فصل ۱۴ معادلات هامیلتونی و فضای فاز

در این فصل معادلات لاگرانژ (یعنی معادلات مرتبه دوم دیفرانسیل) را به معادلات مرتبه اول دیفرانسیلی یعنی معادلات هامیلتونی تبدیل خواهیم کرد.

مثال ۱: فرض کنید $L = \frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2) + \frac{mMG}{r}$ لاگرانژی

یک جسم به جرم m که حول جرم بزرگتری به جرم M در حال چرخش باشد. در این صورت معادلات لاگرانژ به صورت

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right) = 0 \Rightarrow \ddot r - r\dot\theta^2 = -MG/r^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = 0 \Rightarrow 2r\dot r\dot\theta + r^2\ddot\theta = 0$$

نوشته می‌شوند. حال اگر سرعت‌ها را به عنوان متغیر مستقل به صورت زیر تعریف کنیم

$$v_r = \dot r \qquad v_\theta = \dot\theta$$

در این صورت داریم

$$\dot r = v_r \Rightarrow \dot v_r = r v_\theta^2 - \frac{MG}{r^2}$$

$$\dot\theta = v_\theta \Rightarrow \dot v_\theta = -2 v_r v_\theta / r$$

۴ معادله که همه آنها معادلات جدید معادلات مرتبه اول دیفرانسیلی هستند.

تبدیل لژاندر: برای بدست آوردن معادلات مرتبه اول یعنی معادلات هامیلتونی نیاز به شناخت تبدیل لژاندر است.

فرض کنید v_1 و v_2 تابع مشخصی از u_1 و u_2 باشند یعنی

$$v_1 = \frac{\partial F}{\partial u_1} \qquad v_2 = \frac{\partial F}{\partial u_2}$$

که $F(u_1, u_2)$ تابعی از u_1 و u_2 است. همچنین ممکن است بتوان تابع وارونی پیدا کرد که

$$u_1 = \frac{\partial G}{\partial v_1} \qquad u_2 = \frac{\partial G}{\partial v_2}$$

(۲) اما سوآلی که مطرح می‌شود این است که $G(v_1, v_2)$ چیست؟

شرط سازگاری: اگر $u_1 = f_1(v_1, v_2)$ و نیز $u_2 = f_2(v_1, v_2)$ باشد شرط

$$u_1 = \frac{\partial G}{\partial v_1} \quad , \quad u_2 = \frac{\partial G}{\partial v_2}$$ برقرار

است اگر و فقط اگر $\frac{\partial f_1}{\partial v_2} = \frac{\partial f_2}{\partial v_1}$ برقرار باشد.

فرض کنید $F(u_1, u_2)$ تابعی از u_1 و u_2 و نیز $G(v_1, v_2)$ تابعی از v_1 و v_2 باشد در حالی که شرط $u_1 = \frac{\partial G}{\partial v_1}$ و $u_2 = \frac{\partial G}{\partial v_2}$ برقرار باشد در این صورت می‌توان تابع X را به صورت زیر در نظر گرفت

$$X = F(u_1, u_2) + G(v_1, v_2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2)$$

همانطور که پیدا است X تابعی از چهار متغیر u_1, u_2, v_1, v_2 است ولی چون v_1 و v_2 را می‌توان برحسب u_1 و u_2 نوشت بنابراین X تابعی از u_1, u_2 است در این صورت

$$\frac{\partial X}{\partial u_1} = \frac{\partial F}{\partial u_1} + \left(\frac{\partial G}{\partial v_1} \times \frac{\partial v_1}{\partial u_1} + \frac{\partial G}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial u_1}\right) - \left(v_1 + u_1\frac{\partial v_1}{\partial u_1} + u_2\frac{\partial v_2}{\partial u_1}\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial u_1} - v_1\right) + \left(\frac{\partial G}{\partial v_1} - u_1\right)\frac{\partial v_1}{\partial u_1} + \left(\frac{\partial G}{\partial v_2} - u_2\right)\frac{\partial v_2}{\partial u_1}$$

$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

یعنی X مستقل از u_1 است. همچنین به روش مشابه می‌توان نشان داد که $\frac{\partial X}{\partial u_2}=0$

نیز است. در این صورت X یک تابع ثابت است. اگر مقدار این تابع ثابت را

صفر در نظر بگیریم در این صورت

$$F(u_1,u_2)+G(v_1,v_2)=u_1v_1+u_2v_2$$

و بنابراین

$$G(v_1,v_2)=u_1v_1+u_2v_2-F(u_1,u_2)$$

که u_1 و u_2 تابعی از v_1 و v_2 هستند.

مثال: تبدیل لژاندر تابع زیر را بیابید؟

$$F(u_1,u_2)=2u_1^2+3u_1u_2+u_2^2$$

$$\begin{cases} v_1=\frac{\partial F}{\partial u_1}=4u_1+3u_2 \\ v_2=\frac{\partial F}{\partial u_2}=3u_1+2u_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1=-2v_1+3v_2 \\ u_2=3v_1-4v_2 \end{cases}$$

بنابراین

$$G(v_1,v_2)=u_1v_1+u_2v_2-F(u_1,u_2)$$

$$=-v_1^2+3v_1v_2-2v_2^2$$

تمرین: اگر تابع انرژی در ترمودینامیک تابعی از $U(S,V)$ آنتروپی و حجم باشد

در این صورت قانون اول ترمودینامیک $dU = TdS - pdV$ است. حال نشان

دهید که آنتالپی $H = U + PV$ یک تبدیل لژاندر است.

تغییرهای معلوم و مجهول ۱: تغییرهای (u_1, u_2) و w (v_1, v_2) که همان

برحسب مجهول‌ها نوشته شوند متغیرهای معلوم و w به متغیرهای که نسبت به آن

برحسب هم نوشته شوند تغییرهای مجهول می‌شوند

فرض کنید $F = F(u_1, u_2, w)$ و $G = G(v_1, v_2, w)$ باشند و w در هر دو

تابع یک متغیر مجهول است. در این صورت

$$G(v_1, v_2, w) = u_1 v_1 + u_2 v_2 - F(u_1, u_2, w)$$

آنگاه اگر فرض کنیم v_1 و v_2 را بتوان برحسب توابعی از u_1 و u_2 و w نوشت داریم

$$\frac{\partial F}{\partial w} + \left(\frac{\partial G}{\partial v_1} \times \frac{\partial v_1}{\partial w} + \frac{\partial G}{\partial v_2} \times \frac{\partial v_2}{\partial w} + \frac{\partial G}{\partial w}\right) = u_1 \frac{\partial v_1}{\partial w} + u_2 \frac{\partial v_2}{\partial w}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial w} + \frac{\partial G}{\partial w} = \left(u_1 - \frac{\partial G}{\partial v_1}\right)\frac{\partial v_1}{\partial w} + \left(u_2 - \frac{\partial G}{\partial v_2}\right)\frac{\partial v_2}{\partial w}$$

$$= 0 + 0 = 0$$

در این صورت داریم

$$\frac{\partial F}{\partial w} = -\frac{\partial G}{\partial w}$$

معادلات هامیلتونی

در اینجا می‌توان تکانه تعمیم یافته را به صورت زیر از لاگرانژی به دست آورد

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot q_j} \Rightarrow P = \mathrm{grad}_{\dot q}\, L(q,\dot q,t)$$

حال اگر تبدیل لژاندری به صورت $H(q,p,t)$ وجود داشته باشد

یعنی $\dot q = \mathrm{grad}_p\, H(p,q,t)$

یعنی $H(p,q,t) = \dot q \cdot p - L(q,\dot q,t)$

همچنین در این رابطه $\dot q$ و p کمیت‌های معلوم و نیز q و t متغیر مجهول

هستند نیز

$$\begin{cases} \mathrm{grad}_q\, L(q,\dot q,t) = -\mathrm{grad}_q\, H(q,p,t) \\ \dfrac{\partial L}{\partial t} = -\dfrac{\partial H}{\partial t} \end{cases}$$

بنابراین معادلات هامیلتونی به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\dot q = \mathrm{grad}_p\, H(p,q,t) \Rightarrow \dot q_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

و نیز

$$\dot p_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right) = -\frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

(۴)

بنابراین به طور کلی

$$L(\dot{q}_j, q_j, t)$$

$$H = \dot{q}_j p_j - L(\dot{q}_j(p_j, q_j, t), q_j, t)$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

مثال: لاگرانژی زیر را که برای یک نوسانگر پاندول است در نظر بگیرید

$$L = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 + mga\cos\theta$$

در این صورت تکانه به صورت زیر تعریف می‌شود

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ma^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ma^2}$$

و همیلتونی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$H = \dot{\theta} p_\theta - L$$

$$= \left(\frac{p_\theta}{ma^2}\right) p_\theta - \frac{1}{2} m a^2 \left(\frac{p_\theta}{ma^2}\right)^2 - mga\cos\theta$$

$$= \frac{p_\theta^2}{2ma^2} - mga\cos\theta$$

در این صورت معادلات همیلتونی به صورت زیر بدست می‌آیند

$$(1)\ \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ma^2} \qquad (2)\ \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mga\sin\theta$$

با گرفتن مشتق زمانی از رابطه (1) و قرار دادن آن در رابطه (2)

می‌توان p_θ را حذف کرد و به رابطه زیر رسید

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{a}\sin\theta = 0$$

نکته: اگر هامیلتونی تابعی از t نباشد در این صورت

$$\frac{dH}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_j}\dot q_j+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_j}\dot p_j$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_j}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_j}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_j}\right)$$

$$=0$$

پس در سیستم‌های مستقل همیشه H ثابت حرکت است یعنی اگر $H(p,q)$ باشد

می‌توان نوشت $\Leftarrow$ $H(p,q)=T(p,q)+V(q)$

تمرین: اگر برای یک سیستم نیروی زمین کند $T=\frac{1}{2}m(\dot r^2+r^2\dot\theta^2)$ و نیز $V=-\frac{mMG}{r}$ باشد در این صورت نشان دهید $H=T+V$ است و نیز معادلات هامیلتونی را پیدا کنید!

فضای فاز: به فضایی گفته می‌شود که هر نقطه در این فضا دارای مختصات $\{q(t),p(t)\}$ باشد که به این دو مختصات زوج مزدوج گفته می‌شود و به p تکانه تعمیم یافته گفته می‌شود یعنی

مسیر نمایش داده شده تحول سیستم از زمان $t=0$ تا زمان t را در فضای فاز نشان می‌دهد.

مثال: اگر $L = \frac{\dot{q}^2}{4} - \frac{q^2}{9}$ باشد مسیرهای فضای فاز هامیلتونی و معادلات تحول

سیستم را نشان داده و در صفحه رسم کنید.

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{2}\dot{q}$$

$$H = \dot{q}p - L = p^2 + \frac{q^2}{9}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = 2p$$

معادلات هامیلتونی

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{2q}{9}$$

$$\ddot{q} + 4q/9 = 0$$

در نتیجه با حذف p داریم

$$\ddot{q} + \Omega^2 q = 0$$

این یک معادله نوسانگر است که جواب آن به صورت

$$q = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t = A\cos(\Omega t + \alpha)$$

درنتیجه داریم

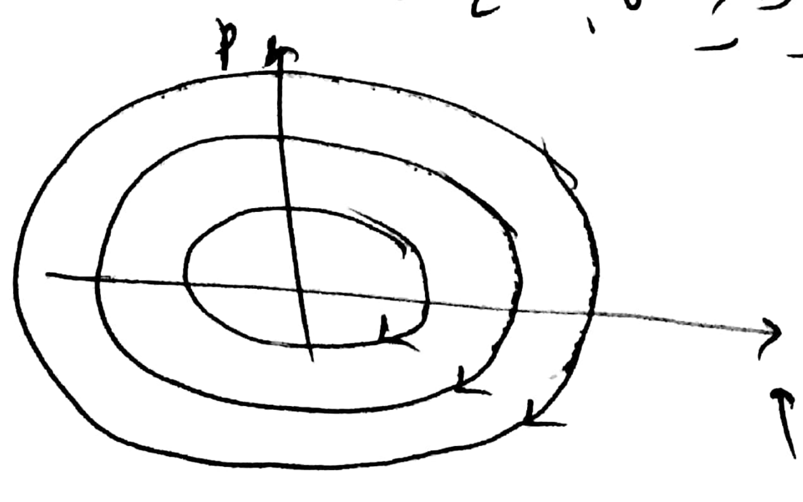
$$q = 3A\cos(2t/3 + \alpha)$$

$$p = -A\sin(2t/3 + \alpha)$$

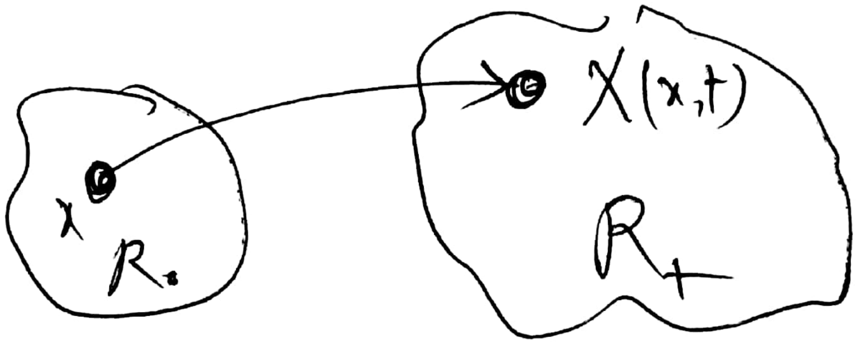
که معادله به صورت

$$q^2 + 9p^2 = A^2$$

را نشان می‌دهد یعنی دایره‌هایی به شعاع A را نشان می‌دهد



(۴) قضیه لیوویل: اگر در زمان t_0 نقاط فضای فاز ناحیه R_0 را
اشغال کرده باشند، در این صورت با افزایش t در اثر حرکت معادلات
همیلتونی، بعد از زمان t ناحیه R_t از فضای فاز را اشغال
خواهند کرد که از نظر شکل با ناحیه R_0 متفاوت است ولی حجم این ناحیه
با حجم ناحیه R_0 برابر است $\Leftarrow$ قضیه لیوویل



اثبات: همانطور که در شکل نمایش داده شده است نقطه x بعد از زمان t
به نقطه $X=X(x,t)$ منتقل خواهد شد. در این صورت حجم ناحیه R_t برابر
است با (البته در دو بعد)

$$v(t)=\int_{R_t} dX_1\, dX_2 = \int_{R_0} J\, dx_1\, dx_2$$

J ژاکوبین تبدیل دو مختصات است (مختصات قدیم x_1 و x_2 و مختصات جدید X_1, X_2)

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

برای مقادیر کوچک t داریم

$$X(x,t)=X(x,0)+t\frac{\partial X}{\partial t}(x,0)+O(t^2)$$
$$= x + tF(x,0)$$

که $\dot{x} = F(x,t)$ است بنابراین

$$J = 1 + t\left[\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right]\Big|_{t=0} + O(t^2)$$

$$= 1 + t\,\mathrm{div}\,F(x,0) + O(t^2)$$

بنابراین

$$V(t) = \int_{R_0} \left(1 + t\,\nabla F(x,0)\right) dx_1\,dx_2 + O(t^2)$$

بنابراین اگر نشان دهیم $\frac{dV}{dt}=0$ است در این صورت حجم ثابت می‌ماند

$$\frac{dV(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{V(t)-V(0)}{t}\right) = \int_{R_0} \nabla F(x,0)\,dx_1\,dx_2$$

به علت اینکه انتخاب $t=0$ یک انتخاب آزاد بوده است بنابراین می‌توان

رابطه بالا را نیز برای زمان t دلخواه به شکل زیر نوشت

$$\frac{dV}{dt} = \int_{R_t} \nabla F(x,t)\,dx_1\,dx_2$$

رابطه بالا نشان می‌دهد برای زمانی که $\nabla F(x,t)$ برابر صفر باشد حجم

ثابت می‌ماند

$$\nabla F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) + \frac{\partial}{\partial p}\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) = 0$$

به علت اینکه $(x_1,x_2)=(q,p)$ هستند بنابراین رابطه بالا برقرار است

$$F_1 = \frac{\partial H}{\partial p} \Rightarrow \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$F_2 = \frac{\partial H}{\partial q} \Rightarrow \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

برای فضاهای فاز هامیلتونی

قضیه لیوویل همواره برقرار است