قضیه: فرض کنید f بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد:

(i) اگر برای هر $a \leq x \leq b$، $f'(x) \geq 0$ آنگاه f بر (a,b) صعودی است؛

(ii) اگر برای هر $a \leq x \leq b$، $f'(x) \leq 0$ آنگاه f بر (a,b) نزولی است.

برهان (i) فرض کنیم $x_1, x_2 \in (a,b)$ و $x_1 < x_2$، چون f بر $[x_1,x_2]$ پیوسته و بر (x_1,x_2) مشتق‌پذیر است، با توجه به قضیه مقدار میانگین داریم: $\exists c \in (x_1,x_2)$ S.t.

$$0 \leq f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

حال چون $x_2 - x_1 > 0$ پس $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ یعنی $f(x_2) \geq f(x_1)$. برهان II مشابه است. ∎

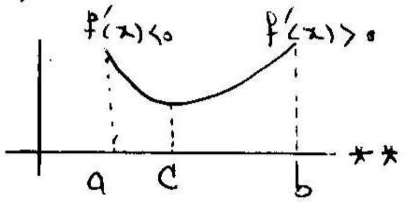
تمرین: ثابت کنید معادله $111x^{111} + 11x^{11} + x + 1 = 0$ حداکثر یک ریشه حقیقی دارد.

قضیه: فرض کنید f بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد به جز احتمالاً در c، آنگاه:

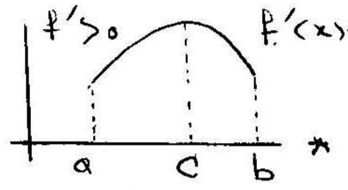
(i) هرگاه $f'(x)$ برای هر $x < c$ مثبت و برای هر $x > c$ منفی باشد آنگاه f در c دارای max نسبی است.

(ii) هرگاه $f'(x)$ برای هر $x < c$ منفی و برای هر $x > c$ مثبت باشد، آنگاه f در c دارای min نسبی است.

برهان با توجه به قضیه قبل بدیهی است.



**



*

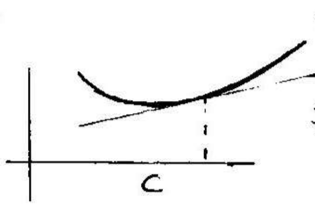
قضیه (آزمون مشتق دوم برای اکسترمم در یک نقطه بحرانی) فرض کنید $a<c<b$ و $f'(c)=0$، همچنین فرض کنیم f'' در (a,b) موجود باشد، در این صورت:

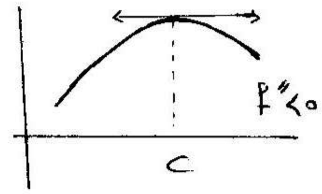
(i) اگر برای هر $a<x<b$، $f''(x)<0$، f در نقطه c دارای max نسبی است.

(ii) اگر برای هر $a<x<b$، $f''(x)>0$، f در نقطه c دارای min نسبی است.

برهان (i) بنا بر قضیه قبلی، چون بر (a,b)، $f''\leq 0$، لذا f' بر (a,b) نزولی است، اما $f'(c)=0$ پس f' در نقطه c از مثبت به منفی تغییر علامت می‌دهد (شکل *) بنابراین مطابق قضیه قبل f در c max نسبی دارد. برهان (ii) مشابه است. ∎

تعریف: می‌گوییم نمودار تابع f در نقطه c رو به بالا است هرگاه $f'(c)$ موجود بوده و یک همسایگی از نقطه c موجود باشد به طوری که برای هر $x \neq c$ نقطه $(x, f(x))$ واقع بر نمودار f، در بالای خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $(c, f(c))$ باشد.





با مشابهی برای تقعر به سمت پایین وجود دارد.

قضیه: فرض کنیم f در یک بازه باز شامل c مشتق‌پذیر باشد:

(i) اگر $f''(c)>0$ تقعر منحنی f در نقطه c به سمت بالا است.

(ii) اگر $f''(c)<0$ تقعر منحنی f در نقطه c به سمت پایین است.

برهان. بدون اثبات.

توجه کنید که عکس قضیه فوق الزاماً برقرار نیست، زیرا برای $f(x)=x^4$ ، $f''(0)=0$ در حالی که تقعر نمودار f در $x_0=0$ رو به بالا است.

تعریف: (نقطه عطف) نقطه $(c, f(c))$ را یک نقطه عطف تابع f گوییم هرگاه نمودار تابع f در این نقطه دارای خط مماس باشد و یک همسایگی از نقطه c موجود باشد که: (i) برای هر $x<c$ ، $f''(x)<0$ و برای هر $x>c$ ، $f''(x)>0$ یا (ii) برای هر $x<c$ ، $f''(x)>0$ و برای هر $x>c$ ، $f''(x)<0$.

قضیه: اگر f بر بازه‌ای شامل c مشتق‌پذیر بوده و c یک نقطه عطف منحنی f باشد، آنگاه $f''(c)$ در صورت وجود برابر صفر است.

برهان.

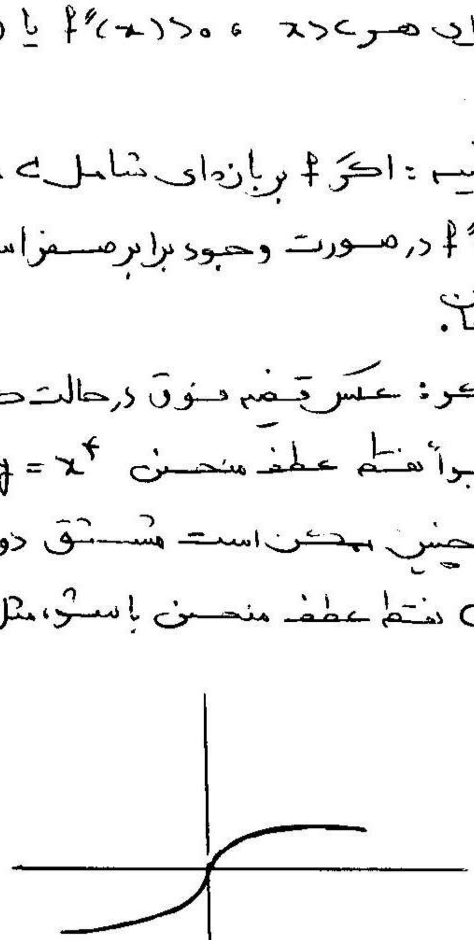
تذکر: عکس قضیه فوق در حالت کلی برقرار نیست. مثلاً $f(x)=x^4$ داریم $f''(0)=0$ ولی مبدأ نقطه عطف منحنی $y=x^4$ نیست زیرا f'' در مبدأ تغییر علامت نمی‌دهد.

همچنین ممکن است مشتق دوم یک تابع در نقطه‌ای مانند c موجود نباشد، در حالی که c نقطه عطف منحنی باشد، مثلاً تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ مفروض است داریم:

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3}$$

$$f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-5/3}=\frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}}$$

	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	+	موجود نیست	+
y''	+	موجود نیست	−
y	−		+



$f''(0)$ موجود نیست