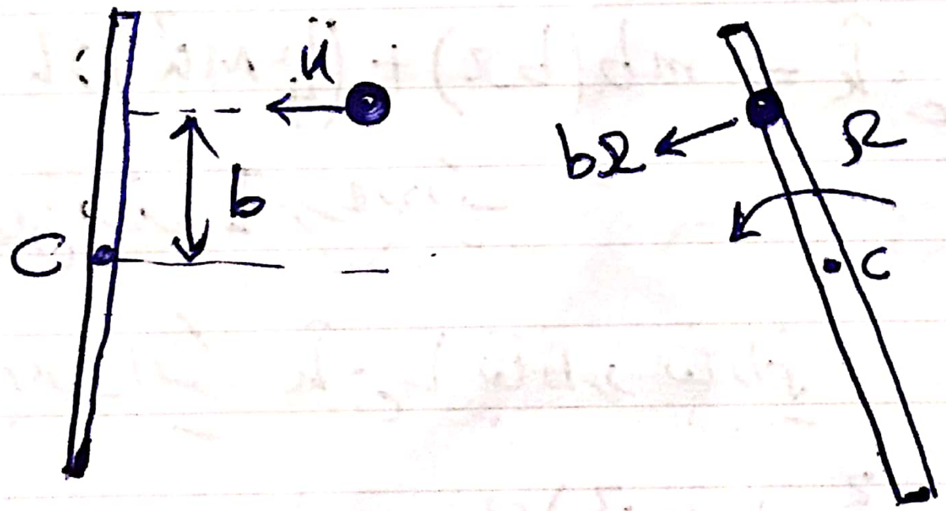
Date: (۱) Subject:

مطابق شکل یک دیسک یکنواخت به شعاع a و جرم M که به صورت عمودی ایستاده را در نظر بگیرید. اگر یک ذره (گلوله) به جرم m با سرعت u مطابق شکل در فاصله b به دیسک برخورد کند و در آن فرو رود. اگر دیسک در نقطه c آزادانه بتواند بچرخد در این صورت نشان دهید سرعت زاویه‌ای دیسک را بیابید؟



همچنین نشان دهید انرژی هدر رفته با رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\frac{1}{2} m u^2 \left(\frac{Ma^2}{Ma^2+4mb^2}\right)$$

حل ۱) به علت اینکه حرکت در صفحه xy اتفاق می‌افتد

بنابراین مولفه $\hat{k}$ ی L_c بقا دارد.

تکانه زاویه‌ای در حال اولیه (قبل برخورد)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow \begin{cases} L_{\text{گلوله}} = b\hat{j} \times mu\,\hat{i} \Rightarrow \vec{L}\cdot\hat{k} = bmu \\ L_{\text{دیسک}} = 0 \quad \text{(به علت ساکن بودن)} \end{cases}$$

بعد از برخورد سرعت گلوله فرو رفته $b\Omega$ دیده

$$L_c\cdot\hat{k} = mb(b\Omega) + \underbrace{\left(\tfrac{1}{4}Ma^2\right)}_{}\Omega$$

همان گشتاور I مربوط به دیسک

به علت اینکه $\hat{k}$ ی L_c بقا دارد بنابراین

$$\left(mb^2 + \tfrac{1}{4}Ma^2\right)\Omega = mbu$$

$$\Rightarrow \boxed{\Omega = \frac{4mbu}{Ma^2 + 4mb^2}}$$

به علت اینکه برخورد یک برخورد ناکشسان است

بنابراین $Q = T_1 - T_2$ بعد برخورد

انرژی قبل برخورد

Date: (3) Subject:

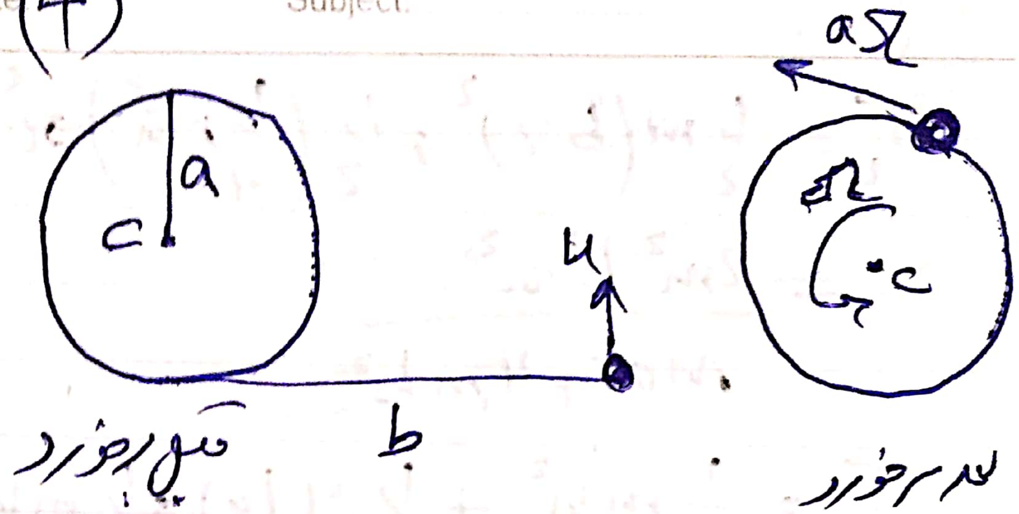
$$T_2 = \frac{1}{2} m (b\Omega)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} M a^2\right)\Omega^2$$

$$= \frac{2m^2 b^2 u^2}{Ma^2 + 4mb^2}$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m u^2 + \frac{1}{2} M (0) = \frac{1}{2} m u^2$$

$$Q = T_1 - T_2 = \frac{m M a^2 u^2}{2(Ma^2 + 4mb^2)}$$ [illegible]

مطابق شکل استوانه‌ای به جرم M و شعاع a حول محور
آزادانه در چرخش است. یک طناب بی جرم که یک ذره
به جرم m در انتهای آن متصل است را در نظر
می‌گیریم که به استوانه متصل است و طناب دور استوانه
پیچ نخورده. با فرض اینکه سرعت اولیه ذره u باشد
سپس ذره به سمت استوانه حرکت کند و روی
آن قرار گیرد و به آن بچسبد در این صورت
سرعت زاویه‌ای استوانه چقدر خواهد شد



استوانه $I=\frac{1}{2}Ma^2$

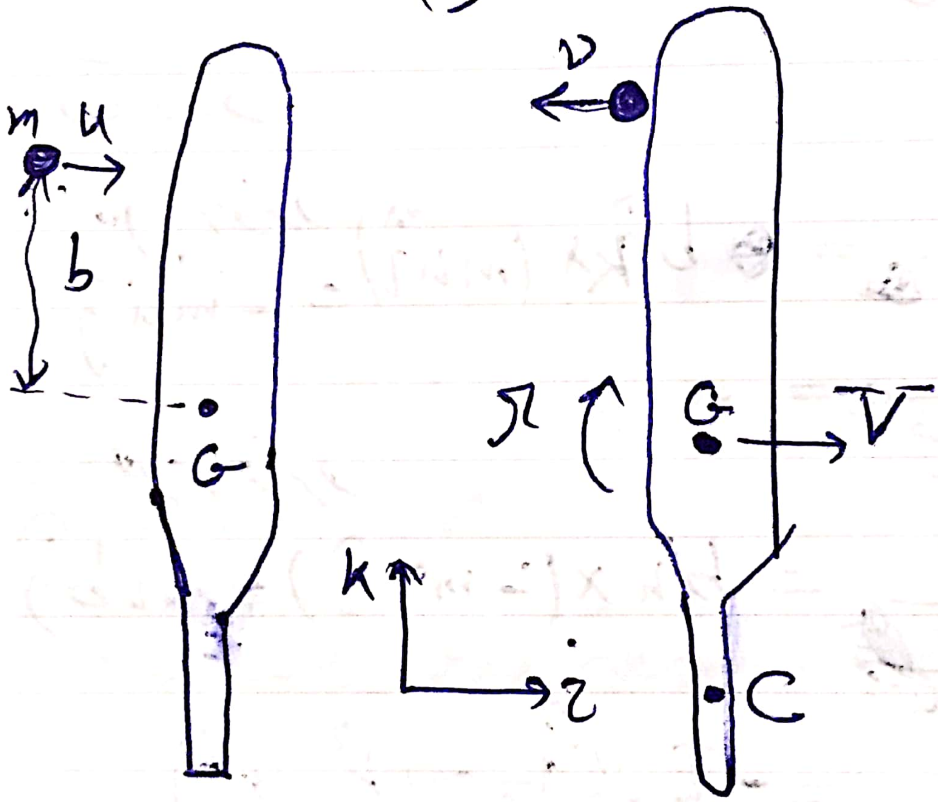
حل ! مطابق مسئله قبل حل خواهد شد.

مطابق شکل یک چوب بیسبال را در نظر بگیرید که مطابق شکل توپی به جرم m به آن برخورد می کند. اگر جرم چوب M و ممان اینرسی آن Mk^2 حول محوری از مرکز جرم که عمود بر محور تقارن است. نشان دهید در هر دو برخورد الاستیک یا ناالاستیک، یک نقطه روی محور تقارن قرار دارد که بعد از برخورد بلافاصله به حالت سکون در می گردد و فاصله آن از مرکز جرم c است. نشان دهید که $bc=k^2$ است.

همچنین در برخورد کشسان نشان دهید

سرعت توپ بعد از برخورد چقدر است؟

(از اتلاف صرف نظر کنید)



حل: مجموعه توپ و چوب یک سیستم ایزوله (منزوی) است لذا

$$\dot{P} = F = 0 \Rightarrow P = \text{constant}$$

تکانه خطی بقا دارد

قبل برخورد $P_m = mu\hat{i}$, $P_M = 0$ و

بعد از برخورد $P_m = -mv\hat{i}$ و $P_M = MV\hat{i}$ است

بنابراین

$$-mv + MV = mu$$

$(**)\quad m(u+v) = MV$ یعنی

از طرف دیگر به علت اینکه پخش در صفحه $\hat{i}$ و $\hat{k}$

اتفاق می‌افتد تنها برای $L_G \cdot \hat{j}$ بقا داریم

قبل برخورد

$$L_{\text{توپ قبل}} = b\hat{k} \times (mu\hat{i}) = -mu\hat{j}$$

$$L_{a\,\text{میله قبل}} = 0$$

بعد برخورد

$$L_{\text{توپ بعد}} = b\hat{k} \times (-mv\hat{i}) = mvb\hat{j}$$

$$L_{\text{میله بعد}} = -(I\Omega)\hat{j} = -Mk^2\Omega\hat{j}$$

حال به علت اینکه در جهت ساعتگرد می‌چرخد

$$(L_a \cdot \hat{j})_{\text{قبل}} = (L_a \cdot \hat{j})_{\text{بعد}}$$

$$(*)\quad -mbv + (Mk^2)\Omega = mbu$$

$\Rightarrow$ همچنین با توجه به رابطه‌های $*$ و $**$ داریم

$$\Omega = \frac{bV}{k^2}$$

Date: (7) Subject:

حل) اگر نقطه ای مذکور که بعد از برخورد

ساکن می‌شود را C فرض کنیم همانطور که در

شکل نشان داده شده است. چون سرعت C

بلافاصله طوری است بنابراین

$$v_c = \bar{V} - \Omega c$$
$$= \bar{V}\left(1 - \frac{bc}{k^2}\right)$$

چون $v_c = 0$ است بنابراین $k^2 = bc$ است.

قسمت ب) اگر فرض کنیم برخورد کشسان باشد

در این صورت انرژی جنبشی قبل و بعد برخورد با یکدیگر

برابر است

$$T_1 = \frac{1}{2} m u^2 + 0$$
$$T_2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M \bar{V}^2 + \frac{1}{2}(M k^2)\Omega^2$$

از طرفی $\Omega = \frac{b\bar{V}}{k^2}$ است بنابراین

$$T_1 = T_2 \Rightarrow m(u^2 - v^2) = M\left(1 + \frac{b^2}{k^2}\right)\bar{V}^2$$

همچنین از بقای تکانه خطی

$$m(u+v) = M\bar{V}$$

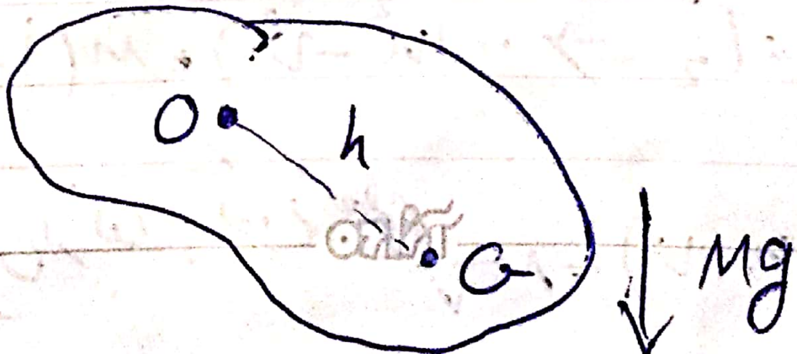
را داریم بنابراین

$$\begin{cases} u - v = \left(1 + \frac{b^2}{h^2}\right) V \\ (u + v) = \frac{M}{m} V \end{cases}$$

$$\Rightarrow v = \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta}\right) u$$

که $\beta = \frac{m}{M}\left(1 + \frac{b^2}{h^2}\right)$ است.

سوال ۱) [illegible] شکل یک پاندول به شکل دلخواه را در نظر بگیرید که حول محور O می‌چرخد و نوسان می‌کند. اگر فاصله مرکز جرم G تا این محور O برابر با h باشد و نیز ممان اینرسی مربوط به این شکل I باشد. در این صورت دوره تناوب مربوط به این شکل را حساب کنید.



Date (۹) Subject:

حل : ۱) قسمت الف جسم محدود است که حول محور O

بچرخد دارای معادله

$$\frac{dL_o}{dt} = K_o$$

است از طرفی گشتاور K_o برای نیروی گرانش

که به مرکز جرم وارد می‌شود برابر است با

$$\vec{K}_o = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow (K_o)$$

$$K_o = rF\sin\theta = hMg\sin\theta$$

از طرفی

$$L_o = (-) I\dot{\theta}$$

علامت منفی به خاطر جهت گرد

عکس بودن چرخش است

از طرفی نیز

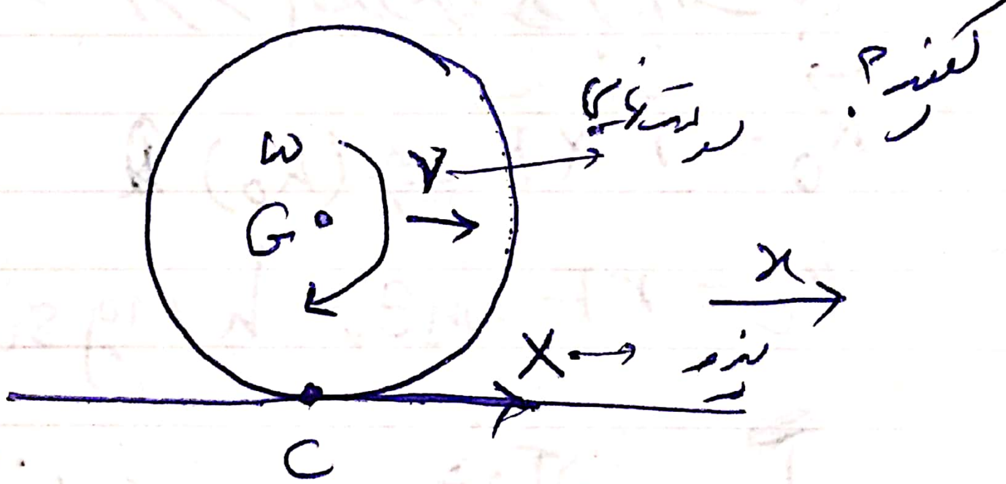
$$\dot{L}_o = K_o$$

$$\frac{d}{dt}(I\dot{\theta}) = Mgh\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgh}{I}\sin\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgh}{I}\theta = 0 \Rightarrow \Omega^2 = \frac{mgh}{I}$$

یک توپ مطابق شکل را در نظر بگیرید
ابتدا این توپ فقط با سرعت V و بدون
هیچ گونه چرخش رها می شود. مطلوبست محاسبه
سرعت توپ زمانی که شروع به غلتش می کند را حساب
کنید؟



چون توپ در راستای x حرکت می کند بنابراین

$$M\frac{dV_x}{dt} = F_x$$

$$\frac{dL_G}{dt} = I_a\frac{d\omega}{dt} = K_G$$

بنابراین

$$M\ddot{x} = X$$

$$\frac{2}{5}Ma^2\dot{\omega} = -aX$$

به علت ساعتگرد بودن

با حذف نیرو از دو طرف معادله

$$\Rightarrow \dot{v} + \frac{2}{5} a\dot{\omega} = 0$$

با گرفتن انتگرال از روابط فوق

$$v + \frac{2}{5} a\omega = \text{ثابت} = c$$

چون در $t = 0$ $\quad v = V$, $\omega = 0$

بوده است بنابراین $c = V$

داریم $v + \frac{2}{5} a\omega = V$

حال اگر سرعت $\omega = v/a$ باشد

$$\Rightarrow v + \frac{2}{5} a\left(\frac{v}{a}\right) = V$$

$$\Rightarrow v = \frac{5}{7} V$$

خواهد بود و تغییرات انرژی جنبشی

$$T_2 = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} M a^2\right)\left(\frac{v}{a}\right)^2$$

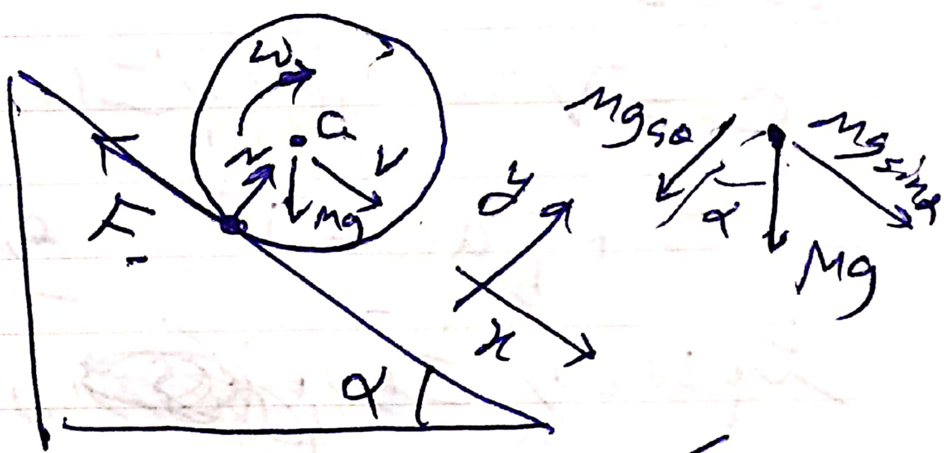
$$= \frac{5}{14} M V^2 = \frac{5}{7} T_1$$

$$T_1 = \frac{1}{2} M V^2$$

مطابق شکل یک توپ از روی سطح شیب داری با زاویه α شروع به حرکت می کند. ضریب اصطکاک میان توپ و سطح برابر μ است.

آیا توپ روی سطح می غلتد یا می لغزد؟

ب) شتاب توپ را بیابید؟



معادلات حرکت به صورت زیر نوشته می شوند

$$M \frac{dV_x}{dt} = F_x$$

$$M \frac{dV_y}{dt} = F_y$$

$$\dot{L}_G = I_G \frac{d\omega}{dt} = K_G$$

بنابراین

$$M\dot{v} = Mg\sin\alpha - F$$

$$0 = N - Mg\cos\theta$$

(13)

$$\frac{2}{5}Ma^2\dot{\omega} = aF$$

بنابراین چون در راستای y هیچ حرکتی نداریم

$\dot{v}_y = 0$ ، $N = Mg\cos\alpha$ است.

توجه: توپ در راستای x حرکت می‌کند و در راستای y هیچ حرکتی ندارد.

حال با فرض اینکه حرکت غلتشی باشد $\omega = \frac{v}{a}$ را می‌توان در نظر گرفت که از حل معادلات

$$\frac{2}{5}Ma^2\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{a}\right) = aF$$

$$\Rightarrow F = \frac{2}{5}M\dot{v}$$

و از $M\dot{v} = Mg\sin\alpha - F$

داریم $\dot{v} = \frac{5}{7}g\sin\alpha$

$$F = \frac{2}{7}Mg\sin\alpha$$

بنابراین $\frac{F}{N} = \frac{2}{7}\tan\alpha$

چون $F_s=\mu N$ است بنابراین

$$\mu = \frac{2}{7}\tan\alpha$$

اگر حل شد

$F<F_s$

$$\mu < \frac{2}{7}\tan\alpha \rightarrow$$ لغزش

$F>F_s$

$$\mu > \frac{2}{7}\tan\alpha \rightarrow$$ غلتش

حال با فرض لغزش می‌توان شتاب را حساب کرد

$$F=\mu N=\mu Mg\cos\alpha$$

$$\dot{v}=(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)g$$