشاندن درمعادلۀ (۲۲.۱۶) [یامعادلات (۲۳.۱۶) و(۲۴.۱۶)]، معادلۀانتگرالی‌زیر را به‌دست می‌آوریم

$$y(x)=x+\omega^{2}\int_{0}^{x}(t-x)y(t)dt \tag{۲۶.۱۶}$$

این‌معادلۀ انتگرالی، یعنی معادلۀ (۲۶.۱۶)، بامعادلۀ دیفرانسیل اصلی‌به‌اضافۀ شرایطاولیه معادل‌است. خواننده می‌تواند نشان‌دهدکه $y(x)=(1/\omega)\sin \omega x$ درهردوصورت‌معادله صدق می‌کند.

مجدداًمعادلۀ (۲۵.۱۶) نوسانگرخطی‌را درنظرمی‌گیریم، ولی‌این‌بار با شرایطمرزی

$$y(0)=0$$

$$y(b)=0$$

ازآنجاکه این‌بار $y'(0)$ داده‌نشده‌است، باید روشمان را اندکی تغییر دهیم. پس از اولین انتگرالگیری خواهیم داشت

$$y'=-\omega^{2}\int_{0}^{x}y\,dx+y'(0) \tag{۲۷.۱۶}$$

باردیگر انتگرال می‌گیریم و بازهم از معادلهٔ (۲۱.۱۶) استفاده می‌کنیم، خواهیم داشت

$$y=-\omega^{2}\int_{0}^{x}(x-t)y(t)\,dt+y'(0)x \qquad (۲۸.۱۶)$$

برای حذف مقدار مجهول $y'(0)$، ازشرط $y(b)=0$ استفاده می‌کنیم. درنتیجه

$$\omega^{2}\int_{0}^{b}(b-t)y(t)dt=b\,y'(0) \qquad (۲۹.۱۶)$$

بانشاندن این معادله درمعادلهٔ (۲۸.۱۶)، خواهیم داشت

$$y(x)=-\omega^{2}\int_{0}^{x}(x-t)\,y(t)dt+\omega^{2}\frac{x}{b}\int_{0}^{b}(b-t)y(t)dt \qquad (۳۰.۱۶)$$

اینك بازهٔ $[0,b]$ را به‌دوبازهٔ $[0,x]$ و $[x,b]$ می‌شکنیم. ازآنجاکه

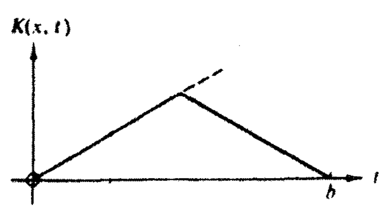
$$\frac{x}{b}(b-t)-(x-t)=\frac{t}{b}(b-x) \qquad (۳۱.۱۶)$$

خواهیم یافت

$$y(x)=\omega^{2}\int_{0}^{x}\frac{t}{b}(b-x)\,y(t)dt+\omega^{2}\int_{x}^{b}\frac{x}{b}(b-t)y(t)dt \qquad (۳۲.۱۶)$$

سرانجام بامعرفی کرنل (شکل ۲.۱۶)

$$K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{t}{b}(b-x), & t<x\\[2ex] \dfrac{x}{b}(b-t), & x<t\end{cases} \qquad (۳۳.۱۶)$$



شکل ۲.۱۶

داریم

$$y(x)=\omega^2\int_0^b K(x,t)y(t)dt \qquad (۳۴.۱۶)$$

که یك معادلهٔ همگن فردهولم از نوع دوم است.

کرنل جدید ما، $K(x,t)$، خواص جالبی دارد.

۱. متقارن‌است، $K(x,t)=K(t,x)$.

۲. پیوسته‌است، یعنی

$$\frac{t}{b}(b-x)\Big|_{t=x}=\frac{x}{b}(b-t)\Big|_{t=x}$$

۳. مشتق آن نسبت به t ناپیوسته است. باافزایش t، در نقطهٔ $t=a$، یك ناپیوستگی ۱ — درمقدار $\partial K(x,t)/\partial t$، به‌وجود خواهدآمد.

دربخش ۵.۱۶، آنجاکه $K(x,t)$ را به‌عنوان تابع‌گرین تعیین هویت می‌کنیم،باز به‌این خواص خواهیم پرداخت.

شرایط اولیه یا مرزی، در روند تبدیل معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم خطی به‌معادلهٔ انتگرالی، نقش تعیین‌کننده‌ای دارند. اگرشرایط اولیه (تنها دریك سر بازه) راداشته‌باشیم، معادلهٔ دیفرانسیل به‌معادلهٔ انتگرالی ولترا تبدیل می‌شود. در مورد معادلهٔ نوسانگر خطی باشرایط مرزی (درهردوسر بازه)، معادلهٔ دیفرانسیل به‌یك‌معادلهٔ انتگرالی فردهولم،باکرنلی که‌یك تابع‌گرین خواهد بود، تبدیل می‌شود.

باید توجه داشت که تبدیل معکوس، یعنی تبدیل یك معادلهٔ انتگرالی به یك معادلهٔ دیفرانسیل همیشه هم میسر نیست. به‌معادلاتی انتگرالی برمی‌خوریم که برای‌آنها هیچ‌معادلهٔ دیفرانسیل متناظری شناخته نشده است.

مسائل

۱۰۱۰۱۶ کارخود را ازهریك‌ازمعادلات دیفرانسیل زیرشروع‌کنید، دوبارانتگرال‌بگیرید ومعادلهٔ انتگرالی ولترای متناظر را بیابید

(الف) $y''(x)-y(x)=0$؛ $y(0)=0$، $y'(0)=1$

پاسخ. $y=\int_0^x (x-t)y(t)dt+x$.

(ب) $y''(x)-y(x)=0$؛ $y(0)=1$، $y'(0)=-1$

پاسخ. $y=\int_0^x (x-t)y(t)dt-x+1$.

نتایج حاصل‌را بامعادلهٔ (۲۳.۱۶) بیازمایید.

۲.۱.۱۶ باهریك ازروشهای زیرمعادلهٔ انتگرالی فردهولم متناظر بامعادلهٔ

$$y''(x)-y(x)=0; \quad y(1)=1,$$
$$y(-1)=1,$$

را بیابید،

(الف) ازطریق دوبارانتگرالگیری، (ب) به‌کمك تشکیل تابع‌گرین.

پاسخ. $y(x)=1-\int_{-1}^{1}K(x, t)y(t)dt$

$$K(x, t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1-x)(t+1), & x>t\\ \frac{1}{2}(1-t)(x+1), & x<t\end{cases}$$

۳.۱.۱۶ (الف) نقطهٔ شروع کارخود را برپایهٔ جوابهای داده شده برای مسئلهٔ ۱.۱.۱۶ قراردهید؛ مشتق بگیرید ومعادله‌های دیفرانسیل اصلی وشرایط مرزی را به‌دست‌آورید.

(ب) همین‌کاررا درمورد مسئلهٔ ۲.۱.۱۶ انجام دهید.

۴.۱.۱۶ معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم باضرایب ثابت به‌صورت زیراست

$$y''(x)+a_1y'(x)+a_2y(x)=0$$

بادراختیارداشتن شرایط مرزی

$$y(0)=y(1)=0$$

دوبارانتگرال‌بگیرید ومعادلهٔ انتگرالی زیررا تعمیم‌دهید

$$y(x)=\int_0^1 K(x, t)y(t)dt$$

با

$$K(x, t)=\begin{cases}a_2t(1-x)+a_1(x-1), & t<x\\ a_2x(1-t)+a_1x, & x<t\end{cases}$$

دقت‌کنیدکه اگر $a_1=0$، $K(x, t)$ متقارن و پیوسته‌است. این مفهوم را چگونه با

خود ـ الحاقی بودن معادلهٔ دیفرانسیل ربط می‌دهید؟

۵.۱۰۱۶ تحقیق کنیدکه به‌ازای همهٔ $f(t)$ها (که به‌ازای آنها انتگرالها وجود دارند)

$$\int_a^x\int_a^x f(t)dt\, dx = \int_a^x (x-t)f(t)dt$$

۶.۱۰۱۶ داریم: $\varphi(x)=x-\int_0^x(t-x)\varphi(t)dt$. این‌معادلهٔ انتگرالی‌را ازطریق تبدیل آن به یك معادلهٔ دیفرانسیل (به‌اضافهٔ شرایط مرزی) و حل آن معادلهٔ دیفرانسیل (به‌کمك بازبینی) حل کنید.

۷.۱۰۱۶ نشان دهیدکه معادلهٔ همگن ولترای نوع دوم زیر، جز جواب بدیهی $\psi=0$، هیچ جوابی ندارد

$$\psi(x)=\lambda\int_0^x K(x, t)\psi(t)dt$$

راهنمایی. بسط مك‌لورن $\psi(x)$ را تشکیل دهید. لازم است فرض کنیدکه $\psi(x)$ و $K(x, t)$ نسبت به x مشتقپذیرند.

۲.۱۶ تبدیلهای انتگرالی، توابع مولد

برای بررسی حل معادله‌های انتگرالی، انتگرالگیری و مشتقگیری را باهم مقایسه می‌کنیم:

مشتقگیری	انتگرالگیری
قاعده‌ها، دستورالعملهای اسلوبدار	غالباً هیچ تابع انتگرالگیری شده‌ای‌به‌صورت بسته وجود ندارد.
می‌توان به‌ماشین محاسب آموزش داد که مشتقگیری تحلیلی‌را انجام دهد.	شاید مجبور باشیم از انتگرالگیری عددی استفاده کنیم.

حل معادلات دیفرانسیل خطی‌نیز، شبیه مشتقگیری، به‌طورکامل درفصل ۸ آمده است. برای تبدیل معادلات انتگرالی، مانند انتگرالگیری، هیچ روشی کلی وجود ندارد. ولی حالتهای خاصی‌را می‌توان به‌کمك تبدیلهای انتگرالی (فصل ۱۵) حل کرد. این حالتها را برای راحتی دراینجا فهرستوار برمی‌شمریم. اگر

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\varphi(t)dt$$

آنگاه

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}\psi(t)\,dt \quad \text{(فوریه)} \qquad (۳۵.۱۶)$$

اگر

$$\psi(x)=\int_{0}^{\infty} e^{-xt}\varphi(t)dt$$

آنگاه

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{xt}\psi(t)dt \qquad \text{(لاپلاس)} \qquad (۳۶.۱۶)$$

اگر

$$\psi(x)=\int_{0}^{\infty} t^{x-1}\varphi(t)dt$$

آنگاه

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} x^{-t}\psi(t)dt \quad \text{(ملین)} \qquad (۳۷.۱۶)$$

اگر

$$\psi(x)=\int_{0}^{\infty} t\,\varphi(t)J_{\nu}(xt)dt$$

آنگاه

$$\varphi(x)=\int_{0}^{\infty} t\,\psi(t)J_{\nu}(xt)dt \qquad \text{(هنکل)} \qquad (۳۸.۱۶)$$

در واقع مفید بودن شگرد تبدیل انتگرالی اندکی ازاین چهار صورت نسبتاً خاص فراترمی‌رود.

مثال ۱.۲.۱۶ جواب تبدیل فوریه

معادلهٔ فردهولم نوع اول را با کرنلی ازنوع کلی $k(x-t)$ درنظرمی‌گیریم

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} k(x-t)\,\varphi(t)dt \qquad (۳۹.۱۶)$$

که در آن $\varphi(t)$ تابع مجهول است. با این فرض که تبدیلهای مورد نیاز وجود دارند، با بهره‌گیری از قضیهٔ پیچش فوریه (بخش ۵.۱۵) داریم

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}K(\omega)\Phi(\omega)e^{-i\omega x}d\omega \qquad (۴۰.۱۶)$$

توابع $K(\omega)$ و $\Phi(\omega)$ به‌ترتیب تبدیلهای فوریهٔ $k(x)$ و $\varphi(x)$ به‌شمار می‌آیند. پس از وارون کردن، به‌کمك معادلهٔ (۳۵.۱۶) داریم

$$K(\omega)\Phi(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{i\omega x}\,dx=\frac{F(\omega)}{\sqrt{2\pi}} \qquad (۴۱.۱۶)$$

آنگاه

$$\Phi(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{F(\omega)}{K(\omega)} \qquad (۴۲.۱۶)$$

ودراینجا نیز ازطریق وارون کردن، داریم

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\omega)}{K(\omega)}e^{-i\omega x}\,d\omega \qquad (۴۳.۱۶)$$

توجیه‌دقیق این‌جواب‌را می‌توان درروش مورس و فشباخ درصفحات‌مختلط یافت. درمسئلهٔ ۱.۲.۱۶ بسط این راه‌حل تبدیلی‌را خواهیم دید.

مثال ۲.۲.۱۶ معادلهٔ آبل تعمیم‌یافته، قضیهٔ پیچش

معادلهٔ آبل تعمیم‌یافته عبارت است از

$$f(x)=\int_{0}^{x}\frac{\varphi(t)}{(x-t)^{\alpha}}\,dt,\quad 0<\alpha<1,\quad \text{با}\left.\begin{matrix}f(x)\ \text{معلوم}\\ \varphi(t)\ \text{مجهول}\end{matrix}\right\} \qquad (۴۴.۱۶)$$

ازدوطرف این‌معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(x)\}&=\mathcal{L}\left\{\int_{0}^{x}\frac{\varphi(t)}{(x-t)^{\alpha}}\,dt\right\}\\&=\mathcal{L}\{x^{-\alpha}\}\mathcal{L}\{\varphi(x)\}\end{aligned} \qquad (۴۵.۱۶)$$

مرحلهٔ آخررا به‌کمك قضیهٔ پیچش لاپلاس (بخش ۱۱.۱۵) به‌دست آورده‌ایم. دراین‌صورت

$$\mathcal{L}\{\varphi(x)\}=\frac{s^{1-\alpha}\mathcal{L}\{f(x)\}}{(-\alpha)!} \tag{۴۶.۱۶}$$

پس از تقسیم بر s،[1] داریم

$$\frac{1}{s}\mathcal{L}\{\varphi(x)\}=\frac{s^{-\alpha}\mathcal{L}\{f(x)\}}{(-\alpha)!}$$

(۴۷.۱۶)

$$=\frac{\mathcal{L}\{x^{\alpha-1}\}\mathcal{L}\{f(x)\}}{(\alpha-1)!(-\alpha)!}$$

باترکیب فاکتوریلها [معادلهٔ(۳۲.۱۰)] واستفادهٔ مجدد ازقضیهٔ پیچش لاپلاس، پی‌می‌بریم که

$$\frac{1}{s}\mathcal{L}\{\varphi(x)\}=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\,\mathcal{L}\left\{\int_0^x\frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt\right\} \tag{۴۸.۱۶}$$

به‌کمك مسئلهٔ ۱.۱۱.۱۵ وارون می‌کنیم

$$\int_0^x\varphi(t)\,dt=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^x\frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt \tag{۴۹.۱۶}$$

وسرانجام، پس ازمشتقگیری

$$\varphi(x)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\,\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt \tag{۵۰.۱۶}$$

توابع مولد

گهگاه، ممکن‌است به‌معادله‌هایی انتگرالی شامل توابع مولد برخوردکنیم. فرض کنید که حالت بسیارخاص زیررا داشته باشیم

$$f(x)=\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{(1-2xt+x^2)^{1/2}}\,dt,\quad -1\leqslant x\leqslant 1 \tag{۵۱.۱۶}$$

به‌دوجنبهٔ مهم زیرنظرمی‌کنیم:

۱. $(1-2xt+x^2)^{-1/2}$ چندجمله‌ایهای لژاندررا تولید می‌کند.
۲. $[-1,1]$ بازهٔ تعامد چندجمله‌ایهای لژاندر است.

حال اگرمخرج را بسط دهیم (خاصیت ۱) وفرض‌کنیم که تابع مجهول $\varphi(t)$ رانیز

---

۱. $s^{1-\alpha}$ به‌ازای $0<\alpha<1$ وارون ندارد.

بتوانیم به‌صورت یک‌سری ازهمین چندجمله‌ایهای لژاندربسط دهیم،آنگاه

$$f(x)=\int_{-1}^{1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n P_n(t)\sum_{r=0}^{\infty}P_r(t)x^r\,dt \qquad (۵۲.۱۶)$$

بااستفاده از تعامد چندجمله‌ایهای لژاندر (خاصیت۲)، خواهیم داشت

$$f(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{2a_r}{2r+1}x^r \qquad (۵۳.۱۶)$$

دراین‌صورت می‌توانیم a_nهارا با nبارمشتقگیری و سپس قراردادن $x=0$، به‌دست آوریم

$$f^{(n)}(0)=n!\frac{2}{2n+1}a_n \qquad (۵۴.۱۶)$$

بنابراین

$$\varphi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}P_n(t) \qquad (۵۵.۱۶)$$

به‌کمکِ بقیهٔ توابع مولد هم می‌توان به نتایج مشابهی دست یافت (بامسئلهٔ ۹.۲.۱۵ مقایسه کنید). درواقع شگرد بسط برحسب یك سری ازتوابع خاص همواره قابل حصول است. هرگاه بسط میسر(وراحت) وبازه مناسب باشد، به‌امتحان کردنش می‌ارزد.

مسائل

۱.۲.۱۶ کرنل یك معادلهٔ فردهولم ازنوع دوم

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_{-\infty}^{\infty}K(x,t)\varphi(t)dt$$

به‌صورت $k(x-t)$ است.[1] بااین فرض که تبدیلهای لازم وجود دارند، نشان دهید

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(t)e^{-ixt}\,dt}{1-\sqrt{2\pi}\,\lambda\,K(t)}$$

$F(t)$ و $K(t)$ به‌ترتیب تبدیلهای فوریهٔ $f(x)$ و $k(x)$ هستند.

۲.۲.۱۶ کرنل یك معادلهٔ ولترای نوع اول

---

۱. این کرنل و گسترهٔ $0\le x<\infty$ مشخصهٔ معادله‌های انتگرالی از نوع وینر- هوف به شمار می‌آیند. جزئیات مربوط به‌این معادلات را می‌توان درفصل۸ کتاب مورس و فشباخ یافت.

$$f(x)=\int_{0}^{x} K(x,t)\varphi(t)\,dt$$

به‌صورت $k(x-t)$ است. بافرض اینکه تبدیلهای لازم وجود دارند، نشان دهید

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{F(s)}{K(s)}e^{xs}\,ds$$

$F(s)$ و $K(s)$ به‌ترتیب تبدیلهای لاپلاس $f(x)$ و $k(x)$ هستند.

۳.۲.۱۶ کرنل یک‌معادلهٔ ولترای نوع دوم

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_{0}^{x} K(x,t)\,\varphi(t)\,dt$$

به‌صورت $k(x-t)$ است. بااین فرض‌که تبدیلهای لازم وجود دارند، نشان دهید

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{F(s)}{1-\lambda K(s)}e^{xs}\,ds$$

۴.۲.۱۶ بااستفاده ازجواب تبدیل لاپلاس (مسئلهٔ ۳.۲.۱۶) معادلات زیررا حل کنید

(الف)
$$\varphi(x)=x+\int_{0}^{x}(t-x)\,\varphi(t)\,dt$$

پاسخ. $\varphi(x)=\sin x$.

(ب)
$$\varphi(x)=x-\int_{0}^{x}(t-x)\,\varphi(t)\,dt$$

پاسخ. $\varphi(x)=\sinh x$.

با نشاندن مقادیر به‌دست‌آمده در معادلات انتگرالی اصلی نتایج خود را بیازمایید.

۵.۲.۱۶ معادلات مثال ۱.۲.۱۶ [معادلات (۳۹.۱۶) تا (۴۳.۱۶)] را بااستفاده‌از تبدیلهای کسینوسی فوریه دوباره فرمولبندی کنید.

۶.۲.۱۶ با دراختیارداشتن معادلهٔ انتگرالی فردهولم

$$e^{-x^2}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-t)^2}\,\varphi(t)\,dt$$

شگرد پیچش فوریهٔ مثال ۱.۲.۱۶ را به‌کاربرید و $\varphi(t)$ را به‌دست آورید.

۷.۲.۱۶ معادلهٔ آبل زیرمفروض است

$$f(x)=\int_{\circ}^{x}\frac{\varphi(t)}{(x-t)^{\alpha}}\,dt,\quad \circ<\alpha<\text{۱}$$

این معادله‌را باروش زیرحل کنید.

(الف) دوطرف معادله‌را در $(z-x)^{\alpha-1}$ ضرب کنید ودر گسترهٔ $z\leqslant x\leqslant \circ$، نسبت به‌$x$ انتگرال بگیرید.

(ب) ترتیب انتگرالگیری‌را معکوس و انتگرال (نسبت به‌x) سمت‌راست‌را به‌کمك تابع بتا محاسبه‌کنید.

یادآوری.

$$\begin{aligned}\int_{t}^{z}\frac{dx}{(z-x)^{1-\alpha}(x-t)^{\alpha}} &=B(1-\alpha,\alpha)\\ &=(-\alpha)!(\alpha-1)!\\ &=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\end{aligned}$$

۸.۲.۱۶ در معادلهٔ تعمیم‌یافتهٔ آبل با $f(x)=1$

$$1=\int_{\circ}^{x}\frac{\varphi(t)}{(x-t)^{\alpha}}\,dt,\quad \circ<\alpha<1$$

$\varphi(t)$ را به‌دست آورید وتحقیق کنیدکه $\varphi(t)$ یکی ازجوابهای معادلهٔ قبل است.

پاسخ. $\varphi(t)=\dfrac{\sin\pi\alpha}{\pi}t^{\alpha-1}$.

۹.۲.۱۶ کرنل یك معادلهٔ فردهولم نوع اول به‌صورت $e^{-(x-t)^{2}}$ است

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-t)^{2}}\varphi(t)\,dt$$

نشان دهیدکه جواب عبارت است از

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=\circ}^{\infty}\frac{f^{(n)}(\circ)}{2^{n}\,n!}H_{n}(x)$$

که در آن $H_{n}(x)$ چندجمله‌ای مرتبهٔ nام هرمیت است.

۱۰.۲.۱۶ معادلهٔ انتگرالی

$$f(x)=\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{(1-2xt+x^2)^{1/2}}\,dt,\quad -1\leqslant x\leqslant 1$$

را درهریك ازحالتهای زیرحل کنید و تابع مجهول $\varphi(t)$ را به‌دست آورید
(الف) $f(x)=x^{2s}$، (ب) $f(x)=x^{2s+1}$

پاسخ. (الف) $\varphi(t)=\frac{4s+1}{2}P_{2s}(t)$، (ب) $\varphi(t)=\frac{4s+3}{2}P_{2s+1}(t)$.

۱۱.۲.۱۶ در تحلیلی که براساس نظریهٔ پراش کیرشهوف در مورد یك لیزر صورت می‌گیرد، به‌معادلهٔ انتگرالی‌زیرمی‌رسیم

$$v(\mathbf{r}_2)=\gamma\int\int K(\mathbf{r}_1,\,\mathbf{r}_2)\,v(\mathbf{r}_1)\,dA$$

تابع مجهول $v(\mathbf{r}_1)$ توزیع هندسی میدان تابشی را روی سطح یك آینه به‌دست می‌دهد؛ گسترهٔ انتگرالگیری روی سطح آینه واقع‌است. این معادلهٔ انتگرالی برای آینه‌های کروی هم‌کانون مربعی به‌صورت زیردرمی‌آید

$$v(x_2,\,y_2)=\frac{-i\gamma e^{ikb}}{\lambda b}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}e^{-(ik/b)(x_1x_2+y_1y_2)}v(x_1,\,y_1)\,dx_1dy_1$$

که درآن b فاصلهٔ بین‌آینه‌های لیزری روی‌خط مرکزی‌آنهاست. این‌معادله‌را باتعویضهای زیرمی‌توان به‌صورت نسبتاً ساده‌تری درآورد

$$\frac{kx_i^2}{b}=\xi_i^2,\ \frac{ky_i^2}{b}=\eta_i^2\ \ و\ \ \frac{ka^2}{b}=\frac{2\pi a^2}{\lambda b}=\alpha^2$$

(الف) نشان دهیدکه متغیرها جدا می‌شوند و دو معادلهٔ انتگرالی به‌دست می‌آوریم.
(ب) نشان دهیدکه برای آینه به‌بعد $a\gg\lambda$، حدود جدید $\pm\alpha$ را می‌توان با $\pm\infty$ تقریب زد.
(ج) معادله‌های انتگرالی حاصل‌را حل‌کنید.

۳.۱۶ سری نویمان، کرنلهای جداشدنی (واگن)

بسیاری ازمعادله‌های انتگرالی وشاید اغلب آنها را نمی‌توان به‌کمك شگردهای اختصاصی تبدیل انتگرالی بخش قبل حل کرد. در اینجا سه شگرد نسبتاً کلی برای حل معادله‌های انتگرالی به‌دست می‌دهیم. در شگرد اول که عمدتاً به‌نویمان، لیوویل، و ولترا نسبت داده می‌شود، تابع مجهول $\varphi(x)$ را به‌صورت یك‌سری توانی از λ بسط می‌دهیم، λ ثابتی معلوم است. ازاین‌روش همواره درصورت همگرابودن سری حاصل می‌توان استفاده کرد.

روش‌دوم درمواردی به‌کارمی‌رودکه دومتغیری که درکرنل $K(x, t)$ ظاهرمی‌شوند، جداشدنی‌باشند، وبه‌همین دلیل روش نسبتاً محدودتری است. ولی درهرحال از دو مزیت عمده برخورداراست: (۱) رابطهٔ بین یك معادلهٔ انتگرالی ویك مجموعه ازدستگاه‌معادلات جبری خطی به‌روشنی نشان داده می‌شود، و (۲) این روش به‌ویژه‌مقدارها و ویژه‌تابعها می‌انجامد ــ شباهتی نزدیك با بخش ۶.۴.

سوم، شگردی‌برای حل عددی‌معادله‌های فردهولم نوع‌اول ودوم به‌طورخلاصه ارائه شده‌است. روی مسئله‌ای‌که درماتریسهای بدـشرط ظاهرمی‌شود تکیه می‌کنیم.

سری نویمان

یك معادلهٔ انتگرالی خطی نوع دوم‌را ازطریق تقریبهای پی‌درپی حل می‌کنیم، معادلهٔ مورد نظر یك معادلهٔ فردهولم است

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x, t)\,\varphi(t)\,dt \qquad (۵۶.۱۶)$$

که در آن $f(x)\neq 0$. اگرحد بالایی متغیر باشد (معادلهٔ ولترا) باز هم می‌توان، بااندك اصلاحاتی، ازروش زیراستفاده کرد. تابع مجهول خودرا به‌وسیلهٔ رابطهٔ

$$\varphi(x)\approx\varphi_0(x)=f(x) \qquad (۵۷.۱۶)$$

تقریب می‌زنیم (هیچ تضمینی وجود نداردکه این تقریب به‌کارآید). این گزینه اجباری نیست. اگرمی‌توانید، باحدس بهتری عملیات‌را شروع‌کنید، حتماً این‌کار را بکنید. گزینهٔ فوق معادل‌آن است که بگوییم یا انتگرال کوچك است یا ثابت λ. برای بهتر کردن این تقریب بسیارخام، $\varphi_0(x)$ را درانتگرال معادلهٔ (۵۶.۱۶) فیدبك می‌کنیم و خواهیم داشت

$$\varphi_1(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x, t)\,f(t)\,dt \qquad (۵۸.۱۶)$$

باتکراراین فرایند جانشانی $\varphi_n(x)$ جدید درمعادلهٔ (۵۶.۱۵)، دنبالهٔ زیررا ارائه‌می‌دهیم

$$\begin{aligned}\varphi_2(x)=&f(x)+\lambda\int_a^b K(x, t_1)\,f(t_1)\,dt_1\\&+\lambda^2\int_a^b\int_a^b K(x, t_1)\,K(t_1, t_2)\,f(t_2)\,dt_2dt_1\end{aligned} \qquad (۵۹.۱۶)$$

و

$$\varphi_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i(x) \qquad (۶۰.۱۶)$$

که در آن

$$\begin{aligned} u_0(x)&=f(x)\\ u_1(x)&=\int_a^b K(x,t_1)f(t_1)dt_1\\ u_2(x)&=\int_a^b\int_a^b K(x,t_1)\,K(t_1,t_2)\,f(t_2)\,dt_2\,dt_1\\ u_n(x)&=\int\int\int K(x,t_1)\,K(t_1,t_2)\cdots\\ &\qquad K(t_{n-1},t_n)\cdot f(t_n)dt_n\cdots dt_1 \end{aligned} \qquad (۶۱.۱۶)$$

انتظارداریم که جواب $\varphi(x)$ را به‌صورت زیر به‌دست آوریم

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i(x) \qquad (۶۲.۱۶)$$

به‌شرط آنکه سری نامتناهی ما همگرا باشد.

همگرایی این سری را به‌آسانی می‌توان به‌کمك آزمون نسبت کوشی، بخش ۲.۵، امتحان کرد. برای این کار توجه می‌کنیم که

$$|\lambda^n u_n(x)|\leqslant|\lambda^n|\,|f|_{\max}|K|_{\max}^n|b-a|^n \qquad (۶۳.۱۶)$$

که در آن $|f|_{\max}$ را برای نشان دادن مقدار بیشینهٔ $|f(x)|$ در بازهٔ $[a,b]$، و $|K|_{\max}$ را برای نمایش مقدار بیشینهٔ $|K(x,t)|$ درحوزهٔ این تابع در صفحهٔ $x-t$ به‌کار برده‌ایم. به‌شرطی همگرایی‌داریم که

$$|\lambda|\,|K|_{\max}\,|b-a|<1 \qquad (۶۴.۱۶)$$

دقت کنید که $\lambda u_n(\max)$ را به‌عنوان یك‌سری مقایسه به‌کار برده‌ایم. اگر این سری همگرا باشد سری واقعی نیز باید همگرا باشد. اگر این‌شرط برآورده نشود، ممکن‌است همگرایی داشته باشیم یا نداشته باشیم. دراین‌صورت به‌آزمون حساستری نیازداریم. اگر این سری نویمان همگرا نشود، البته روشن‌است که هنوزممکن‌است بتوانیم به‌کمك یکی ازروشهای دیگر جوابی به‌دست آوریم.

برای آنکه بهتر متوجه شویم که در این محاسبات تکراری چه کرده‌ایم، شاید بهتر باشدکه جواب سری نویمان، معادلهٔ (۵۹.۱۶)، را به‌صورت عملگری بازنویسی کنیم. برای شروع، معادلهٔ (۵۶.۱۶) را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\varphi=\lambda K\varphi+f$$

که درآن K نمایشگر عملگر انتگرالگیری $\int_a^b K(x,t)[\ ]dt$ است. φ را ازاین معادله به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$\varphi=(1-\lambda K)^{-1}f$$

بسط دوجمله‌ای به‌معادلهٔ (۵۹.۱۶) می‌انجامد. همگرایی سری نویمان نمایانگر آن است که عملگر وارون $(1-\lambda K)^{-1}$ وجود دارد.

مثال ۱۰.۳.۱۶ جواب سری نویمان

برای نمایش روش نویمان، معادلهٔ انتگرالی زیررا درنظرمی‌گیریم

$$\varphi(x)=x+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t-x)\,\varphi(t)dt \qquad (۶۵.۱۶)$$

برای شروع عملیات مربوط‌به سری نویمان، تابع زیر را درنظرمی‌گیریم

$$\varphi_0(x)=x \qquad (۶۶.۱۶)$$

آنگاه

$$\varphi_1(x)=x+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t-x)t\,dt$$

$$=x+\frac{1}{2}\left|\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2x\right|_{-1}^{1}$$

$$=x+\frac{1}{3}$$

$\varphi_1(x)$ را درمعادلهٔ (۶۵.۱۶) می‌نشانیم، و به‌دست می‌آوریم

$$\varphi_2(x)=x+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t-x)t\,dt+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t-x)\frac{1}{3}\,dt$$

$$=x+\frac{1}{3}-\frac{x}{3}$$

این فرایند جانشانی درمعادلهٔ (۶۵۰۱۶) را ادامه می‌دهیم؛ خواهیم داشت

$$\varphi_{۲}(x)=x+\frac{۱}{۳}-\frac{x}{۳}-\frac{۱}{۳^{۲}}$$

وازطریق استقرا می‌رسیم به

$$\varphi_{۲n}(x)=x+\sum_{i=۱}^{n}(-۱)^{i-۱}۳^{-i}-x\sum_{i=۱}^{n}(-۱)^{i-۱}۳^{-i} \qquad (۶۷۰۱۶)$$

درحد $n\to\infty$ خواهیم داشت

$$\varphi(x)=\frac{۳}{۴}x+\frac{۱}{۴} \qquad (۶۸۰۱۶)$$

این جواب‌را می‌توان (وباید) بانشاندن در معادلهٔ اصلی، معادلهٔ (۶۵۰۱۶)، آزمود.

توجه به‌این نکته جالب است که هرچند دراین حالت‌خاص، شرایط موردنظر معادلهٔ (۶۴۰۱۶) صدق نمی‌کند، ولی‌همگرایی‌سری ما به‌آسانی مشخص‌می‌شود. معادلهٔ (۶۴۰۱۶)، درواقع‌یك‌کران‌بالایی بسیارتقریبی برای λ است. می‌توان‌نشان دادکه‌شرط‌لازم‌وکافی‌برای همگرایی جواب سری ماعبارت‌است از $|\lambda|<|\lambda_{۰}|$؛ که در آن $\lambda_{۰}$ و یژه‌مقداری ازمعادلهٔ همگن متناظر با $[f(x)=۰]$ به‌شمارمی‌آیدکه بزرگیش ازهمه کمترباشد. $\lambda_{۰}$ درمثال‌خاص مورد نظر برابر $\sqrt{۳}/۲$ است. روشن است که: $\lambda=۱/۲<\lambda_{۰}=\sqrt{۳}/۲$.

درمحاسبهٔ اختلال وابسته به‌زمان درمکانیك‌کوانتومی، یکی ازرهیافتها آن است که از معادلهٔ انتگرالی زیربرای عملگرتحول شروع کنیم

$$U(t,t_{۰})=۱-\frac{i}{\hbar}\int_{t_{۰}}^{t}V(t_{۱})U(t_{۱},t_{۰})\,dt_{۱} \qquad (\text{۶۹۰۱۶ الف})$$

تکرارعملیات منجرمی‌شود به

$$U(t,t_{۰})=۱-\frac{i}{\hbar}\int_{t_{۰}}^{t}V(t_{۱})\,dt_{۱}+\left(\frac{i}{\hbar}\right)^{۲}\int_{t_{۰}}^{t}\int_{t_{۰}}^{t_{۱}} V(t_{۱})V(t_{۲})\,dt_{۲}\,dt_{۱}+\cdots \qquad (\text{۶۹۰۱۶ ب})$$

عملگرتحول به‌صورت یك‌سری‌ازانتگرالهای چندگانه ازپتانسیل اختلال $V(t)$، خیلی شبیه به‌سری نویمان، معادلهٔ (۶۰۰۱۶)، به‌دست می‌آید. عملگر تحول، به‌ازای $V=V_{۰}$، مستقل از t، به‌صورت زیر درمی‌آید

$$U(t_{۱},t_{۰})=\exp[-i(t-t_{۰})V_{۰}/\hbar]$$

رابطهٔ‌دیگری مشابه‌این‌رابطه بین سری نویمان و مکانیك‌کوانتومی وقتی ظاهر می‌شود

که‌معادلهٔ موج شرودینگر برای‌پراکندگی را به‌صورت یك‌معادلهٔ انتگرالی‌مجدداً فرمولبندی می‌کنند. اولین جملهٔ یك جواب سری نویمان، عبارت است از موج فرودی (مختل نشده). جملهٔ دوم، تقریب بورن، معادلهٔ (۱۹۱.۱۶) بخش ۶.۱۶، است.

روش نویمان‌را می‌توان درمورد معادلات انتگرالی ولترای نوع‌دوم، معادلهٔ(۴.۱۶) یا معادلهٔ (۵۶.۱۶)، که درآن‌حد بالایی ثابت b را بامتغیر x تعویض کرده‌ایم، نیز به‌کار گرفت. سری نویمان درمورد ولترا، تاجایی که‌کرنل انتگرالپذیر مجذوری باشد، به‌ازای همهٔ مقادیر λ همگرا می‌شود.

کرنل جداشدنی

هرگاه‌کرنل $K(x, t)$ جداشدنی باشد، یعنی

$$K(x, t)=\sum_{j=1}^{n} M_j(x)N_j(t) \tag{۷۰.۱۶}$$

که درآن n، کران بالایی‌مجموع، متناهی است، می‌توانیم ازشگرد تعویض معادلهٔانتگرالی بادستگاه معادلات جبری استفاده کنیم. چنین کرنلهایی را گاهی واگن‌گویند. ردهٔ‌کرنلهای جداشدنی تمام چندجمله‌ایها وبسیاری از توابع غیرجبری مقدماتی‌رادربرمی‌گیرد؛ یعنی

$$\cos(t-x)=\cos t\,\cos x+\sin t\,\sin x \tag{الف ۷۰.۱۶}$$

اگر معادلهٔ (۷۰.۱۶) برقرار باشد، باجانشانی در معادلهٔ فردهولم نوع دوم، معادلهٔ (۲.۱۶)، خواهیم داشت

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{j=1}^{n} M_j(x)\int_a^b N_j(t)\,\varphi(t)\,dt \tag{۷۱.۱۶}$$

که در آن ترتیب انتگرالگیری ومجموعیابی‌را تعویض کرده‌ایم. دراینجا انتگرال برحسب t مقدار ثابتی است

$$\int_a^b N_j(t)\,\varphi(t)\,dt=c_j \tag{۷۲.۱۶}$$

بداین‌ترتیب معادلهٔ (۷۱.۱۶) به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{j=1}^{n} c_j\,M_j(x) \tag{۷۳.۱۶}$$

این‌رابطه، پس ازتعیین ثابتهای c_i، جواب $\varphi(x)$ را بدما خواهد داد. علاوه براین، معادلهٔ (۷۳.۱۶)، شکل $\varphi(x)$ را نیز به‌صورت $f(x)$، به‌اضافهٔ یك ترکیب خطی ازعوامل‌وابسته به‌x درکرنل جداشدنی، معین می‌کند.

برای یافتن c_iها، می‌توانیم معادلهٔ (۷۳.۱۶) را در $N_i(x)$ ضرب کنیم آنگاه برای حذف وابستگی به x، انتگرال بگیریم. با استفاده از معادلهٔ (۷۲.۱۶)، خواهیم داشت

$$c_i = b_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j \qquad (۷۴.۱۶)$$

که در آن

$$b_i = \int_a^b N_i(x)\, f(x)\, dx$$

(۷۵.۱۶)

$$a_{ij} = \int_a^b N_i(x)\, M_j(x)\, dx$$

شاید بد نباشد که معادلهٔ (۷۴.۱۶) را به صورت ماتریسی بنویسیم. با $\mathbf{A} = (a_{ij})$، داریم

$$\mathbf{b} = \mathbf{c} - \lambda \mathbf{A} \mathbf{c} = (1 - \mu \mathbf{A})\mathbf{c} \qquad (۷۶.۱۶\ \text{الف})$$

یا[1]

$$\mathbf{c} = (1 - \lambda \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \qquad (۷۶.۱۶\ \text{ب})$$

معادلهٔ (۷۶.۱۶ الف) معادل است با مجموعه‌ای از دستگاه معادله‌های جبری خطی

$$\begin{aligned}
(1-\lambda a_{11})c_1 - \lambda a_{12} c_2 - \lambda a_{13} c_3 - \cdots &= b_1, \\
-\lambda a_{21} c_1 + (1-\lambda a_{22}) c_2 - \lambda a_{23} c_3 - \cdots &= b_2, \qquad (۷۷.۱۶) \\
-\lambda a_{31} c_1 - \lambda a_{32} c_2 + (1-\lambda a_{33}) c_3 - \cdots &= b_3,
\end{aligned}$$

اگر معادلهٔ انتگرالی ما همگن باشد $[f(x) = 0]$، آنگاه $\mathbf{b} = 0$. برای آنکه جوابی داشته باشیم، باید دترمینان ضرایب c_i صفر شود (دقیقاً مانند مورد بخش ۶.۴)

$$|1 - \lambda \mathbf{A}| = 0 \qquad (۷۸.۱۶)$$

ریشه‌های معادلهٔ (۷۸.۱۶) ویژه‌مقدارها را می‌دهند. با نشاندن در $(1 - \lambda \mathbf{A})\mathbf{c} = 0$، c_iها را پیدا می‌کنیم و سپس از معادلهٔ (۷۳.۱۶) جواب را به‌دست می‌آوریم.

---

۱. به‌تشابه با صورت عملگری سری نویمان توجه کنید.

مثال ۲.۳.۱۶
برای نمایش این شگرد در مورد تعیین ویژه‌مقدارها و ویژه‌تابعهای معادلهٔ فردهولم همگن، حالت سادهٔ زیررا درنظرمی‌گیریم

$$\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^{1}(t+x)\varphi(t)\,dt \qquad (۷۹.۱۶)$$

دراینجا

$$M_1=1,\quad M_2(x)=x$$
$$N_1(t)=t,\qquad N_2=1$$

ازمعادلهٔ (۷۵.۱۶) داریم

$$a_{11}=a_{22}=0$$
$$a_{12}=\frac{2}{3}$$
$$a_{21}=2$$

معادلهٔ (۷۸.۱۶)، یعنی معادلهٔ معین ما، به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\begin{vmatrix}1 & -\frac{2\lambda}{3}\\ -2\lambda & 1\end{vmatrix}=0 \qquad (۸۰.۱۶)$$

حاصل بسط چنین است

$$1-\frac{4\lambda^2}{3}=0$$
$$(۸۱.۱۶)$$
$$\lambda=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

با نشاندن ویژه مقدارهای $\lambda=\pm\sqrt{3}/2$ درمعادلهٔ (۷۶.۱۶) داریم

$$c_1\mp\frac{c_2}{\sqrt{3}}=0 \qquad (۸۲.۱۶)$$

سرانجام باانتخاب $c_1=1$، ازمعادلهٔ (۷۳.۱۶) داریم

$$\varphi_۱(x)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۱+\sqrt{۳}x),\quad \lambda=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \qquad (۸۳.۱۶)$$

$$\varphi_۲(x)=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}(۱-\sqrt{۳}x),\ \lambda=-\frac{\sqrt{۳}}{۲} \qquad (۸۴.۱۶)$$

از آنجا که معادلهٔ ما همگن‌است، بهنجارش $\varphi(x)$ اختیاری است.

اگر کرنل بنا برمفهوم معادلهٔ (۷۰.۱۶) جداشدنی نباشد، بازهم این‌امکان فراهم‌است که بتوانیم آن را باکرنلی جداشدنی تقریب بزنیم. دراین‌صورت می‌توانیم جواب دقیق این‌معادلهٔ تقریبی‌را، که تقریبی‌است برمعادلهٔ اصلی، به‌دست آوریم. سپس می‌توان جواب این مسئلهٔ باکرنل تقریبی جداشدنی را ازطریق نشاندن در مسئلهٔ باکرنل جدانشدنی اصلی آزمود.

راه‌حلهای عددی

مطالب زیادی دربارهٔ راه‌حلهای عددی معادله‌های انتگرالی نوشته شده است، که غالباً باشگردهای خاص مربوط به‌وضعیتهای معینی سروکاردارند. یکی از این روشها که نسبتاً عمومیت دارد عبارت‌است ازجابه‌جایی تک‌معادلهٔ انتگرالی بامجموعه‌ای ازدستگاه‌معادلات جبری. دراینجا نیز از شگردهای ماتریسی استفاده می‌شود. باز هم رهیافت دستگاه معادلهٔ جبری ـ ماتریسی را در دوحالت‌متفاوت به‌کارمی‌بریم. این‌روش برای‌معادلهٔ همگن فردهولم نوع‌دوم کارایی مطلوبی دارد. ولی درمورد معادلهٔ فردهولم نوع اول نتایج این‌روش بسیار نامطلوب است ابتدا به‌همین حالت نامطلوب می‌پردازیم.

معادلهٔ انتگرالی فردهولم نوع اول را در نظر می‌گیریم

$$f(x)=\int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt \qquad (\text{الف } ۸۴.۱۶)$$

که در آن $f(x)$ و $K(x,t)$ معلوم و $\varphi(t)$ مجهول است. این انتگرال را (علی‌الاصول) می‌توان به‌کمك شگردهای‌کوادراتوری حل کرد. اگرکرنل پیوسته‌باشد ومشتقهای‌پیوسته‌ای هم‌داشته باشد، برای دستیابی به‌دقت بیشینه، روش گاؤسی (پیوست۲ را ببینید) را توصیه می‌کنیم. باکوادراتور عددی، به‌جای انتگرال مجموعیابی زیررا می‌نشانیم

$$f(x_i)=\sum_{k=۱}^{n} A_k K(x_i,t_k)\,\varphi(t_k) \qquad (\text{ب } ۸۴.۱۶)$$

که در آن A_k ضرایب کوادراتورند. برای رعایت خلاصه نویسی به‌جای $f(x_i)$، f_i و به‌جای $\varphi(t_k)$، φ_k و به‌جای $A_kK(x_i,t_k)$، B_{ik} را قرار می‌دهیم. درواقع، به‌جای توصیف تابعی ازتوصیف برداری ـ ماتریسی بهره‌می‌گیریم که درآن n مؤلفهٔ بردار (f_i) بنابرتعریف

عبارت‌اند ازمقادیر تابع در n نقطهٔ گسسته $[f(x_i)]$. معادلهٔ (۸۴.۱۶ب) به‌صورت معادلهٔ ماتریسی زیر درمی‌آید

$$f_i = \sum_{k=1}^{n} B_{ik}\varphi_k$$

باوارون کردن (B_{ik})، خواهیم داشت

$$\varphi(x_k) = \varphi_k = \sum_{k=1}^{n} B_{ki}^{-1} f_i \qquad (۸۴.۱۶\ ج)$$

وبه‌این ترتیب معادلهٔ (۸۴.۱۶ الف)، علی‌الاصول، حل شده است. عملاً، ماتریس ضریب کوادراتور کرنل غالب اوقات (نسبت به وارون‌سازی) "بد ـ شرط" است. یعنی، در فرایند وارون‌سازی، خطاهای (عددی) کوچك درعوامل بزرگ ضرب می‌شوند. همهٔ ارقام‌معنی‌دار ممکن است در فرایند وارون‌سازی حذف شوند ومعادلهٔ (۸۴.۱۶ ج) به‌یك عبارت بی‌معنی عددی تبدیل شود.

این شرایط بسیارنامطلوب خیلی‌هم دورازانتظار نیست. انتگرالگیری اساساً یك‌عمل هموارکننده‌است. $f(x)$ نسبت به‌وردشهای موضعی $\varphi(t)$، تقریباً غیرحساس است. برعکس، $\varphi(t)$ ممکن‌است نسبت به‌تغییرات کوچك $f(x)$ بسیارحساس باشد. خطاهای کوچك در $f(x)$ یا در $\mathbf{B}^{-1}$، بزرگ می‌شوند ودقت از بین می‌رود. وقتی می‌خواهیم وارون تبدیل لاپلاس را به‌روش عددی بیابیم، همین رفتاررا مشاهده می‌کنیم (بخش ۸.۱۵).

اگراین شگرد ماتریسی ـ کوادراتوری را دربارهٔ مسئلهٔ ویژه‌مقداری معادلهٔ انتگرالی همگن باکرنل متقارن فردهولم نوع دوم[1]

$$\lambda\varphi(x) = \int_a^b K(x, t)\varphi(t)\,dt \qquad (۸۴.۱۶\ د)$$

به‌کاربریم، به‌توفیق بیشتری دست‌پیدا می‌کنیم. به‌جای انتگرال مجموعه‌ای ازدستگاه‌معادلات جبری (کوادراتورعددی، پیوست ۲ را ببینید) می‌نشانیم، درنتیجه

$$\lambda\varphi_i = \sum_{k=1}^{n} A_k K_{ik}\varphi_k \qquad (۸۴.۱۶\ ه)$$

که درآن، مانندقبل، داریم: $\varphi_i = \varphi(x_i)$. نقاط x_i، $i = ۱, ۲, \dots, n$، را (ازنظرعددی) با t_k، $k = ۱, ۲, \dots, n$ برابرمی‌گیریم به‌طوری‌که K_{ik} متقارن باشد. عمل‌ضرب کردن در $A_i^{1/2}$ سیستم‌را متقارن می‌کند، به‌طوری‌که

---

۱. ویژه‌مقدار λ را، به‌صورتی که درآنالیز ماتریسی متداول است (بخش ۶.۴)، درسمت چپ به‌شکل ضریب ویژه‌تابع نوشته‌ایم. به‌این صورت، λ یك مقدار بیشینه به‌خود خواهدگرفت.

$$\lambda(A_i^{1/2}\varphi_i)=\sum_{k=1}^{n}(A_i^{1/2}\,K_{ik}\,A_k^{1/2})\,(A_k^{1/2}\varphi_k) \qquad (۸۴.۱۶\ \text{و})$$

به جای $A_i^{1/2}\,\varphi_i$ کمیت ψ_i و به‌جای $A_i^{1/2}K_{ik}A_k^{1/2}$ کمیت S_{ik} را می‌نشانیم؛ خواهیم داشت

$$\lambda\psi=\mathbf{S}\psi \qquad (۸۴.۱۶\ \text{ز})$$

که‌در آن $\mathbf{S}$ متقارن‌است [زیرا کرنل، $K(x\,,\,t)$، متقارن‌فرض‌شد]. البته، ψ دارای‌مؤلفه‌های $\psi_i=\psi(x_i)$ است. معادلهٔ (۸۴.۱۶ ز) همان معادلهٔ ویژه‌مقداری ماتریسی، یعنی معادلهٔ (۱۴۶.۴)، است. ویژه‌مقدارها را می‌توان به‌آسانی و بافراخواندن برنامهٔ SSP EIGEN[1] به‌دست آورد. برای کرنلهایی نظیر کرنلهای مسئلهٔ ۱۵.۳.۱۶ و بااستفاده از کوادراتور لژاندر-گاؤس ۱۰ رقمی، EIGEN، در مواردی که در مشتقهای کرنل گسستگیهایی پدید آمده باشد، بزرگترین ویژه‌مقدار را باخطای حدود ۵ر۰ درصد به‌دست می‌دهد. اگرمشتقها پیوسته باشند، دقت بسیار بهتری حاصل می‌شود.

لینتس[2] با یك اصلاح وردشی جالب تعیین دقیقتر $\lambda_{\max}$ را ممکن می‌سازد. رمز این روش در مسئلهٔ ۷.۸.۱۷ آمده است. مؤلفه‌های بردار ویژه‌تابع از معادلهٔ (۸۴.۱۶ د) با $\varphi(t_k)$ معلوم به‌دست‌می‌آیند که درآن $\varphi_1=\varphi(x_i)$ را به‌صورتی که‌لازم‌است تولید می‌کنند (x_iها دیگر به t_kها مربوط نمی‌شوند).

مسائل

۱.۴.۱۶ بااستفاده از سری نویمان معادله‌های زیر را حل کنید

$$\varphi(x)=1-2\int_0^x t\,\varphi(t)\,dt \qquad (\text{الف})$$

$$\varphi(x)=x+\int_0^x (t-x)\,\varphi(t)\,dt \qquad (\text{ب})$$

$$\varphi(x)=x-\int_0^x (t-x)\,\varphi(t)\,dt \qquad (\text{ج})$$

پاسخ. (الف) $\varphi(x)=e^{-x^2}$.

---

۱. زیر-برنامهٔ متناظر در بستهٔ زیر-برنامهٔ علمی PL/I
(PL/I Scientific Subroutine package)
عبارت است از MSDU.

2. Peter Linz "On the numerical computation of eigenvalues and eigenvectors of symmetric integral equations." *Math. Computation*, **24**, 905 (1970).

۲.۳.۱۶ معادلهٔ زیر را به‌کمك روش کرنل جداشدنی حل کنید

$$\varphi(x)=x+\frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۱}(t+x)\varphi(t)\,dt$$

و این روش را با راه حلی که به‌کمك روش نویمان در بخش ۳.۱۶ اعمال‌شد، مقایسه کنید.

پاسخ. $\varphi(x)=\frac{۱}{۲}(۳x+۱)$.

۳.۳.۱۶ ویژه‌مقدارها و ویژه‌تابعهای معادلهٔ زیر را بیابید

$$\varphi(x)=\lambda\int_{-۱}^{۱}(t-x)\varphi(t)\,dt$$

۴.۳.۱۶ ویژه‌مقدارها و ویژه‌تابعهای معادلهٔ زیر را پیدا کنید

$$\varphi(x)=\lambda\int_{۰}^{۲\pi}\cos(x-t)\,\varphi(t)\,dt$$

پاسخ. $\lambda_۱=\lambda_۲=\frac{۱}{\pi}$، $\varphi(x)=A\cos x+B\sin x$.

۵.۳.۱۶ ویژه‌مقدارها و ویژه‌تابعهای معادلهٔ زیر را پیدا کنید

$$y(x)=\lambda\int_{-۱}^{۱}(x-t)^{۲}\,y(t)\,dt$$

راهنمایی. این مسئله را می‌توان از طریق روش کرنل جداشدنی یا به‌کمك بسط لژاندر حل کرد.

۶.۳.۱۶ اگر شگرد کرنل جداشدنی این بخش‌را دربارهٔ یك‌معادلهٔ فردهولم نوع اول به‌کار بریم، [معادلهٔ (۱.۱۶)]، نشان دهید که معادلهٔ (۷۶.۱۶) بامعادلهٔ زیر تعویض می‌شود

$$\mathbf{c}=\mathbf{A}^{-۱}\mathbf{b}$$

جواب مربوط به‌تابع مجهول $\varphi(t)$ عموماً یکتا نیست.

۷.۳.۱۶ معادلهٔ

$$\psi(x)=x+\int_{۰}^{۱}(۱+xt)\,\psi(t)\,dt$$

را از طریق هریك از روشهای زیر حل کنید

(الف) شگرد سری نویمان، (ب) شگرد کرنل جداشدنی، (ج) حدس آگاهانه.

۸.۳.۱۶ با بهره‌گیری از شگرد کرنل جداشدنی نشان دهید

$$\psi(x)=\lambda\int_{\circ}^{\pi}\cos x\sin t\,\psi(t)\,dt$$

(جز جواب بدیهی $\psi=\circ$) هیچ‌جوابی ندارد. این نتیجه‌را بادرنظرگرفتن جداشدنی‌بودن وتقارن توجیه کنید.

۹.۳.۱۶ معادلهٔ

$$\varphi(x)=1+\lambda^{2}\int_{\circ}^{x}(x-t)\varphi(t)\,dt$$

را باهریك ازروشهای زیرحل کنید

(الف) تحویل به‌یك معادلهٔ دیفرانسیل (همراه باتعیین شرایط مرزی)،

(ب) سری نویمان،

(ج) استفاده ازتبدیلهای لاپلاس.

پاسخ. $\varphi(x)=\cosh\lambda x$.

۱۰.۳.۱۶ (الف) در معادلهٔ (۶۹.۱۶ الف) V را برابر $V_{\circ}$ و مستقل از t بگیرید. بدون استفاده ازمعادلهٔ (۶۹.۱۶ ب) نشان‌دهیدکه (۶۹.۱۶ الف) مستقیماً به‌معادلهٔ زیرمی‌انجامد

$$U(t-t_{\circ})=\exp\left[-i(t-t_{\circ})V_{\circ}/\hbar\right]$$

(ب) همین کار را دربارهٔ معادلـهٔ (۶۹.۱۶ ب)، بدون استفاده از (۶۹.۱۶ الف) انجام دهید.

۱۱.۳.۱۶ ویژه‌مقدارهـا و ویژه‌تـابعهای معـادلهٔ $\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^{1}(1+xt)\,\varphi(t)\,dt$ را بااستفاده ازشگرد کرنل جداشدنی به‌دست آورید.

۱۲.۳.۱۶ اطلاع از شکل جوابهای معادله‌های انتگـرالی می‌تواند به‌حل این معادله‌هـا کمکهای شایانی کند. فرض‌کنید $\varphi(x)$ برای معادلهٔ

$$\varphi(x)=\lambda\int_{\circ}^{1}(1+xt)\varphi(t)\,dt$$

به‌شکل $1+bx$ باشد. این جواب را درمعادلهٔ انتگرالی قراردهید. انتگرال بگیرید، و b

و λ را به‌دست آورید.

۱۳.۳.۱۶ معادلهٔ انتگرالی

$$\varphi(x)=\lambda\int_{\circ}^{1} J_{\circ}(\alpha x t)\varphi(t)\,dt,\quad J_{\circ}(\alpha)=\circ$$

را بامعادلهٔ

$$\varphi(x)=\lambda\int_{\circ}^{1}[1-x^{2}t^{2}]\,\varphi(t)\,dt$$

تقریب می‌زنیم. λ، ویژه‌مقدار کمینه و ویژه‌تابع متناظر با آن را برای‌معادلهٔ تقریبی به‌دست آورید.

پاسخ. $\lambda_{\min}=1/112486$، $\varphi(x)=1-0/30337\,x^{2}$.

۱۴.۳.۱۶ معادلهٔ انتگرالی زیر را داریم

$$\varphi(x)=\lambda\int_{\circ}^{1}\sin\pi x t\,\varphi(t)\,dt$$

کرنل‌را به‌صورت زیر تقریب بزنید

$$K(x,t)=4(xt)(1-xt)\approx\sin\pi x t$$

ویژه‌مقدار مثبت و ویژه‌تابع متناظر با آن را برای معادلهٔ انتگرالی تقریبی به‌دست آورید.

یادآوری. λ به‌ازای $K(x,t)=\sin\pi x t$ برابر ۱٫۶۳۳۴ است.

پاسخ. $\lambda=1/5678$، $\varphi(x)=x-0/6955x^{2}$،

$$(\lambda_{+}=\sqrt{31}-4,\ \lambda_{-}=-\sqrt{31}-4).$$

۱۵.۳.۱۶ معادلهٔ

$$f(x)=\int_{a}^{b}K(x,t)\,\varphi(t)\,dt$$

دارای کرنل واگن $K(x,t)=\sum_{i=1}^{n}M_{i}(x)N_{i}(t)$ است.

(الف) نشان‌دهیدکه این معادلهٔ انتگرالی هیچ جوابی ندارد. مگر آنکه $f(x)$ را بتوان به‌صورت زیر نوشت

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} f_{i}\,M_{i}(x)$$

که در آن f_iها ثابت‌اند.

(ب) نشان دهید که به‌هر جواب $\varphi(x)$ می‌توانیم تابع $\psi(x)$ را بیفزاییم، به‌شرط آنکه $\psi(x)$ نسبت به‌همهٔ $N_i(x)$ها متعامد باشد

$$\int_a^b N_i(x)\psi(x)\,dx = 0 \quad \text{به‌ازای همهٔ } i \text{ها:}$$

۱۶.۳.۱۶ با استفاده از کوادراتور عددی، معادلهٔ

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 J_0(\alpha x t)\varphi(t)\,dt, \quad J_0(\alpha) = 0$$

را به‌مجموعه‌ای از دستگاه معادلات خطی تبدیل کنید.

(الف) λ ویژه‌مقدار کمینه‌را بیابید.

(ب) $\varphi(x)$ را در مقادیر گسستهٔ x تعیین کنید و $\varphi(x)$ را برحسب x رسم کنید. با ویژه‌تابع تقریبی مسئلهٔ ۱۳.۳.۱۶ مقایسه کنید.

پاسخ. (الف) $\lambda_{\min} = ۱٫۱۴۵۰۲$.

۱۷.۳.۱۶ با استفاده از کوادراتور عددی، معادلهٔ

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 \sin \pi x t\, \varphi(t)\,dt$$

را به‌مجموعه‌ای از دستگاه معادلات خطی تبدیل کنید.

(الف) λ ویژه‌مقدار کمینه‌را بیابید.

(ب) $\varphi(x)$ را درمقادیر گسستهٔ x تعیین و آن را برحسب x رسم کنید. با ویژه‌تابع تقریبی مسئلهٔ ۱۴.۳.۱۶ مقایسه کنید.

پاسخ. (الف) $\lambda_{\min} = ۱٫۶۳۳۴$.

۱۸.۳.۱۶ برای یك معادلهٔ همگن فردهولم نوع دوم به‌صورت زیر

$$\lambda\varphi(x) = \int_0^1 K(x, t)\varphi(t)\,dt$$

(الف) بزرگترین‌ویژه‌مقدار، λ_0،را محاسبه کنید. از شگرد کوادراتور گاؤس-لژاندر ده‌رقمی استفاده کنید. ویژه‌مقدارهایی را که توسط لینتس فهرستبندی شده‌اند برای مقایسه به‌صورت λ دقیق داده‌ایم.

(ب) $\varphi(x_k)$ را برای x_k منطبق برهریك ازده‌نقطهٔ ارزیابی در بازهٔ $[0, 1]$ جدولبندی کنید.

(ج) نسبت زیر را به‌ازای $x = x_k$ درجدولی بیاورید

$$\int_{\circ}^{1} K(x, t)\varphi(t)\,dt/\lambda_{\circ}\varphi(x)$$

این کار آزمون این نکته به‌شمار می‌آید که آیا واقعاً به‌یك جواب دست یافته‌اید یا خیر. مسئله را برای کرنلهای زیر حل کنید.

(الف) $K(x, t)=e^{xt}$.

پاسخ. $\lambda_{\text{دقیق}}=۱٫۳۵۳۰۳$.

(ب)
$$K(x, t)=\begin{cases}\frac{1}{۲}x(۲-t), & x<t\\ \\ \frac{1}{۲}t(۲-x), & x>t\end{cases}$$

پاسخ. $\lambda_{\text{دقیق}}=۰٫۲۴۲۹۶$.

(ج)
$$K(x, t)=|x-t|$$

پاسخ. $\lambda_{\text{دقیق}}=۰٫۳۴۷۴۱$.

(د)
$$K(x, t)=\begin{cases}x, & x<t\\ t, & x>t\end{cases}$$

پاسخ. $\lambda_{\text{دقیق}}=۰٫۴۰۵۲۸$.

یادآوری. نقاط ارزیابی، x_iهای مربوط به کوادراتور گاوس-لژاندر برای [۱ , ۱ −]، را می‌توان به‌صورت خطی به [۱ , ۰] تبدیل کرد

$$x_i[\circ, ۱]=\frac{۱}{۲}(x_i[-۱, ۱]+۱)$$

دراین‌صورت عاملهای وزنی A_i به‌نسبت طول بازه کوچك می‌شوند

$$A_i[\circ, ۱]=\frac{۱}{۲}A_i[-۱, ۱]$$

۱۹.۳.۱۶ با استفاده ازشگرد وردشی ماتریسی درمسئلهٔ ۷.۸.۱۷، محاسبهٔ ویژه‌مقدار مسئلهٔ ۱۸.۳.۱۶ج، $[K(x, t)=|x-t|]$، را اصلاح کنید. یك‌ماتریس ۴۰ × ۴۰ را امتحان کنید.

یادآوری. ماتریسی که به‌کارمی‌برید باید متقارن باشد به‌طوری‌که ویژه‌بردارهای (مجهول) متعامد باشند.

پاسخ. (کوادراتور گاؤس-لژاندره۴۰ رقمی) ۳۴۷۲۷ر۰.

۴.۱۶ نظریهٔ هیلبرت ـ اشمیت

متقارن سازی کرنلها

دراینجا خواص معادله‌های انتگرالی خطی (از نوع فردهولم) باکرنلهای متقارن

$$K(x, t)=K(t, x) \qquad (۸۵.۱۶)$$

را مطرح می‌کنیم. قبل ازآنکه به‌این نظریه واردشویم، به‌این‌نکته توجه می‌کنیم که‌می‌توان برخی‌کرنلهای نامتقارن مهم‌را متقارن کرد. درمعادلهٔ

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda \int_a^b K(x, t)\, \rho(t)\, \varphi(t)\, dt \qquad (۸۶.۱۶)$$

عبارت $K(x, t)\, \rho(t)$ عملاکرنل کل به‌شمارمی‌آید، روشن‌است که‌اگرفقط $K(x, t)$ متقارن باشد، این کرنل متقارن نخواهدبود. ولی اگرمعادلهٔ (۸۶.۱۶) رادر $\sqrt{\rho(x)}$ ضرب کنیم، وقراردهیم

$$\sqrt{\rho(x)}\, \varphi(x)=\psi(x) \qquad (۸۷.۱۶)$$

خواهیم داشت

$$\psi(x)=\sqrt{\rho(x)} f(x)+\lambda \int_a^b \left[K(x, t) \sqrt{\rho(x)\, \rho(t)}\right] \psi(t)\, dt \qquad (۸۸.۱۶)$$

که در آن‌کرنل‌کل متقارن عبارت است از $K(x, t)\sqrt{\rho(x)\, \rho(t)}$. $\rho(x)$ بعدأدراین نظریهٔ اشتورم ـ لیوویل معادلهٔ انتگرالی، به‌صورت یك عامل وزنی ظاهر خواهدشد.

ویژه‌تابعهای متعامد

اکنون توجه خود را به‌معادلهٔ همگن فردهولم نوع دوم معطوف‌می‌کنیم

$$\varphi(x)=\lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)\, dt \qquad (۸۹.۱۶)$$

فرض می‌کنیم که‌کرنل $K(x, t)$ حقیقی ومتقارن است. شاید یکی ازنخستین پرسشهایی که یك ریاضیدان دربارهٔ این‌معادله مطرح کند، این‌باشدکه "آیا این عبارت معنی‌هم دارد"؟ یا به‌عبارت دقیقتر، "آیا یك ویژه‌مقدار λ وجود دارد که دراین معادله صدق کند؟" کوران و

هیلبرت (در بخش ۴ فصل ۳ کتاب خود) به‌کمک نامساویهای بسل و شوارتس نشان دادند که اگر $K(x, t)$ پیوسته باشد، دست‌کم یك ویژه‌مقدار وشاید هم بینهایت ویژه‌مقدار برای این معادله وجود دارد.

ما نشان خواهیم داد که ویژه‌مقدارها، λ، حقیقی و ویژه‌تابعهای متناظر، $\varphi_i(x)$، متعامدند. دو ویژه‌مقدار متفاوت λ_i و λ_j و ویژه‌تابعهای متناظر $\varphi_i(x)$ و $\varphi_j(x)$ را درنظر بگیرید. معادلهٔ (۸۹.۱۶) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\varphi_i(x)=\lambda_i\int_a^b K(x, t)\varphi_i(t)\,dt \qquad \text{(۹۰.۱۶ الف)}$$

$$\varphi_j(x)=\lambda_j\int_a^b K(x, t)\varphi_j(t)\,dt \qquad \text{(۹۰.۱۶ ب)}$$

اگرمعادلهٔ (۹۰.۱۶ الف) را در $\lambda_j\varphi_j(x)$ ومعادلهٔ (۹۰.۱۶ ب) را در $\lambda_i\varphi_i(x)$ ضرب کنیم وسپس نسبت به x انتگرال بگیریم، این دومعادله به‌صورت زیر درمی‌آیند[1]

$$\lambda_j\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx=\lambda_i\lambda_j\int_a^b\int_a^b K(x, t)\varphi_i(t)\varphi_j(x)\,dt\,dx \qquad \text{(۹۱.۱۶ الف)}$$

$$\lambda_i\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx=\lambda_i\lambda_j\int_a^b\int_a^b K(x, t)\varphi_j(t)\varphi_i(x)\,dt\,dx \qquad \text{(۹۱.۱۶ ب)}$$

از آنجاکه خواسته‌ایم $K(x, t)$ متقارن باشد، می‌توان معادلهٔ (۹۱.۱۶ ب) را به‌صورت زیر بازنویسی کرد

$$\lambda_i\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx=\lambda_i\lambda_j\int_a^b\int_a^b K(x, t)\varphi_i(t)\varphi_j(x)\,dt\,dx \qquad \text{(۹۲.۱۶)}$$

معادلهٔ (۹۲.۱۶) را ازمعادلهٔ (۹۱.۱۶ الف) کم می‌کنیم؛ خواهیم داشت

$$(\lambda_j-\lambda_i)\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx=0 \qquad \text{(۹۳.۱۶)}$$

این عبارت به‌معادلهٔ (۳۳.۹) درنظریهٔ اشتورم-لیوویل شبیه‌است. چون داریم $\lambda_i\neq\lambda_j$، پس

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx=0, \quad i\neq j \qquad \text{(۹۴.۱۶)}$$

---

۱. فرض می‌کنیم که انتگرالهای لازم وجوددارند. درحالتی که چنین‌وضعی حاکم‌نباشد، به‌مسئلهٔ ۳.۴.۱۶ رجوع کنید.

که تعامد را اثبات می‌کند. دقت کنید که با وجود یك کرنل حقیقی متقارن، درمعادلهٔ (۹۴.۱۶)، هیچ همیوغ مختلطی ظاهر نمی‌شود. برای کرنل خود-الحاقی یا هرمیتی به مسئلهٔ ۱.۴.۱۶ رجوع کنید.

اگر ویژه‌مقدار λ_i واگن باشد،[1] می‌توان ویژه‌تابعهای متناظر با این ویژه‌مقدار به‌خصوص را به‌روش گرام-اشمیت (بخش ۳.۹) متعامد کرد. روشن است که ویژه‌تابعهای متعامد را می‌توان بهنجار کرد، وفرض می‌کنیم که این کار را کرده‌ایم. نتیجه به‌صورت زیر است

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx=\delta_{ij} \qquad (۹۵.۱۶)$$

برای اینکه حقیقی بودن λ_i را نشان دهیم، باید همیوغ مختلط بگیریم. همیوغ مختلط معادلهٔ (۹۰.۱۶ الف) را می‌گیریم؛ به‌شرط حقیقی بودن کرنل $K(x, t)$، داریم

$$\varphi_i^*(x)=\lambda_i^*\int_a^b K(x, t)\,\varphi_i^*(t)\,dt \qquad (۹۶.۱۶)$$

اینك، با استفاده ازمعادلهٔ (۹۶.۱۶) به‌جای (۹۰.۱۶ ب) خواهیم دید که تحلیل ما به‌معادلهٔ زیر می‌انجامد

$$(\lambda_i^*-\lambda_i)\int_a^b \varphi_i^*(x)\,\varphi_i(x)\,dx=0 \qquad (۹۷.۱۶)$$

ولی اکنون انتگرال دیگر نمی‌تواند برابر صفر شود [مگر آنکه ما جواب بدیهی $\varphi_i(x)=0$ را گرفته باشیم] و

$$\lambda_i^*=\lambda_i \qquad (۹۸.۱۶)$$

به‌عبارت دیگر ویژه‌مقدار ما، λ_i، حقیقی است.

اگر این نحوهٔ کار، به‌طریقی مبهم به‌نظر خوانندگان آشنا بیاید، حق با آنهاست. این سومین باری است که این روش را دنبال می‌کنیم؛ اول دربارهٔ ماتریسهای هرمیتی، سپس دربارهٔ معادله‌های (خود-الحاقی) اشتورم-لیوویل، و اینك در معادله‌های انتگرالی هیلبرت-اشمیت. تناظر بین ماتریسهای هرمیتی ومعادله‌های دیفرانسیلی خود-الحاقی، درفیزیك نوین، به‌صورت دوفرمولبندی متمایز مکانیك کوانتومی ــ رهیافت ماتریسی هایزنبرگ ورهیافت عملگر دیفرانسیلی شرودینگر ــ جلوه می‌کند. در بخش ۵.۱۶ نیز به کشف تناظر موجود بین معادله‌های انتگرالی با کرنل متقارن هیلبرت-اشمیت و معادله‌های دیفرانسیلی خود-الحاقی اشتورم-لیوویل خواهیم پرداخت.

---

۱. اگر بیش ازیك ویژه‌تابع متمایز به‌یك ویژه‌مقدار [که درمعادلهٔ (۸۹.۱۶) صدق می‌کند] مربوط شود، آن ویژه‌مقداررا واگن می‌گویند.

ویژه‌تابعهای معادلهٔ انتگرالی ما یك مجموعهٔ کامل تشکیل می‌دهند؛[1] به‌این معنا که‌هر تابع $g(x)$ را، که بشود توسط انتگرال زیر تولیدکرد

$$g(x)=\int K(x,t)h(t)\,dt \tag{۹۹.۱۶}$$

که درآن $h(t)$ می‌تواند هرتابع پاره‌پاره پیوسته‌ای باشد، می‌توان‌آن را به‌کمك یك سری ازاین ویژه‌تابعها نمایش داد

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{۱۰۰.۱۶}$$

این‌سری به‌طوریکنواخت ومطلق همگرا خواهد بود.

این خاصیت‌را به‌کرنل $K(x,t)$ تعمیم می‌دهیم

$$K(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t) \tag{۱۰۱.۱۶}$$

که درآن $a_n=a_n(x)$. باجانشانی‌درمعادلهٔ انتگرالی‌اصلی [معادلهٔ (۸۹.۱۶)] وبااستفاده ازانتگرال تعامد، خواهیم داشت

$$\varphi_i(x)=\lambda_i\, a_i(x) \tag{۱۰۲.۱۶}$$

بنابراین کرنل مربوط به‌معادلهٔ همگن فردهولم نوع دوم را می‌توان برحسب ویژه‌تابعها و ویژه‌مقدارها به‌صورت زیر مشخص‌کرد

$$K(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\,\varphi_n(t)}{\lambda_n}, \quad \text{(برای ویژه‌مقدارهای غیرصفر)} \tag{۱۰۳.۱۶}$$

دراینجا یك‌بسط دوخطی داریم، یکی‌بسط خطی برحسب $\varphi_n(x)$ ویکی‌هم بسط خطی‌برحسب $\varphi_n(t)$. بسطهای دوخطی مشابهی دربخش ۷.۸ ظاهرشد. ممکن است بسط مربوط به‌معادلهٔ (۱۰۱.۱۶) وجودنداشته باشد. برای نمایش‌این‌نوع‌رفتارغیرمتعارف، ازخواننده‌می‌خواهیم که این بررسی‌را دربارهٔ معادلهٔ زیر به‌کاربندد

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^{\infty} e^{-xt}\varphi(t)\,dt$$

(بامسئلهٔ ۳.۴.۱۶ مقایسه کنید).

باید براین‌نکته تأکید ورزیم که نظریهٔ هیلبرت‌ـ‌اشمیت به‌تثبیت خواص ویژه‌مقدارها

---

۱. اثبات این خاصیت را درکتاب کوران و هیلبرت، فصل۳، بخش۵، ببینید.

(حقیقی بودن)و ویژه‌تابعها (تعامد، تمامیت)، خواصی که از اهمیت و ارزش زیادی برخوردارند، مربوط می‌شود. نظریهٔ هیلبرت-اشمیت به‌همان‌صورتی که نظریهٔ اشتورم-لیوویل درفصل ۹ به‌حل معادله‌های دیفرانسیل ارتباط پیدا نمی‌کرد، به‌حل معادله‌های انتگرالی همگن مربوط نمی‌شود. جوابهای معادلهٔ انتگرالی (از جمله تحلیل عددی) در بخشهای ۲.۱۶ و ۳.۱۶ می‌آید.

معادلهٔ انتگرالی ناهمگن

می‌خواهیم یکی از جوابهای معادلهٔ ناهمگن زیر را بیابیم

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt \qquad (۱۰۴.۱۶)$$

فرض کنید جوابهای معادلهٔ انتگرالی همگن را بدانیم

$$\varphi_n(x)=\lambda_n\int_a^b K(x,t)\varphi_n(t)\,dt \qquad (۱۰۵.۱۶)$$

که جواب $\varphi_n(x)$ با ویژه‌مقدار λ_n متناظر است. هر دو کمیت $\varphi(x)$ و $f(x)$ را برحسب این مجموعه از ویژه‌تابعها بسط می‌دهیم

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x), \quad (\text{مجهول } a_n) \qquad (۱۰۶.۱۶)$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\varphi_n(x) \quad (\text{معلوم } b_n) \qquad (۱۰۷.۱۶)$$

پس از نشاندن درمعادلهٔ (۱۰۴.۱۶)، داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\varphi_n(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(t)\,dt \qquad (۱۰۸.۱۶)$$

ترتیب انتگرالگیری ومجموعیابی‌را تعویض می‌کنیم، دراین صورت می‌توانیم بااستفاده از معادلهٔ (۱۰۵.۱۶) انتگرال بالا را محاسبه‌کنیم، و به‌دست آوریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\varphi_n(x)+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\varphi_n(x)}{\lambda_n} \qquad (۱۰۹.۱۶)$$

اگر در $\varphi_i(x)$ ضرب کنیم واز $x=a$ تا $x=b$ انتگرال بگیریم، به‌دلیل تعامد ویژه‌تابعها خواهیم داشت

$$a_i = b_i + \lambda \frac{a_i}{\lambda_i} \tag{۱۱۰.۱۶}$$

این عبارت را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد

$$a_i = b_i + \frac{\lambda}{\lambda_i - \lambda} b_i \tag{۱۱۱.۱۶}$$

که جواب مارا به‌دست می‌دهد

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\int_a^b f(t)\varphi_i(t)\,dt}{\lambda_i - \lambda} \varphi_i(x) \tag{۱۱۲.۱۶}$$

دراینجا فرض شده است که ویژه‌تابعهای $\varphi_i(x)$ به‌یك بهنجارشده‌اند. دقت کنید که اگر $f(x) = 0$، هیچ جوابی جز $\lambda = \lambda_i$ وجود نخواهد داشت. یعنی، معادلهٔ همگن ما هیچ جوابی [جز جواب بدیهی $\varphi(x) = 0$] ندارد، مگر آنکه λ یکی از ویژه‌مقدارهای λ_i باشد.

درحالتی که‌درمعادلهٔ غیرهمگن (۱۰۴.۱۶) λ برابر یکی ازویژه‌مقدارهای λ_p معادلهٔ همگن باشد، جواب ما [معادلهٔ (۱۱۲.۱۶)] نامتناهی می‌شود. برای ترمیم این وضعیت، به‌معادلهٔ (۱۱۰.۱۶) برمی‌گردیم ومقدارخاص زیررا دقیقتر بررسی می کنیم

$$a_p = b_p + \lambda_p \frac{a_p}{\lambda_p} = b_p + a_p \tag{۱۱۳.۱۶}$$

روشن است که a_p حذف می‌شود ودیگر به b_p وابسته نیست، در حالی که $b_p = 0$. به‌این معنی که: $\int f(x)\varphi_p(x)\,dx = 0$، یعنی $f(x)$ نسبت به‌ویژه‌تابع $\varphi_p(x)$ متعامد است. اگراین‌طور نباشد، جوابی نداریم.

معادلهٔ (۱۱۱.۱۶) هنوزبه‌ازای $i \neq p$ برقرار است، ازاین‌رو طرفین را در $\varphi_i(x)$ ضرب می‌کنیم، و روی همهٔ iها $(i \neq p)$ جمع می‌زنیم؛ خواهیم داشت

$$\varphi(x) = f(x) + a_p\varphi_p + \lambda_p \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{\infty}{}' \frac{\int_a^b f(t)\varphi_i(t)\,dt}{\lambda_i - \lambda_p} \varphi_i(x) \tag{۱۱۴.۱۶}$$

علامت پریم نشان می‌دهد که مقدار $i = p$ از مجموعیابی حذف می‌شود. a_p در این جواب به‌صورت یك ثابت تعیین نشده باقی می‌ماند.[1]

---

۱. این معادله شبیه به‌معادلهٔ دیفرانسیل خطی ناهمگن است. می‌توانیم هر ثابتی ضرب‌در یکی ازجوابهای معادلهٔ دیفرانسیل همگن متناظررا به‌این جواب معادله بیفزاییم.

مسائل

۱.۴.۱۶ کرنل $K(x, t)$ معادلهٔ فردهولم

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x, t)\varphi(t)\,dt$$

خود-الحاقی یا هرمیتی است

$$K(x, t)=K^*(t, x)$$

نشان دهید که

(الف) ویژه‌تابعها به‌مفهوم زیر متعامدند

$$\int_a^b \varphi_m^*(x)\varphi_n(x)\,dx=0, \quad m\neq n(\lambda_m\neq\lambda_n)$$

(ب) ویژه‌مقدارها حقیقی‌اند.

۲.۴.۱۶ معادلهٔ انتگرالی

$$\varphi(x)=x+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(t+x)\varphi(t)\,dt$$

را باروش هیلبرت-اشمیت حل کنید (بامسئلهٔ ۲.۳.۱۶ مقایسه کنید). بهره‌گیری از روش هیلبرت-اشمیت.دراین‌مورد به‌مثابه‌استفاده ازتفنگ برای کشتن یك‌پشه است؛ علی‌الخصوص که این معادله را می‌توان درظرف ۱۵ ثانیه از طریق بسط برحسب چندجمله‌ایهای لژاندر حل کرد.

۳.۴.۱۶ معادلهٔ انتگرالی‌فردهولم

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^\infty e^{-xt}\varphi(t)\,dt$$

را حل کنید.

یادآوری. بسط سری‌کرنل e^{-xt} یکی از راه‌حلهای از نوع کرنل جداشدنی (بخش ۳.۱۶) را میسر می‌سازد، بااین تفاوت که سری حاصل نامتناهی است. این به‌معنای تعداد نامتناهی ویژه‌مقدار و ویژه‌تابع است. اگر سری‌را در

$$\varphi(x)=x^{-1/2}$$

$$\lambda=\pi^{-1/2}$$

متوقف‌کنیم، قسمت عمدهٔ جوابهارا از دست داده‌ایم! نشان دهید که انتگرالهای بهنجارش

ویژه‌تابعها وجود ندارند. یکی از دلایل اساسی این رفتار بی‌هنجار آن است که گسترهٔ انتگرالگیری نامتناهی است، و همین امر، معادله را به یك معادلهٔ انتگرالی "تکین" مبدل می‌کند.

۴.۴.۱۶ گیریم

$$y(x)=x+\lambda\int_{0}^{1} xt\, y(t)\, dt$$

(الف) $y(x)$ را به‌صورت یك‌سری نویمان تعیین‌کنید.

(ب) گستره‌ای از λ را که به‌ازای آن جواب سری نویمان همگراست، بیابید. این گستره را با مقدار حاصل از نامساوی زیر مقایسه‌کنید

$$|\lambda|\ |K|_{\max}<1$$

(ج) ویژه‌مقدار و ویژه‌تابع معادلهٔ انتگرالی همگن متناظر را بیابید.

(د) به‌روش کرنل جداشدنی نشان دهید که جواب عبارت است از

$$y(x)=\frac{3x}{3-\lambda}$$

(ه) $y(x)$ را با روش هیلبرت-اشمیت بیابید.

۵.۴.۱۶ درمسئلهٔ ۴.۳.۱۶ داریم

$$K(x,t)=\cos(x-t)$$

ویژه‌تابعهای (نابهنجار) عبارت‌اند از $\cos x$ و $\sin x$.

(الف) نشان دهید که تابعی مانند $h(t)$ چنـان وجود داردکه $K(x,s)$، به‌صورت تابعی به‌تنهایی از s، را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$K(x,s)=\int_{0}^{2\pi} K(s,t)\,h(t)\,dt$$

(ب) نشان دهیدکه $K(x,t)$ را می‌توان به‌صورت زیر بسط داد

$$K(x,t)=\sum_{n=1}^{2}\frac{\varphi_n(x)\,\varphi_n(t)}{\lambda_n}$$

۶.۴.۱۶ معادلـهٔ انتگرالـی $\varphi(x)=\lambda\int_{0}^{1}(1+xt)\,\varphi(t)\,dt$ دارای ویژه‌مقدارهـای $\lambda_1=0.7889$ و $\lambda_2=15.211$ و ویـژه‌تـابعهـای $\varphi_1=1+0.5352x$ و $\varphi_2=1-1.8685x$ است.

(الف) نشان دهیدکه این ویژه‌تابعها روی بازهٔ [۰, ۱] متعامدند.
(ب) ویژه‌تابعها را به‌واحد بهنجار کنید.
(ج) نشان دهید

$$K(x, t)=\frac{\varphi_1(x)\varphi_1(t)}{\lambda_1}+\frac{\varphi_2(x)\varphi_2(t)}{\lambda_2}$$

پاسخ. (ب) $\varphi_1(x)=0.7831+0.4191\,x$ ، $\varphi_2(x)=1.8403-3.4386\,x$.

۷.۴.۱۶ صورت دیگری ازجواب معادلهٔ انتگرالی ناهمگن، معادلهٔ (۱۰۴.۱۶)، به‌صورت زیر است

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_i\lambda_i}{\lambda_i-\lambda}\,\varphi_i(x)$$

(الف) این صورت‌را بدون استفاده ازمعادلهٔ (۱۱۲.۱۶) به‌دست‌آورید.
(ب) نشان دهیدکه جواب به‌این‌صورت بامعادلهٔ (۱۱۲.۱۶) معادل است.

۸.۴.۱۶ (الف) نشان دهیدکه ویژه‌تابعهای مسئلهٔ ۵.۳.۱۶ متعامدند.
(ب) نشان دهیدکه ویژه‌تابعهای مسئلهٔ ۱۱.۳.۱۶ متعامدند.

۵.۱۶ توابع گرین-یك بعد

دربخشی ازبررسی عملگرهای دیفرانسیلی دربخش ۷.۸، دیدیم که یکی ازجوابهای معادلهٔ پواسون الکتروستاتیك

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r})=-\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \qquad (115.16)$$

به‌این صورت‌است

$$\varphi(\mathbf{r}_1)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}\,d\tau_2 \qquad (116.16)$$

که درآن‌باحالت نامتناهی سروکارداریم؛ یعنی گسترهٔ انتگرالگیری همهٔ‌فضارا دربرمی‌گیرد. اگربخواهیم، می‌توانیم پتانسیل $\varphi(\mathbf{r}_1)$ را، بااستفاده ازبار وتوزیع لایهٔ دوقطبی مناسب‌در مرزها،[1] برای یك حالت متناهی تعمیم دهیم.
می‌توان معادلهٔ (۱۱۶.۱۶) را به‌دوصورت تعبیر کرد.

---

۱. باکتاب زیرمقایسه‌کنید
Stratton, J. A., *Electromagnetic Theory*. New York: McGraw-Hill, 1941.

۱. اگر پتانسیل $\varphi(\mathbf{r}_1)$ معلوم باشد وما درپی یافتن توزیع بار $\rho(\mathbf{r}_2)$ باشیم که این پتانسیل را می‌دهد، دراین‌صورت معادلهٔ (۱۱۶.۱۶) یك‌معادلهٔ انتگرالی برحسب $\rho(\mathbf{r}_2)$ است.
۲. اگر توزیع بار $\rho(\mathbf{r}_2)$ معلوم باشد، پتانسیل الکتروستاتیکی $\varphi(\mathbf{r}_1)$ به‌صورت یك انتگرال معین ازمعادلهٔ (۱۱۶.۱۶) به‌دست می‌آید.

باتعقیب این وضعیت دوم (که بیشتر هم بدآن برمی‌خوریم)، می‌توانیم از واژگان علت ومعلولی‌متداول فیزیك‌پیشگان استفاده کنیم. $\rho(\mathbf{r}_2)$ را می‌توان "علت" نامید که به‌ایجاد "معلول" $\varphi(\mathbf{r}_1)$ می‌انجامد؛ یعنی، توزیع بار یك میدان‌پتانسیل تولیدمی‌کند. ولی میزان‌تأثیر بار درایجاد این‌پتانسیل به‌فاصلهٔ میان عنصر بار $\rho(\mathbf{r}_2)d\tau_2$ تانقطهٔ موردنظر که با بردار $\mathbf{r}_1$ مشخص می‌شود، بستگی دارد. این میزان تأثیر عنصر بار به‌کمك تابع $(4\pi|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)^{-1}$ به‌دست می‌آید.

به‌همین دلیل تابع $(4\pi|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)^{-1}$ را غالباً تابع تأثیرمی‌نامند. هرچندکه ما این تابع‌را نیز تابع‌گرین خواهیم خواند، ولی منشأ فیزیکی واژهٔ تابع‌تأثیرهمچنان حائزاهمیت است ومی‌تواند برای تعیین شکل سایرتوابع‌گرین مفید واقع شود.

علاوه براین، دربخش ۷.۸ تابع‌گرین(مربوط به‌عملگر ∇^2) به‌این‌صورت توصیف‌شد که درمعادلهٔ چشمهٔ نقطه‌ای زیرصدق می‌کند

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) \qquad [۱۲۲.۸]$$

مبحث‌مشروحی دربارهٔ تابع‌دلتا برحسب‌دنباله‌ها نیز آورده شد، وبااستفاده ازمعادلهٔ(۱۲۲.۸) وقضیهٔ گرین، بخش ۱۱.۱، نشان داده‌ایم که تابع‌گرین متقارن است

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \qquad [۱۳۹.۸]$$

دربخش ۴.۹، تابع دلتای دیراك وتوابع گرین برحسب یك‌سری از ویژه‌تابعها بسط داده شدند. این بسطها صریحاً نمایانگرخواص تقارنی‌اند.

دراین‌فصل، دربخش۱.۱۶، دیدیم که معادلهٔ انتگرالی متناظر بایك معادلهٔ دیفرانسیلی همراه باشرایط مرزی معین، می‌تواند حاوی‌کرنل خاصی باشد. این‌کرنل همان تابع گرین ماست.

استنتاج تابعهای گرین از معادلهٔ (۱۲۲.۸) برای سیستمهای دو و سه‌بعدی موضوع بخش ۶.۱۶ را تشکیل می‌دهد. دراینجا، برای سهولت فقط به‌موارد یك بعدی می‌پردازیم و رهیافت نسبتاً متفاوتی‌را دنبال می‌کنیم.[۱]

---

۱. معادلهٔ (۱۲۲.۸) را می‌توان برای سیستمهای یك‌بعدی به‌کار برد. رابطهٔ بین این دو رهیافت متفاوت به‌تابعهای‌گرین، درآخراین بخش نشان داده خواهد شد.

خواص معرف

در این تحلیل یك بعدی، نخست معادلهٔ ناهمگن اشتورم-لیوویل زیر را در نظر می‌گیریم (فصل ۹)

$$\mathcal{L}\, y(x)+f(x)=0 \qquad (117.16)$$

که در آن $\mathcal{L}$ عملگر دیفرانسیلی خود-الحاقی است

$$\mathcal{L}=\frac{d}{dx}\left(p(x)\ \frac{d}{dx}\right)+q(x) \qquad (118.16)$$

در اینجا نیز مانند بخش ۱.۹، $y(x)$ باید در نقاط انتهایی a و b بازهٔ $[a, b]$ در شرایط مرزی به‌خصوصی صدق کند. درواقع بازه‌را می‌توان چنان برگزید که در شرایط مرزی مناسب صدق کند. حال در ادامهٔ مسئله، تابع نسبتاً عجیب واختیاری G را روی بازهٔ $[a, b]$ تعریف می‌کنیم. در این مرحله، حرف عمده‌ای که می‌توان دربارهٔ G گفت آن است که خواص معرف آن مجاز، یعنی ازنظر ریاضی پذیرفتنی‌اند.[1] انتظار داریم که بعداً دلیل واردکردن تابع G اگر بدیهی جلوه نکند، دست کم منطقی به نظر آید.

۱. بازهٔ $a \leqslant x \leqslant b$ را توسط پارامتر t به‌دوقسمت تقسیم می‌کنیم. به‌ازای $a \leqslant x < t$ برچسب $G(x)=G_1(x)$ و به‌ازای $t < x \leqslant b$ برچسب $G(x)=G_2(x)$ را به‌کار می‌بریم.

۲. تابعهای $G_1(x)$ و $G_2(x)$ هریك درمعادلهٔ همگن[2] اشتورم-لیوویل صدق می‌کنند؛ یعنی

$$\mathcal{L} G_1(x)=0, \quad a \leqslant x < t$$
$$(119.16)$$
$$\mathcal{L} G_2(x)=0, \quad t < x \leqslant b$$

۳. $G_1(x)$ در $x=a$ درشرایطی مرزی که روی $y(x)$ وضع می‌کنیم، صدق می‌کند. در انتهای دیگر بازه در $x=b$، $G_2(x)$ در شرایطی مرزی صدق می‌کند که روی $y(x)$ وضع می‌کنیم. شرایط مرزی‌را، برای ایجاد سهولت درباز بهنجارش، همگن می‌گیریم، یعنی در $x=a$

$$y(a)=0$$

یا

$$y'(a)=0$$

---

۱. درهرحال، خاطرنشان می‌کنیم که این خواص همان خواص کرنل معادلهٔ فردهولمی‌اند که ازیك معادلهٔ دیفرانسیل خود-الحاقی به‌دست آمده است (مثال ۳.۱.۱۶).

۲. همگن نسبت به‌تابع مجهول. تابع $f(x)$ درمعادلهٔ (۱۱۷.۱۶) را صفرمی‌گیریم.

یا

$$\alpha y(a)+\beta y'(a)=0$$

و به‌همین‌ترتیب به‌ازای $x=b$.

۴. این‌شرط‌را وضع می‌کنیم که $G(x)$ پیوسته باشد[1]

$$\lim_{x\to t_-} G_1(x)=\lim_{x\to t_+} G_2(x) \qquad (۱۲۰.۱۶)$$

۵. شرطی‌را وضع می‌کنیم که درازای آن $G'(x)$ ناپیوسته باشد، خصوصاً اینکه[1]

$$\frac{d}{dx}G_2(x)\Big|_t-\frac{d}{dx}G_1(x)\Big|_t=-\frac{1}{p(t)} \qquad (۱۲۱.۱۶)$$

که‌در آن $p(t)$ ازعملگر خود-الحاقی، معادلهٔ (۱۱۸.۱۶)، ناشی می‌شود. یادآوری می‌کنیم که اگر مشتق اول ناپیوسته باشد، مشتق دوم وجود نخواهد داشت.

این شرایط، G را درواقع به‌صورت یك‌تابع دومتغیرهٔ $G(x,t)$ درمی‌آورند. همچنین خاطرنشان‌کنیم که $G(x,t)$ هم به‌شکل عملگر دیفرانسیلی $\mathcal{L}$ و هم به‌شرایط مرزی که $y(x)$ باید در آنها صدق کند بستگی دارد.

حال، بافرض اینکه بتوانیم یك تابع $G(x,t)$ بیابیم که دارای این خواص باشد، آن را تابع گرین می‌نامیم و نشان می‌دهیم که یکی از جوابهای معادلهٔ (۱۱۷.۱۶) عبارت است از

$$y(x)=\int_a^b G(x,t)\,f(t)\,dt \qquad (۱۲۲.۱۶)$$

برای این‌کار ابتدا تابع‌گرین $G(x,t)$ را تشکیل می‌دهیم. فرض‌کنید که $u(x)$ جوابی از معادلهٔ همگن اشتورم-لیوویل باشد که درشرایط مرزی در $x=a$ و $v(x)$ جوابی‌باشد که در شرایط مرزی‌در $x=b$ صدق می‌کند. درنتیجه، می‌توانیم $G(x,t)$ را به‌صورت زیر بنویسیم[2]

$$G(x,t)=\begin{cases}c_1 u(x), & a\leqslant x<t\\ c_2 v(x), & t<x\leqslant b\end{cases} \qquad (۱۲۳.۱۶)$$

پیوستگی در $x=t$ [معادلهٔ (۱۲۰.۱۶)] حکم می‌کند که

$$c_2 v(t)-c_1 u(t)=0 \qquad (۱۲۴.۱۶)$$

---

۱. به‌عبارت دقیق این عبارت حد $x\to t$ است.

۲. "ثابتهای" c_1 و c_2 مستقل از xاند، ولی می‌توانند به‌متغیردیگر یعنی t بستگی داشته باشند (ودارند).

سرانجام، ناپیوستگی درمشتق اول [معادلهٔ (۱۲۱.۱۶)] ایجاب می کندکه

$$c_2 v'(t)-c_1 u'(t)=-\frac{1}{p(t)} \qquad (۱۲۵.۱۶)$$

اگردترمینان رونسکیی

$$\begin{vmatrix} u(t) & v(t) \\ u'(t) & v'(t) \end{vmatrix}=u(t)\,v'(t)-v(t)\,u'(t)$$

صفر نشود، یك جواب یکتا برای ضرایب c_1 وc_2 وجود خواهدداشت. دربخش ۶.۸دیده‌ایم که صفر نشدن این دترمینان شرط لازم برای استقلال خطی است. فرض می کنیم که $u(x)$ و $v(x)$ مستقل باشند. عکس این‌مطلب، که هنگامی پیش‌می آیدکه $u(x)$ در شرایط مرزی در هردو انتها صدق کند، یك تابع تعمیم‌یافتهٔ گرین را ایجاب می کند. به‌عبارت دقیق، هنگامی که $u(x)$ و $v(x)$ وابستهٔ خطی باشند، هیچ تابع گرینی وجود ندارد. اگر $\lambda=0$ یکی از ویژه‌مقدارهای معادلهٔ همگن باشد نیزهمین‌امرصادق‌است. ولی می توان یك "تابع‌تعمیم‌یافتهٔ گرین" تعریف کرد. این وضعیت که برای معادلهٔ لژاندر پیش می آید در کتاب کوران و هیلبرت ودرمراجع دیگر مورد بحث قرارمی‌گیرد. رونسکیی برای $u(x)$ و $v(x)$ مستقل (بازهم بااستفاده ازبخش ۶.۸، یا مسئلهٔ ۴.۱.۹) عبارت است از

$$u(t)\,v'(t)-v(t)\,u'(t)=\frac{A}{p(t)} \qquad (۱۲۶.۱۶)$$

که درآن A یك ثابت است. گاهی معادلهٔ (۱۲۶.۱۶) را فرمول آبل می‌خوانند. مثالهای متعددی‌درارتباط باتابعهای بسل‌و‌لژاندر آورده‌اند. حال ازمعادلهٔ (۱۲۵.۱۶) پی‌می‌بریم که

$$c_1=-\frac{v(t)}{A}$$
$$(۱۲۷.۱۶)$$
$$c_2=-\frac{u(t)}{A}$$

معادلهٔ (۱۲۴.۱۶) به‌وضوح برقرار است. بانشاندن درمعادلهٔ (۱۲۳.۱۶)، تابع گرین را به‌صورت زیر به دست می‌آوریم

$$G(x,\ t)=\begin{cases} -\dfrac{1}{A}\,u(x)\,v(t), & a\leqslant x<t \\[2ex] -\dfrac{1}{A}\,u(t)\,v(x), & t<x\leqslant b \end{cases} \qquad (۱۲۸.۱۶)$$

دقیقاً توجه کنید که $G(x,t)=G(t,x)$. این‌همان خاصیت تقارنی است که قبلا در بخش ۷.۸ ثابت کردیم. تعبیر فیزیکی این خاصیت به‌کمك اصل دوجانبگی حاصل می‌شود (از طریق تابع تأثیر) علت واقع در t همان معلولی را در x به‌وجود می‌آورد که علت واقع در x در t به‌وجود می‌آورد. این امر با استفاده از مشابه الکتروستاتیکی ما بدیهی است، تابع تأثیر فقط به بزرگی فاصلهٔ بین دو نقطهٔ زیر بستگی دارد

$$|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|=|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|$$

انتگرال تابع گرین ـ معادلهٔ دیفرانسیل

$G(x,t)$ را تشکیل دادیم، ولی هنوز نشان نداده‌ایم که انتگرال [معادلهٔ (۱۲۲.۱۶)] با این تابع گرین نو واقعاً جواب معادلهٔ دیفرانسیل اصلی (۱۱۷.۱۶) است. این کار را به‌کمك جانشانی مستقیم انجام می‌دهیم. معادلهٔ (۱۲۲.۱۶)، با تابع گرینی که از معادلهٔ (۱۲۸.۱۶) به‌دست می‌آید،[1] به‌صورت زیر درمی‌آید

$$y(x)=-\frac{1}{A}\int_a^x v(x)u(t)\,f(t)\,dt-\frac{1}{A}\int_x^b u(x)v(t)\,f(t)\,dt \qquad (۱۲۹.۱۶)$$

مشتق می‌گیریم

$$y'(x)=-\frac{1}{A}\int_a^x v'(x)u(t)\,f(t)\,dt-\frac{1}{A}\int_x^b u'(x)v(t)\,f(t)\,dt \qquad (۱۳۰.۱۶)$$

مشتقهای حدها باهم حذف می‌شوند. بامشتقگیری دوم خواهیم داشت

$$y''(x)=-\frac{1}{A}\int_a^x v''(x)u(t)\,f(t)\,dt-\frac{1}{A}\int_x^b u''(x)v(t)\,f(t)\,dt$$
(۱۳۱.۱۶)
$$-\frac{1}{A}[u(x)v'(x)-v(x)u'(x)]\,f(x)$$

این معادله را، با استفاده از معادلات (۱۲۵.۱۶) و (۱۲۷.۱۶)، می‌توان به‌صورت زیر بازنوشت

$$y''(x)=-\frac{v''(x)}{A}\int_a^x u(t)\,f(t)\,dt-\frac{u''(x)}{A}\int_x^b v(t)\,f(t)\,dt-\frac{f(x)}{p(x)}$$
(۱۳۲.۱۶)

اکنون، با نشاندن در معادلهٔ (۱۱۸.۱۶)، داریم

---

۱. درانتگرال اول داریم، $a\leqslant t\leqslant x$. بنابراین $G(x,t)=G_2(x,t)=-(1/A)\,u(t)\,v(x)$. به‌همین ترتیب، درانتگرال دوم باید داشته باشیم $G=G_1$.

$$\mathcal{L}\, y(x) = -\frac{[\mathcal{L}\, v(x)]}{A}\int_a^x u(t)\, f(t)dt - \frac{[\mathcal{L}\, u(x)]}{A}\int_x^b v(t)\, f(t)dt - f(x)$$

(۱۳۳.۱۶)

از آنجا که $u(x)$ و $v(x)$ چنان برگزیده‌شدند که درمعادلهٔ همگن اشتورم-لیوویل صدق کنند، عاملهای درون کروشه‌ها صفرند و جمله‌های شامل انتگرال حذف می‌شوند. با آوردن $f(x)$ به‌سمت چپ، می‌بینیم که معادلهٔ (۱۱۷.۱۶) برقراراست.

علاوه براین، باید بیازماییم که $y(x)$ درشرایط مرزی وضع‌شده صدق می‌کند یاخیر. درنقطهٔ $x=a$ داریم

$$y(a) = -\frac{u(a)}{A}\int_a^b v(t)\, f(t)\, dt = c\, u(a) \qquad (۱۳۴.۱۶)$$

$$y'(a) = -\frac{u'(a)}{A}\int_a^b v(t)\, f(t)\, dt = c\, u'(a) \qquad (۱۳۵.۱۶)$$

زیرا انتگرال معین ثابت‌است. $u(x)$ را چنان برمی‌گزینیم که دررابطهٔ زیرصدق‌کند

$$\alpha\, u(a) + \beta\, u'(a) = 0 \qquad (۱۳۶.۱۶)$$

باضرب کردن درثابت c، ثابت می‌شود که $y(x)$ درمعادلهٔ (۱۳۶.۱۶) نیزصدق می‌کند. این اثبات، نمایانگرفواید شرایط مرزی همگن است، بهنجارش اهمیت‌چندانی ندارد. درمسائل کوانتوم مکانیکی، شرط مرزی روی تابع‌موج را غالباً برحسب نسبت زیرمشخص می‌کنند

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \frac{d}{dx}\ln\psi(x)$$

که با معادلهٔ (۱۳۶.۱۶) معادل است. مزیت این‌رابطه آن است که نیازی نیست تابع‌موج را بهنجارکنیم.

به‌بیان خلاصه، معادلهٔ (۱۲۲.۱۶) را به‌صورت زیر داریم

$$y(x) = \int_a^b G(x,\, t)\, f(t)\, dt$$

که درمعادلهٔ دیفرانسیل زیر [معادلهٔ (۱۱۷.۱۶)]

$$\mathcal{L}\, y(x) + f(x) = 0$$

و شرایط مرزی صدق می‌کند؛ این شرایط مرزی‌را درتابع گرین $G(x,\, t)$ تعبیه کرده‌ایم.

علی‌الاصول، کاری که انجام داده‌ایم آن است که از جوابهای معادلهٔ همگن اشتورم-لیوویل برای تشکیل یکی ازجوابهای معادلهٔ ناهمگن استفاده‌کرده‌ایم. بازهم مثال

معادلهٔ پواسون را آورده‌ایم. جواب [معادلهٔ(۱۱۶.۱۶)]، ترکیبی وزندار [باوزن $\rho(\mathbf{r}_2)$] از جوابهای معادلهٔ لاپلاس همگن متناظر را به‌نمایش می‌گذارد (دربخش ۴.۱۶ محاسباتی ازهمین نوع انجام دادیم).

باید خاطرنشان کرد که $y(x)$، معادلهٔ (۱۲۲.۱۶)، درواقع جواب خاص معادلهٔ دیفرانسیل، معادلهٔ (۱۱۷.۱۶)، به‌شمارمی‌آید. شرایط مرزی ما، مانع اضافه‌شدن جوابهای معادلهٔ همگن می‌شود. در یك مسئلهٔ فیزیکی واقعی ممکن است هردو نوع جواب را داشته باشیم. مثلاً، درالکتروستاتیك (با بخش ۷.۸ مقایسه‌کنید)، جواب تابع گرین‌معادلهٔ پواسون، پتانسیل حاصل ازیك توزیع بارمعلوم‌را به‌دست می‌دهد. علاوه بر آن، ممکن است‌میدانهای خارجی برهم‌نهاده شوند. این میدانها به‌کمك جوابهای معادلهٔ همگن، یعنی معادلهٔ لاپلاس، به‌دست می‌آیند.

ویژه‌تابع، معادلهٔ ویژه‌مقداری

در تحلیلهای قبلی هیچ قید خاصی روی $f(x)$ قرار ندادیم. اینك فرض می‌کنیم $f(x)=\lambda\,\rho(x)\,y(x)$.[1] آنگاه تابع

$$y(x)=\lambda\int_a^b G(x,\,t)\,\rho(t)\,y(t)\,dt \qquad (۱۳۷.۱۶)$$

را به‌عنوان جوابی ازمعادلهٔ

$$\mathcal{L}\,y(x)+\lambda\,\rho(x)y(x)=0 \qquad (۱۳۸.۱۶)$$

و شرایط مرزی مربوطه در اختیار داریم. معادلهٔ (۱۳۷.۱۶) یك معادلهٔ همگن فردهولم نوع دوم ومعادلهٔ (۱۳۸.۱۶) یك معادلهٔ ویژه‌مقداری اشتورم-لیوویل فصل ۹ است [که در آن به‌جای $w(x)$ تابع وزنی $\rho(x)$ نشانده شده است].

به‌تغییر ازمعادله‌های (۱۱۷.۱۶) و (۱۲۲.۱۶) به (۱۳۷.۱۶) و (۱۳۸.۱۶) توجه کنید. تغییرمتناظری در تعبیر تابع‌گرین ما وجود دارد. درآغاز این تابع، یك تابع اهمیت یا نفوذ بود، تابعی وزنی‌که اهمیت بار $\rho(\mathbf{r}_2)$ در ایجاد پتانسیل $\varphi(\mathbf{r}_1)$ را تعیین می‌کرد. بارρ عبارت بود از جملهٔ ناهمگن معادلهٔ دیفرانسیل ناهمگن (۱۱۷.۱۶). اینك معادلهٔ دیفرانسیل و معادلهٔ انتگرالی، هردو همگن‌اند. $G(x,\,t)$ واسطه‌ای است که این دو معادلهٔ دیفرانسیلی وانتگرالی‌را به‌یکدیگرمربوط می‌کند.

برای آنکه بحث دربارهٔ این هم‌ارزی معادلهٔ دیفرانسیل-معادلهٔ انتگرالی‌راکامل کنیم، اکنون نشان می‌دهیم که معادلهٔ (۱۳۸.۱۶) برمعادلهٔ (۱۳۷.۱۶) دلالت می‌کند؛ یعنی یکی از جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل ما (۱۳۸.۱۶) همراه باشرایط مرزی، در معادلهٔ انتگرالی (۱۳۷.۱۶) صدق می‌کند. معادلهٔ (۱۳۸.۱۶) را در $G(x,\,t)$، یعنی تابع گرین مناسب،

---

۱. تابع $\rho(x)$ تابعی وزنی است، نه یك چگالی بار.

ضرب می‌کنیم، واز $x=a$ تا $x=b$ انتگرال می‌گیریم؛ خواهیم داشت

$$\int_a^b G(x,t)\,\mathcal{L}\,y(x)\,dx+\lambda\int_a^b G(x,t)\,\rho(x)\,y(x)\,dx=0 \quad (۱۳۹.۱۶)$$

بنا بر ساخت تابع گرین‌ما، انتگرال اول به‌دو انتگرال تقسیم می‌شود ($x<t$، $x>t$)، در نتیجه

$$-\int_a^t G_1(x,t)\,\mathcal{L}\,y(x)\,dx-\int_t^b G_2(x,t)\,\mathcal{L}\,y(x)\,dx$$

$$=\lambda\int_a^b G(x,t)\,\rho(x)\,y(x)\,dx \quad (۱۴۰.۱۶)$$

دقت کنید که t برای انتگرالهای G_1، حد بالایی و برای انتگرالهای G_2 حد پایینی است. مراد ما این‌است که سمت چپ معادلهٔ (۱۴۰.۱۶) را به $y(t)$ کاهش دهیم. آنگاه با توجه به $G(x,t)=G(t,x)$، معادلهٔ (۱۳۷.۱۶)را به‌دست‌می‌آوریم (که‌در آن x و t بایکدیگر تعویض شده‌اند).

با اعمال قضیهٔ گرین در سمت چپ، یا از طریق انتگرالگیری جزء به‌جزء، خواهیم داشت

$$-\int_a^t G_1(x,t)\left[\frac{d}{dx}\Big(p(x)\,\frac{d}{dx}\,y(x)\Big)+q(x)y(x)\right]dx$$

$$=-|G_1(x,t)\,p(x)\,y'(x)|_a^t+\int_a^t G_1'(x,t)\,p(x)\,y'(x)\,dx-$$

$$\int_a^t G_1(x,t)q(x)\,y(x)\,dx \quad (۱۴۱.۱۶)$$

عبارتی‌هم‌ارز نیز برای انتگرال دوم به‌دست می‌آوریم. پس ازانتگرالگیری برای باردوم، داریم

$$-\int_a^t G_1(x,t)\,\mathcal{L}\,y(x)\,dx=-\int_a^t y(x)\,\mathcal{L}\,G_1(x,t)dx$$

$$-|G_1(x,t)\,p(x)\,y'(x)|_a^t+|G_1'(x,t)$$

$$p(x)\,y(x)|_a^t \quad (۱۴۲.۱۶)$$

انتگرال سمت راست صفرمی‌شود، زیرا $\mathcal{L}G_1=0$. جمله‌های انتگرالگیری‌شده درعبارت فوق‌را باجمله‌های متناظر حاصل ازانتگرالگیری از G_2، ترکیب می‌کنیم، آنگاه

$$-p(t)[G_1(t,t)y'(t)-G'_1(t,t)\,y(t)-G_2(t,t)\,y'(t)+G'_2(t,t)\,y(t)]$$
$$+p(a)[G_1(a,t)\,y'(a)-G'_1(a,t)\,y(a)]-p(b)[G_2(b,t)y')(b)-$$
$$G'_2(b,t)\,y(b)] \quad (۱۴۳.۱۶)$$

هریك ازدوعبارت آخری صفرمی‌شوند، زیرا $G(x,t)$ و $y(x)$ درشرایط مرزی یکسانی صدق‌می‌کنند. عبارت‌اولی، بااستفاده ازمعادله‌های (۱۲۰.۱۶) و (۱۲۱.۱۶) به $y(t)$ ساده می‌شود. بانشاندن درمعادلهٔ (۱۴۰.۱۶)، بمعادلهٔ (۱۳۷.۱۶) دست می‌یابیم وبه‌این‌ترتیب هم‌ارزی معادلهٔ انتگرالی ومعادلهٔ دیفرانسیل بداضافهٔ شرایط مرزی‌را نشان داده‌ایم.

مثال ۱.۵.۱۶ نوسانگرخطی

به‌عنوان مثالی ساده، معادلهٔ نوسانگر خطی (برای ریسمان مرتعش) را در نظر می‌گیریم

$$y''(x)+\lambda\,y(x)=0 \qquad (۱۴۴.۱۶)$$

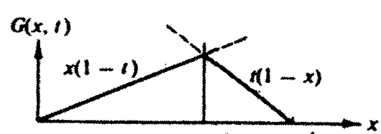
شرایط $y(0)=y(1)=0$ را وضع می‌کنیم، که متناظراست با ریسمانی که دوسرش‌محکم بسته شده باشد. اکنون برای تشکیل‌تابع‌گرین، به‌جوابهایی ازمعادلهٔ همگن‌اشتورم-لیوویل $\mathcal{L}\,y(x)=0$ نیازداریم؛دراینجا این‌معادله به‌صورت $y''(x)=0$ است. برای آنکه‌شرایط مرزی برآورده شوند، باید یکی از این جوابها در $x=0$ ودیگری در $x=1$ صفر شود. چنین جوابهایی (بهنجارنشده) عبارت‌اند از

$$u(x)=x$$
$$(۱۴۵.۱۶)$$
$$v(x)=1-x$$

پی می‌بریم که

$$uv'-vu'=-1 \qquad (۱۴۶.۱۶)$$

یا، بااستفاده از معادلهٔ (۱۲۶.۱۶) به‌ازای $p(x)=1$، داریم: $A=-1$. تابع گرین ما به‌صورت زیردرمی‌آید



شکل ۳.۱۶ تابع‌گرین یك نوسانگرخطی.

$$G(x,\ t)=\begin{cases}x(1-t), & 0\leqslant x<t\\ t(1-x), & t<x\leqslant 1\end{cases} \qquad (147.16)$$

درنتیجه بااستفاده ازمعادلهٔ (۱۳۷.۱۶)، ریسمان مرتعش مقید ما درمعادلهٔ زیرصدق می‌کند

$$y(x)=\lambda\int_0^1 G(x,t)\,y(t)\,dt \qquad (148.16)$$

این‌همان معادلهٔ (۳۴.۱۶) است با $b=1$ و $\lambda=\omega^2$.

خواننده خود می‌تواند نشان‌دهدکه جوابهای معلوم معادلهٔ (۱۴۴.۱۶)، یعنی

$$y=\sin n\pi x\,,\quad \lambda=n^2\pi^2$$

واقعاً درمعادلهٔ (۱۴۸.۱۶) صدق می‌کنند. دقت‌کنیدکه ویژه‌مقدار λ، طول موج نیست.

تابع‌گرین و تابع دلتای دیراك

به‌کمك رهیافت دیگری به‌تابع گرین، می‌توانیم فرمولبندی آن‌وبه‌ویژه رابطه‌اش‌رابامسائل فیزیکی روشنتر کنیم. یك‌باردیگر به‌معادلهٔ پواسون برگردیم، این‌بار برای یك بار نقطه‌ای

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r})=-\frac{\rho_{\text{نقطه‌ای}}}{\varepsilon_0} \qquad (149.16)$$

جواب تابع‌گرین این معادله در بخش ۷.۸ به‌دست آمد. این‌بار شبیه یك‌بعدی آن‌را درنظر می‌گیریم

$$\mathcal{L}\,y(x)+f(x)_{\text{نقطه‌ای}}=0 \qquad (150.16)$$

دراینجا $f(x)_{\text{نقطه‌ای}}$ به‌یك "بار" نقطه‌ای واحد، یا یك نیروی نقطه‌ای مربوط می‌شود. این تابع‌را می‌توان درشکلهای متعدد نمایش‌داد، ولی شاید مناسبترین شکل آن، که‌اساساً شبیه معادلهٔ (۱۰۸.۸) است، عبارت خواهدبود از

$$f(x)_{\text{نقطه‌ای}}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon}, & t-\varepsilon<x<t+\varepsilon\\ 0, & \text{درغیر این‌صورت}\end{cases} \qquad (151.16)$$

آنگاه باانتگرالگیری ازمعادلهٔ (۱۵۰.۱۶) وبااستفاده ازتعریف $f(x)$، داریم

$$\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \mathcal{L}\, y(x)\, dx = -\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} f(x)_{\text{نقطه‌ای}}\, dx$$

(۱۵۲.۱۶)

$$= -1$$

$\mathcal{L}\, y(x)$ را دقیقتر بررسی می‌کنیم. خواهیم داشت

$$\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \frac{d}{dx}[p(x)\, y'(x)]\, dx + \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} q(x)\, y(x)\, dx$$

(۱۵۳.۱۶)

$$+ |p(x)\, y'(x)|_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} + \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} q(x)\, y(x)\, dx = -1$$

این رابطه درصورتی درحد $\varepsilon \to 0$ برقراراست که $y'(x)$ مجاز به‌داشتن ناپیوستگی $-1/p(x)$ در $x=t$ باشد، درحالی که خود $y(x)$ پیوسته بماند.[1] ولی این خصوصیات درست همانهایی‌اند که برای تعریف تابع گرین $G(x, t)$ از آنها بهره‌بردیم. به‌علاوه، توجه داشته باشیم که درحد $\varepsilon \to 0$

$$f(x)_{\text{نقطه‌ای}} = \delta(x-t) \qquad (۱۵۴.۱۶)$$

درآن $\delta(x-t)$ تابع دلتای دیراك است که دربخش ۷.۸ به‌همین‌نحو تعریف‌شد. بنابراین معادلهٔ (۱۵۰.۱۶) به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\mathcal{L}\, G(x, t) = -\delta(x-t) \qquad (۱۵۵.۱۶)$$

این همان معادلهٔ (۱۳۲.۸) است که ما ازآن در بخش ۶.۱۶ برای تعمیم توابع گرین دو و سه‌بعدی استفاده می‌کنیم. یادآوری کنیم که دربخش ۷.۸ این رابطه‌را برای تعیین توابع گرین به‌کاربردیم.

می‌توانستیم انتظارظهور معادلهٔ (۱۵۵.۱۶) را هم داشته باشیم، زیرا این معادله در واقع پیامدی ازمعادلهٔ دیفرانسیل، معادلهٔ (۱۱۷.۱۶)، و جواب انتگرالی تابع گرین آن، معادلهٔ(۱۲۲.۱۶)، است. اگر $\mathcal{L}_x$ (شاخص پایین x نشان می‌دهد که عملگر روی وابستگی به x عمل می‌کند) را روی دو سمت معادلهٔ (۱۲۲.۱۶) اثر دهیم، داریم

---

۱. توابع $p(x)$ و $q(x)$ که در عملگر $\mathcal{L}$ ظاهر می‌شوند، توابعی پیوسته‌اند. $\int q(x)\, y(x)\, dx$ باتابع پیوسته‌ای چون $y(x)$ مطمئناً پیوسته است. ازاین‌رو این انتگرال روی بازهٔ 2ε [معادلهٔ (۱۵۳.۱۶)] باصفرشدن ε، صفرمی‌شود.

$$\mathcal{L}_x\, y(x) = \mathcal{L}_x \int_a^b G(x,\, t)\, f(t)\, dt$$

سمت چپ، با استفاده از معادلهٔ (۱۱۷.۱۶)، همان $-f(x)$ است. در سمت راست، $\mathcal{L}_x$ از متغیر انتگرالگیری t مستقل است، به‌این‌ترتیب می‌توان نوشت

$$-f(x) = \int_a^b \{\mathcal{L}_x G(x,\, t)\}\, f(t)\, dt$$

با استفاده از تعریف تابع دلتا در معادله‌های (۱۰۷.۸) و (۱۱۷.۸)، به‌معادلهٔ (۱۵۵.۱۶) می‌رسیم.

مسائل

۱.۵.۱۶ نشان دهید که

$$G(x,\, t) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < t \\ t, & t < x \leqslant 1 \end{cases}$$

عبارت است از تابع گرین مربوط به‌عملگر $\mathcal{L} = d^2/dx^2$ و شرایط مرزی زیر

$$y(0) = 0$$

$$y'(1) = 0$$

۲.۵.۱۶ تابع گرین مربوط به‌هریك ازموارد زیررا بیابید

(الف)
$$\mathcal{L}\, y(x) = \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + y(x), \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

(ب) $y(x)$ به‌ازای $-\infty < x < +\infty$ متناهی است

$$\mathcal{L}\, y(x) = \frac{d^2 y(x)}{dx^2} - y(x)$$

۳.۵.۱۶ تابع گرین عملگرهای زیررا بیابید

(الف)
$$\mathcal{L}\, y(x) = \frac{d}{dx}\left(x\, \frac{d\, y(x)}{dx}\right)$$

پاسخ. (الف)

$$G(x, t)=\begin{cases}-\ln t, & 0\leqslant x<t \\ -\ln x, & t<x\leqslant 1\end{cases}$$

(ب)

$$\mathcal{L}\, y(x)=\frac{d}{dx}\left(x\,\frac{d\,y(x)}{dx}\right)-\frac{n^{2}}{x}\,y(x)$$

هرگاه $y(0)$ متناهی باشد و $y(1)=0$.

پاسخ. (ب)

$$G(x, t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2n}\left[\left(\dfrac{x}{t}\right)^{n}-(xt)^{n}\right], & 0\leqslant x<t \\[2ex] \dfrac{1}{2n}\left[\left(\dfrac{t}{x}\right)^{n}-(xt)^{n}\right], & t<x\leqslant 1\end{cases}$$

ترکیب عملگر و بازهٔ تعیین‌شده درمسئلهٔ ۳.۵.۱۶ (الف)، ترکیب معیوبی است، زیرادرآن یکی ازنقاط انتهایی بازه (یعنی‌صفر) یك‌نقطهٔ تکین عملگر به‌شمار می‌آید. درنتیجه، بخش انتگرالگیری‌شده (انتگرال سطحی درقضیهٔ گرین) صفر نمی‌شود. درچهارمسئلهٔ بعدی‌به‌تشریح این وضعیت می‌پردازیم.

۴.۵.۱۶ (الف) نشان دهیدکه جواب خاص

$$\frac{d}{dx}\left[x\,\frac{d}{dx}\,y(x)\right]=-1$$

عبارت است از $y_p(x)=-x$.

(ب) نشان دهید

$$y_p(x)=-x\neq\int_0^1 G(x, t)(-1)\,dt$$

که درآن $G(x, t)$ تابع‌گرین مسئلهٔ ۳.۵.۱۶ (الف) است.

۵.۵.۱۶ نشان‌دهیدکه قضیهٔ گرین، معادلهٔ (۹۷.۱)، را دریك‌بعد،که درآن $\nabla\cdot\nabla$ باعملگری از نوع اشتورم-لیوویل $\dfrac{d}{dt}\,p(t)\,\dfrac{d}{dt}$ تعویض می‌شود، می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد

$$\int_a^b\left[u(t)\,\frac{d}{dt}\left(p(t)\,\frac{dv(t)}{dt}\right)-v(t)\,\frac{d}{dt}\left(p(t)\,\frac{du(t)}{dt}\right)\right]dt$$

$$=\left|u(t)\,p(t)\frac{dv(t)}{dt}-v(t)\,p(t)\frac{du(t)}{dt}\right|_a^b$$

۶.۵.۱۶ با استفاده از شکل یك بعدی قضیهٔ گرین در مسئلهٔ ۵.۵.۱۶، فرض کنید

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dy(t)}{dt}\right)=-f(t) \quad \text{و} \quad v(t)=y(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dG(x,t)}{dt}\right)=-\delta(x-t) \quad \text{و} \quad u(t)=G(x,t)$$

نشان دهیدکه بدعنوان یکی از پیامدهای قضیهٔ گرین داریم

$$y(x)=\int_a^b G(x,t)f(t)\,dt + \left|G(x,t)\,p(t)\frac{dy(t)}{dt}-y(t)p(t)\frac{d}{dt}\,G(x,t)\right|_a^b$$

۷.۵.۱۶ بهازای $p(t)=t$ و $y(t)=-t$، داریم

$$G(x,t)=\begin{cases}-\ln t & ۰\leqslant x<t\\ -\ln x & t<x\leqslant ۱\end{cases}$$

تحقیق کنیدکه جزء انتگرالگیری شده صفر نمی‌شود.

۸.۵.۱۶ برای معادلهٔ

$$x^۲\frac{d^۲y}{dx^۲}+x\frac{dy}{dx}+(k^۲x^۲-۱)y=۰$$

وتحت شرایط مرزی

$$y(۰)=۰$$

$$y(۱)=۰$$

تابع‌گرین را تشکیل دهید.

۹.۵.۱۶ با استفاده از

$$\mathcal{L}=(۱-x^۲)\frac{d^۲}{dx^۲}-۲x\frac{d}{dx}$$

و

$$G(\pm ۱,t) \text{ متناهی}$$

نشان دهیدکه با بهره‌گیری از شگردهای این بخش نمی‌توان هیچ تابع گرینی تشکیل داد [$u(x)$ و $v(x)$ وابستهٔ خطی‌اند].

۱۰.۵.۱۶ تابع‌گرین یك بعدی نامتناهی مربوط به‌معادلهٔ هلمهولتز

$$(\nabla^{۲}+k^{۲})\,\psi(x)=g(x)$$

را تشکیل‌دهید. شرایط مرزی، همان‌شرایط مرزی موجی‌اندکه درسوی مثبت x، با وابستگی زمانی $e^{-i\omega t}$ به‌پیش می‌رود.

پاسخ. $G(x_{۱},x_{۲})=\frac{i}{۲k}\exp(ik|x_{۱}-x_{۲}|)$.

۱۱.۵.۱۶ تابع‌گرین یك‌بعدی‌نامتناهی را برای معادلهٔ‌تعدیل‌یافتهٔ‌هلمهولتز زیر تشکیل‌دهید

$$(\nabla^{۲}-k^{۲})\,\psi(x)=f(x)$$

شرایط مرزی‌عبارت‌اند ازاینکه تابع‌گرین باید به‌ازای $x\to\infty$ و $x\to-\infty$ صفرشود.

پاسخ. $G(x_{۱},x_{۲})=\frac{۱}{۲k}\exp(-k|x_{۱}-x_{۲}|)$.

۱۲.۵.۱۶ با استفاده ازبسط ویژه‌تابعی‌تابع‌گرین نشان دهید

(الف)
$$\frac{۲}{\pi^{۲}}\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\sin n\pi x\,\sin n\pi t}{n^{۲}}=\begin{cases}x(۱-t), & ۰\leqslant x<t\\ t(۱-x), & t<x\leqslant ۱\end{cases}$$

(ب)
$$\frac{۲}{\pi^{۲}}\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{۱}{۲}\right)\pi x\,\sin\left(n+\frac{۱}{۲}\right)\pi t}{\left(n+\frac{۱}{۲}\right)^{۲}}=\begin{cases}x, & ۰\leqslant x<t\\ t, & t<x\leqslant ۱\end{cases}$$

یادآوری. دربخش ۴.۹ تابع گرین $\mathcal{L}+\lambda$ را برحسب ویژه‌تابعها بسط دادیم. این λ یك پارامتر قابل تنظیم است نه‌یك ویژه‌مقدار.

۱۳.۵.۱۶ $G(x,t)$ درمعادلهٔ فردهولم

$$f(x)=\lambda^{۲}\int_{a}^{b}G(x,t)\,\varphi(t)\,dt$$

عبارت است از تابع گرینی‌که ازطریق رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$G(x,t)=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{\varphi_{n}(x)\,\varphi_{n}(t)}{\lambda_{n}^{۲}-\lambda^{۲}}$$

نشان دهیدکه جواب عبارت است از

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n^2-\lambda^2}{\lambda^2}\varphi_n(x)\int_a^b f(t)\varphi_n(t)\,dt$$

۱۴.۵.۱۶ نشان دهیدکه تابع‌گرین عملگر تبدیل انتگرالی

$$\int_a^b G(x,t)[\ \ ]\,dt$$

برابراست با $-\mathcal{L}^{-1}$. به‌این معنا که

$$\mathcal{L}_x\int_a^b G(x,t)\,y(t)\,dt=-y(x) \qquad \text{(الف)}$$

$$\int_a^b G(x,t)\,\mathcal{L}_t\,y(t)\,dt=-y(x) \qquad \text{(ب)}$$

یادآوری. معادلهٔ (۱۱۷.۱۶)، $\mathcal{L}y(x)+f(x)=0$، را درنظربگیرید.

۶.۱۶ تابعهای‌گرین ــ دو و سه‌بعدی

دراینجا نیزمانند بخش قبل (و بخش ۷.۸) یك‌معادلهٔ دیفرانسیل ناهمگن را درنظرمی‌گیریم

$$\mathcal{L}y(\mathbf{r}_1)=-f(\mathbf{r}_1) \qquad (۱۵۶.۱۶)$$

درپی جوابی هستیم که بتوان‌آن‌را به‌صورت زیرنمایش داد

$$y(\mathbf{r}_1)=-\mathcal{L}^{-1}f(\mathbf{r}_1) \qquad (۱۵۶.۱۶\ \text{الف})$$

می‌شود انتظارداشت که برای‌عملگر دیفرانسیلی $\mathcal{L}$، عملگر وارون $\mathcal{L}^{-1}$ شامل انتگرالگیری باشد. درادامه، تابع‌گرین متناظر باعملگر دیفرانسیلی $\mathcal{L}$ را به‌صورت جواب‌معادلهٔ ناهمگن باچشمهٔ نقطه‌ای[1]

$$\mathcal{L}_1G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=-\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) \qquad (۱۵۶.۱۶\ \text{ب})$$

که درشرایط مرزی لازم صدق‌می‌کند، تعریف می‌کنیم. شاخص‌پایین ۱ در $\mathcal{L}$ براین‌نکتهٔ تأکید دارد که بر روی $\mathbf{r}_1$ عمل می‌کند.

فرض می‌کنیم که $\mathcal{L}_1$ یك عملگر دیفرانسیلی خودالحاقی به‌شکل کلی زیر باشد[2]

$$\mathcal{L}_1=\nabla_1\cdot[p(\mathbf{r}_1)\nabla_1]+q(\mathbf{r}_1) \qquad (۱۵۶.۱۶\ \text{ج})$$

---

۱. این معادله درمراجع مختلف به‌شکلهای‌گوناگون ظاهرمی‌شود. بعضی ازمؤلفان سمت راست را به صورت $-4\pi\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$ می‌نویسند، کسان دیگری هم صورت $+\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$ را به‌کار می‌برند. همان‌گونه که در بخش ۷.۸ توضیح داده‌شد، تابع دلتا بخشی از انتگرالده‌خواهد بود.

۲. $\mathcal{L}_1$ می‌تواند (همراه باتفسیرمناسب ∇_1) ۱، ۲، یا ۳ بعدی باشد.

دراین‌صورت بایك تعمیم سادهٔ قضیهٔ گرین، معادلهٔ (۹۷.۱)، داریم

$$\int (v\mathcal{L}_2 u - u\mathcal{L}_2 v)\, d\tau_2 = \int p(v\nabla_2 u - u\nabla_2 v)\cdot d\boldsymbol{\sigma}_2 \qquad (۱۵۶.۱۶\ \text{د})$$

که درآن شناسهٔ همهٔ کمیتها عبارت است از $\mathbf{r}_2$ [برای اثبات معادلهٔ (۱۵۶.۱۶ د)، از انتگرالده انتگرال سطحی، دیورژانس بگیرید]. قرارمی‌دهیم: $u(\mathbf{r}_2)=y(\mathbf{r}_2)$، در نتیجه معادلهٔ (۱۵۶.۱۶) صادق است، و قرار می‌دهیم: $v(\mathbf{r}_2)=G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$؛ در نتیجه معادلهٔ (۱۵۶.۱۶ ب) برقرار است. [ازبخش۷.۸ به‌یاد بیاورید که $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)=G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$]. با نشاندن درقضیهٔ گرین داریم

$$\int \{-G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)f(\mathbf{r}_2)+y(\mathbf{r}_2)\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\}d\tau_2$$

$$=\int p(\mathbf{r}_2)\{G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\nabla_2 y(\mathbf{r}_2)-y(\mathbf{r}_2)\nabla_2 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\}\cdot d\boldsymbol{\sigma}_2 \qquad (۱۵۶.۱۶\ \text{ه})$$

پس ازانتگرالگیری روی تابع دلتای دیراك داریم

$$y(\mathbf{r}_1)=\int G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)f(\mathbf{r}_2)\, d\tau_2+\int p(\mathbf{r}_2)\{G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\nabla_2 y(\mathbf{r}_2)-y(\mathbf{r}_2)$$

$$\nabla_2 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\}\cdot d\boldsymbol{\sigma}_2 \qquad (۱۵۶.۱۶\ \text{و})$$

جوابی که برای معادلهٔ (۱۵۶.۱۶) به‌دست آوردیم به‌صورت یك انتگرال حجمی به‌اضافهٔ یك انتگرال سطحی ظاهرمی‌شود. اگر y و G هردو در شرایط مرزی دیریکله، یا در هر دو شرط مرزی نویمان‌صدق کنند، انتگرال سطحی صفرمی‌شود و باز به‌معادلهٔ (۱۲۲.۱۶)دست پیدا می‌کنیم. انتگرال حجمی انتگرالی وزندار است روی جملهٔ چشمه، $f(\mathbf{r}_2)$، که در آن تابع‌گرین $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ تابع وزنی است.

شکل تابعهای گرین

$\mathcal{L}$ درحالت خاص $p(\mathbf{r}_1)=1$ و $q(\mathbf{r}_1)=0$ به‌صورت ∇^2، لاپلاسی، است. از

$$\nabla_1^2 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)=-\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) \qquad (۱۵۷.۱۶)$$

روی حجم کوچکی، که بارنقطه‌ای را دربر می‌گیرد، انتگرال می‌گیریم. درنتیجه

$$\int \nabla_1\cdot\nabla_1 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)d\tau_1=-\int \delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)d\tau_1$$

(۱۵۷.۱۶ الف)

$$=-1$$

انتگرال حجمی سمت چپ‌را می‌توان به‌کمك قضیهٔ گاؤس تبدیل کرد، به‌همان صورت که درتعمیم قانون‌گاؤس دربخش ۱۴.۱ انجام شد. پی‌می‌بریم که

$$\int \nabla_1 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\cdot d\boldsymbol{\sigma}_1 = -1 \qquad (۱۵۸.۱۶)$$

این عبارت، تصادفاً، نشان می‌دهدکه در این حالت نمی‌توان یك شرط مرزی نویمان، یعنی صفربودن مشتق بهنجار تابع گرین $\partial G/\partial n$ روی تمامی سطح، وضع کرد.

در فضای سه‌بعدی، معادلهٔ (۱۵۸.۱۶) باقراردادن

$$\frac{\partial}{\partial r_{12}} G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = -\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^2}\,,\quad r_{12}=|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2| \qquad (۱۵۸.۱۶ \text{ الف})$$

برقرارمی‌شود. انتگرالگیری روی سطح کره‌ای انجام می‌شودکه مرکزش در $\mathbf{r}_2$ واقع‌است. انتگرال معادلهٔ (۱۵۸.۱۶ الف) عبارت است از

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|} \qquad (۱۵۹.۱۶)$$

که بامطالب بخش ۱۴.۱ سازگاراست.

درفضای دوبعدی، معادلهٔ (۱۵۸.۱۶) باقراردادن

$$\frac{\partial}{\partial \rho_{12}} G(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2) = -\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2|} \qquad (۱۶۰.۱۶)$$

برقرارمی‌شود، به‌جای $\mathbf{r}$، کمیت $\boldsymbol{\rho}$ راگذاشته‌ایم: $\rho=(x^2+y^2)^{1/2}$، وانتگرالگیری‌روی محیط دایره‌ای به‌مرکز $\boldsymbol{\rho}_2$ صورت می‌گیرد. دراینجا $\rho_{12}=|\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2|$. با انتگرالگیری ازمعادلهٔ (۱۶۰.۱۶)، داریم

$$G(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = -\frac{1}{2\pi}\ln|\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2| \qquad (۱۶۱.۱۶)$$

به $G(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2)$ [و به $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$] می‌توانیم هرمضربی ازجواب منظم معادلهٔ همگن راکه برای صدق‌کردن درشرایط مرزی لازم است، بیفزاییم.

رفتار تابع گرین عملگر لاپلاس، در مجاورت منبع نقطه‌ای $\mathbf{r}_2=\mathbf{r}_1$، که به‌کمك معادله‌های (۱۵۹.۱۶) و (۱۶۱.۱۶) نشان داده می‌شود، تعیین تابعهای گرین را درسایر حالتها، مثلا در معادله‌های هلمهولتز و تعدیل‌یافتهٔ هلمهولتز میسرمی‌سازد.

۱. $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ در $\mathbf{r}_1\neq\mathbf{r}_2$ باید درمعادلهٔ دیفرانسیلی همگن

$$\mathcal{L}_1 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 0, \quad \mathbf{r}_1\neq\mathbf{r}_2 \qquad (۱۶۲.۱۶)$$

صدق کند.

۲. با $\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_2$ (یا $\boldsymbol{\rho}_1 \to \boldsymbol{\rho}_2$)

فضای دو بعدی
$$G(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) \approx -\frac{1}{2\pi} \ln |\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2| \tag{۱۶۳.۱۶}$$

فضای سه بعدی
$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \approx \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \tag{۱۶۳.۱۶ الف}$$

جملهٔ $\pm k^2$ درعملگر، بر رفتار G در نزدیکی نقطهٔ تکین $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ تأثیری ندارد. فهرست تابعهای گرین عملگرهای لاپلاس، هلمهولتز، و تعدیل یافتهٔ هلمهولتز را، برای راحتی، در جدول ۱.۱۶ آورده‌ایم.

جدول ۱.۱۶ تابعهای گرین*

	لاپلاس ∇^2	هلمهولتز $\nabla^2 + k^2$	تعدیل یافتهٔ هلمهولتز $\nabla^2 - k^2$
فضای یك بعدی	بازای $(-\infty, \infty)$ هیچ جوابی ندارد	$\frac{i}{2k}\exp(ik\lvert x_1 - x_2\rvert)$	$\frac{1}{2k}\exp(-k\lvert x_1 - x_2\rvert)$
فضای دو بعدی	$-\frac{1}{2\pi}\ln\lvert\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2\rvert$	$\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k\lvert\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2\rvert)$	$\frac{1}{2\pi}K_0(k\lvert\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2\rvert)$
فضای سه بعدی	$\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{\lvert\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\rvert}$	$\frac{\exp(ik\lvert\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\rvert)}{4\pi\lvert\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\rvert}$	$\frac{\exp(-k\lvert\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\rvert)}{4\pi\lvert\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\rvert}$

* در مورد عملگرهای لاپلاس و تعدیل یافتهٔ هلمهولتز، اینها توابع گرینی‌اند که به‌ازای $\mathbf{r}_1 \to \infty$ درشرط مرزی $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 0$ صدق می کنند. $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$، برای عملگر هلمهولتز، متناظر است بایك موج برونرونده. $H_0^{(1)}$ تابع هنکل بخش ۴.۱۱ است. K_0 تابع تعدیل یافتهٔ بسل بخش ۵.۱۱ را تشکیل می‌دهد.

بسط برحسب مختصات قطبی کروی

برای تعیین تابع‌گرین عملگر لاپلاس، روش دیگری را که عبارت است ازبسط برحسب هماهنگهای کروی، به‌صورت زیردرنظر می‌گیریم

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} g_l(r_1, r_2) Y_l^m(\theta_1, \varphi_1) Y_l^{m*}(\theta_2, \varphi_2) \quad (۱۶۴.۱۶)$$

$g_l(r_1, r_2)$ را تعیین خواهیم کرد. باتوجه به‌مسائل ۷.۶.۸ و ۶.۶.۱۲ داریم

$$\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{1}{r_1^2} \delta(r_1 - r_2)\, \delta(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \delta(\varphi_1 - \varphi_2)$$

(۱۶۵.۱۶)

$$= \frac{1}{r_1^2} \delta(r_1 - r_2) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\theta_1, \varphi_1) Y_l^{m*}(\theta_2, \varphi_2)$$

بانشاندن معادله‌های (۱۶۴.۱۶) و (۱۶۵.۱۶) درمعادلهٔ دیفرانسیل تابع گرین، معادلهٔ (۱۵.۷.۱۶)، وبااستفاده ازتعامد هماهنگهای کروی، به‌معادلهٔ شعاعی زیردست پیدا می‌کنیم

$$r_1 \frac{d^2}{dr_1^2} [r_1 g_l(r_1, r_2)] - l(l+1) g_l(r_1, r_2) = -\delta(r_1 - r_2) \quad (۱۶۶.۱۶)$$

اینك، با یك‌مسئلهٔ یك‌بعدی سروکار داریم. جوابهای[۱] معادلهٔ همگن متناظر عبارت‌اند از r_1^l و r_1^{-l-1}. اگربخواهیم g_l در $r_1 \to 0$ متناهی بماند ودر $r_1 \to \infty$ صفر شود، شگرد بخش ۵.۱۶ منجرخواهد شد به

$$g_l(r_1, r_2) = \frac{1}{2l+1} \begin{cases} \dfrac{r_1^l}{r_2^{l+1}}, & r_1 < r_2 \\[2ex] \dfrac{r_2^l}{r_1^{l+1}}, & r_1 > r_2 \end{cases} \quad (۱۶۷.۱۶)$$

یا

$$g_l(r_1, r_2) = \frac{1}{2l+1} \cdot \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \quad (۱۶۸.۱۶)$$

---

۱. باجدول ۱.۸ مقایسه کنید.

به‌این ترتیب تابع گرین ما عبارت است از

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_l^m(\theta_1, \varphi_1) Y_l^{m*}(\theta_2, \varphi_2) \quad \text{(۱۶۹.۱۶الف)}$$

با توجه به‌اینکه قبلا صورت بستهٔ $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ را در معادلهٔ (۱۵۹.۱۶) به‌دست آورده‌ایم، می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_l^m(\theta_1, \varphi_1) Y_l^{m*}(\theta_2, \varphi_2) \quad \text{(۱۶۹.۱۶ب)}$$

یکی ازموارد استفادهٔ بی‌واسطه ازاین بسط تابع گرین برحسب هماهنگهای کروی، در روند بسط چندقطبیهای الکتروستاتیکی مطرح می‌شود. پتانسیل یک‌توزیع بار اختیاری عبارت است از

$$\psi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d\tau_2$$

[که همان معادلهٔ (۸۱.۸) است]. بانشاندن در معادلهٔ (۱۶۹.۱۶ ب)، خواهیم داشت

$$\psi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left\{ \frac{1}{2l+1} \frac{Y_l^m(\theta_1, \varphi_1)}{r_1^{l+1}} \int \rho(\mathbf{r}_2) Y_l^{m*}(\theta_2, \varphi_2) \right.$$

$$\left. \times r_2^l \, d\varphi_2 \sin\theta_2 d\theta_2 r_2^2 dr_2 \right\} \quad r_1 > r_2 \text{ به‌ازای}$$

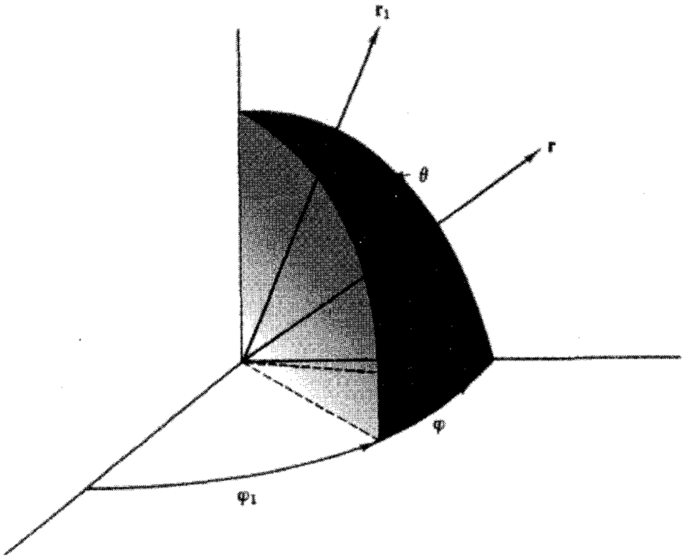
این‌عبارت بسط چندقطبی به‌شمار می‌آید. اهمیت نسبی جمله‌های مختلف دراین مجموعیابی دوگانه به‌شکل چشمه، $\rho(\mathbf{r}_2)$، بستگی دارد.

قضیهٔ جمع چندجمله‌ایهای لژاندر

از عبارت مولد چندجمله‌ایهای لژاندر، معادلهٔ (۴.۱۲ الف)، داریم

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\gamma) \quad \text{(۱۷۰.۱۶)}$$

که در آن γ زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ در شکل ۴.۱۶ است. معادله‌های (۱۶۹.۱۶) و



(۱۷۰.۱۶) را معادل هم قرار می‌دهیم، و قضیهٔ جمع چندجمله‌ایهای لژاندر را به دست می‌آوریم

$$P_l(\cos\gamma)=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\theta_1,\varphi_1)Y_l^{m*}(\theta_2,\varphi_2) \qquad (۱۷۱.۱۶)$$

سادگی این استنتاج را (درصورت اشراف برمفهوم تابعهای گرین) بااستنتاج نسبتاً پیچیدهٔ بخش ۸.۱۲ مقایسه کنید.

بسط درمختصات استوانه‌ای

مانند بسط قبلی در دستگاه قطبی کروی، با استفاده از مسئلهٔ ۵.۶.۱۲ و معادلهٔ (۲۱.۱۵ د)، می‌نویسیم

$$\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)=\frac{1}{\rho_1}\delta(\rho_1-\rho_2)\,\delta(\varphi_1-\varphi_2)\,\delta(z_1-z_2)$$

$$=\frac{1}{\rho_1}\delta(\rho_1-\rho_2)\,\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im(\varphi_1-\varphi_2)}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(z_1-z_2)}\,dk$$

(۱۷۲.۱۶)

اما چرا این‌صورت را برگزیدیم؟ چرا برای وابستگی به φ، مجموعیابی و برای وابستگی به z، انتگرالگیری‌را انتخاب کردیم؟ این‌شرط که وابستگی تك‌ـمقدار باشد، m راکوانتیده می‌کند ودرنتیجه مجموعیابی خواهیم داشت. چنین قیدی روی k وجود ندارد.

برای‌اجتناب ازمشکلاتی که بعداً بامقادیرمنفی k پیدا خواهیم کرد، معادلهٔ (۱۷۲.۱۶) را، بااستفاده ازمقداراصلی کوشی، به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)=\frac{1}{\rho_1}\delta(\rho_1-\rho_2)\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im(\varphi_1-\varphi_2)}\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos k(z_1-z_2)dk$$

(۱۷۲.۱۶الف)

بسطی مشابه این عبارت‌را برای تابع گرین می‌نویسیم

$$G(r_1,r_2)=\frac{1}{2\pi^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}g_m(\rho_1,\rho_2)e^{im(\varphi_1-\varphi_2)}\int_0^{\infty}\cos k(z_1-z_2)\,dk$$

(۱۷۳.۱۶)

که در آن ضرایب وابسته به‌ρ، $g_m(\rho_1,\rho_2)$، را باید تعیین کرد. با نشاندن این معادله در معادلهٔ (۱۵۷.۱۶)، که این‌باردرمختصات استوانه‌ای نوشته می‌شود، پی می‌بریم که اگر $g_m(\rho_1,\rho_2)$ درمعادلهٔ زیرصدق کند

$$\frac{d}{d\rho_1}\left[\rho_1\frac{dg_m}{d\rho_1}\right]-\left[k^2\rho_1+\frac{m^2}{\rho_1}\right]g_m=-\delta(\rho_1-\rho_2)\quad(۱۷۴.۱۶)$$

دراین‌صورت معادلهٔ (۱۵۷.۱۶) برقرارخواهد بود.

عملگر معادلهٔ (۱۷۴.۱۶) همان عملگر تعدیل‌یافتهٔ بسل (به‌صورت‌خود-الحاقی آن) است. ازاین‌رو جوابهای معادلهٔ‌همگن‌متناظرعبارت‌اند از $u_1=I_m(k\rho)$، $u_2=K_m(k\rho)$. دراینجا نیز مانند مورد مختصات قطبی کروی، این شرط را وضع می‌کنیم که G در $\rho_1=0$ متناهی‌باشد وبا $\rho_1\to\infty$ صفرشود. دراین‌صورت بهره‌گیری از شگرد بخش ۵.۱۶ به‌معادلهٔ زیرمنجر می‌شود

$$g_m(\rho_1,\rho_2)=-\frac{1}{A}I_m(k\rho_<)K_m(k\rho_>)\qquad(۱۷۵.۱۶)$$

این‌معادله متناظراست بامعادلهٔ (۱۲۸.۱۶). ثابت A از رونسکیی به‌دست آمده است

$$I_m(k\rho)K'_m(k\rho)-I'_m(k\rho)K_m(k\rho)=\frac{A}{p(k\rho)}\qquad(۱۷۵.۱۶\ \text{الف})$$

به‌کمك مسئلهٔ ۱۰.۵.۱۱ داریم: $A=-1$ و

$$g_m(\rho_1, \rho_2)=I_m(k\rho_<)K_m(k\rho_>) \qquad (۱۷۶.۱۶)$$

درنتیجه تابع‌گرین درمختصات استوانه‌ای به‌صورت زیرخواهد بود

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}$$
$$=\frac{1}{2\pi^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} I_m(k\rho_<)K_m(k\rho_>)e^{im(\varphi_1-\varphi_2)}\cos k(z_1-z_2)\,dk$$

(۱۷۷.۱۶)

سئلهٔ ۱۴.۶.۱۶ حالت خاصی ازاین نتیجه است.

مثال ۱.۶.۱۶ پراکندگی درمکانیك‌کوانتومی_جواب‌سری‌نویمان.
نظریهٔ‌کوانتومی پراکندگی، شگردهای معادلهٔ انتگرالی وکاربردی ازتابع‌گرین را به‌خوبی نمایش می‌دهد. تصویر فیزیکی ما از پراکندگی به‌قرار زیر است. باریکه‌ای از ذرات درامتداد محور z منفی به‌سوی مبدأ حرکت می‌کند. کسرکوچکی از ذرات توسط پتانسیل $V(\mathbf{r})$ پراکنده می‌شوند و به‌صورت یك موج کروی برونرونده دور می‌شوند. تابع‌موج ما $\psi(\mathbf{r})$ باید در معادلهٔ شرودینگر مستقل از زمان صدق کند

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r})+V(\mathbf{r})\,\psi(\mathbf{r})=E\psi(\mathbf{r}) \qquad (\text{۱۷۸.۱۶الف})$$

یا

$$\nabla^2\psi(\mathbf{r})+k^2\psi(\mathbf{r})=-\left[-\frac{2m}{\hbar^2}V(\mathbf{r})\,\psi(\mathbf{r})\right] \qquad (\text{۱۷۸.۱۶ب})$$

که درآن

$$k^2=2mE/\hbar^2$$

بااستفاده ازتصویرفیزیکی که‌هم‌اکنون ارائه شد، درجستجوی جوابی هستیم که‌دارای صورت مجانبی زیرباشد

$$\psi(\mathbf{r})\sim e^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}}+f_k(\theta, \varphi)\frac{e^{ikr}}{r} \qquad (۱۷۹.۱۶)$$

دراینجا $e^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}}$ موج تخت فرودی است، که درآن علت شاخص پایینی ۰ در بردار انتشار $\mathbf{k}_0$ آن است که نشان دهد این بردار درراستای $\theta=0$ (محورz) واقع است. بزرگی k_0 و k برابراست. e^{ikr}/r موج کروی برونرونده باضریب دامنهٔ وابسته به‌جهت(وانرژی)، $f_k(\theta,\varphi)$ [۲] است. بردار $\mathbf{k}$ در راستای موج پراکنده شدهٔ برونرونده واقع است. در کتابهای مکانیك‌کوانتومی نشان می‌دهند که احتمال دیفرانسیلی پراکندگی، $d\sigma/d\Omega$، یعنی سطح مقطع پراکندگی به‌ازای واحد زاویهٔ فضایی ازعبارت $|f_k(\theta,\varphi)|^2$ به‌دست‌می‌آید. $[-(2m/\hbar^2)V(\mathbf{r})\,\psi(\mathbf{r})]$ را با تابع $f(\mathbf{r})$ در معادلهٔ (۱۵۶.۱۶) متحد می‌گیریم، با استفاده ازمعادلهٔ(۱۵۶.۱۶و) داریم

$$\psi(\mathbf{r}_1)=-\int\frac{2m}{\hbar^2}V(\mathbf{r}_2)\,\psi(\mathbf{r}_2)\,G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\,d^3r_2 \qquad (۱۸۰.۱۶)$$

این معادله دارای صورت مجانبی مطلوب درمعادلهٔ (۱۷۹.۱۶) نیست، ولی‌می‌توانیم به‌آن کمیت $e^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}_1}$، یعنی جوابی از معادلهٔ همگن، را بیفزاییم و $\psi(r)$ را به‌صورت مطلوب زیر درآوریم

$$\psi(\mathbf{r}_1)=e^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}}-\int\frac{2m}{\hbar^2}V(\mathbf{r}_2)\,\psi(\mathbf{r}_2)\,G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\,d^3r_2 \qquad (۱۸۱.۱۶)$$

تابع‌گرین ما تابع‌گرین عملگر $\mathcal{L}=\nabla^2+k^2$ [معادلهٔ (۱۷۸.۱۶ ب)] است‌که در شرطی مرزی صدق می‌کندکه توصیفگر یك موج برونرونده باشد. درنتیجه، ازجدول ۱.۱۶داریم: $G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=\exp(ik|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)/(4\pi|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)$ و

$$\psi(\mathbf{r}_1)=e^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}_1}-\int\frac{2m}{\hbar^2}V(\mathbf{r}_2)\,\psi(\mathbf{r}_2)\frac{e^{ik|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}}{4\pi|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}\,d^3r_2 \qquad (۱۸۲.۱۶)$$

این معادلهٔ انتگرالی‌که به‌معادلهٔ موج شرودینگر شباهت دارد، دقیق است.

به‌کمك شگرد سری نویمان بخش ۳.۱۶ (در نظر داشته باشیدکه احتمال پراکندگی بسیارناچیزاست)، داریم

$$\psi_0(\mathbf{r}_1)=e^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}_1} \qquad (۱۸۳.۱۶\text{الف})$$

---

۱. باریکهٔ فرودی را برای راحتی کار پیوسته می‌گیریم. معادلهٔ (۱۷۹.۱۶)، در بررسیهای کاملتر و واقعیتر، مؤلفه‌ای ازیك بسته موج فوریه به‌شمارمی‌آید.

۲. اگر $V(\mathbf{r})$ نمایانگر نیرویی مرکزی باشد، f_k، تنها تابع θ و مستقل ازسمت خواهد بود.

که تعبیر فیزیکی آن گویای این نکته است که هیچ گونه پراکندگی نداریم.
با نشاندن $\psi_0(\mathbf{r}_2)=e^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}_2}$ در انتگرال، جملهٔ اول تصحیحی را به‌دست می‌آوریم

$$\psi_1(\mathbf{r}_1)=e^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}_1}-\int\frac{2m}{\hbar^2}V(\mathbf{r}_2)\frac{e^{ik|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}}{4\pi|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}\,e^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}_2}d^3r_2 \qquad (\text{۱۸۳.۱۶ ب})$$

این‌همان تقریب معروف بورن است؛ انتظار می‌رود که این تقریب برای پتانسیلهای ضعیف وانرژی فرودی زیاد ازهمهٔ تقریبها دقیقتر باشد. اگر به‌تقریب دقیقتری نیاز باشد، می‌توان سری نویمان‌را ادامه‌داد.[1]

مثال ۲.۶.۱۶ پراکندگی کوانتوم مکانیکی ـ تابع گرین

بار دیگر معادلهٔ موج شرودینگر [معادلهٔ (۱۷۸.۱۶ ب)] مربوط به‌مسئلهٔ پراکندگی را درنظرمی‌گیریم. این‌بارشگردهای تبدیل فوریه‌را به‌کارمی‌بریم وصورت مطلوب تابع‌گرین را ازطریق انتگرالگیری پربندی استخراج می کنیم. بانشاندن صورت مجانبی مطلوب برای جواب(که در آن k را با k_0 تعویض کرده‌ایم) خواهیم داشت

$$\psi(\mathbf{r})\sim e^{ik_0z}+f_{k_0}(\theta,\varphi)\frac{e^{ik_0r}}{r}=e^{ik_0z}+\Phi(\mathbf{r}) \qquad (\text{۱۷۹.۱۶ الف})$$

درمعادلهٔ موج شرودینگر، معادلهٔ (۱۷۸.۱۶ ب)، خواهیم داشت

$$(\nabla^2+k_0^2)\,\Phi(\mathbf{r})=U(\mathbf{r})e^{ik_0z}+U(\mathbf{r})\,\Phi(\mathbf{r}) \qquad (\text{۱۸۴.۱۶ الف})$$

دراینجا عبارت زیر، پتانسیل (اختلال) پراکندگی‌را به‌دست می‌دهد

$$\frac{\hbar^2}{2m}U(\mathbf{r})=V(\mathbf{r})$$

ازآنجاکه احتمال پراکندگی بسیارکوچکتر ازیك است، انتظار می‌رود که جملهٔ دوم سمت راست معادلهٔ (۱۸۴.۱۶ الف) (نسبت به‌جملهٔ اول سمت راست) ناچیز باشد، و از این‌رو آن را حذف می‌کنیم. دقت‌کنید که معادلهٔ دیفرانسیل خود را با معادلهٔ زیر تقریب می‌زنیم

$$(\nabla^2+k_0^2)\,\Phi(\mathbf{r})=U(\mathbf{r})e^{ik_0z} \qquad (\text{۱۸۴.۱۶ ب})$$

اینك درادامهٔ کارخود به‌حل معادلهٔ (۱۸۴.۱۶ ب)، که یك معادلهٔدیفرانسیلی‌ناهمگن است، می‌پردازیم. عملگردیفرانسیلی ∇^2 مجموعهٔ پیوسته‌ای از ویژه‌تابعها را پدید می‌آورد

---

۱. بااین فرض‌که سری نویمان همگراست. دربرخی شرایط فیزیکی، این‌سری همگرا نیست و درنتیجه به‌شگردهای دیگری نیاز پیدا می‌شود.

$$\nabla^{2}\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})=-k^{2}\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \tag{۱۸۵.۱۶}$$

که درآن

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})=(2\pi)^{-3/2}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

این ویژه‌تابعها مجموعه‌ای پیوسته ولی متعامد بهنجار تشکیل می‌دهند، به‌این‌معنا که

$$\int \psi^{*}_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{r})\psi^{\mathbf{k}_2(\mathbf{r})}\,d^{3}r=\delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)$$

[با معادلهٔ (۲۱.۱۵ د) مقایسه کنید].[1] این ویژه‌تابعها را برای استخراج تابع گرین به‌کار می‌بریم.

تابع مجهول $\Phi(\mathbf{r}_1)$ را برحسب این ویژه‌تابعها بسط می‌دهیم

$$\Phi(\mathbf{r}_1)=\int A_{\mathbf{k}_1}\psi_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{r}_1)\,d^{3}k_1 \tag{۱۸۶.۱۶}$$

این عبارت یك‌انتگرال فوریه است که درآن $A_{\mathbf{k}_1}$ها ضرایبی مجهول‌اند. با نشاندن معادلهٔ (۱۸۶.۱۶) درمعادلهٔ (۱۸۴.۱۶ ب)، وبااستفاده ازمعادلهٔ (۱۸۵.۱۶)، خواهیم داشت

$$\int A_{\mathbf{k}}(k_0^{2}-k^{2})\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})d^{3}k=U(\mathbf{r})e^{ik_0z} \tag{۱۸۷.۱۶}$$

اکنون با استفاده از شیوهٔ ضرب‌کردن در $\psi^{*}_{\mathbf{k}_2}(\mathbf{r})$ و انتگرالگیری روی مختصات فضایی، داریم

$$\int A_{\mathbf{k}_1}(k_0^{2}-k_1^{2})d^{3}k_1\int\psi^{*}_{\mathbf{k}_2}(\mathbf{r})\,\psi_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{r})d^{3}r=A_{\mathbf{k}_2}(k_0^{2}-k_2^{2}) \tag{۱۸۸.۱۶}$$

$$=\int\psi^{*}_{\mathbf{k}_2}(\mathbf{r})\,U(\mathbf{r})e^{ik_0z}\,d^{3}r$$

$A_{\mathbf{k}_2}$ را ازاین معادله به‌دست می‌آوریم ودر معادلهٔ (۱۸۶.۱۶) می‌نشانیم، خواهیم داشت

$$\Phi(\mathbf{r}_2)=\int[(k_0^{2}-k_2^{2})^{-1}\int\psi^{*}_{\mathbf{k}_2}(\mathbf{r}_1)\,U(\mathbf{r}_1)e^{ik_0z_1}\,d^{3}r_1]\,\psi_{\mathbf{k}_2}(\mathbf{r}_2)\,d^{3}k_2 \tag{۱۸۹.۱۶}$$

---

۱. $d^{3}r=dx\,dy\,dz$، یك عنصرحجم (سه‌بعدی) درفضای $\mathbf{r}$ به‌شمار می‌رود.

در نتیجه

$$\Phi(\mathbf{r}_1)=\int\psi_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{r}_1)(k_0^2-k_1^2)^{-1}d^3k_1\int\psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{r}_2)\,U(\mathbf{r}_2)e^{ik_0z_2}\,d^3r_2 \quad (۱۹۰.۱۶)$$

که درآن به‌جای $\mathbf{k}_2$ کمیت $\mathbf{k}_1$ و به‌جای $\mathbf{r}_1$ کمیت $\mathbf{r}_2$ را نشانده‌ایم تا با معادلهٔ (۱۸۶.۱۶) سازگار شود. ترتیب انتگرالگیری را برعکس می‌کنیم، در نتیجه

$$\Phi(\mathbf{r}_1)=-\int G_{k_0}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\,U(\mathbf{r}_2)e^{ik_0z_2}d^3r_2 \quad (۱۹۱.۱۶)$$

که درآن $G_{k_0}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ همان تابع گرین ماست که از رابطهٔ زیر، شبیه به‌معادلهٔ (۹۱.۹) در بخش ۴.۹، برای ویژه‌تابعهای گسسته، به‌دست می‌آید

$$G_{k_0}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=\int\frac{\psi^*_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{r}_2)\,\psi_{\mathbf{k}_1}(\mathbf{r}_1)}{k_1^2-k_0^2}\,d^3k_1 \quad (۱۹۲.۱۶)$$

معادلهٔ (۱۹۱.۱۶) را باید با جواب تابع گرین معادلهٔ پواسون (۱۱۶.۱۶) مقایسه کرد.

شاید بهتر باشد که این انتگرال را محاسبه کنیم تا یک‌بار دیگر نقش تعیین‌کنندهٔ شرایط مرزی را مورد تأکید قرار داده باشیم. با استفاده از ویژه‌تابعهای حاصل از معادلهٔ (۱۸۵.۱۶) و عبارت

$$d^3k=k^2\,dk\sin\theta\,d\theta\,d\varphi \quad (۱۹۳.۱۶)$$

به‌دست می‌آوریم

$$G_{k_0}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{e^{ik\rho\cos\theta}}{k^2-k_0^2}\,d\varphi\sin\theta\,d\theta\,k^2dk \quad (۱۹۴.۱۶)$$

در اینجا $k\rho\cos\theta$ به‌جای $\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$ نشسته است، ودر آن $\boldsymbol{\rho}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$ نمایانگر محور قطبی در فضای k است. انتگرال روی φ را از طریق جستجو محاسبه می‌کنیم، و یک 2π به‌دست می‌آوریم. سپس انتگرال روی θ به‌صورت زیر خواهد بود

$$G_{k_0}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=\frac{1}{4\pi^2\rho i}\int_0^\infty\frac{e^{ik\rho}-e^{-ik\rho}}{k^2-k_0^2}\,kdk \quad (۱۹۵.۱۶)$$

با توجه به‌اینکه انتگرالده تابع زوجی از k است، می‌توانیم قرار دهیم

$$G_{k_0}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=\frac{1}{8\pi^2\rho i}\int_{-\infty}^\infty\frac{(e^{i\kappa}-e^{-i\kappa})}{\kappa^2-\sigma^2}\,\kappa\,d\kappa \quad (۱۹۶.۱۶)$$

گام آخر تمهیدی است برای محاسبهٔ $G_k(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ به‌صورت یک انتگرال پربندی. نمادهای κ

و σ ($\sigma>0$) به‌ترتیب نمایشگر $k\rho$ و $k_0\rho$ هستند.

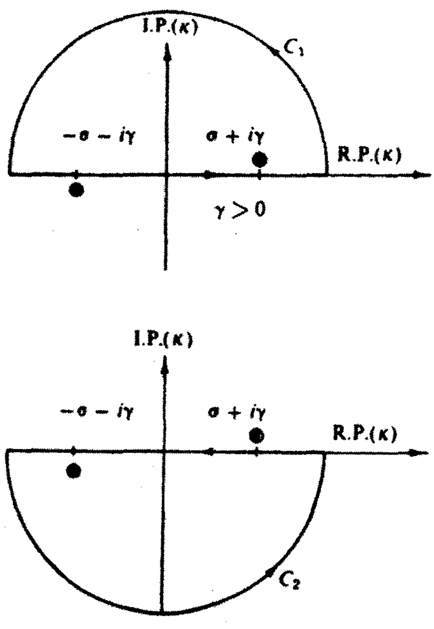
اگر انتگرال معادلهٔ (۱۹۶.۱۶) را یك انتگرال ریمان تعبیر کنیم، این انتگرال وجود ندارد. این امر دال بر آن‌است‌که $\mathcal{L}^{-1}$ وجود ندارد، و به‌معنای تحت‌اللفظی نیز $\mathcal{L}^{-1}$ وجود ندارد. $\mathcal{L}=\nabla^2+k^2$ تکین‌است، زیرا جوابهای‌غیربدیهی‌از ψ وجود دارند که به‌ازای آنها معادلهٔ همگن $\mathcal{L}\psi=0$ برقرار است (با مسئلهٔ ۶.۶.۴ مقایسه کنید). برای اجتناب از این مشکل، پارامتر γ را وارد و عملگر متفاوت $\mathcal{L}_\gamma^{-1}$ را تعریف می‌کنیم و سپس حد $\gamma\to 0$ را به‌دست می‌آوریم.

از تقسیم انتگرال به‌دو جزء، به‌طوری که هر جزء را بتوان به‌صورت یك انتگرال پربندی مناسب نوشت، داریم

$$G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=\frac{1}{8\pi^2\rho i}\oint_{c_1}\frac{\kappa e^{i\kappa}d\kappa}{\kappa^2-\sigma^2}+\frac{1}{8\pi^2\rho i}\oint_{c_2}\frac{\kappa e^{-i\kappa}d\kappa}{\kappa^2-\sigma^2}\qquad(۱۹۷.۱۶)$$

پربند C_1 توسط نیمدایره‌ای در نیم‌صفحهٔ بالایی و پربند C_2 توسط نیمدایره‌ای در نیم‌صفحهٔ پایینی بسته‌می‌شود. این‌انتگرالها درفصل ۷، با استفاده از نیمدایره‌های بینهایت کوچك مناسبی که نقاط تکین $\kappa=\pm\sigma$ را دور می‌زنند محاسبه شده‌اند. به‌عنوان یك‌دستورالعمل متفاوت، می‌توانیم نخست‌نقاط تکین را توسط تعویض σ با $\sigma+i\gamma$ ازروی محورحقیقی دور کنیم و سپس، بعد ازمحاسبه، حد $\gamma\to 0$ را به‌دست آوریم (شکل ۵.۱۶).

پربند C_1، برای γ مثبت، نقطهٔ تکین $\kappa=\sigma+i\gamma$ را دربرمی‌گیرد و سهم انتگرال اول را برخواهد بود با



شکل ۵.۱۶ پربندهای ممکن انتگرالگیری برای تابع گرین.

$$2\pi i \cdot \frac{1}{2} e^{i(\sigma+i\gamma)}$$

ازانتگرال دوم، که تکینگی $\kappa=-(\sigma+i\gamma)$ را در برمی‌گیرد، نیز خواهیم داشت

$$2\pi i \cdot \frac{1}{2} e^{i(\sigma+i\gamma)}$$

به‌معادلهٔ (۱۹۷.۱۶) بازمی‌گردیم وقرارمی‌دهیم $\gamma \to 0$، در نتیجه

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi\rho} e^{i\sigma}$$

$$= \frac{e^{ik_0|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}}{4\pi|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|} \qquad (۱۹۸.۱۶)$$

که بامسئلهٔ ۱۶.۷.۸ کاملا سازگار است. این نتیجه به‌این نکته بستگی دارد که با γ مثبت شروع کنیم. اگر γ را منفی گرفته بودیم، تابع گرین ما شامل $e^{-i\sigma}$ می‌شد، که به‌یك موج درونرونده مربوط می‌شود. شرایطی مرزی که می‌خواهیم صادق باشند، گزینهٔ مقدارمثبت برای γ را ایجاب می‌کنند.

معادله‌های (۱۹۱.۱۶) و (۱۹۸.۱۶) همان موج پراکندهٔ معادلهٔ (۱۸۳.۱۶ب) را تولید می‌کنند، و جواب‌دقیقی‌را برای‌جواب تقریبی معادلهٔ (۱۸۴.۱۶ ب) تشکیل‌می‌دهند. در مسائل ۸.۶.۱۶ تا ۲۰.۶.۱۶ این نتایج تعمیم می‌یابند.

مسائل

۱.۶.۱۶ درستی معادلهٔ (۱۵۶.۱۶ د) به‌شرح زیر، را تحقیق کنید

$$\int (v\mathcal{L}_2 u - u\mathcal{L}_2 v)\, d\tau_2 = \int p(v\nabla_2 u - u\nabla_2 v)\cdot d\boldsymbol{\sigma}_2$$

۲.۶.۱۶ نشان دهیدکه جمله‌های $+k^2$ در عملگر هلمهولتز و $-k^2$ در عملگر تعدیل‌یافتهٔ هلمهولتز بر رفتار $G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ در نزدیکی نقطهٔ تکین $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2$ تأثیری ندارند. یعنی، نشان دهید

$$\lim_{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|\to 0} \int k^2 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\, d\tau_2 = 0$$

۳.۶.۱۶ نشان دهیدکه عبارت

$$\frac{\exp(ik|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)}{4\pi|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}$$

دومعیارمناسب را برآورده می‌کند، ودرنتیجه تابع‌گرین معادلهٔ هلمهولتز است.

۴.۶.۱۶ (الف) تابع‌گرین معادلهٔ سه‌بعدی هلمهولتز را بیابید. این همان مسئلهٔ ۱۶.۷.۸ است که درآنجا موج را موج ایستاده گرفتیم.
(ب) این تابع گرین چه ارتباطی باتابعهای کروی بسل دارد؟

۵.۶.۱۶ معادلهٔ همگن هلمهولتز

$$\nabla^2\varphi+\lambda^2\varphi=0$$

دارای ویژه‌مقدارهای λ_i^2 و ویژه‌تابعهای φ_i است. نشان‌دهیدکه تابع‌گرین متناظر را، که درمعادلهٔ زیرصدق می‌کند

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)+\lambda^2 G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=-\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$$

می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(\mathbf{r}_1)\,\varphi_i(\mathbf{r}_2)}{\lambda_i^2-\lambda^2}$$

چنین بسطی‌را بسط دوخطی می‌نامند. اگر تابع گرین در شکل بسته قابل حصول باشد، این بسط وسیله‌ای برای ایجاد تابعهای مولد به‌شمارمی‌آید.

۶.۶.۱۶ پتانسیل الکتروستاتیکی (برحسب یکاهای mks) زیررا در اختیار داریم

$$\varphi(r)=\frac{Z}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^{-ar}}{r}$$

توزیع باری‌الکتریکی راباز‌سازی‌کنیدکه مولد این‌پتانسیل باشد. دقت‌کنیدکه $\varphi(r)$ به‌ازای مقادیر بزرگ r، به‌صورت نمایی‌کاهش می‌یابد؛ این‌امر نشان می‌دهدکه بارکل صفراست.

پاسخ. $\rho(r)=Z\,\delta(r)-\dfrac{Za^2}{4\pi}\,\dfrac{e^{-ar}}{r}$.

۷.۶.۱۶ معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{d^2y(r)}{dr^2}-k^2y(r)+V_0\,\frac{e^{-r}}{r}\,y(r)=0$$

و شرایط مرزی $y(0)=y(\infty)=0$ را به‌یك معادلهٔ انتگرالی فردهولم، به‌صورت زیر تبدیل کنید

$$y(r)=\lambda\int_{\circ}^{\infty} G(r,t)\,\frac{e^{-t}}{t}\,y(t)\,dt$$

کمیتهای $V_{\circ}$ و $k^{\text{۲}}$ ثابت‌اند. این معادلهٔ دیفرانسیل از معادلهٔ موج شرودینگر با یك پتانسیل مزون به‌دست آمده است

$$\lambda=V_{\circ}$$

$$G(r,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{k}e^{-kt}\sinh kr, & \circ\leqslant r<t\\[2ex] \dfrac{1}{k}e^{-kr}\sinh kt, & t<r<\infty\end{cases}$$

۸.۶.۱۶ یك حلقهٔ پیانای باردار به‌شعاع a (مثال ۳.۳.۱۲) را می‌توان به صورت زیر توصیف کرد

$$\rho(\mathbf{r})=\frac{q}{\text{۲}\pi a^{\text{۲}}}\,\delta(r-a)\,\delta(\cos\theta)$$

با استفاده از تابع گرین معلوم برای این سیستم، پتانسیل الکتروستاتیکی را محاسبه کنید.

راهنمایی. ازمسئلهٔ ۳.۶.۱۲ می‌توان سود جست.

۹.۶.۱۶ ثابت جداسازی‌را از $k^{\text{۲}}$ به $-k^{\text{۲}}$ تعویض کنید و ناپیوستگی درمشتق اول را در وابستگی به z قراردهید. آنگاه نشان دهید که

$$\frac{1}{\text{۴}\pi|\mathbf{r}_{\text{۱}}-\mathbf{r}_{\text{۲}}|}=\frac{1}{\text{۴}\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{\circ}^{\infty}e^{im(\varphi_{\text{۱}}-\varphi_{\text{۲}})}J_m(k\rho_{\text{۱}})J_m(k\rho_{\text{۲}})e^{-k|z_{\text{۱}}-z_{\text{۲}}|}\,dk$$

راهنمایی. کمیت $\delta(\rho_{\text{۱}}-\rho_{\text{۲}})$ موردنیاز را می‌توان ازمسئلهٔ ۲.۱.۱۵ به‌دست آورد.

۱۰.۶.۱۶ بسط زیررا استخراج کنید

$$\frac{\exp[ik|\mathbf{r}_{\text{۱}}-\mathbf{r}_{\text{۲}}|]}{\text{۴}\pi|\mathbf{r}_{\text{۱}}-\mathbf{r}_{\text{۲}}|}=ik\sum_{l=\circ}^{\infty}\begin{Bmatrix}j_l(kr_{\text{۱}})\,h_l^{(1)}(kr_{\text{۲}})\\ j_l(kr_{\text{۲}})\,h_l^{(1)}(kr_{\text{۱}})\end{Bmatrix}$$

$$\sum_{m=-l}^{l}Y_l^m(\theta_{\text{۱}},\varphi_{\text{۱}})Y_l^{m*}(\theta_{\text{۲}},\varphi_{\text{۲}}),\qquad \begin{matrix}r_{\text{۱}}<r_{\text{۲}}\\ r_{\text{۱}}>r_{\text{۲}}\end{matrix}$$

راهنمایی. سمت چپ، یك تابع گرین معلوم است. بسطی برحسب هماهنگهای کروی

برای آن در نظر بگیرید و روی وابستگی شعاعی باقیمانده کار کنید. به‌کمك رابطهٔ بستاری هماهنگ کروی، مسئلهٔ ۶.۶.۱۲، وابستگی زاویه‌ای به‌دست می‌آید.

۱۱.۶.۱۶ نشان دهید که بسط تابع گرین عملگر تعدیل‌یافتهٔ هلمهولتز، $\exp(-k|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)/(4\pi|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)$، درمختصات قطبی کروی به‌شرح زیراست

$$\frac{\exp(-k|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)}{4\pi|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}=k\sum_{l=0}^{\infty} i_l(kr_<)k_l(kr_>)\sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\theta_1,\varphi_1)Y_l^{m*}(\theta_2,\varphi_2)$$

یادآوری. تابعهای کروی تعدیل‌یافتهٔ بسل، $i_l(kr)$ و $k_l(kr)$، را در مسئلهٔ ۱۵.۷.۱۱ تعریف کردیم.

۱۲.۶.۱۶ با استفاده از تابع کروی گرین، مسئلهٔ ۱۰.۶.۱۶، بسط زیر را برای موج تخت به‌دست آورید

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}=\sum_{l=0}^{\infty} i^l(2l+1)\, j_l(kr)\, P_l(\cos\gamma)$$

که در آن γ زاویهٔ بین $\mathbf{k}$ و $\mathbf{r}$ است. این‌همان معادلهٔ ریلی مسئلهٔ ۷.۴.۱۲ است.

راهنمایی. فرض کنید $\mathbf{r}_2\gg\mathbf{r}_1$، به‌طوری که

$$|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|\to r_2-\mathbf{r}_{20}\cdot\mathbf{r}_1=r_2-\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1}{k}$$

آنگاه قراردهید $r_2\to\infty$، وعامل e^{ikr_2}/r_2 را حذف کنید.

۱۳.۶.۱۶ با استفاده ازنتایج مسائل ۱۰.۶.۱۶ و۱۲.۶.۱۶، نشان دهید

$$e^{ix}=\sum_{l=0}^{\infty} i^l(2l+1)j_l(x)$$

۱۴.۶.۱۶ (الف) با استفاده از بسط تابع گرین لاپلاس در مختصات استوانه‌ای [معادلهٔ (۱۷۷.۱۶)]، نشان دهیدکه

$$\frac{1}{(\rho^2+z^2)^{1/2}}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} K_0(k\rho)\cos kz\, dk$$

همین نتیجه، به‌طورمستقیم، درمسئلهٔ ۱۱.۳.۱۵ به‌دست‌آمده است.

(ب) به‌عنوان حالت خاصی از بند (الف) نشان دهیدکه

$$\int_0^{\infty} K_0(k)dk=\frac{\pi}{2}$$

۱۵.۶.۱۶ باتوجه به‌اینکه رابطهٔ

$$\psi_k(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}}$$

عبارت است از ویژه‌تابعی ازعبارت

$$(\nabla^2 + k^2)\,\psi_k(\mathbf{r}) = 0$$

[معادله‌های(۱۸۳.۱۶) و(۱۸۴.۱۶)]، نشان دهید که تابع نامتناهی گرین $\nabla^2 = \mathcal{L}$ رامی‌توان به‌صورت زیر بسط داد

$$\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \frac{d^3k}{k^2}$$

۱۶.۶.۱۶ بااستفاده از تبدیلهای فوریه، نشان دهیدکه تابع گرینی که در معادلهٔ ناهمگن هلمهولتز، به‌شرح زیر، صدق می کند

$$(\nabla^2 + k_0^2)\, G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

عبارت است از

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}}{k^2 - k_0^2} d^3k$$

که بامعادلهٔ(۱۹۲.۱۶) سازگار است.

۱۷.۶.۱۶ معادلهٔ اصلی درنظریهٔ پراش کیرشهوف به‌صورت زیراست

$$\psi(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_2} \left[\frac{e^{ikr}}{r} \nabla \psi(\mathbf{r}_2) - \psi(\mathbf{r}_2) \nabla \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] \cdot d\boldsymbol{\sigma}_2$$

که درآن ψ درمعادلهٔ همگن هلمهولتزصدق می کند و $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. این معادله رابه‌دست آورید. فرض کنیدکه $\mathbf{r}_1$ درون سطح بستهٔ S_2 واقع است.

راهنمایی. ازقضیهٔ گرین بهره گیرید.

۱۸.۶.۱۶ تقریب بورن برای موج پراکنده به کمک معادلهٔ(۱۸۳.۱۶ب)[ومعادلهٔ(۱۹۱.۱۶)] بیان می‌شود. ازصورت مجانبی درمعادلهٔ (۱۷۹.۱۶) داریم

$$f_k(\theta, \varphi)\frac{e^{ikr}}{r} = -\frac{2m}{\hbar^2} \int V(\mathbf{r}_2) \frac{e^{ik|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|} e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_2}\, d^3r_2$$

برای پتانسیل پراکندگی $V(\mathbf{r}_۲)$ مستقل از زاویه‌ها و به‌ازای $r \gg r_۲$، نشان‌دهید

$$f_k(\theta, \varphi) = -\frac{۲m}{\hbar^۲}\int_۰^\infty r_۲ V(r_۲)\frac{\sin(|\mathbf{k}_۰-\mathbf{k}|r_۲)}{|\mathbf{k}_۰-\mathbf{k}|}\, dr_۲$$

که در آن $\mathbf{k}_۰$ در راستای $\theta = ۰$ (محور z اصلی) است، درحالی‌که $\mathbf{k}$ در راستای (θ, φ) واقع است. بزرگیها باهم برابرند: $|\mathbf{k}_۰| = |\mathbf{k}|$. m جرم کاهیده است.

راهنمایی. مسئلهٔ ۱۲.۶.۱۶ را برای ساده‌کردن عبارت تمایی و مسئلهٔ ۲۰.۳.۱۵ را برای تبدیل کردن تبدیل نمایی سه‌بعدی فوریه به‌تبدیل سینوسی یک‌بعدی فوریه به‌کار برید.

۱۹.۶.۱۶ دامنهٔ پراکندگی، $f_k(\theta, \varphi)$، را برای پتانسیل مزون $V(r) = V_۰(e^{-\alpha r}/\alpha r)$ محاسبه کنید.

راهنمایی. بااین پتانسیل خاص، امکان محاسبهٔ انتگرال بورن، مسئلهٔ ۱۸.۶.۱۶، به‌صورت یك تبدیل لاپلاس موجود است.

پاسخ. $f_k(\theta,\varphi) = -\dfrac{۲mV_۰}{\hbar^۲\alpha}\dfrac{۱}{\alpha^۲+(\mathbf{k}_۰-\mathbf{k})^۲}$.

۲۰.۶.۱۶ پتانسیل مزون $V(r) = V_۰(e^{-\alpha r}/\alpha r)$ را می‌توان برای توصیف پراکندگی کولنی دوبار $q_۱$ و $q_۲$ به‌کار برد. قرارمی‌دهیم: $\alpha \to ۰$ و $V_۰ \to ۰$؛ ولی نسبت $V_۰/\alpha$ را برابر $q_۱ q_۲/۴\pi\varepsilon_۰$ می‌گیریم (در دستگاه یکاهای گاوسی $۴\pi\varepsilon_۰$ را حذف می‌کنیم). نشان دهیدکه سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی $d\sigma/d\Omega = |f_k(\theta, \varphi)|^۲$ از رابطهٔ زیر به‌دست‌می‌آید

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{q_۱ q_۲}{۴\pi\varepsilon_۰}\right)^۲ \frac{۱}{۱۶E^۲\sin^۴(\theta/۲)}, \quad E = \frac{p^۲}{۲m} = \frac{\hbar^۲k^۲}{۲m}$$

گاهی پیش‌می‌آیدکه این‌تقریب بودن (تصادفاً) هم بامحاسبات کوانتوم‌مکانیکی وهم بامحاسبهٔ کلاسیکی رادرفورد کاملا سازگاراست.

مراجع

Bocher. M., *An Introduction to the Study of Integral Equations*. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 10. New York: Hafner, 1960.

این‌کتاب برای آشنایی بامعادله‌های انتگرالی بسیارسودمند است.

Cochran, J. A., *The Analysis of Linear Integral Equations*. New York: McGraw-Hill, 1972.

کتابی‌است حاوی‌بررسی‌جامعی‌دربارهٔ‌معادله‌های‌انتگرالی‌خطی که بیشتر برای دست‌اندرکاران ریاضی‌کاربردی وریاضی فیزیك‌نوشته شده‌است. دراین‌کتاب روی‌سخن باخوانندگانی‌است که معلومات ریاضی آنها درسطحی نسبتاً بالا باشد.

Courant, R., and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol .1 (English ed.) New York: Interscience, 1953.

یکی از آثار کلاسیك فیزیك ریاضی به‌شمارمی‌آید، اولین‌بار درسال ۱۹۲۴ به‌زبان آلمانی منتشر شد، ویرایش انگلیسی تجدید نظرشدهٔ آن مرجعی درخشان است که درآن معادله‌های انتگرالی، تابعهای گرین، وعنوانهای بسیارگوناگون دیگری درفیزیك ریاضی موردبررسی دقیق قرارگرفته است.

Golberg, M. A., Ed., *Solution Methods of Integral Equations*. New York: Plenum Press, 1979.

مجموعه مقالاتی ازیك کنفرانس دربارهٔ معادله‌های انتگرالی؛ فصل اول آن برای دستیابی به‌سمت و سوی مطالب روزآمد وتعداد زیادی مرجع تازه، بسیارعالی است.

Kanwal, R. P., *Linear Integral Equations*, New York: Academic Press, 1971.

این کتاب حاوی یك بررسی مشروح ولی خواندنی دربارهٔ شگردهای گوناگون برای حل معادله‌های انتگرالی خطی است.

Morse, P. M., and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*. New York: McGraw-Hill, 1953.

مخصوصاً فصل ۷ این کتاب، حاوی مبحث کامل و مشروحی دربارهٔ تابعهای‌گرین از دیدگاه ریاضی فیزیك است. ولی، دقت کنید که مورس و فشباخ غالباً به جای $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ که ما برگزیدیم، چشمهٔ $4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ را انتخاب می‌کنند. دراین‌کتاب به‌ناحیه‌های محدودتوجه زیادی معطوف شده است.

Stakgold, I., *Green's Functions and Boundary Value Problems*. New York: Wiley, 1979.

مراجع

Byron, F. W., Jr., and R. W. Fuller, *Mathematics of Classical and Quantum Physics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1969.

Miller, K. S., *Linear Differential Equations in the Real Domain*, New York: Norton, 1963.

Titchmarsh, E.C., *Eigenfunction Expansions Associated with Second Order Differential Equations*. London: Oxford University Press, Vol. I, 2nd ed., 1962, Vol. II, 1958.

۱۷

حساب وردشها

موارد استفادهٔ حساب وردشها

پیش از ورود به‌این شاخهٔ نو و نسبتاً متفاوت ریاضی فیزیك، برخی کاربردهای آن را در ریاضیات وفیزیك جمعبندی می کنیم.

۱. استخوانبندی نظریه‌های فیزیکی موجود را عوامل زیر تشکیل می‌دهند:
الف) وحدت حوزه‌های‌گوناگون فیزیك ــ بااستفاده ازانرژی به‌عنوان یك‌مفهوم کلیدی.
ب) آسان بودن تحلیل ــ معادلات لاگرانژ، بخش ۳.۱۷.
ج) واردکردن‌آسان قیدها درآن: بخش ۷.۱۷.

۲. نقطهٔ آغازحوزه‌های پیچیده وجدید فیزیك و مهندسی. خط ژئودزیك، در نسبیت عام، به‌عنوان مسیرکمینهٔ یك پالس نوری درفضای ریمانی خمیده مطرح می‌شود. اصول وردشی درنظریهٔ میدان کوانتومی جدید ظاهر می‌شود. اصول وردشی در نظریهٔ‌کنترل جدید، کاربرد وسیعی یافته است.

۳. وحدت ریاضی. آنالیز وردشی، برهان تمامیت ویژه‌تابعهای اشتورم‌ـلیوویل، فصل ۹، را فراهم وکران پایین ویژه‌مقدارها را تعیین می کند. معادلهٔ انتگرالی هیلبرت‌ـاشمیت، بخش ۴.۱۶، به نتایج مشابهی برای ویژه‌مقدارها و ویژه‌تابعها می‌انجامد.

۴. تکنیکهای محاسبه در بخش ۸.۱۷. محاسبهٔ ویژه‌مقدارها و ویژه‌تابعهای معادلهٔ اشتورم‌ـلیوویل. ویژه‌تابعها و ویژه‌مقدارهای‌معادلهٔ انتگرالی‌را می‌توان بااستفاده ازکوادراتور عددی وتکنیکهای ماتریسی، بخش ۳.۱۶، محاسبه کرد.

۱.۱۷ یك متغیر وابسته و یك متغیر مستقل

مفهوم وردش

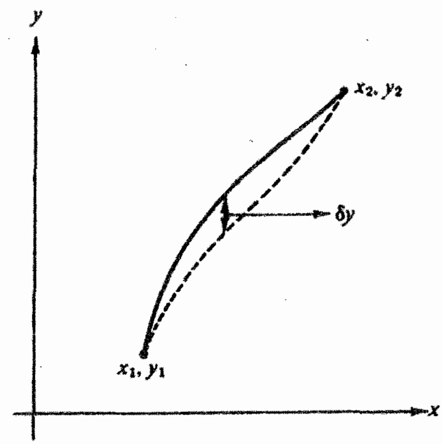
درحساب وردشها بامسائلی سروکار داریم که درآنها کمیتی که باید کمینه (یا بیشینه) شود به صورت یك انتگرال پدیدار می‌شود. به‌عنوان ساده‌ترین حالت، انتگرال زیر را در نظر بگیریم

$$J=\int_{x_1}^{x_2} f(y\,,\, y_x,\, x)\, dx \qquad (۱.۱۷)$$

J کمیتی است که مقدارفرین را می‌پذیرد. f، درزیرعلامت انتگرال، تابع معلومی است‌از متغیرهای مشخص‌شدهٔ $y(x)$، $y_x(x)\equiv dy(x)/dx$ و x؛ ولی بستگی y به x تعیین‌نشده است؛ یعنی، $y(x)$ مجهول است. این نکته بدان معناست که گرچه حدود انتگرال از x_1 تا x_2 است، ولی مسیردقیق انتگرالگیری معلوم‌نیست (شکل ۱.۱۷).

باید مسیرانتگرالگیری ازنقطهٔ (x_1, y_1) تانقطهٔ (x_2, y_2) را طوری برگزینیم که J راکمینه‌کند. به‌عبارت دقیقتر، مقادیرپایای J، یعنی‌کمینه‌ها، بیشینه‌ها، ونقاط زینی را تعیین می‌کنیم. دراکثرمواردی‌که درفیزیك با آنها سروکار پیدا می‌کنیم، این‌مقدارپایا همان مقدار کمینه است.

این مسئله نسبت به‌مسئلهٔ متناظرآن درحساب دیفرانسیل خیلی مشکلتراست. در واقع، ممکن است دراینجا هیچ جوابی وجود نداشته باشد. درمحاسبهٔ مشتقها، کمینه‌را ازطریق مقایسهٔ $y(x_0)$ با $y(x)$، به‌ازای مقادیر مجاور x تعیین می‌کنند. دراینجا فرض می‌کنیم که یك مسیر بهینه وجود دارد، یعنی مسیرقابل قبولی‌که J برای آن پایاست،آنگاه J مربوط به این‌مسیر(مجهول) بهینه‌را با J حاصل ازمسیرهای مجاور مقایسه می‌کنیم. درشکل ۱.۱۷ دو



شکل ۱.۱۷ یك مسیر وردش‌یافته.

مسیر ممکن نشان داده شده است (روشن است که تعداد مسیرهای ممکن نامتناهی است). اختلاف بین این دو مسیر به ازای یك x معین را یك وردش y می‌نامند، و آن را با δy نمایش می‌دهند؛ δy را به طور مناسبی با معرفی یك تابع جدید $\eta(x)$، برای تعریف تغییر شکل دلخواه مسیر، و یك عامل مقیاس α که بزرگی وردش را می‌دهد، توصیف می‌کنند. تابع $\eta(x)$ تابعی اختیاری است به استثنای دو محدودیت زیر. اولا

$$\eta(x_1)=\eta(x_2)=0 \tag{۲.۱۷}$$

یعنی همهٔ مسیرهای وردش یافته باید از دو نقطهٔ انتهایی ثابت بگذرند. دوم اینکه، همچنان که به زودی دیده می‌شود، باید $\eta(x)$ مشتقپذیر باشد، یعنی نمی‌توانیم تابع زیر را به کار بریم

$$\begin{aligned}\eta(x)&=1, \quad x=x_0\\ &=0, \quad x\neq x_0\end{aligned} \tag{۳.۱۷}$$

ولی می‌توانیم تابعی مانند $\eta(x)$ اختیار کنیم که به نحوی شبیه به تابعی باشد که برای نمایش تابع دلتای دیراك به کار بردیم (فصلهای ۸ و ۱۶)، به طوری که $\eta(x)$ فقط در یك ناحیهٔ بینهایت کوچك غیر صفر باشد.[1] در این صورت، مسیری که با α و $\eta(x)$ توصیف می‌شود عبارت است از

$$y(x,\alpha)=y(x,0)+\alpha\eta(x) \tag{۴.۱۷}$$

و

$$\delta y=y(x,\alpha)-y(x,0)=\alpha\eta(x) \tag{۵.۱۷}$$

$y(x,\alpha=0)$ را همان مسیر مجهولی می‌گیریم که J را کمینه می‌کند. در این صورت $y(x,\alpha)$ یك مسیر مجاور آن خواهد بود. اکنون J در معادلهٔ (۱.۱۷) تابعی[2] است از پارامتر جدید α

$$J(\alpha)=\int_{x_1}^{x_2} f[y(x,\alpha),\ y_x(x,\alpha),\ x]\,dx \tag{۶.۱۷}$$

و شرط مقدار فرین آن است که

---

۱. برای بحث جامعتری در این خصوص به فصل ۱۰ کتاب زیر مراجعه کنید

Jeffreys, H., and B. S. *Methods of Mathematical Physics*, 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press (1966).

۲. به زبان حرفه‌ای ریاضی، J تابعی است وابسته به توابع $y(x,\alpha)$ و $y_x(x,\alpha)$، یعنی $J[y(x,\alpha), y_x(x,\alpha)]$.

$$\left[\frac{\partial J(\alpha)}{\partial x}\right]_{\alpha=0}=0 \tag{۷.۱۷}$$

که به‌صفرشدن مشتق، dy/dx، درمحاسبهٔ مشتقها شبیه است.

اکنون وابستگی انتگرال به α ازطریق $y(x,\alpha)$ و $y_x(x,\alpha)=(\partial/\partial\alpha)y(x,\alpha)$ است. بنابراین[1]

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial\alpha}=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial y_x}\frac{\partial y_x}{\partial\alpha}\right]dx \tag{۸.۱۷}$$

ازمعادلهٔ (۴.۱۷) داریم

$$\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial\alpha}=\eta(x) \tag{۹.۱۷}$$

$$\frac{\partial y_x(x,\alpha)}{\partial\alpha}=\frac{d\eta(x)}{dx} \tag{۱۰.۱۷}$$

معادلهٔ (۸.۱۷) به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial\alpha}=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x)+\frac{\partial f}{\partial y_x}\frac{d\eta(x)}{dx}\right)dx \tag{۱۱.۱۷}$$

باانتگرالگیری جزء به‌جزء ازجملهٔ دوم، خواهیم داشت

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{d\eta(x)}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x}dx=\eta(x)\frac{\partial f}{\partial y_x}\Big|_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x}dx \tag{۱۲.۱۷}$$

جزءانتگرالگیری‌شده بااستفاده ازمعادلهٔ (۲.۱۷) صفرمی‌شود، ومعادلهٔ (۱۱.۱۷) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x}\right]\eta(x)\,dx=0 \tag{۱۳.۱۷}$$

α را دراین معادله صفرمی‌گیریم، ودرنتیجه دیگرجزئی ازمسئله نیست.

گهگاه به‌مواردی‌برمی‌خوریم که معادلهٔ (۱۳.۱۷) در α ضرب می‌شود وبه‌رابطهٔ زیر می‌رسیم

---

۱. دقت‌کنیدکه با y و y_x به‌صورت دومتغیر مستقل ازهم عمل کرده‌ایم.

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\,\frac{\partial f}{\partial y_x}\right)\delta y\,dx=\alpha\left[\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0} \tag{۱۴.۱۷}$$
$$=\delta J=0$$

از آنجاکه $\eta(x)$ اختیاری است (قبلا هم گفتیم)، می‌توانیم آن‌را طوری انتخاب کنیم که هر جا عبارت داخل پرانتز غیرصفر بود، با $\eta(x)$ هم علامت باشد. در نتیجه انتگرالده همواره نامنفی خواهد بود. دراین‌صورت معادلهٔ (۱۳.۱۷)، که شرط وجود یك مقدار پایا برای J است، تنها وقتی برقرار است که جملهٔ داخل پرانتزخود باصفر متحد باشد. در نتیجه شرط وجود یك مقدارپایا، معادلهٔ دیفرانسیل جزء به‌جزء زیر به‌شمارمی‌آید[1]

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\,\frac{\partial f}{\partial y_x}=0 \tag{۱۵.۱۷}$$

این معادله‌را، که به‌آن معادلهٔ اویلرمی‌گویند، به‌صورتهای دیگری نیزمی‌توان نوشت.

صورتهای دیگرمعادلهٔ اویلر

صورت دیگراین معادله (مسئلهٔ ۱.۱.۱۷) که غالباً هم مفید است، عبارت خواهد بوداز

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{d}{\partial x}\left(f-y_x\frac{\partial f}{\partial y_x}\right)=0 \tag{۱۶.۱۷}$$

درمسائلی که‌در آنها $f=f(y,\ y_x)$، یعنی x به‌طورصریح‌واردنمی‌شود، معادلهٔ (۱۶.۱۷) به‌صورت زیرساده می‌شود

$$\frac{d}{dx}\left(f-\ y_x\,\frac{\partial f}{\partial y_x}\right)=0 \tag{۱۷.۱۷}$$

یا

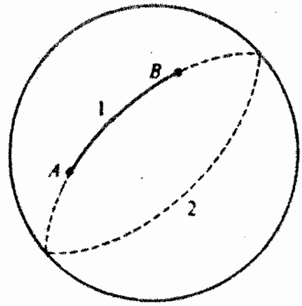
$$f-y_x\frac{\partial f}{\partial y_x}=\text{const.} \tag{۱۸.۱۷}$$

---

۱. این نکته مهم است که معنای $\partial/\partial x$ و d/dx را دقیقاً در نظر داشته باشیم. مثلا، اگر $f=f[y(x),\ x]$، آنگاه،

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{dy}\frac{dy}{dx}$$

جمله‌اول سمت راست نمایانگر وابستگی صریح به‌x وجملهٔدوم نشان‌وابستگی ضمنی به x است.



شکل ۲۰۱۷ مسیرهای پایا روی یك کره.

روشن است که برای آنکه J یك مقدار پایا بهخود بگیرد، یعنی برای اینکه معادلهٔ (۱۴۰۱۷) برقرار باشد، باید معادلهٔ (۱۵۰۱۷) یا (۱۶۰۱۷) برقرار باشد. معادلهٔ (۱۵۰۱۷) شرط لازم است ولی بههیچ وجه کافی نیست.[1] کوران و رابینز، بادرنظر گرفتن فاصلهٔ بین دونقطهٔ A و B روی کره، این نکته را، درشکل ۲۰۱۷، بهنحومطلوبی نمایش دادهاند. بااستفاده ازمعادلهٔ (۱۵۰۱۷) مسیر (۱)، که روی یك دایرهٔ عظیمه واقع است، بهدست میآید. ولی مسیر (۲)، یعنی بقیهٔ دایرهٔ عظیمهایکه از A و B میگذرد، نیزدرمعادلهٔ اویلر صدق میکند. مسیر (۲) یك بیشینهاست ولی تنها بااین شرط که مسیر فوق لزوماً یك دایرهٔ عظیمه باشد و تازهآن هم بهشرطیکه مسیرهای کوتاهتر ازیك دایرهٔکامل را درنظر داشته باشیم؛ یعنی مسیر (۲)$+n$ دورکاملهم جواب معادلهٔ اویلراست. اگرنیازی نباشدکه مسیر یك دایرهٔ عظیمه باشد، هرانحرافی ازمسیر (۲)، طولرا افزایش میدهد. اینخواص مشکل میتواند مربوط بهیك بیشینهٔ موضعی باشد، وبههمین دلیل باید خواص جوابمعادلهٔ (۱۵۰۱۷)را بیازماییم تاببینیم درشرایط فیزیکی مسئلهٔ مورد بررسی صدق میکند یانه.

مسائل

۱۰۱۰۱۷ نشان دهیدکه دوصورت معادلهٔ اویلر، بهشرح زیر، معادلاند

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_x}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{d}{dx}\left(f-y_x\frac{\partial f}{\partial y_x}\right)=0$$

---

۱. برای بحث دربارهٔ شرایط کافی درحساب وردشها وتدوینآن بهعنوان بخشیازریاضیات نوین بهکتاب زیررجوع کنید

Ewing, G. M., *Calculus of Variations With Applications*, Norton. New York, 1969.

سیگان هم شرایط کافیرا مورد بحث قرارمیدهد (این مرجع درفهرست مراجع انتهای اینفصل آمده است).

و

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{d}{dx}\left(f-y_x\frac{\partial f}{\partial y_x}\right)=0$$

۲.۱.۱۷ با استفاده از بسط تایلور (مك‌لورن)، انتگرالده

$$J(\alpha)=\int_{x_1}^{x_2}f[y(x,\alpha),y_x(x,\alpha),x]\,dx$$

بادومتغیر y و y_x، را برحسب توانهای α بسط دهید (بخش ۶.۵)، و ازآنجا معادلهٔ اویلر را استخراج کنید.

یادآوری. شرط پایایی عبارت است از اینکه، به ازای $\alpha=0$ داشته باشیم: $\partial J(\alpha)/\partial\alpha=0$. جمله‌های درجهٔ دوم درتعیین ماهیت جواب پایا (بیشینه،کمینه، یا نقطهٔ زینی) مفید واقع می‌شوند.

۳.۱.۱۷ اگر $f=f(y_{xx},y_x,y,x)$، معادلهٔ اویلر نظیرمعادلهٔ (۱۵.۱۷) را به‌دست آورید.

پاسخ. $\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_{xx}}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_x}\right)+\frac{\partial f}{\partial y}=0$

به‌ازای $\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$ ،$\eta_x(x_1)=\eta_x(x_2)=0$.

۴.۱.۱۷ $f(y,y_x,x)$، انتگرالده معادلهٔ (۱.۱۷) به‌صورت زیر است

$$f(y,y_x,x)=f_1(x,y)+f_2(x,y)y_x$$

(الف) نشان دهید که معادلهٔ اویلر به‌رابطهٔ زیرمی‌انجامد

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial x}=0$$

(ب) این جواب چه تأثیری بر وابستگی انتگرال J به‌انتخاب مسیر دارد؟

۵.۱.۱۷ نشان دهید این شرط که

$$J=\int f(x,y)\,dx$$

یك مقدارپایا داشته باشد

(الف) به‌این جواب منجر می‌شود که $f(x,y)$ مستقل از y است، و

(ب) هیچ اطلاعی دربارهٔ وابستگی به x بهدست نمی‌دهد.
هیچ جوابی (که پیوسته ومشتقپذیر باشد) به‌دست نمی‌آوریم. در نتیجه برای آنکـه مسئلهٔ وردشی معناداری داشته باشیم، وجود وابستگی به y_x یامشتقهای بالاتر نقش اساسی دارد.

یادآوری. وقتی که قیود را وارد مسئله کنیم وضعیت عوض خواهدشد(بامسئلهٔ ۷.۷.۱۷ مقایسه کنید).

۲.۱۷ کاربردهای معادلهٔ اویلر

مثال ۱.۲.۱۷ خط مستقیم

شاید ساده‌ترین کاربرد معادلهٔ اویلر تعیین کوتاهترین فاصلهٔ بین دونقطه در صفحهٔ xy است. عنصر فاصله عبارت است از

$$ds=[(dx)^{۲}+(dy)^{۲}]^{۱/۲}=[۱+y_x^{۲}]^{۱/۲}\,dx \qquad (۱۹.۱۷)$$

ازاین‌رو فاصلهٔ J را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$J=\int_{x_۱,y_۱}^{x_۲,y_۲} ds=\int_{x_۱}^{x_۲}[۱+y_x^{۲}]^{۱/۲}\,dx \qquad (۲۰.۱۷)$$

ازمقایسه بامعادلهٔ (۱.۱۷) نتیجه می‌گیریم

$$f(y,\ y_x,\ x)=(۱+x_x^{۲})^{۱/۲} \qquad (۲۱.۱۷)$$

با نشاندن درمعادلهٔ (۱۶.۱۷)، خواهیم داشت

$$-\frac{d}{dx}\left[\frac{۱}{(۱+y_x^{۲})^{۱/۲}}\right]=۰ \qquad (۲۲.۱۷)$$

یا

$$\frac{۱}{(۱+y_x^{۲})^{۱/۲}}=C,\ \text{مقدار ثابت} \qquad (۲۳.۱۷)$$

جواب زیردراین معادله صدق می‌کند

$$y_x=a \quad \text{یك مقدارثابت دیگر} \qquad (۲۴.۱۷)$$

و

$$y=ax+b \qquad (۲۵.۱۷)$$

که معادلهٔ آشنای یك‌خط مستقیم است. روشن‌است‌که ثابتهای a و b را چنان اختیار می‌کنند که این‌خط ازدو نقطهٔ $(x_۱\,,\ y_۱)$ و $(x_۲,\ y_۲)$ بگذرد. درنتیجه، معادلهٔ اویلر پیش‌بینی‌می‌کند

که کوتاهترین[1] فاصلهٔ بین دو نقطهٔ ثابت، یک‌خط مستقیم است.

تعمیم این مسئله به‌فضا-زمان چهاربعدی خمیده، به‌یکی ازمفاهیم مهم نسبیت، خط ژئودزیک، منجر می‌شود.

مثال ۲.۲.۱۷ حباب صابون

به‌عنوان یک مثال دیگر، سطح دواری‌را درنظر بگیرید که ازدوران منحنی $y(x)$ حول‌محور x تولید می‌شود (شکل ۳.۱۷). این منحنی بایدازدو نقطهٔ انتهایی ثابت (x_1, y_1) و (x_2, y_2) بگذرد. مسئلهٔ وردشی به‌این‌صورت است که $y(x)$ چنان اختیارشودکه مساحت سطح‌حاصل کمینه شود.

برای عنصرمساحتی که درشکل ۳.۱۷ نشان داده‌شده است، داریم

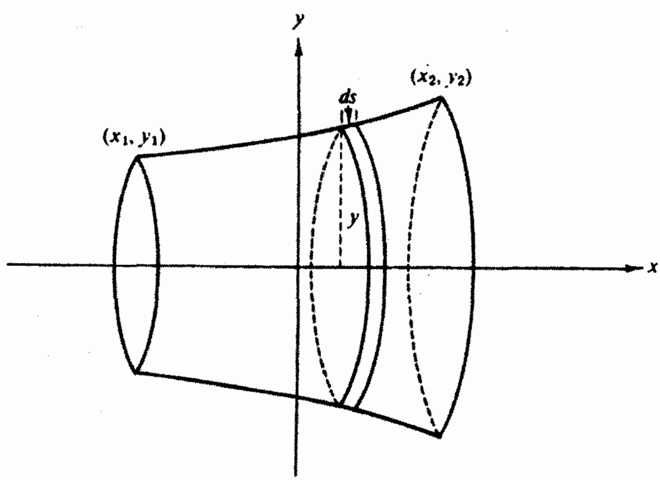
$$dA = 2\pi y\, ds = 2\pi y(1+y_x^2)^{1/2} dx \qquad (۲۶.۱۷)$$

بنابراین معادلهٔ وردشی به‌صورت زیر است

$$J = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y(1+y_x^2)^{1/2} dx \qquad (۲۷.۱۷)$$

باچشمپوشی از 2π، داریم

$$f(y, y_x, x) = y(1+y_x^2)^{1/2} \qquad (۲۸.۱۷)$$



شکل ۳.۱۷ سطح دوار–مسئلهٔ حباب صابون.

1. به‌تعبیر تکنیکی، یک مقدارپایا داریم. ازجملهٔ α^2 پی می‌بریم که این مقدارپایا یک کمینه است (مسئلهٔ ۲.۱.۱۷).

ازآنجا که $\partial f/\partial x=0$، می‌توانیم معادلهٔ (۱۸.۱۷) را مستقیماً به‌کار بریم و در نتیجه

$$y(1+y_x^2)^{1/2}-yy_x^2\frac{1}{(1+y_x^2)^{1/2}}=c_1 \qquad (۲۹.۱۷)$$

یا

$$\frac{y}{(1+y_x^2)^{1/2}}=c_1 \qquad (۳۰.۱۷)$$

به‌توان دو می‌رسانیم وداریم

$$\frac{y^2}{1+y_x^2}=c_1^2 \quad (c_1^2\leqslant y^2_{\min}) \qquad (۳۱.۱۷)$$

و

$$(y_x)^{-1}=\frac{dx}{dy}=\frac{c_1}{\sqrt{y^2-c_1^2}} \qquad (۳۲.۱۷)$$

ازاین عبارت می‌توان انتگرال گرفت، درنتیجه

$$x=c_1\cosh^{-1}\frac{y}{c_1}+c_2 \qquad (۳۳.۱۷)$$

این معادله‌را برحسب y حل می‌کنیم

$$y=c_1\cosh\left(\frac{x-c_2}{c_1}\right) \qquad (۳۴.۱۷)$$

و باز c_1 و c_2، بااین شرط که کسینوس هیپربولیك ازنقاط (x_1, y_1) و (x_2, y_2) بگذرد، تعیین می‌شوند. سطح یا مساحت "کمینهٔ" ما یك زنجیر دوار یا زنجیروار است.

حباب صابون ــ مساحت کمینه

درحساب وردشها، برسرراه آدمهای ناآگاه دامهایی نهاده شده‌است (بدخاطر داشته باشید که معادلهٔ اویلر تنها یك‌شرط لازم برای وجود یك جواب مشتقپذیر است. شرایط کافی خیلی پیچیده‌اند. برای دستیابی به‌جزئیات آن به‌مراجع این کتاب مراجعه‌کنید). شاید، بادرنظر گرفتن یك مسئلهٔ فیزیکی بخصوص، مثلا مسئلهٔ مساحت کمینه با $(x_1, y_1)=(-x_0, 1)$ و $(x_2, y_2)=(+x_0, 1)$، بتوان‌برخی ازخطرهای این‌دامهارا بهتر بازشناخت. سطح کمینه، عبارت است ازسطح حباب صابونی که روی دوحلقه، به‌شعاع واحد در $x=\pm x_0$، کشیده می‌شود. مسئله عبارت است ازپیش بینی شکل‌منحنی $y(x)$ که حباب صابون‌به‌خود می‌گیرد.

بامراجعه به‌معادلهٔ (۳۴.۱۷) پی‌می‌بریم که به‌دلیل تقارن‌مسئله $c_2 = 0$. دراین‌صورت

$$y = c_1 \cosh\left(\frac{x}{c_1}\right) \tag{۳۴.۱۷ الف}$$

اگر x_0 را برابر ۱/۲ بگیریم، معادلهٔ زیر را برحسب c_1 به‌دست می‌آوریم

$$1 = c_1 \cosh\left(\frac{1}{2c_1}\right) \tag{۳۵.۱۷}$$

برای این معادله دو جواب به‌دست می‌آوریم؛ $c_1 =$ ۰٫۲۳۵۰ که به‌یك منحنی "گود" می‌انجامد، و $c_1 =$ ۰٫۸۴۸۳ که به‌یك منحنی "صاف" منجر می‌شود. کدام‌یك از این دوجواب کمینه است؟ کدام منحنی متعلق به‌حباب صابون‌است؟ پیش ازپاسخ به‌این پرسشها، وضعیتی فیزیکی‌را درنظر بگیرید که درآن دوحلقه ازیکدیگر دور شده‌اند، به‌طوری که $x_0 = 1$. در این‌صورت، معادلهٔ (۳۴.۱۷ الف) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$1 = c_1 \cosh\left(\frac{1}{c_1}\right) \tag{۳۶.۱۷}$$

که هیچ جواب حقیقی نخواهد داشت! معنی‌فیزیکی این‌حکم آن‌است که همچنان که‌حلقه‌های به‌شعاع واحد ازمبدأ دورمی‌شوند، به‌نقطه‌ای‌می‌رسیم که‌در آن حباب صابون دیگر نمی‌تواند برهرمقطع قائم نیروی‌افقی یکسانی واردکند. تعادل پایدار دیگرممکن نیست. حباب‌صابون می‌ترکد (فرایند بازگشت‌ناپذیر) و روی‌هر حلقه یك‌حباب مسطح تشکیل‌می‌شود (که مساحت کل آن عبارت است از $2\pi =$ ۶٫۲۸۳۲۰۰۰...). این کمیت را جواب ناپیوستهٔ گلداشمیت می‌خوانند.

سؤال بعدی این است که بیشترین مقدار x_0 که به‌یك جواب حقیقی برای معادلهٔ (۳۴.۱۷ الف) می‌انجامد، چقدر است؟[1] باقراردادن $p = c_1^{-1}$، معادلهٔ (۳۴.۱۷ الف) به‌صورت زیردرمی‌آید

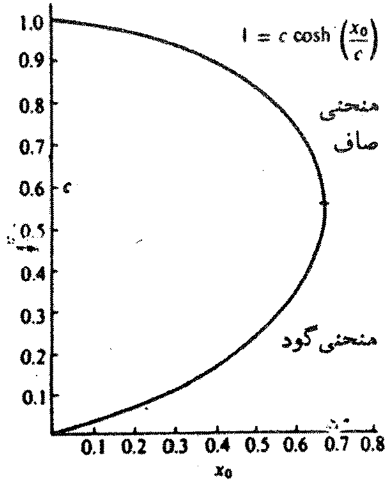
$$p = \cosh p x_0 \tag{۳۷.۱۷}$$

برای یافتن $x_{0\max}$، می‌توانیم x_0 را ازاین معادله به‌دست‌آوریم [مثل معادلهٔ (۳۳.۱۷)]، آنگاه ازآن نسبت به‌p مشتق بگیریم. سرانجام، بادر نظر داشتن شکل ۴.۱۷، dx_0/dp را صفرمی‌گیریم. اما می‌توان از معادلهٔ (۳۷.۱۷) مستقیماً نسبت به‌p مشتق گرفت، درنتیجه

$$1 = \sinh p x_0 [x_0 + p\, dx_0/dp]$$

---

۱. ازدیدگاهی عددی، وارون‌کردن مسئله آسانتراست. ابتدا یك مقدار c_1 اختیار، آنگاه x_0 مربوط به‌آن‌را حساب کنیم. معادلهٔ (۳۴.۱۷ الف) به‌صورت $x_0 = c_1 \cosh^{-1}(1/c_1)$ درمی‌آید. این معادله درگسترهٔ $0 < c_1 \leqslant 1$ دارای جوابهای عددی است.



شکل ۴.۱۷ جوابهای معادلهٔ (۳۴.۱۷ الف) برای حلقه‌های به‌شعاع واحد در $x=\pm x_0$.

شرط صفر بودن $dx_{\circ}/dp$ به‌معادلهٔ زیرمی‌انجامد

$$1 = x_{\circ} \sinh px_{\circ} \qquad (۳۸.۱۷)$$

معادله‌های (۳۷.۱۷) و(۳۸.۱۷) را می‌توان ترکیب کرد ومعادلهٔ زیر را به‌دست‌آورد

$$px_{\circ} = \coth px_{\circ} \qquad (۳۹.۱۷)$$

ریشهٔ این معادله عبارت است از

$$px_{\circ} = ۱٫۱۹۹۷ \qquad (۴۰.۱۷)$$

با نشاندن درمعادله‌های (۳۷.۱۷) یا (۳۸.۱۷) خواهیم داشت

$$p = ۱٫۸۱۰ \quad c_1 = ۰٫۵۵۲۴ \qquad (۴۱.۱۷)$$

و

$$x_{\circ\max} = ۰٫۶۶۲۷ \qquad (۴۲.۱۷)$$

به‌مسئلهٔ حل معادلهٔ(۳۵.۱۷) برمی‌گردیم، که حباب‌صابون‌را توصیف می‌کند.مساحت متناظر با هرجواب را حساب می‌کنیم. داریم

$$A = ۴\pi \int_{\circ}^{x_{\circ}} y(1+y_x^2)^{1/2}\, dx = \frac{۴\pi}{c_1}\int_{\circ}^{x_{\circ}} y^2 dx \quad [\text{به‌اعتبار معادلهٔ}\,(۳۰.۱۷)]$$

$$= ۴\pi c_1 \int_{\circ}^{x_{\circ}} \left(\cosh\frac{x}{c_1}\right)^2 dx \qquad (۴۳.۱۷)$$

$$= \pi c_1^2 \left[\sinh\left(\frac{2x_{\circ}}{c_1}\right) + \frac{2x_{\circ}}{c_1}\right]$$

معادلهٔ (۳۵.۱۷) به‌ازای $x_0 = (۱/۲)$ به‌نتایج زیر منجر می‌شود

$$c_1 = ۰٫۲۳۵۰ \rightarrow A = ۶٫۸۴۵۶$$

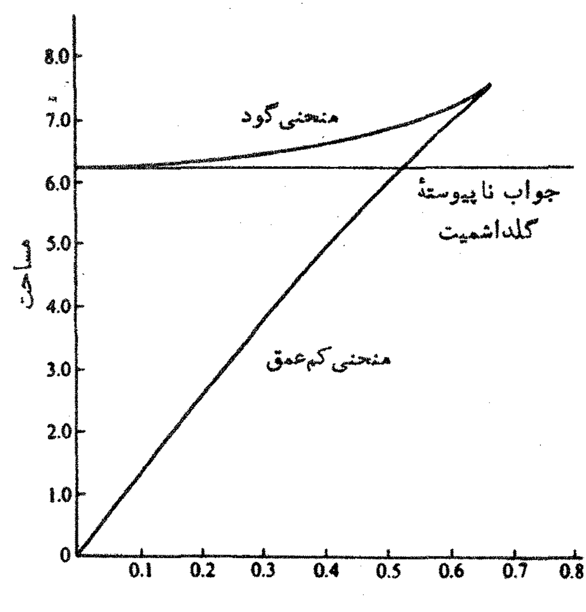
$$c_1 = ۰٫۸۴۸۳ \rightarrow A = ۵٫۹۹۱۷$$

که نشان می‌دهد جواب اول تنها می‌تواند یك کمینهٔ موضعی باشد. بررسی مشروحتر نشان می‌دهد[1] که این سطح حتی‌یك کمینهٔ موضعی هم نیست. حباب صابون به‌ازای $x_0 = (۱/۲)$ توسط منحنی صاف زیر توصیف می‌شود

$$y = ۰٫۸۴۸۳ \cosh\left(\frac{x}{۰٫۸۴۸۳}\right) \qquad (۴۴.۱۷)$$

این زنجیره‌وار (یازنجیر‌ـ‌وار) کم‌عمق یاصاف به‌ازای $۰ \leqslant x_0 < ۰٫۵۲۸$ یك کمینهٔ مطلق است. ولی به‌ازای $۰٫۵۲۸ < x < ۰٫۶۶۲۷$ مساحت آن بیش‌ازمساحت مربوط به‌جواب ناپیوستهٔ گلداشمیت (۶٫۲۸۳۲) بوده و تنها یك کمینهٔ نسبی است (شکل ۵.۱۷).

کوران ورابینز، در خصوص مسائل ریاضی و آزمایشهای مربوط به‌حبابهای صابون بحثی درخشان ارائه می‌کنند.



شکل ۵.۱۷ مساحت زنجیره‌وار (حلقه‌های به‌شعاع واحد در $x = \pm x_0$).

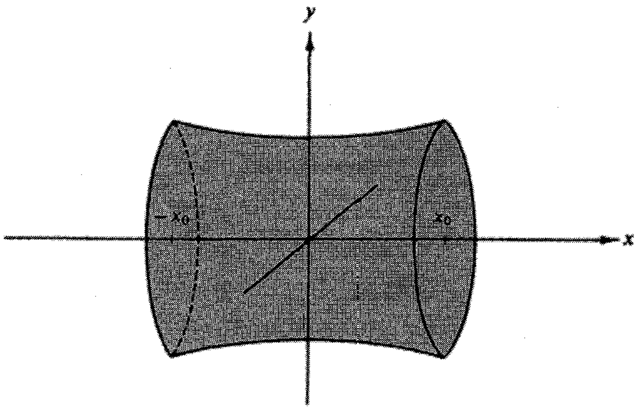
---

۱. مقایسه کنید با:

Bliss, *Calculus of Variations*, Chapter IV.

مسائل

۱۰۲۰۱۷ یك حباب صابون درفضای بین دوحلقه به‌شعاع واحد، عمود برمحور x بامرا کزی واقع در $\pm x_0$، روی محور xها کشیده شده‌است. بااستفاده از جوابی که در بخش ۲.۱۷ به‌دست آمد، معادله‌های غیر جبری مربوط به‌این شرط را به‌دست آورید: x_0 چنان باشدکه مساحت‌سطح خمیدهٔ دواری را استخراج کنیدکه بامساحت‌دوحلقه(جواب ناپیوستهٔ گلداشمیت) برابر باشد. ازآنجا x_0 را به‌دست آورید (شکل ۶.۱۷).



شکل ۶۰۱۷ سطح دوار.

۲۰۲۰۱۷ درمثال ۱۰۲۰۱۷، $J[y(x, \alpha)] - J[y(x, 0)]$ را برحسب توانهای α بسط دهید. جملهٔ خطی برحسب α، به‌معادلهٔ اویلر وجواب خط مستقیم‌معادلهٔ (۲۵.۱۷)می‌انجامد. جملهٔ α^2 را بررسی‌کنید ونشان دهیدکه این‌مقدارپایای J، یعنی فاصله روی خط مستقیم،یك کمینه است.

۳۰۲۰۱۷ (الف) نشان دهیدکه انتگرال

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y_x, x)\, dx$$

به‌ازای $f = y(x)$، هیچ مقدارفرینی ندارد.

(ب) به‌ازای $f(y, y_x, x) = y^2(x)$، یك‌جواب ناپیوسته، شبیه‌به‌جواب گلداشمیت برای مسئلهٔ حباب صابون، پیدا کنید.

۴۰۲۰۱۷ بنابراصل فرما درنورشناخت هرپرتو نوری مسیری مانند $y(x)$ را دنبال می‌کند که برای‌آن مسیر کمیت

$$\int_{x_1, y_1}^{x_2, y_2} n(y, x)\, ds$$

کمینه باشد، در اینجا n ضریب‌شکست است. مسیر پرتو را بـه‌ازای $y_1 = y_2 = 1$ و $x_1 = -x_2 = 1$ برای

(الف) $n = e^y$، (ب) $n = a(y - y_0),\ y > y_0$، را بیابید.

۵۰۲۰۱۷ یك ذرهٔ بدون‌اصطکاك از نقطهٔ A روی کرهٔ زمین، با لغزیدن در یك تونل، به‌نقطهٔ B می‌رود. اگر قرار باشد زمان عبور کمینه باشد، معادلهٔ دیفرانسیلی را بیابید که این کمینه در آن صدق کند.

یادآوری. زمین‌را کره‌ای ناچرخان باچگالی یکنواخت بگیرید.

پاسخ. [معادلهٔ (۱۵۰۱۷)] $r_{\varphi\varphi}(r^3 - ra^2) + r_\varphi^2(2a^2 - r^2) + a^2r^2 = 0$،

$r(\varphi = 0) = r_0$، $r_\varphi(\varphi = 0) = 0$، $r(\varphi = \varphi_A) = a$، $r(\varphi = \varphi_B) = a$

[معادلهٔ (۱۸۰۱۷)] $r_\varphi^2 = \dfrac{a^2r^2}{r_0^2} \cdot \dfrac{r^2 - r_0^2}{a^2 - r^2}$.

جواب این‌معادله‌ها یك‌درون‌چرخزاد است که‌ازطریق‌غلتیدن دایرهٔ به‌شعاع $(1/2)(a - r_0)$ در درون دایرهٔ به‌شعاع a ایجاد می‌شود. خواننده باید نشان‌دهدکه زمان عبورعبارت‌است‌از

$$t = \pi \frac{(a^2 - r_0^2)^{1/2}}{(ag)^{1/2}}$$

برای دستیابی به‌جزئیات به‌مراجع زیر مراجعه‌کنید

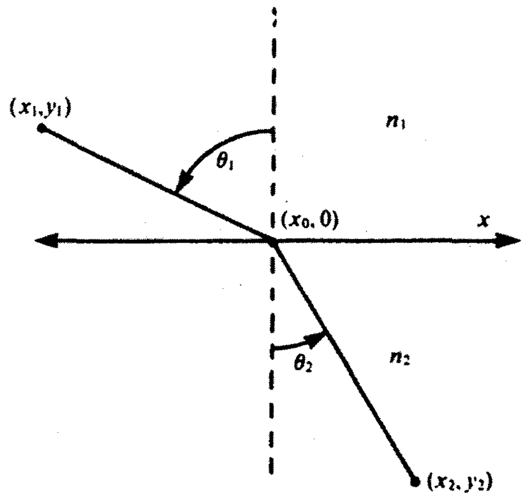
Cooper, P. W., *Am. J. Phys.*, 34, 68 (1966); Venezian et al., G., *Am. J. Phys.* 34, 701–704 (1966).

۶۰۲۰۱۷ پرتوی نوری در یك محیط همگن مسیر راستخطی را طی می‌کند، سپس درفصل مشترك بایك محیط‌دوم شکسته می‌شودومسیر راستخط دیگری‌را دراین محیط دوم‌می‌پیماید. با استفاده ازاصل‌فرما درنورشناخت قانون شکست اسنل را استخراج‌کنید

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

راهنمایی. نقاط (x_1, y_1) و (x_2, y_2) را ثابت فرض‌کنید و x_0 را تغییردهید تادر اصل فرما صدق کنـد (شکل ۷۰۱۷). این یك مسئلهٔ اویلر نیست (مسیر نور در نقطهٔ x_0 مشتقپذیر نیست).

۷۰۲۰۱۷ پیکربندی دیگری برای حباب صابون مربوط به‌حلقه‌های به‌شعاع واحد در نقاط $x = \pm x_0$، شامل یك‌قرص مدور، به‌شعاع a درصفحهٔ $x = 0$، و دو زنجیروار دوار، است که هریك قرص را به‌یکی از حلقه‌ها وصل می‌کند. یکی از این زنجیروارها را می‌توان با رابطهٔ زیر نمایش داد



شکل ۷.۰۱۷

$$y = c_۱ \cosh\left(\frac{x}{c_۱} + c_۲\right)$$

(الف) شرایط مرزی دره $x = $ ودر $x = x_۰$ را اعمال کنید.

(ب) گرچه لازم نیست، ولی بهتراست که فرض کنیم زنجیروارها درمحل اتصالشان بهقرص مرکزی باهم زاویهٔ °۱۲۰ می‌سازند. این شرط مرزی سوم را بهزبان ریاضی بیان کنید.

(ج) نشان دهیدکه مساحت کل زنجیروار بهاضافهٔ قرص مرکزی برابراست با

$$A = c_۱^۲\left[\sinh\left(\frac{۲x_۰}{c_۱} + ۲c_۲\right) + \frac{۲x_۰}{c_۱}\right]$$

یادآوری. اگرچه این پیکربندی حباب صابون عملا تشکیل می‌شود و پایدار است، ولی مساحت آن از مساحت زنجیروار ساده در همهٔ فاصله‌های ممکن برای تشکیل این زنجیروار بیشتر است.

پاسخ. (الف)
$$\left.\begin{aligned} ۱ &= c_۱ \cosh\left(\frac{x_۰}{c_۱} + c_۲\right) \\ a &= c_۱ \cosh c_۲ \end{aligned}\right\}$$

(ب) $\frac{dy}{dx} = \tan ۳۰^\circ = \sinh c_۲.$

۸.۲.۱۷ برای حباب صابونی که در مسئلهٔ ۷.۲.۱۷ توصیف شد (بهصورت عددی) مقدار

بیشینهٔ $x_\circ$ را پیدا کنید.

یادآوری. برای این کار به یک کامپیوتر دستی با توابع هذلولوی یا یک جدول کتانژانت هذلولوی (هیپربولیک) احتیاج دارید.

پاسخ. $x_{\circ\max}=۰٫۴۰۷۸$.

۹.۲.۱۷ ریشهٔ $px_\circ=\coth px_\circ$ [معادلهٔ (۳۹.۱۷)] را بیابید و مقادیر متناظر p و $x_\circ$ [معادله‌های (۴۱.۱۷ و ۴۲)] را تعیین کنید. مقادیر را تا ۵ رقم بامعنی محاسبه کنید.

راهنمایی. از یکی از زیر-برنامه‌های ریشه‌یاب که فهرست آنها در پیوست یک آمده است، استفاده کنید.

۱۰.۲.۱۷ برای مسئلهٔ حباب صابون دو حلقه‌ای در این بخش، $x_\circ$، p، p^{-1}، و A یعنی مساحت حباب صابون را به‌ازای $px_\circ=$ ۰٫۰۰(۰٫۰۲)۱٫۳۰ محاسبه و درجدولی درج کنید.

۱۱.۲.۱۷ آن‌مقدار $x_\circ$ راکه به‌ازای آن مساحت حباب صابون، معادلهٔ (۴۳.۱۷)، برابر ۲π، یعنی جواب ناپیوستهٔ گلداشمیت است (تاپنج رقم بامعنی) به‌دست آورید.

پاسخ. $x_\circ=۰٫۵۲۷۷۰$.

۳.۱۷ تعمیمها، چند متغیر وابسته

مسئلهٔ وردشی‌اصلی، معادلهٔ(۱.۱۷)، را می‌توان ازچندجنبه تعمیم‌داد. دراین بخش،انتگرالده f را تابعی ازچند متغیر وابستهٔ $y_1(x)$، $y_2(x)$، $y_3(x)$، و... درنظرمی‌گیریم که جملگی تابع متغیرمستقل x هستند. دربخش ۴.۱۷، f باردیگرتنها شامل یك تابع مجهول y خواهد بود، ولی y خود تابع چند متغیرمستقل است (که نسبت به‌آنها انتگرال می‌گیریم). دربخش ۵.۱۷ این دوتعمیم‌را ترکیب می‌کنیم. سرانجام دربخش ۷.۱۷ مقدارپایا رایك یاچند قید محدود می‌کند.

معادلهٔ (۱.۱۷) برای بیش ازیك متغیروابسته به‌صورت زیر درمی‌آید

$$J=\int_{x_1}^{x_2} f[y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x), y_{1x}(x), y_{2x}(x), \cdots, y_{nx}(x), x]dx \qquad (۴۵.۱۷)$$

مقدارفرین J را، مانند بخش ۱.۱۷، بامقایسهٔ مسیرهای مجاورتعیین می‌کنیم. داریم

$$y_i(x, \alpha)=y_i(x, 0)+\alpha\eta_i(x), \quad i=1, 2, \cdots, n \qquad (۴۶.۱۷)$$

که درآن η_iها ازیکدیگرمستقل‌اند، ولی همان محدودیتهایی‌که در بخش ۱.۱۷ آمد برآنها

حاکم است. بامشتقگیری ازمعادلهٔ (۴۵.۱۷) نسبت بهα وقراردادن $\alpha=0$، وباتوجه‌به‌اینکه معادلهٔ (۷.۱۷) هنوز برقراراست، خواهیم داشت

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \eta_i + \frac{\partial f}{\partial y_{ix}} \eta_{ix} \right) dx = 0 \qquad (۴۷.۱۷)$$

شاخص پایین x، مشتقگیری نسبت بهxرا نشان می‌دهد؛ یعنی $y_{ix}=dy_i/dx$ وغیره. باز، ازهریك از جملات $(\partial f/\partial y_{ix})\eta_{ix}$ به‌صورت جزء به‌جزء انتگرال می‌گیریم. بخش انتگرالگیری شده حذف می‌شود و معادلهٔ (۴۷.۱۷) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_{ix}} \right) \eta_i dx = 0 \qquad (۴۸.۱۷)$$

ازآنجاکه η_iها اختیاری وازیکدیگر مستقل‌اند،[1] هریك ازجملات این‌مجموع باید مستقلا صفرشوند. داریم

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial (dy_i/dx)} = 0, \qquad i=1,2,\ldots,n \qquad (۴۹.۱۷)$$

مجموعه‌ای ازمعادله‌های اویلر که باید، برای داشتن مقدارفرین، برقرار باشند.

اصل هامیلتون

مهمترین کاربرد معادلهٔ (۴۵.۱۷) وقتی پیش می‌آید که انتگرالده، f، لاگرانژی L باشد. لاگرانژی بنابرتعریف عبارت است از اختلاف بین انرژیهای جنبشی و پتانسیل یك سیستم

$$L \equiv T - V \qquad (۵۰.۱۷)$$

دراینجا به‌جایx، از زمان به‌عنوان متغیر مستقل بهره‌گرفته‌ایم و$x_i(t)$ها متغیرهای‌وابسته‌اند

$$x \to t$$

$$y_i \to x_i(t)$$

$$y_{ix} \to \dot{x}_i(t)$$

$x_i(t)$ مکان و $\dot{x}_i=dx_i/dt$، سرعت‌ذرهٔ iام، به‌صورت تابعی اززمان‌است.معادلهٔ $\delta J=0$ بیان ریاضی اصل هامیلتون درمکانیك‌کلاسیك به‌شمارمی‌آید

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n; t) dt = 0 \qquad (۵۱.۱۷)$$

---

۱. مثلا، می‌توانیم قرار دهیم $\eta_2=\eta_3=\eta_4\ldots=0$ که همهٔ جملات مجموع جز یکی را حذف می‌کند، آنگاه با η_1 درست مانند بخش ۱.۱۷ عمل می‌کنیم.

بنا بر اصل هامیلتون حرکت دستگاه از زمان t_1 تا t_2 به‌صورتی است که در آن انتگرال لاگرانژی L دارای یك مقدار پایا باشد. معادله‌های اویلر حاصل را معمولاً معادله‌های حرکت لاگرانژی می‌نامند

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}-\frac{\partial L}{\partial x_i}=0 \qquad (۵۲.۱۷)$$

این معادله‌های لاگرانژی را می‌توان از معادله‌های حرکت نیوتون و معادله‌های نیوتون را از معادله‌های لاگرانژ استخراج کرد. این دو مجموعه معادله به یك اندازه بنیادی‌اند.

فرمولبندی لاگرانژی نسبت به قوانین رسمی نیوتون مزیتهای بارزی دارد. درحالی که معادله‌های نیوتون، معادلاتی برداری‌اند، می‌بینیم که معادله‌های لاگرانژ تنها کمیتهای نرده‌ای‌را در برمی‌گیرند. نیازی نیست که مختصات x_1، x_2، و . . . مجموعهٔ مختصات بخصوصی و یاحتی طول باشند. آنها را می‌توان چنان اختیار کرد که درشرایط فیزیکی مسئله صدق کنند. معادلات لاگرانژ نسبت به‌انتخاب دستگاه مختصات ناوردایند. معادلات نیوتون (به‌صورت مؤلفه‌ای) ناوردا نیستند. درمسئلهٔ ۱۰.۵.۲ نشان داده‌ایم که اگر $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ را در مختصات قطبی کروی تجزیه کنیم، چه‌اتفاقی می‌افتد.

با بهره‌گیری از مفهوم انرژی، به‌آسانی می‌توان فرمولبندی لاگرانژی را از مکانیك به‌حوزه‌هایی بسیار متنوع چون شبکه‌های الکتریکی وسیستمهای آکوستیکی گسترش‌داد. در طی‌مسئله‌ها، معادلات لاگرانژی به الکترومغناطیس هم تعمیم پیدا می‌کنند. از این‌رو، بین زمینه‌های کاملا مجزای فیزیك وحدتی به‌وجود می‌آید. درپدیدآمدن زمینه‌های‌جدید، کوانتش درمکانیك ذره‌ای لاگرانژی، مدلی برای کوانتش میدانهای الکترومغناطیسی فراهم کرد که به‌نظریهٔ نوین الکترودینامیك کوانتومی انجامید.

یکی ازبا‌ارزشترین مزیتهای اصل هامیلتن ــ یافرمولبندی معادلهٔ لاگرانژ ــ سهولت مشاهدهٔ رابطهٔ بین تقارن وقانون پایستگی‌است. مثلاً، x_i را برابر φ، زاویهٔ سمتی، بگیرید. اگر لاگرانژی مستقل از φ باشد (یعنی φ مختصه‌ای چشم‌پوشیدنی‌باشد) دوپیامد خواهدداشت: (۱) یك‌تقارن‌محوری (چرخشی) داریم،و (۲) ازمعادلهٔ (۵۲.۱۷) داریم: $\partial L/\partial\dot{\varphi}=\text{const}$. از لحاظ فیزیکی‌این‌تعبیرمتناظر است باپایستگی یا ناوردایی یك‌مؤلفهٔ تکانهٔ زاویه‌ای. به‌همین صورت ناوردایی تحت انتقال به‌پایستگی تکانهٔ خطی می‌انجامد. «قضیهٔ نودِر» عبارت‌است‌از تعمیم این ناوردایی (تقارن) یارابطهٔ قانون پایستگی.

مثال ۱.۳.۱۷ ذرهٔ متحرك ــ مختصات دکارتی

معادلهٔ (۵۰.۱۷) را درنظر بگیرید که یك ذره را با انرژی جنبشی زیر توصیف می‌کند

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \qquad (۵۳.۱۷)$$

وانرژی‌پتانسیلش $V(x)$ است، که درآن، نیرومطابق معمول ازگرادیان منفی‌پتانسیل به‌دست می‌آید

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \tag{۵۴.۱۷}$$

بااستفاده ازمعادلهٔ (۵۲.۱۷) داریم

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) - \frac{\partial(-V)}{\partial x} = m\ddot{x} - F(x) = 0 \tag{۵۵.۱۷}$$

که همان قانون دوم نیوتون است.

مثال ۲.۳.۱۷ ذرهٔ متحرك ـ مختصات استوانه‌ای

اکنون حرکت ذره‌ای‌را توصیف می‌کنیم که درصفحهٔ $(z=0)$ مختصات استوانه‌ای‌حرکت می‌کند. انرژی جنبشی عبارت است از

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) \tag{۵۶.۱۷}$$

و V را صفرمی‌گیریم.

تبدیل $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$ به‌مختصات استوانه‌ای را می‌شد بااستفاده از معادلهٔ (۲۸.۲) برای $x(\rho, \varphi)$ و $y(\rho, \varphi)$، ومشتقگیری نسبت به‌زمان و مربع‌کردن‌آن انجام داد. ولی اگر $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$ را به‌صورت v^2 تعبیرکنیم و مؤلفه‌های $\mathbf{v}$ را به‌صورت $\boldsymbol{\rho}_0(ds_\rho/dt) = \boldsymbol{\rho}_0\dot{\rho}$ و غیره‌بنویسیم، این‌کار بسیارآسانترخواهدبود (ds_ρ، افزایش طول است وقتی‌که ρ به‌اندازهٔ $d\rho$ تغییر کند و φ ثابت بماند. به‌بخشهای ۱.۲ و ۴.۲ مراجعه کنید).

ازمعادلهٔ لاگرانژ داریم

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\rho}) - m\rho\dot{\varphi}^2 = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\varphi}) = 0 \tag{۵۷.۱۷}$$

معادلهٔ دوم بیان سادهٔ پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای است. معادلهٔ اول‌را می‌توان‌به‌این‌صورت‌تعبیر کردکه شتاب شعاعی[۱] را بانیروی مرکزگریز مرتبط می‌کند. نیروی مرکزگریز ازاین نظر یك نیروی واقعی است. جالب توجه است که نظریهٔ نسبیت عام نیز مؤیداین تعبیر نیروی مرکزگریز به‌عنوان یك نیروی واقعی است.

---

۱. این روش دیگری است برای حل مسئلهٔ ۸.۴.۲.

مسائل

۱.۳.۱۷ (الف) معادله‌های حرکت متناظر با $L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$ را بنویسید.

(ب) اینکه جواب شما انتگرال $\int_{t_1}^{t_2} L\,dt$ را کمینه می‌کند، چه‌مفهومی دارد؟ نتیجه‌ای راکه به‌دست می‌آورید با $x=\text{const.}$ و $y=\text{const.}$ مقایسه کنید.

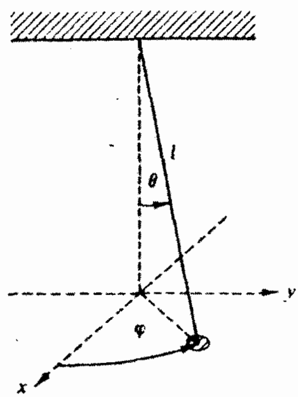
۲.۳.۱۷ با استفاده ازمعادله‌های لاگرانژی حرکت، معادلهٔ (۵۲.۱۷)، نشان‌دهیدکه انرژی پتانسیل سیستمی که درتعادل پایدار باشد، کمینه است.

۳.۳.۱۷ معادلات لاگرانژی حرکت مربوط به‌یك ذره درمختصات کروی‌را برای پتانسیل ثابت V بنویسید. جملات متناظر با: (الف) نیروی مرکزگریز، و (ب) نیروی کوریولیس‌را مشخص کنید.

۴.۳.۱۷ آونگ کروی شامل جرمی‌است که به‌انتهای سیمی به‌طول l بسته شده و می‌توانـد آزادانه زاویهٔ قطبی θ وزاویهٔ سمتی φ خود را تغییر دهد (شکل ۸.۱۷).

(الف) لاگرانژی این سیستم فیزیکی را بنویسید.

(ب) معادله‌های لاگرانژی حرکت‌را پیداکنید.



شکل ۸.۱۷ آونگ کروی.

۵.۳.۱۷ نشان دهیدکه لاگرانژی

$$L=m_0c^2\left(1-\sqrt{1-v^2/c^2}\right)-V(\mathbf{r})$$

به‌شکل نسبیتی قانون دوم حرکت نیوتون، به‌قرار زیر، می‌انجامد

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v_i}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=F_i$$

که در آن $F_i = -\partial V / \partial x_i$.

۶.۳.۱۷ لاگرانژی مربوط به‌ذره‌ای با بار q در یك میدان الکترومغناطیسی که با پتانسیل نرده‌ای φ وپتانسیل برداری $\mathbf{A}$ توصیف می‌شود، عبارت است از

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - q\varphi + q\, \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$$

معادلهٔ حرکت این ذرهٔ باردار را پیداکنید.

راهنمایی. $\dfrac{d}{dt} A_j = \dfrac{\partial A_j}{\partial t} + \sum_i \dfrac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_i$. وابستگی میدانهای نیروی $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ به‌پتانسیلهای φ و $\mathbf{A}$ دربخش ۱۳.۱ آمده است (بامسئلهٔ ۱۰.۱۳.۱ مقایسه‌کنید).

پاسخ. $m\ddot{x}_i = q[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]_i$.

۷.۳.۱۷ سیستمی‌را درنظربگیریدکه لاگرانژی‌آن ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T(q_i, \dot{q}_i) - V(q_i)$$

که درآن q_i و $\dot{q}_i$ مجموعه‌هایی ازمتغیرهارا نمایش می‌دهند. انرژی پتانسیل V از سرعت مستقل است و T و V هیچیك وابستگی زمانی صریحی ندارند.

(الف) نشان دهیدکه

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L\right) = 0$$

(ب) کمیت ثابت

$$\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L$$

هامیلتونی، H، را تعریف می‌کند. نشان دهید که در شرایط مفروض دربند (الف)، $H = T + V$، یعنی H برابراست باانرژی‌کل.

یادآوری. انرژی جنبشی، T، تابع درجه دومی از $\dot{q}_i$هاست.

۴.۱۷ چند متغیرمستقل

گاهی f، انتگرالده معادلهٔ (۱.۱۷)، شامل یك تابع نامعلوم u است که تابعی از چند متغیر مستقل، $u = u(x, y, z)$ برای حالت سه‌بعدی، بشمار می‌آید. معادلهٔ(۱.۱۷) بصورت زیر درمی‌آید

$$J=\iiint f[u,\, u_x,\, u_y,\, u_z,\, x,\, y,\, z]\, dx\, dy\, dz \qquad (۵۸.۱۷)$$

که درآن $u_x = \partial u/\partial x$ وغیره. مسئلهٔ وردشی عبارت است ازیافتن تابع $u(x,\, y,\, z)$ که درآن J پایا باشد

$$\delta J=\alpha \left.\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}=0 \qquad (۵۹.۱۸)$$

با تعمیم بخش ۱.۱۷، قرارمی‌دهیم

$$u(x,\, y,\, z,\, \alpha)=u(x,\, y,\, z,\, 0)+\alpha\eta(x,\, y,\, z) \qquad (۶۰.۱۷)$$

$u(x,y,z,\alpha=0)$ تابعی (نامعلوم) رانمایش می‌دهد که‌معادلهٔ (۵۹.۱۷) به‌ازای آن برقرار می‌ماند، درحالی که $\eta(x,y,z)$، در اینجا نیز انحرافی اختیاری را نشان می‌دهد که تابع وردش یافتهٔ $u(x,\, y,\, z,\, \alpha)$ را توصیف می‌کند. این انحراف $\eta(x,\, y,\, z)$ باید مشتقپذیر باشد ودرنقاط انتهایی‌صفرشود. دراین‌صورت از معادلهٔ (۶۰.۱۷) داریم

$$u_x(x,\, y,\, z,\, \alpha)=u_x(x,\, y,\, z,\, 0)+\alpha\eta_x \qquad (۶۱.۱۷)$$

وبه‌همین‌ترتیب برای u_y و u_z.

بامشتقگیری‌ازانتگرال [معادلهٔ (۵۸.۱۷)] نسبت به‌پارامتر α، وسپس‌قراردادن $\alpha=0$، داریم

$$\left.\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0}=\iiint\left(\frac{\partial f}{\partial u}\eta+\frac{\partial f}{\partial u_x}\eta_x+\frac{\partial f}{\partial u_y}\eta_y+\frac{\partial f}{\partial u_z}\eta_z\right)dx\, dy dz=0 \quad (۶۲.۱۷)$$

دراینجا نیز، ازهریك‌ازجملات $(\partial f/\partial u_i)\eta_i$ انتگرال جزء به‌جزء می‌گیریم. جزء انتگرالگیری شده در نقاط انتهایی صفر می‌شود (زیرا انحراف، η، باید در نقاط انتهایی صفرشود) و[1]

$$\iiint\left(\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u_x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u_y}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial u_z}\right)\eta(x,\, y,\, z)dx\, dy\, dz=0$$

(۶۳.۱۷)

---

۱. بازباید‌مفهوم دقیق مشتقهای جزئی‌را کاملا درك کرد. مخصوصاً درمعادلهٔ (۱۷ ۶۳)، $\partial/\partial x$ ازاین‌نظر که درآن y و z ثابت‌اند، یك مشتق جزئی است، ولی ازاین نظر که هم‌روی وابستگی ضمنی به x عمل می‌کند وهم‌روی وابستگی صریح به x، یك‌مشتق کامل است. یعنی

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial u_x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial u_x}u_x+\frac{\partial^2 f}{\partial u_x^2}u_{xx}+\frac{\partial^2 f}{\partial u_y\partial u_x}u_{xy}+\frac{\partial^2 f}{\partial u_z\partial u_x}u_{xz}$$

ازآنجاکه وردش $\eta(x, y, z)$ اختیاری است، جملهٔ واقع درپرانتز بزرگ بایدصفر باشد. این‌عبارت، معادلهٔ اویلر برای (سه) متغیرمستقل‌را می‌دهد

$$\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u_x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u_y}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial u_z}=0 \qquad (۶۴.۱۷)$$

مثال ۱.۴.۱۷ معادلهٔ لاپلاس

مبحث الکتروستاتیک، نمونه‌ای از این مسئلهٔ وردشی را ارائه می‌کند. انرژی میدان الکتروستاتیکی عبارت است از

$$\text{چگالی انرژی}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2 \qquad (۶۵.۱۷)$$

که درآن $\mathbf{E}$ میدان متداول نیروی الکتروستاتیکی به‌شمار می‌آید. برحسب پتانسیل ایستای φ داریم

$$\text{چگالی انرژی}=\frac{1}{2}\varepsilon(\nabla\varphi)^2 \qquad (۶۶.۱۷)$$

حال این شرط رابرقرار می‌کنیم که انرژی الکتروستاتیکی (مربوط به‌میدان) در یك حجم معین کمینه‌است (شرایط مرزی روی $\mathbf{E}$ و φ را نیز باید برقرارکرد). انتگرال حجمی زیر را داریم[1]

$$J=\iiint(\nabla\varphi)^2\,dx\,dy\,dz$$

$$(۶۷.۱۷)$$

$$=\iiint(\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2)\,dx\,dy\,dz$$

باتابع

$$f(\varphi, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, x, y, z)=\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2 \qquad (۶۸.۱۷)$$

که در آن تابع φ به‌جای u در معادلهٔ (۶۴.۱۷) قرار گرفته است، معادلهٔ اویلر [معادلهٔ (۶۶.۱۷)] به‌صورت زیردرمی‌آید

$$-2(\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\varphi_{zz})=0 \qquad (۶۹.۱۷)$$

---

۱. به‌خاطرداشته باشیدکه شاخص پایین x مشتق جزئی نسبت به x را نشان می‌دهد، نه یکی‌از مؤلفه‌های x را.

یا

$$\nabla^{۲}\varphi(x, y, z)=\circ \qquad (۷۰.۱۷)$$

که همان معادلهٔ لاپلاس درالکتروستاتیك است.

با بررسی دقیقتری پی‌می‌بریم که این‌مقدارپایا درواقع یك‌کمینه است. بنا براین‌شرط کمینه بودن انرژی میدان بەمعادلهٔ لاپلاس می‌انجامد.

مسائل

۱.۴.۱۷ لاگرانژی یك ریسمان مرتعش (ارتعاشهای کم دامنه) عبارت است از

$$L=\int\left(\frac{۱}{۲}\rho u_t^{۲}-\frac{۱}{۲}\tau u_x^{۲}\right)dx$$

که در آن ρ چگالی‌خطی (ثابت) جرم و τ کشش (ثابت) است. انتگرالگیری نسبت به x روی طول ریسمان صورت می‌گیرد. نشان دهیدکه به‌کاربستن اصل هامیلتون دربارهٔ‌چگالی لاگرانژی (انتگرالده)، که در اینجا دو متغیر مستقل دارد، بەمعادلهٔ کلاسیکی موج منجر می‌شود، یعنی

$$\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}=\frac{\rho}{\tau}\frac{\partial^{۲}u}{\partial t^{۲}}$$

۲.۴.۱۷ نشان دهیدکه مقدارپایای انرژی‌کل میدان الکتروستاتیکی در مثال ۱.۴.۱۷ یك کمینه است.

راهنمایی. ازمعادلهٔ (۶۱.۱۷) استفاده و جملهٔ $\alpha^{۲}$ را بررسی‌کنید.

۵.۱۷ بیش از یك متغیروابسته، بیش از یك متغیرمستقل

درمواردی، انتگرالـده f شامل بیش ازیك متغیر وابسته و بیش از یك متغیر مستقل است. فرض‌کنیدکه

$$f=f[p(x, y, z), p_x, p_y, p_z, q(x, y, z), q_x, q_y, q_z, r(x, y, z), r_x, r_y, r_z, x, y, z] \qquad (۷۱.۱۷)$$

مانند قبل بررسی خود را باتوابع زیرشروع می‌کنیم

$$p(x, y, z, \alpha)=p(x, y, z, \circ)+\alpha\xi(x, y, z)$$

$$q(x, y, z, \alpha)=q(x, y, z, \circ)+\alpha\eta(x, y, z) \qquad (۷۲.۱۷)$$

$$r(x, y, z, \alpha)=r(x, y, z, \circ)+\alpha\zeta(x, y, z), \circ$$

بادرنظرداشتن این نکته که ξ، η، و ζ ازهم مستقل‌اند (همان‌طور که η_iها در بخش ۳.۰۱۷ مستقل بودند)، مشتقگیری وسپس انتگرالگیری جزء به‌جزء به‌معادلهٔ

$$\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p_x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial p_y}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial p_z}=\circ \qquad (۷۳.۰۱۷)$$

ومعادله‌های مشابهی برای تابعهای q و r می‌انجامد. بانشاندن y_i به‌جای p، q، r، ... و نشاندن x_j به‌جای x، y، z، ... می‌توانیم معادلهٔ (۷۳.۰۱۷) را به‌صورت فشردهٔ زیربنویسیم

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}-\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial y_{ij}}\right)=\circ, \quad i=۱, ۲, \ldots \qquad (۷۳.۰۱۷ \text{ الف})$$

که در آن

$$y_{ij}\equiv\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$$

کاربردی ازمعادلهٔ (۷۳.۰۱۷) دربخش ۷.۰۱۷ پدیدار می‌شود.

ارتباط با فیزیك

حساب وردشها به‌صورتی‌که تااینجاعنوان‌کردیم، برای‌توصیف پدیده‌های فیزیکی‌گوناگون، مناسب وشاید هم بسی برازنده است. این پدیده‌ها شامل مکانیك معمولی، بخش ۳.۰۱۷؛ مکانیك نسبیتی، مسئلهٔ ۵.۳.۰۱۷؛ الکتروستاتیك، مثال ۱.۴.۰۱۷؛ ونظریهٔ الکترومغناطیس در مسئلهٔ ۱.۵.۰۱۷ است. این تناسب وبرازندگی‌را نباید دست‌کم گرفت، ولی درضمن‌دانشجو باید بداندکه‌درمواردی‌که برشمردیم، حساب‌وردشها، تنها آنچه‌راکه قبلامعلوم بوده‌به‌صورت دیگری توصیف کرده‌است. یعنی فیزیك جدیدی ارائه نکرده است.

برای نظریه‌های ناکامل وتفکر برانگیز نوین فیزیك میدانها وذرات، اوضاع و احوال طور دیگری است. در اینجا اساس فیزیك هنوز هم ناشناخته است و اصول وردشی اصل موضوعی می‌توانند دراین زمینه نقطهٔ شروع مناسبی باشند.

مسائل

۱.۵.۰۱۷ لاگرانژی (به‌ازای واحد حجم) مربوط به‌میدان الکترومغناطیسی بایك‌چگالی‌بار ρ ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$L=\frac{۱}{۲}\left(\varepsilon_\circ E^۲-\frac{B^۲}{\mu_\circ}\right)-\rho\varphi+\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}$$

نشان دهید که معادله‌های لاگرانژ دومعادله از معادلات ماکسول‌را به‌دست‌می‌دهد (دومعادلهٔ دیگر پیامد تعریف $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ برحسب $\mathbf{A}$ و φ هستند). این‌چگالی لاگرانژی از یك عبارت ترده‌ای دربخش ۷.۳ به‌دست می‌آید.

راهنمایی. A_1، A_2، A_3، و φ را متغیرهای وابسته و x، y، z، و t را متغیرهای مستقل بگیرید. $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ به‌کمك معادلهٔ (۱۰۴.۳) برحسب $\mathbf{A}$ و φ داده می‌شوند.

۶.۱۷ مضربهای لاگرانژی

دراین‌بخش بامفهوم قیدآشنا می‌شویم. برای آنکه نحوهٔ عمل ساده‌تر باشد، به‌جای آنکه قید را به‌صورت انتگرالی‌درنظر گیریم، به‌صورت یك تابع‌ساده می‌پنداریم، دراین‌بخش‌حساب وردشها مدنظر نیست، ولی دربخش۷.۱۷، قیدها بامضربهای لاگرانژی نوبنیاد ما درحساب وردشها وارد می‌شوند.

تابعی ازسه متغیرمستقل $f(x, y, z)$ درنظر بگیرید. برای آنکه تابع f بیشینه (یا فرین)[1] شود، باید

$$df=0 \qquad (۷۴.۱۷)$$

شرط لازم وکافی برای داشتن این‌مقدار آن است‌که

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}=0 \qquad (۷۵.۱۷)$$

که درآن

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz \qquad (۷۶.۱۷)$$

درمسائل فیزیکی غالباً برمتغیرهای x، y، z قیدهایی حاکم است، به‌طوری که این متغیرها دیگرمستقل ازهم نیستند. می‌توان، دست‌کم دراصل، ازهرقید برای حذف یك متغیر استفاده‌کرد وسپس به‌حل مسئله بامجموعهٔ جدید وکوچکتری ازمتغیرهای مستقل پرداخت.

استفاده‌ازمضارب لاگرانژی، تکنیك دیگری است‌که هروقت این‌روش حذف‌متغیرها مناسب یامطلوب نباشد می‌توان آن‌را به‌کاربرد. معادلهٔ قیدرا به‌این صورت بگیرید

$$\varphi(x, y, z)=0 \qquad (۷۷.۱۷)$$

ازاین معادله داریم

---

۱. ازجمله یك نقطهٔ زینی چهاربعدی.

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{dx}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz=0 \qquad (۷۸.۱۷)$$

به‌معادلهٔ (۷۴.۱۷) بازمی‌گردیم ومی‌بینیم که دیگرمعادلهٔ (۷۵.۱۷) را نخواهیم‌داشت،زیرا اکنون دیگرفقط دو متغیر مستقل داریم. اگراین دو متغیرمستقل‌را x و y بگیریم، dz دیگر اختیاری‌نیست. اگردومعادلهٔ (۷۶.۱۷) و (۷۸.۱۷)را باهم جمع کنیم، خواهیم داشت

$$df+\lambda\,d\varphi=\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dy+\left(\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)dz=0 \qquad (۷۹.۱۷)$$

مضرب لاگرانژی λ را، با فرض $\partial\varphi/\partial z\neq 0$، چنان اختیارمی‌کنیم که

$$\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0 \qquad (۸۰.۱۷)$$

اینك معادلهٔ (۷۹.۱۷) به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dx=0 \qquad (۸۱.۱۷)$$

ولی dx وdy را اختیاری‌گرفتیم، پس بایدکمیتهای داخل پرانتزها صفرشوند، یعنی

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0$$

$$(۸۲.۱۷)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$$

هرگاه‌معادله‌های (۸۰.۱۷) و(۸۲.۱۷) برقرارباشند، $df=0$ و f فرین است.دقت‌کنید که‌اکنون چهارمجهول داریم: x، y، z، وλ. روشن‌است‌که ازمعادلهٔ قید (۷۷.۱۷)می‌توان به‌عنوان معادلهٔ چهارم استفاده‌کرد. درواقع ما تنها به‌x، y، وz نیازداریم؛ نیازی نیست‌که λ را تعیین کنیم. به‌همین‌دلیل λ را گاهی‌مضرب نامعین لاگرانژی‌می‌نامند. اگرهمهٔ ضریبهای λ درنقطهٔ فرین صفرشوند، یعنی $\partial\varphi/\partial x,\ \partial\varphi/\partial y,\ \partial\varphi/\partial z=0$، این‌روش موفقیت‌آمیز نخواهد بود و λ را دیگرنمی‌توان محاسبه‌کرد.

ممکن‌است خواننده‌پی‌برده باشدکه‌باتوجه به‌شکل معادله‌های (۸۰.۱۷) و(۸۲.۱۷) می‌توانیم fرا تابعی بگیریم‌که تحت قیدφ یك‌مقدارفرین پیدا می‌کند ویا f را قید و φ را تابع بگیریم.

اگر مجموعه‌ای از قیدها، φ_k، داشته باشیم، در این صورت معادله‌های (۸۰.۱۷) و (۸۲.۱۷) به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_k \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}=0, \qquad i=1, 2, \ldots, n$$

و به‌ازای هر قید φ_k یك مضرب لاگرانژی جداگانهٔ λ_k خواهیم داشت.

مثال ۱.۶.۱۷ ذره دریك جعبه

به‌عنوان مثالی از کاربردهای مضارب لاگرانژی، مسئلهٔ کوانتوم مکانیکی ذره‌ای (به‌جرم m) دریك جعبه‌را درنظر بگیرید. جعبه به‌شکل متوازی‌السطوحی‌قائم با یالهای a، b، و c است. انرژی حالت پایهٔ ذره ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$E=\frac{h^2}{8m}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \tag{۸۳.۱۷}$$

می‌خواهیم ببینیم بااین قیدکه حجم جعبه ثابت‌باشد، یعنی

$$V(a, b, c)=abc=k \tag{۸۴.۱۷}$$

شکل جعبه چگونه باشد تا انرژی E کمینه شود.

بنابراین $f(a, b, c)=E(a, b, c)$ و $\varphi(a, b, c)=abc-k=0$، وداریم

$$\frac{\partial E}{\partial a}+\lambda\frac{\partial V}{\partial a}=-\frac{h^2}{4ma^3}+\lambda bc=0 \tag{۸۵.۱۷}$$

همچنین

$$-\frac{h^2}{4mb^3}+\lambda ac=0$$

$$-\frac{h^2}{4mc^3}+\lambda ab=0$$

عبارت اول‌را در a، دومی‌را در b، وسومی‌را در c ضرب می‌کنیم، وداریم

$$\lambda abc=\frac{h^2}{4ma^2}=\frac{h^2}{4mb^2}=\frac{h^2}{4mc^2} \tag{۸۶.۱۷}$$

بنابراین پاسخ ما چنین خواهد بود

$$a=b=c \quad \text{یك مکعب} \tag{۸۷.۱۷}$$

توجه کنید که λ تعیین نشده است، و به‌صورت یک‌مضرب نامعین باقی می‌ماند.

مثال ۲.۶.۱۷ رآکتور هسته‌ای استوانه‌ای

در نظریهٔ رآکتور هسته‌ای به‌مثال دیگری از کاربرد مضرب لاگرانژی برمی‌خوریم. فرض کنید که قرار باشد یک رآکتور هسته‌ای (گرمایی) به‌شکل استوانهٔ قائم دواری به‌شعاع R و ارتفاع H باشد. نظریهٔ پخش نوترونها قید زیر را ایجاب می‌کند[1]

$$\varphi(R, H)=\left(\frac{۲٫۴۰۴۸}{R}\right)^{۲}+\left(\frac{\pi}{H}\right)^{۲}=\text{const.} \qquad (۸۸.۱۷)$$

می‌خواهیم حجم این رآکتور را که به‌قرار زیر است، کمینه کنیم

$$f(R, H)=\pi R^{۲} H \qquad (۸۹.۱۷)$$

با بهره‌گیری از معادلهٔ (۸۲.۱۷) خواهیم داشت

$$\frac{\partial f}{\partial R}+\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial R}=۲\pi R H-۲\lambda \frac{(۲٫۴۰۴۸)^{۲}}{R^{۳}}=۰$$

$$(۹۰.۱۷)$$

$$\frac{\partial f}{\partial H}+\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial H}=\pi R^{۲}-۲\lambda \frac{\pi^{۲}}{H^{۳}}=۰$$

معادلهٔ اول‌را در $R/۲$ و دومی‌را در H ضرب می‌کنیم، و داریم

$$\pi R^{۲} H=\lambda \frac{(۲٫۴۰۴۸)^{۲}}{R^{۲}}=\lambda \frac{۲\pi^{۲}}{H^{۲}} \qquad (۹۱.۱۷)$$

یا کمینهٔ حجم رآکتوری به‌شکل استوانهٔ قائم دوار عبارت است از

$$H=\frac{\sqrt{۲}\pi R}{۲٫۴۰۴۸}=۱٫۸۴۷R \qquad (۹۲.۱۷)$$

به‌عبارت دقیقتر، ما تنها یک نقطهٔ فرین‌را یافته‌ایم. تعیین هویت آن به‌عنوان یک کمینه ازطریق بررسی معادله‌های اصلی صورت می‌گیرد.

مسائل

مسائل زیر را بااستفاده از مضربهای لاگرانژی حل کنید.

---

۱. ۲٫۴۰۴۸ کوچکترین ریشهٔ تابع بسل $J_{۰}(R)$ است (بابخش 1.11 مقایسه کنید).

۱۰۶۰۱۷ انرژی حالت پایهٔ یك ذره در جعبه‌ای به‌شکل استوانهٔ قائم دوار از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$E=\frac{\hbar^{۲}}{۲m}\left(\frac{(۲٫۴۰۴۸)^{۲}}{R^{۲}}+\frac{\pi^{۲}}{H^{۲}}\right)$$

که درآن R شعاع و H ارتفاع استوانه‌است. نسبت R به H را چنان بیابید که به‌ازای یك حجم ثابت انرژی کمینه شود.

۲۰۶۰۱۷ برای استوانهٔ قائم دواری باحجم ثابت، نسبت R (شعاع) به H (ارتفاع) را چنان پیداکنیدکه مساحت سطح کل آن کمینه شود.

۳۰۶۰۱۷ ادارهٔ پست امریکا ارسال سریع بسته‌های پستی به‌کانادا را منحصر به‌بسته‌هایی می‌کندکه ارتفاع آنها به‌اضافهٔ محیط قاعده‌شان برابر ۳۶ اینچ باشد. بااستفاده از مضرب لاگرانژی، بیشینهٔ حجم و ابعاد یك بسته (به‌شکل متوازی‌السطوح قائم) را، تحت این قید، پیداکنید.

۴۰۶۰۱۷ یك رآکتور هسته‌ای گرمایی تحت قید زیر قرار دارد

$$\varphi(a, b, c)=\left(\frac{\pi}{a}\right)^{۲}+\left(\frac{\pi}{b}\right)^{۲}+\left(\frac{\pi}{c}\right)^{۲}=B^{۲}, \quad \text{مقداری ثابت}$$

نسبت اضلاع یك رآکتور به‌شکل متوازی‌السطوح قائم باحجم کمینه را به‌دست آورید.

پاسخ. یك مکعب $a=b=c$.

۵۰۶۰۱۷ برای عدسی ساده‌ای بافاصلهٔ کانونی f، فاصله تا شیء، p، و فاصله تا تصویر، q، ازطریق رابطهٔ $۱/p+۱/q=۱/f$ بایکدیگرمربوط می‌شوند.

مقدارکمینهٔ فاصلهٔ شیء تا تصویر $(p+q)$ را به‌ازای مقدار ثابت f پیداکنید (شیء وتصویر را حقیقی بگیرید؛ p و q هردو مثبت‌اند).

۶۰۶۰۱۷ یك بیضی به‌معادلهٔ: $(x/a)^{۲}+(y/b)^{۲}=۱$ در اختیار داریم. مستطیل محاطی آن باحداکثر مساحت را تعیین‌کنید. نشان دهید که نسبت بیشینهٔ مساحت مستطیل به‌مساحت بیضی برابراست با: $(۲/\pi)=۰٫۶۳۶۶$.

۷۰۶۰۱۷ متوازی‌السطوح راستگوشه‌ای درون بیضیواری با نیم‌محورهای a، b، و c محاط شده است. بیشینهٔ حجم این‌متوازی‌السطوح محاطی را به‌دست آورید. نشان دهیدکه نسبت حجم بیشینه به‌حجم بیضیوار برابراست با: $۲/\pi\sqrt{۳}\approx ۰٫۳۶۸$.

۸.۶.۱۷ شعاع یك كرهٔ تغییرشكل‌یافته از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$r = r_\circ\{\alpha_\circ + \alpha_۲ P_۲(\cos\theta)\}$$

که‌در آن $\alpha_\circ \approx ۱$ و $\alpha_۲ \approx \circ$. بااستفاده‌ازمسئلهٔ ۴.۵.۱۲ مساحت وحجم این کره عبارت‌اند از:

$$A = ۴\pi r_\circ^۲ \alpha_\circ^۲\left\{۱ + \frac{۴}{۵}\left(\frac{\alpha_۲}{\alpha_\circ}\right)^۲\right\}$$

$$V = \frac{۴\pi r_\circ^۳}{۳}\,\alpha_\circ^۳\left\{۱ + \frac{۳}{۵}\left(\frac{\alpha_۲}{\alpha_\circ}\right)^۲\right\}$$

از جمله‌های با مرتبهٔ $\alpha_۲^۳$ صرفنظرشده است.

(الف) بااین قیدکه حجم ثابت باشد، یعنی $V = ۴\pi r_\circ^۳/۳$، نشان دهیدکه سطح‌مرزی باکمترین مساحت یك کره‌است (یعنی $\alpha_\circ = ۱$ و $\alpha_۲ = \circ$).

(ب) بااین قیدکه مساحت سطح مرزی ثابت باشد، یعنی $A = ۴\pi r_\circ^۲$، نشان دهیدکه حجم وقتی بیشینه است که سطح به‌صورت کره باشد.

۹.۶.۱۷ مقدار بیشینهٔ مشتق جهتیِ $\varphi(x, y, z)$، یعنی

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma$$

را تحت قید زیر به‌دست آورید

$$\cos^۲\alpha + \cos^۲\beta + \cos^۲\gamma = ۱$$

پاسخ. $\left(\frac{d\varphi}{ds}\right) = |\nabla\varphi|$.

درمسائل زیر به‌این نکات توجه کنید:

دریك سیستم کوانتوم مکانیکی، بین انرژیهای E_i و $E_i + dE_i$، تعداد y_i حالت کوانتومی متمایزوجود دارد. مسئله عبارت‌است ازاینکه چگونه n_i ذره تحت دوقیدزیر بین این حالتها توزیع می‌شوند:

(الف) تعداد ثابت ذره‌ها

$$\sum_i n_i = n$$

(ب) انرژی کل ثابت

$$\sum_i n_i E_i = E$$

۱۰.۶.۱۷ برای ذره‌های همسانی‌که ازاصل طرد پاؤلی پیروی می‌کنند، احتمال یك‌ترتیب معین برابراست با

$$W_{\mathrm{FD}}=\prod_{i}\frac{g_i!}{n_i!(g_i-n_i)!}$$

نشان دهیدکه بیشینه‌کردن W_{FD} تحت این‌قیدکه تعداد ذره‌ها وانرژی‌کل آنها ثابت باشد، به‌رابطهٔ زیرمی‌انجامد

$$n_i=\frac{g_i}{e^{\lambda_1+\lambda_2 E_i}+1}$$

با $\lambda_1=-E_0/kT$ و $\lambda_2=1/kT$، این رابطه آمارفرمی - دیراك را به‌دست می‌دهد.

راهنمایی. $\ln W$ را محاسبه‌کنید وازفرمول استرلینگ، بخش ۳.۱۰، استفاده‌کنید. مشتقگیری نسبت به n_i را این‌طور توجیه می‌کنیم که دراینجا با تعداد زیادی ذره سروکار داریم، $\Delta n_i/n_i \ll 1$.

۱۱.۶.۱۷ احتمال یك ترتیب معین، برای ذره‌های همسان و بدون هیچ قیدی روی تعداد آنها، در یك حالت معین، به‌صورت زیراست

$$W_{\mathrm{BE}}=\prod_{i}\frac{(n_i+g_i-1)!}{n_i!(g_i-1)!}$$

نشان دهیدکه بیشینه کردن W_{BE} تحت قید ثابت‌بودن تعداد ذره‌ها وانرژی‌کل به‌رابطهٔ‌زیر می‌انجامد

$$n_i=\frac{g_i}{e^{\lambda_1+\lambda_2 E_i}-1}$$

با $\lambda_2=1/kT$، این‌رابطه آماربوز-اینشتین‌را می‌دهد.

یادآوری. فرض‌کنید $g_i \gg 1$.

۱۲.۶.۱۷ فوتونها از W_{BE} وقید ثابت بودن انرژی کل پیروی می‌کنند. روشن است که آنها از قید ثابت بودن تعداد پیروی نمی‌کنند. نشان دهیدکه حذف قید ثابت بودن تعداد به‌همان نتیجهٔ قبل، اما با $\lambda_1=0$، می‌انجامد.

۷.۱۷ وردش تحت تأثیرقید

دراینجا نیزمانند بخشهای قبل، به‌جستجوی مسیری می‌پردازیم که انتگرال زیر را پایاکند

$$J=\int f\left(y_i,\ \frac{\partial y_i}{\partial x_j},\ x_j\right) dx_j \qquad (۹۳.۱۷)$$

این حالت کلی است که‌در آن x_j مجموعه‌ای ازمتغیرهای مستقل وy_i مجموعه‌ای ازمتغیرهای وابسته است. دراینجا نیز

$$\delta J=0 \qquad (۹۴.۱۷)$$

حال، یك یا دوقید وارد می‌کنیم. یعنی اینکه y_iها دیگر از هم مستقل نیستند. از این‌رو همهٔ η_iها اختیاری نیستند ومعادله‌های (۶۲.۱۷) یا (۷۳.۱۷ الف) دیگر به‌کار نمی‌روند. قیدرا می‌توان مانند بخش ۶.۱۷ به‌صورت زیر نوشت

$$\varphi_k(y_i,\ x_j)=0 \qquad (۹۵.۱۷)$$

درنتیجه آن را درتابعی از x_j، مثلا $\lambda_k(x_j)$، ضرب‌می کنیم وروی همان‌بازهٔ مربوط‌به‌معادلهٔ (۹۳.۱۷) انتگرال می‌گیریم، خواهیم داشت

$$\int \lambda_k(x_j)\varphi_k(y_i,\ x_j)\ dx_j=0 \qquad (۹۶.۱۷)$$

دراین‌صورت روشن است که

$$\delta\int \lambda_k(x_j)\ \varphi_k(y_i,\ x_j)\ dx_j=0 \qquad (۹۷.۱۷)$$

قید ممکن است به‌صورت انتگرالی زیر باشد

$$\int \varphi_k(y_i,\ \partial y_i/\partial x_j,\ x_j)\ dx_j=\text{const}\cdot \qquad (۹۸.۱۷)$$

دراین‌صورت می‌توانیم یك مضرب لاگرانژی ثابت معرفی‌کنیم ومعادلهٔ (۹۷.۱۷) را، این بار بایك مقدارثابت λ، به‌دست آوریم.

درهرحال، باجمع‌کردن معادله‌های (۹۴.۱۷) و (۹۷.۱۷)، واحتمالا بابیش از یك قید، داریم

$$\delta\int\left[f\left(y_i,\ \frac{\partial y_i}{\partial x_j},\ x_j\right)+\sum_k \lambda_k\,\varphi_k(y_i,\ x_j)\right]dx_j=0 \qquad (۹۹.۱۷)$$

اگر $\varphi(y_i,\ x_j)$ به‌صورتی داده شود که در معادلهٔ (۹۵.۱۷) هست، λ_k ممکن است تابع x_j باشد.

بادرنظرگرفتن تمامی انتگرالده به‌صورت تابع جدید

$$g\left(y_i, \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, x_j\right)$$

داریم

$$g\left(y_i, \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, x_j\right)=f+\sum_k \lambda_k \varphi_k \qquad (۱۰۰.۱۷)$$

اگر N تابع y_i $(i=۱, ۲, \ldots, N)$ و m قید $(k=۱, ۲, \ldots, m)$ داشته باشیم، می‌توان $N-m$ تا از η_iها را اختیاری گرفت. به‌ازای m تا از η_iهای دیگر، در اصل، می‌توان درست مانند معادلهٔ (۸۰.۱۷)، λها را چنان برگزید که سایر معادله‌های اویلر-لاگرانژ برآورده شوند. در نتیجه تابع مرکب g باید درمعادله‌های اویلر-لاگرانژ معمولی صدق کند

$$\frac{\partial g}{\partial y_i}-\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial(\partial y_i/\partial x_j)}=۰ \qquad (۱۰۱.۱۷)$$

یك معادله بدازای هر متغیر وابستهٔ y_j [بامعادله‌های (۶۴.۱۷) و(۷۳.۱۷) مقایسه کنید]، سپس این معادله‌های اویلر ومعادله‌های قید را به‌طورهمزمان حل می‌کنیم وتابعی‌راکه مقدار پایا را می‌دهد به‌دست می‌آوریم.

معادلات لاگرانژی

معادله‌های حرکت لاگرانژ [معادلهٔ (۵۲.۱۷)] درغیاب قیدها به‌صورت زیر بود[1]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=۰$$

که در آن t (زمان) تنها متغیر مستقل و $q_i(t)$ (مکان ذره) مجموعهٔ متغیرهـای وابسته است. مختصات تعمیم‌یافتهٔ q_i را معمولا چنان اختیارمی‌کنندکه نیروهای قیدی را حذف کنند، ولی این‌کار لازم نیست و شاید همیشه هم مطلوب نباشد. اصل هامیلتون در حضور قیدهای φ_k به‌صورت زیراست

$$\delta\int\left[L(q_i, \dot{q}_i, t)+\sum_k\lambda_k(t)\,\varphi_k(q_i, t)\right]dt=۰ \qquad (۱۰۲.۱۷)$$

ومعادله‌های لاگرانژی مقید عبارت‌اند از

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=\sum_k a_{ik}\lambda_k \qquad (۱۰۳.۱۷)$$

---

۱. نماد q درمکانیك پیشرفته متداول است. این نماد برای تأکید براین نکته به‌کار می‌رودکه متغیرلزوماً یك متغیردکارتی نیست (لزوماً طول هم نیست).

معمولا $\varphi_k=\varphi_k(q_i, t)$، از سرعتهای تعمیم‌یافتهٔ $\dot{q}_i$ مستقل است. در این صورت ضرایب a_{ik} ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آیند

$$a_{ik}=\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i} \tag{۱۰۴.۱۷}$$

اگر q_i طول باشد، آنگاه $a_{ik}\lambda_k$ (بدون مجموعیابی) نمایشگر نیروی مربوط به قید kام درجهت q_i است که، درست به‌همان ترتیب $-\partial V/\partial q_i$، درمعادلهٔ (۱۰۳.۱۷)، ظاهر می‌شود.

مثال ۱۰.۷.۱۷ آونگ ساده

برای تجسم‌عینی مفاهیم فوق، آونگ ساده‌ای به‌جرم m را درنظر بگیرید که آویخته‌ازسیمی به‌طول l به‌تاب خوردن درمسیریك‌کمان مقیداست (شکل۹.۱۷). درغیاب این‌تنهاقید، دو مختصهٔ تعمیم‌یافتهٔ r و θ داریم (حرکت در صفحهٔ قائم)

$$\varphi_1=r-l=0 \tag{۱۰۵.۱۷}$$

لاگرانژی عبارت است از

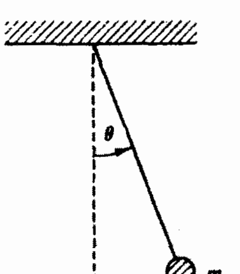
$$\begin{aligned} L&=T-V\\ &=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+mgr\cos\theta \end{aligned} \tag{۱۰۶.۱۷}$$

وقتی که آونگ افقی است، $\theta=\pi/2$، پتانسیل را صفرمی‌گیریم. معادله‌های حرکت، بااستفاده ازمعادلهٔ (۱۰۳.۱۷)، عبارت‌اند از

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}-\frac{\partial L}{\partial r}=\lambda_1,\quad (a_{r1}=1,\ a_{\theta 1}=0)$$

(۱۰۷.۱۷)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0$$



شکل ۹.۱۷ آونگ ساده.

یا

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r})-mr\dot{\theta}^{2}-mg\cos\theta=\lambda_{1}$$

$$\frac{d}{dt}(mr^{2}\dot{\theta})+mgr\sin\theta=0 \qquad (۱۰۸.۱۷)$$

با استفاده ازمعادلهٔ قید $(r=l,\ \dot{r}=0)$ داریم

$$ml\dot{\theta}^{2}+mg\cos\theta=-\lambda_{1}$$

$$ml^{2}\ddot{\theta}+mgl\sin\theta=0 \qquad (۱۰۹.۱۷)$$

$\theta(t)$ را می‌توان ازمعادلهٔ دوم به‌دست آورد، که اگر دامنه کوچك باشد $(\sin\theta=\theta)$، حرکت هماهنگ ساده را می‌دهد، درحالی‌که معادلهٔ اول کمیت $-\lambda_{1}$، یعنی کشش سیم را برحسب θ و $\dot{\theta}$ به‌دست می‌دهد.

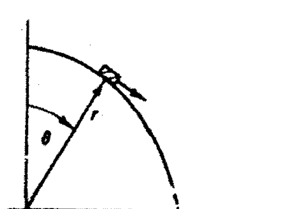
توجه کنیدکه چون معادلهٔ قید، معادلهٔ (۱۰۵.۱۷)، به‌صورت معادلهٔ (۹۵.۱۷)است، مضرب لاگرانژی λ ممکن‌است تابعی باشد از r (یا θ) (که درمورد اخیر همینطوراست).

مثال ۲.۷.۱۷ لغزیدن برروی یك استوانه

مسئلهٔ ذره‌ای که روی یك‌سطح استوانه‌ای می‌لغزد، بامسئلهٔ فوق رابطهٔ تنگاتنگی‌دارد. هدف، یافتن زاویهٔ بحرانی θ_{c} است که درآن ذره ازسطح جدا می‌شود. این‌زاویهٔ بحرانی عبارت است از زاویه‌ای که درآن نیروی شعاعی قید صفرمی‌شود (شکل۱۰.۱۷).

داریم

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^{2}+r^{2}\dot{\theta}^{2})-mgr\cos\theta \qquad (۱۱۰.۱۷)$$



شکل ۱۰.۱۷ ذره‌ای بریك‌سطح استوانه‌ای می‌لغزد.

ویك معادلهٔ قید به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\varphi_1 = r - l = 0 \qquad (111.17)$$

مانند مثال ۱.۷.۱۷ عمل می‌کنیم. باداشتن $a_r = 1$، داریم

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta = \lambda_1(\theta)$$
$$(112.17)$$
$$mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} - mgr\sin\theta = 0$$

که درآن نیروی قیدساز، $\lambda_1(\theta)$، تابعی‌است اززاویهٔ θ.[1] ازآنجاکه $r = l$، $\ddot{r} = \dot{r} = 0$، معادلهٔ (۱۱۲.۱۷) به‌صورت زیرساده می‌شود

$$-ml\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta = \lambda_1(\theta) \qquad (\text{الف } 113.17)$$

$$ml^2\ddot{\theta} - mgl\sin\theta = 0 \qquad (\text{ب } 113.17)$$

بامشتقگیری ازمعادلهٔ (۱۱۳.۱۷ الف) نسبت به‌زمان، وبایادآوری این نکته که

$$\frac{df(\theta)}{dt} = \frac{df(\theta)}{d\theta}\dot{\theta} \qquad (114.17)$$

داریم

$$-2ml\ddot{\theta} - mg\sin\theta = \frac{d\lambda_1(\theta)}{d\theta} \qquad (115.17)$$

ازمعادلهٔ (۱۱۳.۱۷ ب) استفاده و جملهٔ $\ddot{\theta}$ را حذف می‌کنیم، آنگاه باانتگرالگیری داریم

$$\lambda_1(\theta) = 3mg\cos\theta + C \qquad (116.17)$$

ازآنجاکه

$$\lambda_1(0) = mg \qquad (117.17)$$

---

۱. دقیقاً توجه کنیدکه λ_1 نیروی شعاعی است که توسط استوانه برذره وارد می‌آید. بررسی مسئلهٔ فیزیکی نشان می‌دهدکه λ_1 باید به‌زاویهٔ θ بستگی داشته باشد. اجازه داریم که بگیریم، $\lambda = \lambda(t)$. اکنون وابستگی زمانی‌را بایك وابستگی زاویه‌ای (نامعلوم) تعویض می‌کنیم.

$$C = -2mg \qquad (118.17)$$

ذرهٔ m تا وقتی روی سطح می‌ماند که نیروی قید نامنفی باشد، یعنی تا وقتی که سطح باید ذره را به بیرون هل دهد، یعنی

$$\lambda(\theta) = 3mg\cos\theta - 2mg \geqslant 0 \qquad (119.17)$$

زاویهٔ بحرانی زاویه‌ای است که در آن $\lambda(\theta_c) = 0$، یعنی نیروی قید صفر می‌شود. ازمعادلهٔ (۱۱۹.۱۷) داریم

$$\cos\theta_c = \frac{2}{3} \quad \text{یا} \quad \theta_c = 48^\circ\ 11' \qquad (120.17)$$

نسبت به خط قائم. ذرهٔ ما تحت این زاویه (با چشمپوشی از اصطکاك) ازسطح جدا می‌شود.
باید اعتراف کرد که این نتیجه را می‌شد بادرنظر گرفتن نیروی مرکزگرای متغیری که توسط مؤلفهٔ شعاعی نیروی گرانشی تأمین می‌شود، به‌طورساده‌تر به‌دست آورد. این مثال را از آن‌رو اختیارکردیم که استفاده ازمضرب نامعین لاگرانژی را، بدون آنکه ذهن خواننده‌را بایك سیستم پیچیدهٔ فیزیکی مغشوش کنیم، نمایش دهیم.

مثال ۳.۷.۱۷ معادلهٔ موج شرودینگر

به‌عنوان آخرین نمونه ازکمینه‌های مقید، معادلهٔ اویلررا برای مسئلهٔ کوانتوم مکانیکی زیر به‌کار می‌بریم

$$\delta\iiint \psi^*(x, y, z)\, H\psi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = 0 \qquad (121.17)$$

با این قید که

$$\iiint \psi^*\psi\, dx\, dy\, dz = 1 \qquad (122.17)$$

معادلهٔ (۱۲۱.۱۷) گزارهٔ پایابودن انرژی سیستم به‌شمارمی‌آید، که در آن H، یعنی هامیلتونی کوانتوم مکانیکی برای ذره‌ای به‌جرم m، عملگری دیفرانسیلی است

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x, y, z) \qquad (123.17)$$

معادلهٔ (۱۲۲.۱۷)، یعنی معادلهٔ قید، عبارت است ازشرطی که بنابرآن تنها باید یك ذره داشته باشیم، ψ ویژه‌تابع متداول، یك‌متغیر وابسته و ψ^* همیوغ مختلط آن است که با آن

به‌صورت متغیر وابستهٔ دوم رفتار می‌کنیم.[1]

انتگرالده معادلهٔ (۱۲۱.۱۷) شامل مشتقهای دوم است، که می‌توان با مشتقگیری جزء به‌جزء به‌مشتق اول تبدیلشان کرد

$$\int \psi^* \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\,dx = \psi^* \frac{\partial\psi}{\partial x}\Big| - \int \frac{\partial\psi^*}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx \qquad (۱۲۴.۱۷)$$

می‌توان یا شرایط مرزی دوره‌ای را درنظر گرفت (مانند نظریهٔ اشتورم-لیوویل، فصل ۹) و یا آنکه حجم انتگرالگیری را چندان بزرگ گرفت که ψ و ψ^* در مرز قویاً صفر شوند.[2] آنگاه جزء انتگرالگیری شده صفرمی‌شود و می‌توان معادلهٔ (۱۲۱.۱۷) را به‌صورت زیر بازنویسی کرد

$$\delta\iiint\left[\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*\cdot\nabla\psi + V\psi^*\psi\right]dx\,dy\,dz = 0 \qquad (۱۲۵.۱۷)$$

تابع g درمعادلهٔ (۱۰۰.۱۷) عبارت است از

$$g = \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*\cdot\nabla\psi + V\psi^*\psi - \lambda\psi^*\psi$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m}(\psi^*_x\psi_x + \psi^*_y\psi_y + \psi^*_z\psi_z) + V\psi^*\psi - \lambda\psi^*\psi \qquad (۱۲۶.۱۷)$$

دراینجا نیز شاخص پایین x برای مشخص کردن $\partial/\partial x$ است. معادلهٔ (۱۰۱.۱۷)، به‌ازای $y_i = \psi^*$ به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\frac{\partial g}{\partial\psi^*} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial\psi^*_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial\psi^*_y} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial\psi^*_z} = 0$$

درنتیجه خواهیم داشت

$$V\psi - \lambda\psi - \frac{\hbar^2}{2m}(\psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz}) = 0$$

یا

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = \lambda\psi \qquad (۱۲۷.۱۷)$$

---

۱. با بخش ۱.۶ مقایسه کنید.

۲. $\lim_{r\to\infty} r^{1/2}\psi(r) = 0$.

بامراجعه به‌معادلهٔ (۱۲۳.۱۷) می‌توانیم تشخیص دهیم که λ از نظر فیزیکی، انرژی سیستم کوانتوم مکانیکی است. با این تعبیر، معادلهٔ (۱۲۷.۱۷) همان معادلهٔ موج مشهور شرودینگر است. این رهیافت وردشی چیزی بیش از یك کنجکاوی پژوهشی بوده‌است. این رهیافت روش کارآمدی را برای به‌دست آوردن جوابهای تقریبی معادلهٔ موج فراهم می‌آورد (روش وردشی ریلی - ریتس، بخش ۸.۱۷).

مسائل

۱.۷.۱۷ ذره‌ای به‌جرم m روی یك سطح بدون اصطکاك قرار دارد. این ذره مقید است که چنان حرکت کند که $\theta = \omega t$ (بازوی شعاعی دوار، بدون اصطکاك). با شرایط اولیهٔ

$$t = \circ, \quad r = r_{\circ}, \quad \dot{r} = \circ$$

(الف) مکان شعاعی را به‌صورت تابعی از زمان به‌دست آورید.

پاسخ. $r(t) = r_{\circ} \cosh \omega t$.

(ب) نیرویی را که قید برذره وارد می‌آورد، محاسبه کنید.

پاسخ. $F^{(c)} = ۲m\dot{r}\omega = ۲mr_{\circ}\omega^{۲} \sinh \omega t$.

۲.۷.۱۷ جرم نقطه‌ای $m_۱$ روی یك صفحهٔ تخت، افقی، و بدون اصطکاك حرکت می‌کند. این جرم، توسط یك ریسمان مقید شده است که با آهنگ ثابت در راستای شعاعی درونسو حرکت کند. با استفاده از مختصات قطبی درصفحهٔ (ρ, φ) داریم: $\rho = \rho_{\circ} - kt$.

(الف) لاگرانژی را بنویسید.

(ب) معادله‌های لاگرانژ مقید را بنویسید.

(ج) معادلهٔ لاگرانژ وابسته به φ را حل کنید و سرعت زاویه‌ای $\omega(t)$ را به‌دست آورید. معنای فیزیکی ثابت انتگرالگیری، که از انتگرال گرفتن "آزاد" به‌دست آورده‌اید، چیست؟

(د) با استفاده از $\omega(t)$ که در بند (ج) به‌دست آورده‌اید، معادلهٔ لاگرانژ (مقید) وابسته به ρ را حل کنید و $\lambda(t)$ را به‌دست آورید. به‌عبارت دیگر، توضیح دهید که وقتی $\rho \to \circ$، برای نیروی قید چه اتفاقی می‌افتد؟

۳.۷.۱۷ یك کابل نرم به‌دو نقطهٔ ثابت آویخته شده‌است. طول کابل ثابت است. منحنیی را که انرژی پتانسیل گرانشی کل کابل را کمینه می‌کند، به‌دست آورید.

پاسخ. کسینوس هذلولوی.

۴.۷.۱۷ حجم معینی از آب در استوانه‌ای با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد. خمیدگی

سطح آب راکه انرژی‌پتانسیل کل آب‌را درمیدان نیروی مرکب گرانشی ـ مرکزگریزی کمینه می‌کندپیدا کنید.
پاسخ. سهمی.

۵.۷.۱۷ (الف) نشان‌دهیدکه شکلی‌که بامحیط ثابت، بیشینهٔ مساحت‌را دارد دایره است.
(ب) نشان دهید شکلی که بامساحت ثابت کمترین محیط را دارد، دایره‌است.
راهنمایی. شعاع انحنای R ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$R=(r^{2}+r_{\theta}^{2})^{3/2}/(rr_{\theta\theta}-2r_{\theta}^{2}-r^{2})$$

یادآوری. مسائل این بخش، یعنی وردشهای تحت قید، را غالباً مسائل تک‌محیطی می‌نامند. این واژه از مسائل مربوط به‌بیشینه‌سازی مساحت باقید ثابت‌بودن محیط برخاسته است [مانند مسئلهٔ ۵.۷.۱۷ (الف)].

۶.۷.۱۷ نشان دهیدکه برای‌آنکه J در رابطهٔ

$$J=\int_{a}^{b}(p(x)y_{x}^{2}-q(x)y^{2})\,dx$$

تحت شرط بهنجارش زیریك مقدارپایا داشته باشد

$$\int_{a}^{b}y^{2}w(x)dx=1$$

باید در معادلهٔ اشتورم ـ لیوویل، فصل ۹، صدق کند

$$\frac{d}{dx}\left(p\,\frac{dy}{dx}\right)+qy+\lambda wy=0$$

یادآوری. در بخش ۱.۹، برای تحقیق درخاصیت هرمیتی عملگر، شرط مرزی زیر به‌کار برده شد

$$py_{x}\,y\big|_{a}^{b}=0$$

۷.۷.۱۷ نشان دهید شرط آنکه J در رابطهٔ

$$J=\int_{a}^{b}\int_{a}^{b}K(x,t)\varphi(x)\varphi(t)\,dx\,dt$$

تحت شرط بهنجارش زیریك مقدار پایا داشته باشد

$$\int_{a}^{b}\varphi^{2}(x)dx=1$$

معادلهٔ انتگرالی هیلبرت-اشمیت، معادلهٔ (۸۹.۱۶)، را می‌دهد.
یادآوری. کرنل $K(x, t)$ متقارن است.

۸.۱۷ شگرد وردشی ریلی- ریتس

مسئلهٔ ۶.۷.۱۷ بین حساب وردشها و مسائل ویژه‌تابع-ویژه‌مقدار رابطه‌ای برقرار می‌کند. عبارت مسئلهٔ ۶.۷.۱۷ را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد

$$F[y(x)]=\frac{\int_a^b (p y_x^2-q y^2)\, dx}{\int_a^b y^2 w\, dx} \qquad (۱۲۸.۱۷)$$

که در آن قید به‌صورت یك شرط بهنجارش معمولی درمخرج کسر ظاهرمی‌شود. کمیت F را، که تابعی است ازتابع $y(x)$، گاهی تابعی می‌نامند. از آنجا که مخرج کسر ثابت است (شرط بهنجارش) مقدارپایای J ومقدارپایای F متناظرند. دراین صورت باتوجه به‌مسئلهٔ ۶.۷.۱۷، هرگاه $y(x)$چنان‌باشدکه J و F مقدار پایا پیداکنند، تابع بهینهٔ $y(x)$ درمعادلهٔ اشتورم-لیوویل صدق می‌کند

$$\frac{d}{dx}\left(p\,\frac{dy}{dx}\right)+qy+\lambda w y=0 \qquad (۱۲۹.۱۷)$$

که در آن λ ویژه‌مقدار است (نه یك مضرب لاگرانژی). باانتگرالگیری جزء به‌جزء از صورت کسر در معادلهٔ (۱۲۸.۱۷) و استفاده ازشرایط مرزی

$$p y_x y\Big|_a^b=0 \qquad (۱۳۰.۱۷)$$

داریم

$$F[y(x)]=-\frac{\int_a^b y\left\{\frac{d}{dx}\left(p\,\frac{dy}{dx}\right)+qy\right\}dx}{\int_a^b y^2 w\, dx} \qquad (۱۳۱.۱۷)$$

آنگاه بااستفاده ازمعادلهٔ (۱۲۹.۱۷)، مقادیر پایای $F[y(a)]$ از رابطهٔ زیر به‌دست‌می‌آید

$$F[y_n(x)]=\lambda_n \qquad (۱۳۲.۱۷)$$

که در آن λ_n ویژه‌مقدارمتناظر باویژه‌تابع y_n است. معادلهٔ (۱۳۲.۱۷)، بامقداری چون F که به‌کمك معادلهٔ (۱۲۸.۱۷) یا (۱۳۱.۱۷) به‌دست می‌آید شالودهٔ روش ریلی-ریتس‌را برای محاسبهٔ ویژه‌تابعها و ویژه‌مقدارها تشکیل می‌دهد.

ویژه‌تابع حالت پایه

فرض کنید می‌خواهیم ویژه‌تابع، y_0، و ویژه‌مقدار[۱]، λ_0، حالت پایهٔ یك‌سیستم پیچیدهٔ اتمی یا هسته‌ای‌را محاسبه‌کنیم مثالی‌کلاسیکی که هیچ‌جواب دقیقی ندارد عبارت‌است ازمسئلهٔ‌اتم هلیم. ویژه‌تابع y_0 مجهول است، ولی‌فرض می‌کنیم که بتوانیم‌یك‌تابع تقریبی‌yرا باتقریب مطلوب حدس بزنیم، به‌گونه‌ای‌که به‌زبان ریاضی بتوانیم بنویسیم[۲]

$$y = y_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i y_i \qquad (۱۳۳.۱۷)$$

c_iها کمیتهای‌کوچکی‌اند (میزان‌کوچکی‌آنها به‌این بستگی‌داردکه حدس ماتاچه‌حد نزدیك به‌یقین بوده‌است). y_iها ویژه‌تابعهای بهنجارند (اینها تابعهای‌مجهول‌اند)، وبنابراین‌تابع آزمایشی ما، یعنی‌y، بهنجار نیست.

تابع تقریبی y را درمعادلهٔ (۱۳۱.۱۷) می‌نشانیم، وباتوجه به‌اینکه

$$\int_a^b y_i\left\{\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy_i}{dx}\right)+qy_i\right\}dx = -\lambda_i\delta_{ij} \qquad (۱۳۴.۱۷)$$

خواهیم داشت

$$F[y(x)] = \frac{\lambda_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2\lambda_i}{1+\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2} \qquad (۱۳۵.۱۷)$$

در اینجا ویژه‌تابعها را متعامد گرفته‌ایم، زیرا این تابعها جوابهای معادلهٔ اشتورم-لیوویل، معادلهٔ (۱۲۹.۱۷)، هستند. نیز فرض می‌کنیم که y_0 واگن نباشد. اکنون اگر بااستفاده از قضیهٔ دوجمله‌ای مخرج کسرمعادلهٔ (۱۳۵.۱۷) را بسط دهیم وازجملات ازمرتبهٔ c_i^4صرفنظر کنیم، خواهیم داشت

$$F[y(x)] = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2(\lambda_i - \lambda_0) \qquad (۱۳۶.۱۷)$$

معادلهٔ (۱۳۶.۱۷) متضمن دونتیجهٔ مهم است.

۱. خطای موجود درویژه‌تابع y برابر $O(c_i)$ است، در حالی‌که خطای موجود در

---

۱. یعنی، λ_0 کوچکترین ویژه‌مقداراست. ازمعادلهٔ (۱۲۸.۱۷) پیداست‌که اگر $p(x) \geqslant 0$ و $q(x) \leqslant 0$ (با جدول ۱.۹ مقایسه کنید)، آنگاه $F[y(x)]$ کران پایینتری دارد و این کران پایینتر نامنفی است. ازبخش ۱.۹ یادآوری می‌کنیم که $w(x) \geqslant 0$.

۲. منحنی تابع‌را داریم حدس می‌زنیم. بهنجارش موردی ندارد.

λ برابر $O(c_i^2)$ است. حتی یك تقریب نسبتاً بـد برای ویژه‌تابعها ممکن است به‌محاسبهٔ دقیقی برای ویژه‌مقدارها منجر شود.

۲. اگر λ_0 کوچکترین ویژه‌مقدار باشد (حالت پایه)، آنگاه از آنجا که $\lambda_i - \lambda_0 > 0$، داریم

$$F[y(x)] = \lambda \geqslant \lambda_0 \qquad (۱۳۷.۱۷)$$

یعنی تقریب مـا همواره در طرف مقدارهای بیشتر از λ_0 است، و به ترتیب که ویژه‌تابع تقریبی ما، y، بهتر می‌شود ($c_i \to 0$)، λ به‌سوی λ_0 همگـرا می‌شود. دقت کنید که معادلهٔ (۱۳۷.۱۷) پیامد مستقیم معادلهٔ (۱۳۵.۱۷) ومستقل از تقریب دوجمله‌ای ماست.

مثال ۱۰.۸.۱۷ ریسمان مرتعش

ریسمان مرتعشی که در $x=0$ و $x=1$ بسته شده است، در معادلهٔ ویژه‌مقداری زیر

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0 \qquad (۱۳۸.۱۷)$$

وشرط مرزی $y(0) = y(1) = 0$، صدق می‌کند. برای این مثال ساده، فوراً می‌توان تابع (بهنجارنشدهٔ) $y_0(x) = \sin \pi x$ و $\lambda_0 = \pi^2$ را تشخیص‌داد. ولی بیایید شگرد ریلی-ریتس را به‌کاربریم.

باتوجه به‌شرایط مرزی، جواب زیررا می‌آزماییم

$$y(x) = x(1-x) \qquad (۱۳۹.۱۷)$$

آنگاه با $p=1$ و $w=1$ ازمعادلهٔ (۱۲۸.۱۷) خواهیم داشت

$$F[y(x)] = -\frac{\int_0^1 (1-2x)^2 dx}{\int_0^1 x^2(1-x)^2 dx} \qquad (۱۴۰.۱۷)$$

$$= \frac{1/3}{1/30} = 10$$

این‌جواب ۱۰ = λ، تقریب نسبتاً خوبی (باخطای ۳ر۱٪)[1] برای $\lambda_0 = \pi^2 =$ ۹ر۸۶۹۶ به‌شمارمی‌آید. شاید خواننده توجه کرده باشد که $y(x)$، معادلهٔ (۱۳۹۰۱۷)، به‌واحدبهنجار نشده است. مخرج $F[y(x)]$ فقدان این بهنجارش به‌واحد را جبران می‌کند.

درمحاسبات علمی متداول، ویژه‌تابع را از طریق درنظرگرفتن تعداد بیشتری جمله باضریبهای قابل تنظیم، مانند جملهٔ زیر، بهسازی می‌کنند

$$y = x(1-x) + a_2 x^2 (1-x)^2 \qquad (۱۴۱۰۱۷)$$

بهتراست‌که جمله‌های اضافی‌را متعامد بگیریم، ولی این‌کارحتماً لازم نیست. پارامتر a_2 را طوری تنظیم می‌کنند که $F[y(x)]$ را کمینه کند. درمورد اخیر، گزینهٔ $a_2 =$ ۱ر۱۳۵۳ $F[y(x)]$ را تا حد ۹ر۸۶۹۷، که به‌ویژه‌مقداراصلی بسیارنزدیك است، کاهش‌می‌دهد.

مسائل

۱۰۸۰۱۷ بااستفاده ازمعادلهٔ (۱۲۸۰۱۷)، برهان مشروحی ارائه کنیدکه نشان دهد $\lambda \geqslant 0$؛ شرایطی‌راکه تحت‌آن خواهیم داشت: $\lambda = 0$، توصیف‌کنید وچند مثال بیاورید.

۲۰۸۰۱۷ تابع مجهولی درمعادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 y = 0$$

وشرایط مرزی

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 0$$

صدق می‌کند

(الف) تقریب

$$\lambda = F[y_{\text{آزمونی}}]$$

را به‌ازای

---

۱. این نکته راکه جواب ما تا چه حد به‌جواب واقعی نزدیك است، می‌توان به‌کمك یك بسط سینوسی فوریه آزمود (با مسئلهٔ ۳.۲.۱۴ روی نیم بازهٔ [۱ ,۰]، ویا معادل بسا آن، روی بازهٔ [۱ ,۱−] برای مقداری چون $y(x)$ که فرد درنظرگرفته شود، مقایسه کنید). به‌دلیل تقارن زوجی‌که نسبت به $x = 1/2$ وجود دارد، فقط n جملهٔ فرد ظاهر می‌شود

$$y(x) = x(1-x) = \left(\frac{8}{\pi^3}\right)\left[\sin \pi x + \frac{\sin 3\pi x}{3^3} + \frac{\sin 5\pi x}{5^3} + \cdots\right]$$

$$y_{\text{آزمونی}} = ۱ - x^۲$$

محاسبه کنید.

(ب) باویژه‌مقدار دقیق مقایسه کنید.

پاسخ. (الف) $\lambda = ۲٫۵$، (ب) $\dfrac{\lambda}{\lambda_{\text{دقیق}}} = ۱٫۰۱۳$.

۳.۸.۱۷ درمسئلهٔ ۲.۸.۱۷ تابع آزمونی‌زیر را به‌کار برید

$$y = ۱ - x^n$$

(الف) مقداری را چون n بیابیدکه $F[y_{\text{آزمونی}}]$ راکمینه کند.

(ب) نشان دهیدکه مقداربهینهٔ n، نسبت $\lambda/\lambda_{\text{دقیق}}$ را به‌۱٫۰۰۳ می‌رساند.

پاسخ. (الف) $n = ۱٫۷۲۴۷$.

۴.۸.۱۷ یك ذرهٔکوانتوم مکانیکی دریك‌کره (مثال ۱.۷.۱۱) درمعادلهٔ زیرصدق می‌کند

$$\nabla^۲\psi + k^۲\psi = ۰$$

که درآن $k^۲ = ۲mE/\hbar^۲$. شرط مرزی عبارت است ازاینکه: $\psi(r=a) = ۰$، که درآن a شعاع‌کره‌است. تابع‌موج تقریبی

$$\psi_a(r) = ۱ - \left(\frac{r}{a}\right)^۲$$

را برای حالت پایه [که در آن $\psi = \psi(r)$] بیازمایید و ویژه‌مقدار تقریبی $k_a^۲$ را محاسبه کنید.

راهنمایی. برای تعیین $p(r)$ و $w(r)$، معادله‌را (درمختصات قطبی‌کروی)به‌صورت خود-الحاقی درآورید.

پاسخ. $k_a^۲ = \dfrac{۱۰٫۵}{a^۲}$، $k_{\text{دقیق}}^۲ = \dfrac{\pi^۲}{a^۲}$.

۵.۸.۱۷ معادلهٔ موج مربوط به‌نوسانگرکوانتومی‌را می‌توان به‌صورت زیرنوشت

$$\frac{d^۲\psi(x)}{dx^۲} + (\lambda - x^۲)\psi(x) = ۰$$

که درآن برای حالت پایه داریم: $\lambda = ۱$ [معادلهٔ (۱۸.۱۳)]. تابع

$$\psi_{\text{آزمونی}} = \begin{cases} ۱ - (x^۲/a^۲), & x^۲ \leqslant a^۲ \\ ۰, & x^۲ > a^۲ \end{cases}$$

(که در آن $a^۲$ يك پارامتر قابل تنظيم است) را برای تابع‌موج حالت پایه بیازمایید، و انرژی حالت پایهٔ متناظر را محاسبه کنید. خطای محاسبهٔ شما چقدر است؟

یادآوری. سهمیی که به‌کار برده‌ایم تقریب چندان خوبی برای يك تابع نمایی‌گاؤسی نیست. چه‌نوع بهسازی می‌توانید پیشنهاد کنید؟

۶.۸.۱۷ معادلهٔ شرودینگر را می‌توان به‌ازای يك پتانسیل مرکزی به‌صورت زیر نوشت

$$\mathcal{L}u(r)+\frac{\hbar^۲ l(l+۱)}{۲Mr^۲}u(r)=E\,u(r)$$

جملهٔ $l(l+۱)$ از جدا کردن وابستگی زاویه‌ای حاصل می‌شود (بخش ۵.۲، جلد اول). با این جمله به‌صورت يك اختلال عمل کنید؛ با استفاده از شگرد وردشی نشان دهید که $E>E_۰$، که در آن $E_۰$ ویژه‌مقدار انرژی $u_۰$ متناظر با $l=۰$ $\mathcal{L}u_۰=E_۰u_۰$ است. به‌این معنا که حالت با انرژی کمینه دارای $l=۰$، یعنی تکانهٔ زاویه‌ای صفر است.

راهنمایی. $u(r)$ را می‌توانید به‌صورت $u_۰(r)+\sum_{i=۱}^{\infty} c_i u_i$ بسط دهید که در آن $\mathcal{L}u_i=E_iu_i$، $E_i>E_۰$.

۷.۸.۱۷ درمعادلهٔ ویژه‌مقدار- ویژه‌بردار ماتریسی

$$\mathbf{A}\mathbf{r}_i=\lambda_i\mathbf{r}_i$$

$\mathbf{A}$ يك ماتریس $n\times n$ هرمیتی‌است. برای سادگی، فرض کنید که n ویژه‌مقدار حقیقی این ماتریس (بخش ۶.۴، جلد اول) متمایزند، و $\lambda_۱$ بزرگترین آنهاست. اگر $\mathbf{r}$ تقریبی برای $\mathbf{r}_۱$ باشد

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_۱+\sum_{i=۲}^{n}\delta_i\mathbf{r}_i$$

نشان دهید که

$$\frac{\mathbf{r}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{r}}{\mathbf{r}^\dagger\mathbf{r}}\leqslant\lambda_۱$$

وهمچنین نشان دهید که خطای $\lambda_۱$ از مرتبهٔ $|\delta_i|^۲$ است؛ فرض کنید که $|\delta_i|\ll ۱$.

راهنمایی. n بردار $\mathbf{r}_i$ يك مجموعهٔ متعامد کامل تشکیل می‌دهند که فضای (مختلط) n-بعدی را می‌پیمایند.

۸.۸.۱۷ جواب وردشی مثال ۱.۸.۱۷ را می‌توان توسط درنظر گرفتن

$y=x(1-x)+a_2x^2(1-x)^2$ بهبود بخشید. با استفاده از کوادراتور عددی، $\lambda_{\text{تقریبی}}=F[y(x)]$، معادلهٔ (۱۲۸۰۱۷) را به ازای یك مقدار ثابت a_2، محاسبه کنید. a_2 را چنان تغییر دهید که λ را کمینه کند. مقداری از a_2 که λ را کمینه می‌کند، و نیز خود λ را، تا ۵ رقم بامعنی، محاسبه کنید. ویژه‌مقدار λ را که یافته‌اید با π^2 مقایسه کنید.

مراجع

Bliss, G. A., *Calculus of Variations*. The Mathematical Association of America, Open Court Publishing Co. Ill; LaSalle, 1925.

باوجود آنکه کتابی قدیمی است، هنوزهم برای جزئیات مسائلی نظیرمسائل کمینهٔ مساحت، مرجع باارزشی به‌شمارمی‌آید

Courant, R., and H. Robbins; *What Is Mathematics?* 2nd ed. New York: Oxford University Press, 1979.

فصل۷ حاوی مبحث ظریفی دربارهٔ حساب وردشها، شامل جوابهای مسئلهٔ حباب صابونی برای مسائل کمینهٔ مساحت، است.

Lanczos, C., *The Variational Principles of Mechanics*, 4th ed. Toronto: University of Toronto Press, 1970.

این کتاب به‌بررسی مشروح اصول وردشی و کاربردهای آنها درگسترش مکانیك کلاسیك می‌پردازد.

Sagan, H., *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics*. New York: Wiley, 1961.

ازاین کتاب جالب می‌شد درفهرست مراجع مربوط به‌نظریهٔ اشتورم-لیوویل، تابعهای بسل ولژاندر، وسری فوریه نیزنام برد. فصل۱ این کتاب حاوی درآمدی برحساب وردشها و کاربردآن درمکانیك است. فصل۷ باز به‌حساب وردشها می‌پردازد وآن‌را درخصوص‌مسائل ویژه‌مقداری به‌کارمی‌برد.

Sagan, H., *Introduction to the Calculus of Variations*. New York: McGraw-Hill, 1969.

این کتاب درآمدی عالی برنظریهٔ نوین حساب وردشهاست که از کتاب سال ۱۹۶۱ سیگان کاملتر وحرفه‌ای‌تراست. سیگان، دراین کتاب شرایط کفایت را نیز بررسی می‌کند وحساب وردشهارا به‌مسائل تکنولوژی فضایی مربوط می‌کند.

Weinstock, R., *Calculus of Variations*. New York: McGraw-Hill, 1952.

(این کتاب باجلد معمولی توسط Dover نیزمنتشرشده است.)

این کتاب حاوی تعمیم سازمان‌یافته و مشروح حساب وردشها و کاربردهای آن در نظریهٔ اشتورم-لیوویل و درمسائل فیزیکی مربوط به کشسانی، الکتروستاتیك، و مکانیك کوانتومی است.

Yourgrau, W., and S. Mandelstam, *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory*, 3th ed, Philadelphia: Saunders, 1968.
(این‌کتاب توسط Dover نیز در سال ۱۹۷۹ منتشر شده است.)
این‌کتاب حاوی بررسی جامع وفراگیری از اصول وردشی است. خصوصاً مباحث مربوط به‌تاریخچه ودامهای فرافیزیکی متعددآن شایانِ توجه است.

پیوست ۱

صفرهای حقیقی یك تابع

در ریاضی‌فیزیك نیاز به‌مقادیر متناظر با صفرهای حقیقی یك تابع در موارد فراوانی پیش می‌آید. نمونه‌هایی از این وضعیت عبارت‌اند از شرایط مرزی روی جواب مسئلهٔ موجبر هم‌محور، مثال ۱.۳.۱۱، مسائل ویژه‌مقدار در مکانیك کوانتومی نظیر دوترون با یك چاه پتانسیل مربعی، مثال ۲.۱.۹، و موضع نقاط ارزیابی در کوادراتور گاؤسی (پیوست ۲ را ببینید).

مجموعهٔ زیر-برنامه‌های علمی IBM (یعنی، SSP)، سه زیر-برنامه برای تعیین صفرهای حقیقی تابعها در دسترس ما قرار می‌دهد. این سه زیر-برنامه عبارت‌اند از (۱) RTWI، که یك تکنیك تکرار است، وبه وگشتین منسوب است، (۲) RTMI، تکنیك تکرارنیمسازی منسوب به‌مولر، و (۳) RTNI، روش نیوتون، که درمحاسبه‌های مقدماتی از آن خیلی اقبال می‌کنند. دراین هرسه روش یك حدس اولیهٔ نزدیك به‌واقعیت برای‌صفر یا ریشه‌ها ضروری است. اینکه این حدس تا چه حد باید به‌واقعیت نزدیك باشد، بستگی دارد به‌آنکه تغییرات تابع موردنظر چقدر وسیع‌است و به‌چه دقتی نیازداریم. این هرسه روش در واقع عبارت‌اند از روشهایی برای اصلاح یك‌مقدار اولیهٔ مطلوب. برای به‌دست آوردن مقداراولیهٔ مطلوب وتعیین موضع جنبه‌های معیوب (مانند ناپیوستگیها و تکینگیها) که باید ازآنها دوری جست، باید نمودارنسبتاً مشروحی برای تابع رسم‌کنیم. هیچ‌چیزی واقعاً جای یك نمودار را نمی‌گیرد. درمسئلهٔ ۱۲.۳.۱۱ براین نکته تأکید شده‌است.

روش نیوتون

این روش معمولا درحساب دیفرانسیل ارائه می‌شود زیرا نمایانگرحساب دیفرانسیل است. اگر دقیقاً بدانید که تابع شما چه رفتاری دارد، گاهی این روش می‌تواند روش خوبی به‌شمار آید.

در روش نیوتون اینطور فرض می‌کنند که تابع $f(x)$ دارای مشتق مرتبهٔ اول پیوسته باشد. بااستفاده ازتعبیرهندسی مشتق به‌عنوان مماس برمنحنی، شکل ۱، داریم

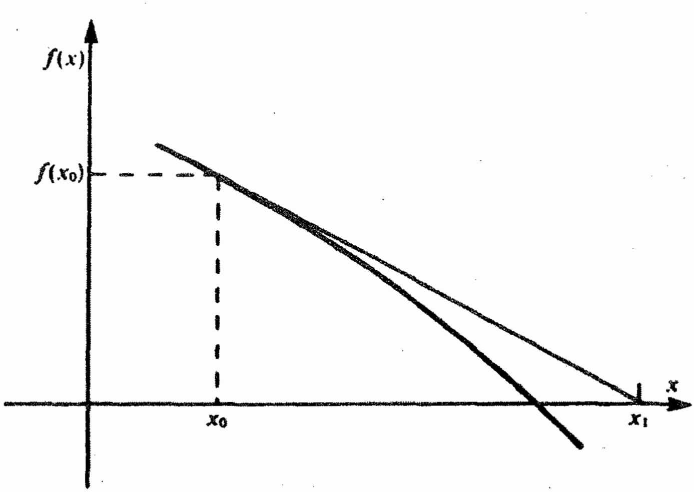
$$\frac{f(x_0)}{x_1-x_0}=-f'(x_0) \qquad \text{(پ ۱.۱)}$$

یا

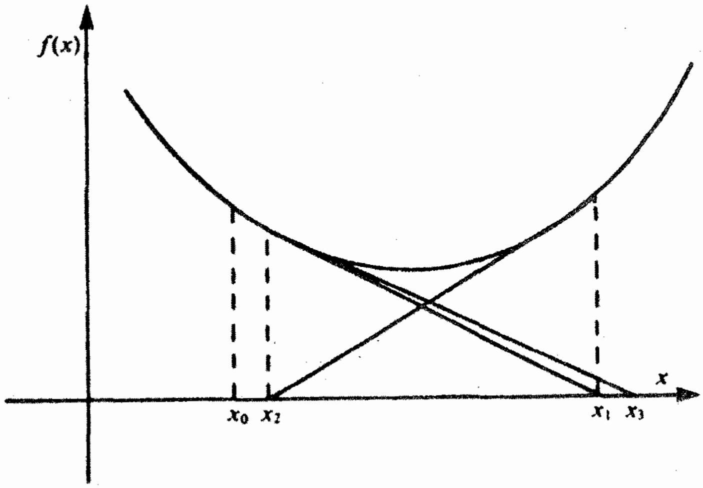
$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad \text{(پ ۲.۱)}$$

بامقدار x_0 به‌عنوان حدس اولیه، و بااستفاده از معادلهٔ (پ ۲.۱)، x_1 را محاسبه می‌کنیم. باتکرار این‌کار x_2 را از روی x_1 محاسبه می‌کنیم و امید داریم که جواب ما سریعاً به‌ریشهٔ واقعی همگرا شود.

در روش‌نیوتون محاسبهٔ مشتق‌ضروری‌است. این‌ضرورت می‌تواند یك‌نقص به‌حساب آید؛ محاسبهٔ مشتق در مسئلهٔ ۱۲.۳.۱۱ دست‌وپاگیر است. ولی ایرادی اساسی‌که به‌روش نیوتون واردمی‌شود، آن‌است‌که این‌روش بسیار غیرقابل‌اعتماد است. این‌روش ممکن‌است همگرا نشود، و درمجاورت یك بیشینه یاکمینهٔ موضعی (شکل ۲) نوسان‌کند، یا ممکن است درمجاورت یك‌نقطهٔ خمش واگرا شود. یااگرحدس اولیه به‌اندازهٔ‌کافی صائب نباشد،روش



شکل ۱. روش ریشه‌یابی نیوتون.



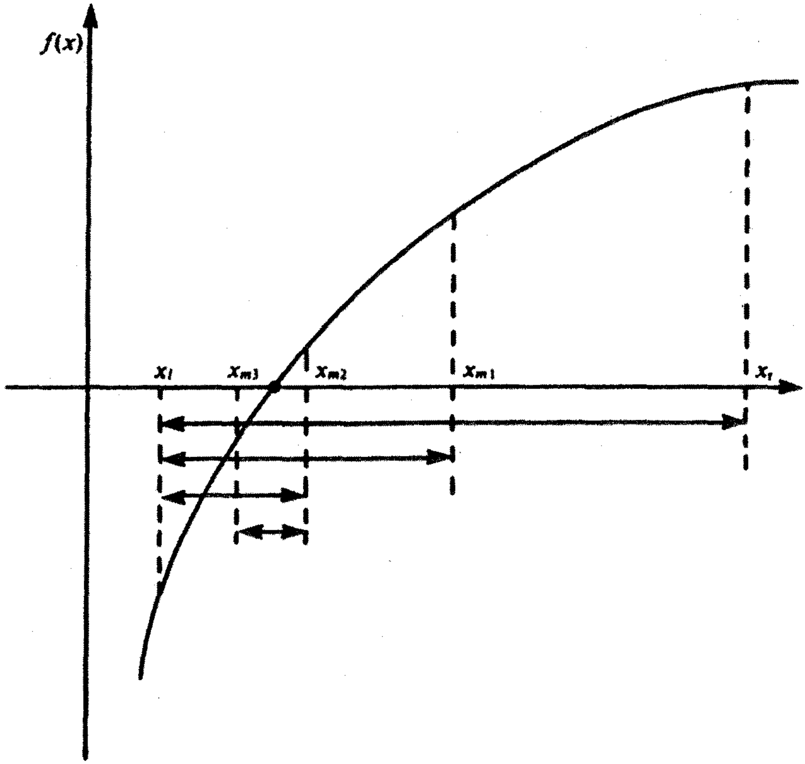
شکل ۲۰ روش نیوتون ــ کمینهٔ موضعی، بدون همگرایی.

نیوتون ممکن است به یك ریشهٔ غلط همگرا شود. روش نیوتون روشی است که، جز در مواردی که رفتار تابع مورد نظر دقیقاً معلوم است، باید از آن اجتناب شود.

روش نیمسازی

در این روش فرض می‌کنند که فقط $f(x)$ پیوسته است. این روش مستلزم آن است که مقادیر x_l و x_r را در دو سوی صفر جستجو کنیم. از این رو علامت $f(x_l)$ و $f(x_r)$ مخالف‌اند و حاصلضرب $f(x_l)\cdot f(x_r)$ منفی می‌شود. در ساده‌ترین صورت روش نیمسازی، نقطهٔ وسط، $x_m=(۱/۲)(x_l+x_r)$، را در نظر می‌گیرند و امتحان می‌کنند تا ببینند نقطهٔ صفر در کدام یك از دو بازهٔ $[x_l, x_m]$ یا $[x_m, x_r]$ قرار دارد. آسانترین آزمون آن است که ببینیم یکی از دو حاصلضرب، مثلا $f(x_m)\cdot f(x_r)$، منفی است یا خیر. اگر این حاصلضرب منفی باشد، آنگاه ریشه در نیم بازهٔ طرف راست، $[x_m, x_r]$، قرار دارد، و اگر مثبت باشد، در این صورت ریشه باید در نیم بازهٔ سمت چپ $[x_l, x_m]$ واقع باشد. به‌خاطر داشته باشید که $f(x)$ را پیوسته گرفته‌ایم. بازهٔ حاوی صفر را باز با $[x_l, x_r]$ مشخص می‌کنیم و عمل نیمسازی را (مطابق شکل ۳) تا آنجا ادامه می‌دهیم که موضع صفر با دقت مطلوب تعیین شود. روشن است که هر چه انتخاب اولیهٔ x_l و x_r بهتر باشد، تعداد نیمسازیهای لازم کمتر خواهد بود. ولی، چنانکه در ادامهٔ مطلب توضیح داده خواهد شد، مشخص کردن بیشینهٔ تعداد نیمسازیهای مجاز حائز اهمیت است.

این تکنیك نیمسازی، در مقایسه با روش نیوتون، ممکن است از مزیت چندانی برخوردار نباشد، ولی دارای سرعت معقولی است و قابل اطمینانتر هم هست ــ تقریباً اگر به توابع



شکل ۴. روش ریشه‌یابی نیمسازی.

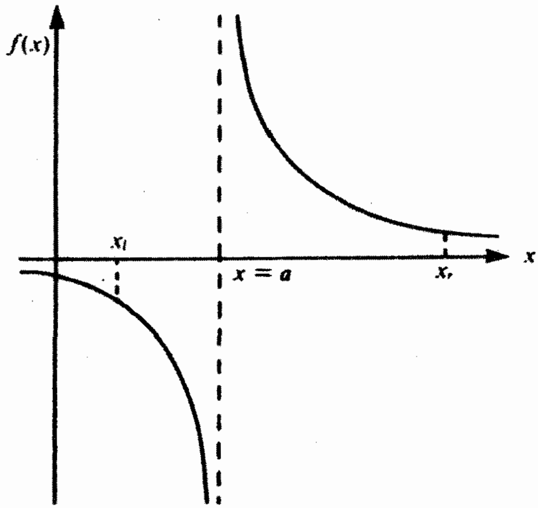
ناپیوسته‌ای مانند $f(x) = ۱/(x-a)$، که در شکل ۴ نشان داده‌شده است، نپردازیم این روش همواره صائب است. در اینجا نیز هیچ چیز به‌انـدازهٔ داشتن اطلاعات مشروح از رفتارموضعی تابع درمجاورت ریشهٔ فرضی، ارزش ندارد.

معمولا، روش نیمسازی RTMI را توصیه می کنند.

دو هشدار

۱. کامپیوترفقط تعدادی متناهی از ارقام معنی‌دار را می‌پذیرد، از این‌رو نمی‌توانیم انتظارداشته باشیم که صفری بادقت نامتناهی را محاسبه کند. لازم است که حـد مجازی برای آن‌مشخص کنیم. درهرسه زیر-برنامهٔSSP یعنی RTWI،RTMI، و RTNI باید حد مجازی مشخص شود (باپارامترورودی EPS). پس از آنکه موضـع ریشه در محدودهٔ این حد مجاز تعیین شد، زیر-برنامه، کنترل‌را به‌برنامهٔ اصلی‌که این زیر-برنامه را فراخوانده است، باز می‌گرداند.

۲. همهٔ رهیافتهایی که دراینجاتوضیح داده‌شد، تکنیکهای تکرار به‌شمارمی‌آیند. چند بارتکرارصورت‌می‌گیرد؟ چگونه تصمیم به‌توقف‌می‌گیریم؟ می‌توان طوری برنامه



شکل ۴. یك قطب ساده، $f(x_l).f(x_r)<0$.

دادکه تکرار تادستیابی به‌دقت مطلوب ادامه یابد. این مخاطره وجود دارد که شاید عاملی مانع همگرایی معقول شود. دراین صورت، حد مجاز موردنظر هرگز به‌دست نمی‌آید و یك حلقهٔ نامتناهی داریم. لذا اگر برای تعداد تکرارها قبلا بیشینه‌ای مشخص‌شود، بسیاربهتراست. این‌رهیافت نیزدرهرسه زیر-برنامهٔ SSP وجود دارد (باپارامتر ورودی IEND). لذا این زیر-برنامه‌ها، پس‌ازآنکه یك صفردرمحدودهٔ حد مجاز مشخص‌شده تعیین شد، ویا پس از آنکه تعداد تکرارها به‌بیشینهٔ مشخص شده رسید متوقف می‌شود؛ فرقی نمی‌کند کدام زودتر رخ دهد. در تکنیك نیمسازی ساده، گزینهٔ تعداد تکرارها به‌فاصلهٔ $x_r - x_l$ اولیه و به‌دقت مورد نیاز بستگی دارد. هر تکرار، گستره را به‌دو نیم می‌کند. باتوجه به‌اینکه $2^{10} = 1024 \approx 10^3$، باید ۱۰ بارتکرار سه‌رقم معنی‌دار و۲۰بار تکرار۶رقم معنی‌دار به‌مکان ریشه بیفزاید.

مسائل

۱۰۱ فرض‌کنید: $f(x)=x-ax^3$. برای روش نیوتون $|x_0|$ چقدر باید کوچك باشد تا به $x=0$ همگرا شود؟

۲۰۱ برای تعیین موضع یك‌ریشه ازتوابع زیراز روش نیوتون (RTNI یا برنامه‌ای که خودتان می‌نویسید) بهره‌گیرید:

(الف) $f(x)=x^2+1$، و $x_0 = 0.9,\ 1.0$

(ب) $f(x)=(x^2+1)^{1/2}$، و $x_0=0.9, 1.0$

(ج) $f(x)=\sin x$، $x_0=1.0, 1.1, 1.2$

(د) $f(x)=\tanh x$، $x_0=0.9, 1.0, 1.1$.

RTNI مستلزم آن است که زیر-برنامه‌ای برای تأمین $f(x)$ و مشتق آن بنویسید. برنامه را طوری بنویسید که هربار این زیر-برنامه فراخوانده شود، x و $f(x)$ نوشته شود، به‌طوری‌که بتوانید رد دنبالهٔ برونیابیها را بگیرید.

۳۰۱ به‌عنوان مثالی از آنچه‌که روش نیوتون می‌تواند انجام دهد، RTNI رابرای یافتن بزرگترین ریشهٔ چندجمله‌ای چبیشف، $T_{10}(x)$، فراخوانید. رشته‌ای از مقادیر اولیهٔ: $x=0.95, 0.96, 0.97, 0.98$ را بیازمایید. آنچه را که روی می‌دهد به‌تفصیل شرح‌دهید.

یادآوری. RTNI به‌زیر-برنامه‌ای نیازدارد‌که تابع ($T_{10}(x)$) ومشتق آن‌را تأمین کند. زیر-برنامهٔ CNP درSSP، $T_{10}(x)$ و Tهای باشاخصهای پایینتر را فراهم‌می‌آورد. $T'_{10}(x)$ را می‌توان ازمعادلهٔ (۷۷.۱۳) ($x\neq\pm1$) محاسبه‌کرد.

پاسخ. 0.98769 = ریشهٔ بیشینه.

۴۰۱ زیر-برنامه‌ای برای تعیین ریشه به‌روش سادهٔ نیمسازی بنویسیدکه پس‌ازآنکه‌دونقطه در دو سوی یك ریشهٔ سادهٔ حقیقی برگزیدید، آن را تعیین کند. زیر-برنامه‌ای را که نوشته‌اید، با تعیین ریشه‌های یك یا چند تا از چندجمله‌ایها یا توابع غیرجبری مقدماتی، بیازمایید.

۵۰۱ نظریهٔ نوسانهای شعاعی‌آزاد زمین همگن به‌معادلهٔ زیرمی‌انجامد

$$\tan x=\frac{x}{1-a^2x^2}$$

پارامتر a به‌سرعت امواج اولیه وثانویه وابسته است. سه ریشهٔ اول مثبت این معادله را به‌ازای $a=1.0$ بیابید.

پاسخ. $x_1=2.7437$ $x_2=6.1168$ $x_3=9.3166$.

۶۰۱ (الف) بااستفاده ازتابع بسل $J_0(x)$، که‌توسط زیر-برنامهٔ BESJ در SSP تولید می‌شود ، موضع ریشه‌های متوالی $J_0(x)$، یعنی α_n و α_{n+1} را به‌ازای $n=5, 10, 15, \ldots, 30$ تعیین‌کنید. α_n، α_{n+1}، $(\alpha_{n+1}-\alpha_n)$ و $(\alpha_{n+1}-\alpha_n)/\pi$ را درجدولی درج کنید. توجه‌کنیدکه کسرآخری چگونه به‌یك‌نزدیك می‌شود.

راهنمایی. پس ازآنکه دو نقطه در دو سوی ریشه یافتید، RTMI آن را بادقت تعیین می کند.

(ب) مقـادیری را که برای α_n یافته‌اید، با مقادیری که به‌کمك بسط ملشماهون در AMS-55، معادلهٔ ۱۲.۵.۹، به‌دست می‌آید، مقایسه‌کنید.

مراجع

Hamming, R.W., *Introduction to Applied Numerical Analysis*. New York: McGraw-Hill, 1971, (به‌ویژه فصل ۲).

ازنظراحاطهٔ مؤلف برمحاسبهٔ عددی و توانایی او در مخاطب قراردادن خوانندهٔ با توانایی متوسط، هیچ‌کتابی برتر از این‌کتاب یافت‌نمی‌شود.

پیوست ۲

کوادراتور گاؤسی

فرمولهای درونیاب

مسئله عبارت است ازیافتن مقدارعددی یك انتگرال معین

$$I = \int_a^b f(x) w(x)\, dx$$

این‌انتگرال‌را به‌کمك مجموعیابی متناهی زیر تقریب می‌زنیم

$$\int_a^b f(x)\, w(x)\, dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \qquad (\text{پ } ۱.۲)$$

مجموعیابی معادلهٔ (پ۱.۲) حاوی $2n+1$ پارامترزیر است

n نقطهٔ x_k برای تعیین $f(x)$

n ضریب A_k

و

۱، گزینه برای خود n

درادامه، $f(x)$ را بایك چندجمله‌ای درونیاب $P(x)$ از درجهٔ $n-1$ و یك جملهٔ باقیماندهٔ

$$f(x)=P(x)+r(x) \qquad \text{(پ ۲.۲)}$$

تعویض می‌کنیم. در $n x_k [P(x_k)=f(x_k)]$ تـابع $P(x)$ را به $f(x)$ برازش می‌دهیم؛ انتخاب، به‌این شرح است

$$P(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(x)}{(x-x_k)\alpha'(x_k)}f(x_k) \qquad \text{(پ ۳.۲)}$$

که در آن $\alpha(x)$ یك چندجمله‌ای درجهٔ nام کاملا تجزیه شده به‌صورت زیر است

$$\alpha(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) \qquad \text{(پ ۴.۲)}$$

دقت کنید که

$$\lim_{x\to x_k}\frac{\alpha(x)}{(x-x_k)\alpha'(x_k)}=1 \qquad \text{(پ ۵.۲)}$$

اگـر $f(x)$ یك چندجمله‌ای درجهٔ $n-1$ام باشد، باقیمانـدهٔ $r(x)$ صفر است و معادلهٔ (پ ۳.۲) به‌یك اتحاد تبدیل می‌شود. درحالت خاص [با استفاده ازمعادلهٔ (پ۵.۲)]داریم: $f(x_k)=P(x_k)$، چندجمله‌ای درجهٔ $(n-1)$ام درn نقطهٔ x_k به $f(x)$ برازش‌شده‌است.

اگر انتگرال جملهٔ باقیمانده کوچك باشد، بااستفاده ازمعادلهٔ (پ۳.۲)، داریم

$$\int_a^b f(x)\,w(x)\,dx\approx\int_a^b P(x)\,w(x)\,dx$$

$$\text{(پ ۶.۲)}$$

$$=\int_a^b\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\frac{\alpha(x)}{(x-x_k)\alpha'(x_k)}w(x)\,dx$$

باتعویض ترتیب انتگرالگیری ومجموعیابی خواهیم داشت

$$\int_a^b f(x)\,w(x)\,dx\approx\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\int_a^b\frac{\alpha(x)}{(x-x_k)\alpha'(x_k)}w(x)\,dx$$

$$\text{(پ ۷.۲)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}A_k f(x_k)$$

این نوع فرمولهای کوادراتوری را درونیاب می‌نامند. از آنجا که هرچندجمله‌ای $f(x)$ درجهٔ $n-1$ام رامی‌توان دقیقاً $[r(x)=0]$ توسط چندجمله‌ای درونیاب با برازش n نقطه‌ای $P(x)$ نمایش‌داد، معادلهٔ (پ۷.۲) برای چنین تابعهای چندجمله‌ای، $f(x)$، از دقت‌کافی برخورداراست.

موضع x_kها، یعنی صفرهای $\alpha(x)$ درمعادلهٔ (پ۷.۲)، مشخص نشده است. اگر آنها را درفواصل مساوی ازهم درنظر بگیریم، چند فرمول مختلف نیوتون-کوتز به‌دست خواهیم آورد. شاید قاعدهٔ سیمپسون [معادلهٔ (پ ۸.۲)] مشهورترین و، در میان‌فرمولهای ساده‌تر، دقیقترین آنهاست

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\{f(a)+4f(a+h)+2f(a+2h)+4f(a+3h)$$

(پ ۸.۲)

$$+2f(a+4h)+\dots+4f(b-h)+f(b)\}$$

دراینجا h فاصلهٔ بین نقاط هم‌فاصله است، $h=x_2-x_1=x_3-x_2$، و الی آخر. معادلهٔ (پ ۸.۲) را می‌توان به‌صورت یك جمع‌زنی یا برازش سه‌نقطه‌ای در نظر گرفت

$$\int_c^{c+2h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\{f(c)+4f(c+h)+f(c+2h)\} \quad (\text{پ } 9.2)$$

که انتظار داریم با وجود $f(x)$ دربازهٔ $[c, c+2h]$ از درجهٔ کمتر یا مساوی ۲، معادلهٔ (پ۹.۲) دقیق باشد.

قاعدهٔ سیمپسون عملا ازاین بهتراست. تحلیل خطا نشان می‌دهد که خطا در قاعدهٔ سیمپسون از عبارت $-h^5 f^{(4)}(\xi)/90$ به‌دست‌می‌آید، که در آن ξ نقطه‌ای است دربازهٔ $[c, c+2h]$. $f^{(4)}(x)$ به‌ازای $f(x)=x^3$ برابر صفر است، و قاعدهٔ سیمپسون برای معادله‌های درجهٔسوم دقیق است. خواننده می‌تواند این‌نکته را بانشان دادن این واقعیت که $\int_0^b x^3\,dx$ دقیقاً ازمعادلهٔ (پ۸.۲) به‌دست می‌آید، اثبات کند.

این‌نتیجه‌را می‌توان پیامدی از اصول تقارنی‌زیر دانست:(۱) ضرایب قاعدهٔسیمپسون نسبت به‌x_k میانی متقارن‌اند؛ این ضریبها برای معادلهٔ (پ ۹.۲) عبارت‌اند از ۱، ۴، ۱. (۲) در قاعدهٔ سیمپسون، $n=3$ فرد است و x^3 تابعی فرد است. اگر قرار دهیم: $c=-h$، آنگاه $c+h=0$، ودوطرف‌معادلهٔ (پ ۹.۲) به‌دلیل (پاد) تقارن، صفرمی‌شود. این درجهٔ دقت اضافی برای هریك ازفرمولهای نیوتون-کوتز با n فرد ظاهر می‌شود.

کوادراتورگاؤسی

گاؤس خاطرنشان کردکه مواضع x_k پارامترهای استفاده نشده‌ای‌اند که از آنها می‌توان برای بهبود دقت معادلهٔ (پ ۷.۲) استفاده کرد، این دقت بیشتر را درصورتی می‌توان به‌دست‌آوردکه صفرهای $\alpha(x)$ درفاصله‌های مساوی ازیکدیگر واقع نباشند، بلکه به‌صورت زیر انتخاب شوند.

x_k را طوری انتخاب می‌کنیم‌که چندجمله‌ای درجهٔ nام کاملا تجزیه شدهٔ $\alpha(x)$،

چندجمله‌ای درجهٔ nامی باشد که بر همهٔ چندجمله‌ایهای از درجه‌های پایینتر در بازهٔ $[a, b]$ نسبت به‌عامل وزن‌دهندهٔ $w(x)$ متعامـد باشد. ترکیبهایی از بازه و عامل وزنی که از همه متداولترند، آنهایی‌اندکه درجدول ۳.۹ درج شده‌اند.[۱] بنابراین x_kها عبارت‌اند از nصفر چندجمله‌ایهای درجهٔ nام لژاندر، هرمیت، لاگر، چبیشف، وجز اینها. x_kها و ضریبهای A_kی متناظر درفصل ۲۵ AMS-55 جدولبندی‌شده‌اند. زیر-برنامه‌های محاسبی نیز برای‌حالتهای لژاندر، لاگر، وهرمیت، هم دردقت یگانه وهم دردقت مضاعف، وجود دارد.

ثابت خواهیم کرد که این گزینهٔ x_k (به‌صورت صفرهای چندجمله‌ایهای متعامد درجهٔ nام مناسب)، فرمول کوادراتور (پ ۷.۲) را برای تابعی چون $f(x)$ که‌یك چندجمله‌ای ازدرجهٔ کمتر یا مساوی با $2n-1$ باشد، دقیق می‌سازد. توانایی این‌گزینهٔ‌گاؤسی درهمین است [دادن فاصلهٔ مساوی به x_kها (نیوتون-کوتز) تنها بـه‌ازای تابعی چون $f(x)$، کـه به‌صورت یك چندجمله‌ای از درجهٔ $(n-1)$ام یاکمتر برای n زوج و ازدرجهٔnام یاکمتر برای n فرد باشد، دقیق است].

اثبات لزوم وکفایت این‌گزینهٔ ریشه‌های چندجمله‌ایهای متعامد به‌قرار زیر است.

قضیه شرط لازم وکافی برای‌آنکه فرمول درونیابی به‌شکل (پ ۷.۲)، بـرای همهٔ چندجمله‌ایهای از درجهٔ $2n-1$ یا کمتر، دقیق باشد، آن است‌که $\alpha(x)$ نسبت به $w(x)$ روی بازهٔ $[a, b]$ برهمهٔ چندجمله‌ایهای از درجهٔ $n-1$ یاکمترمتعامد باشد.

لزوم. فرض‌کنید کـه معادلهٔ (پ ۷.۲) بـرای تابعی چون $f(x)$ که به‌صورت هر چندجمله‌ای درجهٔ $2n-1$ام یاکمتر باشد، دقیق‌باشد. $Q_1(x)$ را یك‌چندجمله‌ای از درجهٔ $n-1$ام یاکمتر بگیرید. در این‌صورت $f(x)=\alpha(x)Q_1(x)$ یك چندجمله‌ای از درجهٔ $2n-1$ام یاکمتر است. بایك جانشانی ساده، داریم

$$\int_a^b f(x)\, w(x)\, dx = \int_a^b \alpha(x)\, Q_1(x)\, w(x)\, dx \qquad \text{(پ ۱۰.۲ الف)}$$

و از آنجا که معادلهٔ (پ ۷.۲) را برای انتگرالده‌هایی به‌صورت چندجمله‌ایهایی بـا این درجه دقیق‌گرفتیم، داریم

$$\int_a^b \alpha(x)\, Q_1(x)\, w(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} A_k\, \alpha(x_k)\, Q_1(x_k)$$

(پ ۱۰.۲ ب)

$$=0$$

تساوی باصفر درمرحلهٔ‌آخررا به‌این دلیل داریم‌که در معادلـهٔ (۴.۲): $\alpha(x_k)=0$. یعنی

---

۱. اگر a و b متناهـی بـاشند، بـازهٔ $[a, b]$ را همـواره مـی‌توان ازطریق تبدیـل خطی $t=[2x-(a+b)]/(a-b)$، $x=[(b-a)t+(b+a)]/2$، به $[-1, 1]$ تبدیل کرد. لذا، $\int_a^b f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} f(t)\, dt$.

این نکته بیان می‌شود کــه چندجمله‌ای درجهٔ nام ما، $w(x)$، برهمهٔ چندجمله‌ایهای $Q_1(x)$ بادرجهٔ کمتر از $n-1$ متعامد است.

کفایت. فرض کنید که $\alpha(x)$ برهمهٔ چندجمله‌ایهای ازدرجهٔ $n-1$ام یا کمتر متعامد باشد. $f(x)$ را یك چندجمله‌ای ازدرجهٔ $2n-1$ یاکمتر بگیرید. با تقسیم $f(x)$ بر $\alpha(x)$ داریم

$$\frac{f(x)}{\alpha(x)}=Q_2(x)+\frac{\rho(x)}{\alpha(x)} \tag{پ ۱۱.۲}$$

یا

$$f(x)=\alpha(x)Q_2(x)+\rho(x) \tag{پ ۱۲.۲}$$

که درآن $Q_2(x)$ و $\rho(x)$ چندجمله‌ایهای ازدرجهٔ $n-1$ام یاکمترهستند. با انتگرالگیری خواهیم داشت

$$\int_a^b f(x)w(x)\,dx=\int_a^b \alpha(x)\,Q_2(x)\,w(x)dx+\int_a^b \rho(x)w(x)dx \tag{پ ۱۳.۲}$$

انتگرال اول سمت راست به‌دلیل تعامــد مفروض صفر می‌شود. دراین‌صورت به‌آن جهت که درجهٔ $\rho(x)$ برابر $n-1$ یاکمتر از آن است، معادلهٔ (۷.۲) (که درونیاب است) دقیق خواهد بود و

$$\int_a^b f(x)\,w(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n} A_k\,\rho(x_k) \tag{پ ۱۴.۲}$$

باتوجه به‌اینکه $\alpha(x_k)=0$، ازمعادلهٔ (پ ۱۲.۲) خواهیم داشت

$$\rho(x_k)=f(x_k)$$

بنابراین

$$\int_a^b f(x)\,w(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n} A_k\,f(x_k) \tag{پ ۱۵.۲}$$

دقیق است. این‌عبارت، همان معادلهٔ (پ ۷.۲) است که برای هرچندجمله‌ای، مانند $f(x)$، از درجهٔ $2n-1$ یا کمتر دقیق است.

به‌عنوان مثالی خاص از معادلهٔ (پ ۱۵.۲) حــالتی را در نظر بگیرید که در آن $[a,b]=[-1,1]$ و $w(x)=1$. چندجمله‌ایهایی که روی این بازه ونسبت به‌این تابع وزنی‌متعامدند، عبارت‌اند ازچندجمله‌ایهای لژاندر درفصل ۱۲. x_kها به‌ازای گزینهٔ $n=10$، عبارت‌اند از ده‌ریشهٔ $P_{10}(x)$. مقدارهای A_k، دراصل، از معادلهٔ (۷.۲) به‌دست می‌آیند.

کریلوف عبارت مناسبتری به‌دست می آورد.[۱]

سرانجام معادلهٔ (پ ۱۵.۲)، بادراختیار داشتن مقادیرعددی A_kها و x_kها به‌صورت زیردرمی‌آید

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = &+0.06667134 f(+0.97390652)\\ &+0.14945134 f(+0.86506336)\\ &+0.21908636 f(+0.67940956)\\ &+0.26926671 f(+0.43339539)\\ &+0.29552422 f(+0.14887433)\\ &+0.29552422 f(-0.14887433)\\ &+0.26926671 f(-0.43339539)\\ &+0.21908636 f(-0.67940956)\\ &+0.14945134 f(-0.86506336)\\ &+0.06667134 f(-0.97390652)\end{aligned} \qquad \text{(پ ۱۶.۲)}$$

که برای تابعی چون $f(x)$ که به‌صورت یك چندجمله‌ای از درجهٔ ۱۹ یا کمتر باشد، (تا تعداد رقمهای فهرست‌شده) دقیق است.

فایدهٔ واقعی انتگرالگیری گاؤسی به‌دوعامل بستگی دارد: (۱) دسترسی به کامپیوتر و (۲) دسترس بودن مقادیر $f(x)$ درنقاط $x = x_k$. این‌موضوع به‌طور کلی به آن معنی‌است که $f(x)$ را می‌توان به صورت بسته، یا تقریباً به‌شکلی مناسب مشخص کرد، به‌طوری که $f(x_k)$ را بشود به‌آسانی محاسبه کرد. اگر $f(x)$ به‌صورت مقادیـر هم‌فاصلهٔ جدولبندی شده، داده شده باشد، شاید قاعدهٔ سیمپسون بهترین گزینه برای انتگرالگیری‌عددی باشد.

هشدار. فرض اساسی ما آن است‌که $f(x)$ را بتوان توسط یك چندجملـه‌ای درجهٔ $(2n-1)$ام، که در آن n به‌طور معقولی کوچك باشد، به‌دقت نمـایش داد. اگر $f(x)$ درون بازهٔ انتگرالگیری یك تکینگی داشته باشد، روشن‌است که این‌فرض وجود یك‌نمایش چندجمله‌ای اعتبار ندارد. حتی اگر $f(x)$ متناهی بماند، حضـور یك شیب نامتناهی بدان معناست‌که تقریب ما تقریب بدی است، ودقت عددی نسبتاً کم است. در مسئلهٔ پ ۷.۲ این نکات را ملاحظه می کنیم.

---

۱. جدولبندیهایی از A_kها و x_kهادر مراجعی که درانتهای فصل می‌آید، ودر AMS-55 (فصل ۲۵) یافت می‌شوند.

مسائل

۱.۲ (الف) معادلهٔ (پ ۵.۲) را اثبات کنید.

(ب) باچندجمله‌ای، $P(x)$، از درجهٔ $n-1$ یا کمتر ومقداری از $\alpha(x)$ که توسط معادلهٔ (پ ۴.۲) داده می‌شود، تحقیق کنید که

$$P(x)=\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(x)}{(x-x_k)\alpha'(x_k)} P(x_k)$$

۲.۲ بااستفاده ازیك زیر-برنامهٔ گاؤس-لژاندر ده رقمی انتگرال زیررا محاسبه کنید

$$\int_0^1 x^n\, dx \quad n=0(1)40 \text{ به‌ازای}$$

مقدارمحاسبه شدهٔ انتگرال، مقدار دقیق آن،وخطای‌نسبی‌را جدولبندی کنید.(خطای‌نسبی)log را برحسب n رسم کنید.

۳.۲ بااستفاده ازیك زیر-برنامهٔ گاؤس-لاگر ده‌رقمی انتگرال‌زیررا محاسبه کنید

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx \quad n=0(1)25 \text{ به‌ازای}$$

مقدارمحاسبه شدهٔ انتگرال، مقدار دقیق آن،وخطای‌نسبی‌را جدولبندی کنید.(خطای‌نسبی)log را برحسب n ترسیم کنید.

۴.۲ بااستفاده ازیك زیر-برنامهٔ گاؤس-هرمیت ده‌رقمی مقدارانتگرال زیر را محاسبه‌کنید

$$\int_{-\infty}^\infty x^n e^{-x^2} dx \quad n=0(2)22 \text{ به‌ازای}$$

مقدارمحاسبه شدهٔ انتگرال، مقداردقیق آن،وخطای نسبی را جدولبندی کنید.(خطای‌نسبی)og را برحسب n رسم‌کنید.

۵.۲ (الف) یك‌زیر-برنامهٔ گاؤس-چبیشف بادقتی مضاعف‌بنویسید‌که انتگرالهایی به‌صورت زیر را بااستفاده از ۲۰ نقطه، یعنی‌۲۰ ریشهٔ چندجمله‌ای چبیشف $T_{20}(x)$، محاسبه کند

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{(1-x^2)^{1/2}}\, dx$$

این ریشه‌ها وضریبهای A_k توسط استرود وسیکرست جدولبندی شده‌اند. (ب) زیر-برنامهٔ خود را بامحاسبهٔ

$$\int_{-1}^{1} x^{2n}(1-x^2)^{-1/2}dx$$

به‌ازای $n=0(2)30$، بیازمایید. مقدارمحاسبه شدهٔ این انتگرال مقدار دقیق آن، وخطای نسبی‌را درجدولی درج‌کنید. (خطای نسبی) log را برحسب n رسم‌کنید.

۶.۲ بااستفاده ازکوادراتورگاؤس-لژاندر انتگرال زیررا محاسبه‌کنید

$$4\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$$

برای به‌دست آوردن نتیجه‌ای که تا ۵ رقم معنی‌دار دقیق باشد، به‌چند نقطهٔ ارزیابی نیاز دارید؟ برای ۱۲ رقم بامعنی به‌چند نقطه نیاز دارید؟

پاسخ. ۵ رقم بامعنی $\Longleftarrow$ کوادراتورگاؤس-لاگر چهارنقطه‌ای

۱۲ رقم‌بامعنی $\Longleftarrow$ دوازده نقطه.

۷.۲ ثابت اویلر-ماشرونی، γ، را می‌توانیم با استفاده از مسئلهٔ ۱۱.۲.۱۰ به‌صورت زیر بنویسیم

۱. $$\gamma=-\int_{0}^{\infty}\ln r e^{-r}\,dr$$

۲. $$\gamma=1.0-\int_{0}^{\infty} r\ln r e^{-r}\,dr$$

[۳ رقم معنی‌دار $\Longleftarrow$ ۳۲ نقطه]

۳. $$\gamma=1.5-0.5\int_{0}^{\infty} r^2\ln r e^{-r}\,dr$$

(الف) توضیح دهید که چرا برای انتگرال اول، کوادراتور گاؤس-لاگر را نباید به‌کاربرد.

(ب) عبارتهای(۲) و (۳) را با به‌کاربردن کوادراتورگاؤس-لاگر ۳۲ رقمی‌محاسبه کنید و توضیح دهیدکه چرا دقت نتایج بسیار محدود است.

۸.۲ (الف) انتگرال‌زیررا بااستفاده ازفرمولهای‌کوادراتورگاؤس - هرمیت به‌ازای‌چندین مقدار n (تعداد نقطه‌های ارزیابی) براوردکنید

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x^2}dx}{1+|x|}$$

(ب) این انتگرال‌را به‌صورت زیر بازنویسی کنید

$$I=۲\int_{۰}^{\infty}\frac{e^{-x^۲+x}}{۱+x}e^{-x}\,dx$$

و آن‌را توسط کوادراتور گاؤس-لاگر، به‌ازای چندین مقدار n محاسبه کنید.

پاسخ. (ب) ۰٫۱۲۱۰۳

مراجع

Davis, P. J., and P. Rabinowitz *Methods of Numerical Integration.* Orlando: Academic Press, 1975.

Krylov, V. I. (ترجمه توسط استرود) و *Approximate Calculation of Integrals.* New York: Macmillan, 1962.

این کتاب بسیار واضح نوشته شده‌است، و عملا همهٔ جنبه‌های محاسبهٔ تقریبی انتگرالها را در برمی‌گیرد ومبحث بسیار خوبی است برای کوادراتور گاؤسی و سایر کوادراتورهای عددی. جدولهایی ازنقاط ارزیابی وعاملهای وزندارنیز دراین‌کتاب یافت می‌شود.

Stroud, A. H. *Numerical Quadrature and Solution of Ordinary Differential Equations*, Applied Mathematics Series., vol. 10. New York: Springer-Verlag, 1974.

این‌کتاب به‌عنوان یك‌بحث عالی دربارهٔ‌کوادراتورگاؤسی وسایر کوادراتورهای عددی، حاوی جدولهایی ازنقطه‌های ارزیابی وعاملهای وزندار نیزهست.

Stroud, A. H. and D. Secrest, *Gaussian Quadrature Formulas.* Englewood, N. J.: Prentice-Hall, 1966.

کتابی‌است باارزش عمدتاً بداین دلیل‌که حاوی جدولهای‌گسترده‌ای از x_kها و A_kها برای انواع بازه‌ها وعاملهای وزنداراست.

مراجع کلی

1. E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis,* 4 thed. Cambridge: Cambridge University Press, 1962.

این‌کتاب گرچه قدیمیترین مرجع است (ویرایش اصلی به سال ۱۹۰۲ برمی‌گردد) ولی هنوزهم مرجعی کلاسیك به‌شمار می‌آید. دراین‌کتاب نیز مانند ویرایش ۱۹۰۲ آن تکیه برریاضیات محض ودقت کامل ریاضی است.

2. P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics* vel.2 New York: McGraw-Hill Book Company, 1953.

در این‌کتاب ریاضیات مربوط به‌بخش اعظم فیزیك نظری به‌گونه‌ای مشروح ولی در سطحی‌نسبتاً پیشرفته ارائه‌شده‌است. این کتاب، منبع‌اطلاعات برجسته‌ای برای مطالعهٔ‌تکمیلی وبررسیهای پیشرفته به‌شمارمی‌آید.

3. H. S. Jeffreys and B. S. Jeffreys, "Methods of Mathematical Physics" 3 rd Ed. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1956.

این‌کتاب به‌بررسی پژوهشگرانهٔ گسترهٔ وسیعی از آنالیز ریاضی می‌پردازد، و در آن توجه قابل ملاحظه‌ای به‌دقت ریاضی می‌شود. کاربردهای عنوان شده بیشتر به‌فیزیك کلاسیك وژئوفیزیك مربوط می‌شود.

4. R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Col. I. (نخستین ویرایش انگلیسی) New York Wiley (Interscience), 1953.

این‌کتاب، به‌عنوان یك مرجع، برای فیزیك‌ریاضی، خصوصاً به‌خاطر قضیه‌های وجود و مباحث مربوط به‌زمینه‌هایی مانند مسائل ویژه‌مقداری، معادله‌های انتگرالی، و حساب وردشها بسیار باارزش است.

5. F. W. Byron, JR. and R. W. Fuller, *Mathematics of Classical and Quantum Physics*, Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1969.

کتاب درسی پیشرفته‌ای است که اطلاعات متوسطی از ریاضی‌فیزیك‌را دانسته‌فرض‌می‌کند.

6. C. M. Bender and S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. New York: McGraw-Hill, 1978.

7. *Handbook of Mathematical Functions with Formunas, Graphs, and Mathematical Tables*. Applied Mathematics Series, 55 (AMS_55), National Bureau of Standards, U.S. Department Commerce, 1964.

این کتاب، همان‌گونه که از عنوانش پیداست، بسیار بغرنج است، اما مرجع فوق‌العاده سودمندی است.

مراجع تخصصی‌تر دیگری نیز درانتهای هر فصل آمده است.

فهرست راهنما