(1) سیستم با قید متحرک: سیستم که دارای قیدی باشد که

قید آن علاوه بر اینکه به q وابسته است به t نیز

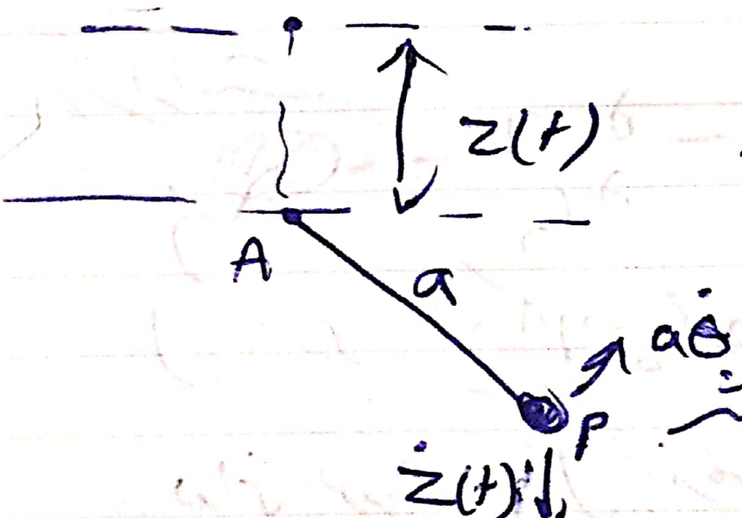
به عنوان یک متغیر مستقل نیز وابسته باشد

به عبارت دیگر

$$r_i = r_i(q, t)$$

زمان به عنوان یک متغیر مستقل در نظر گرفته شده است

مثال ۱:



پاندولی که دارای یک نقطه اتصال متحرک می‌باشد

بنابراین مکان ذره P با رابطه زیر داده می‌شود

$$r = (a\sin\theta)\hat{i} + (z(t) + a\cos\theta)\hat{k}$$

همانطور که می‌بینید قید باعث شده است که

هم به t و هم به q یعنی $r(q, t)$ بستگی داشته باشند

برای چنین سیستمی تا زمانی که نیروهای قیدی هیچ کاری انجام ندهند هنوز قضیه دالامبر برقرار باشد

$$\sum_{i=1}^{N} F_i^c \cdot \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right) = 0$$

همچنین به گونه‌ای که T و V به طور مستقیم به t بستگی داشته باشند یا t به عنوان متغیر مستقل در نظر گرفته شده باشد آنگاه همچنان معادلات لاگرانژ برقرار است.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j} T = Q_j$$

مثال با فرض اینکه $z(t) = z_0 \cos pt$ باشد

در این صورت در مثال پاندول انرژی جنبشی

$$T = \frac{1}{2}\left(a^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 - 2a\dot{\theta}\dot{z}\sin\theta\right)$$

$$V = -mg(z + a\cos\theta)$$ و انرژی پتانسیل

تمرین! معادله لاگرانژ را برای سیستم بالا به دست آورید.

لاگرانژ

همانطور که می دانیم انرژی پتانسیل ممکن است تابعی از متغیر های تعمیم یافته و سرعت های تعمیم یافته باشد یعنی

$$T(q,\dot q)$$

ولی برای سیستم های منزوی پتانسیل تنها تابعی از q است یعنی $V=V(q)$

در این صورت معادله لاگرانژ به صورت زیر بازنویسی خواهد شد

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot q_j}\right)-\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

$\Rightarrow$ با فرض $L=T-V$ داریم

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0$$

که $L=L(q,\dot q)$ است. برای سیستم های ناپایستار $L=L(q,\dot q,t)$ است که همچنان رابطه بالا برقرار است.

نمونه برای مثال قبل

$$L(\theta,\dot{\theta},t)=\frac{1}{2}m\left(a^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2-2a\dot{\theta}\dot{z}\sin\theta\right)$$
$$+mg(z+a\cos\theta)$$

حال فرض کنید سیستم غیر منزوی باشد در این صورت نیروی تعمیم یافته را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$Q_j=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial U}{\partial q_j}$$

که $U=U(q,\dot{q},t)$ است. در این صورت

$$L(q,\dot{q},t)=T(q,\dot{q},t)-U(q,\dot{q},t)$$

~~[illegible]~~ به تابع U تابع پتانسیل وابسته به سرعت می‌گویند.

مثال: ذره باردار در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی استاتیک $E(r)$ و $B(r)$

در حضور چنین میدان های نیروی لورنس

$$\vec{F} = e\vec{E} + e\vec{v}\times\vec{B}$$

به وجود خواهد شد با توجه به معادلات ماکسول

که $\nabla\times\vec{E}=0$ و $\nabla\cdot\vec{B}=0$ و $\nabla\times D=\rho$

و $\nabla\times H=j$

برای حالتی که $\nabla\times\vec{E}=0$ می‌توان نوشت $E=-\nabla\varphi$

پتانسیل الکتریکی

در نظر گرفتن همچنین شرط $\nabla\cdot\vec{B}=0$ به ما اجازه

را خواهد داد $B=\nabla\times A$

پتانسیل برداری

برای این مثال نیروی تعمیم یافته Q به نیروی لورنس

وابسته است.

جهت الکتریکی نیروی لورنس $e\vec{E}$ است بنابراین

پتانسیل $V=e\varphi(r)$ را دارد در حالی که قسمت

مغناطیسی با این حال پتانسیل $-e\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}$

خواهد شد

Date: (۴) Subject:

یعنی

$$U_m = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A} = \dot{x} A_x(r) + \dot{y} A_y + \dot{z} A_z$$

و پتانسیل کل

$$U = e\varphi(r) - e\dot{r} \cdot A(r)$$

لاگرانژی برابر است

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} - e\varphi(r) + e\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}$$

تابع انرژی h

اگر فرض کنیم $L = L(q, \dot{q}, t)$ باشد، با ضرب $\dot{q}_j$

در معادلات لاگرانژ داریم:

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \dot{q}_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right]$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j\right) - L \right] + \frac{\partial L}{\partial t}$$

Date: (7) Subject:

با شرحی انتگرال انرژی برابر با عبارت داخل پرانتز باشد یعنی

$$h=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right)-L$$

در این صورت

$$\frac{dh}{dt}+\frac{\partial L}{\partial t}=0$$

است

اگر $\frac{dh}{dt}=0$ باشد در این صورت سیستم انرژی خواهد بود در این سیستم انرژی

$$h=E=T+V$$

است.

اما زمانی که $L=L(q,\dot{q},t)$ و $\frac{\partial L}{\partial t}\neq 0$ باشد

در این صورت انرژی h بقا ندارد.

تمرینT در سئوال با پاندول

$$L=\frac{1}{2}m\left(a^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2-2a\dot{\theta}\dot{z}\sin\theta\right)+mg\left(z+a\cos\theta\right)$$

نشان دهید انرژی بقا ندارد.

و آیا اگر بقا داشته باشد $h=T+V$ برابر است.

Date: H　　Subject:

همچنین برای سیستمی که $L = L(q,\dot q)$ باشد

h همیشه ثابت است و بقا دارد.

مثال: مثال ذره ~~[illegible]~~ باردار در میدان

مغناطیسی

$$L = \frac{1}{2} m \dot r \cdot \dot r + e \dot r \cdot A(r)$$

چون A تابعی از r است بنابراین

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

است در نتیجه انرژی سیستم بقا دارد

تمرین: انرژی سیستم را بدست آورید؟

تکانه تعمیم یافته

برای ~~[illegible]~~ لاگرانژی $L = L(q,\dot q,t)$

تکانه ها را بصورت زیر داده می شود

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot q_j}$$

تمرین: برای لاگرانژی زیر تکانه‌ی تعمیم یافته (P) را بدست آورید

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\cos\alpha) + mgy\sin\alpha$$

بقای تکانه‌ی تعمیم یافته:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \Rightarrow \dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

اگر $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ باشد در این صورت $\dot{p}_j = 0$ است

یعنی p_j بقا دارد.

تمرین: نشان دهید برای لاگرانژی زیر کدام تکانه بقا دارد؟

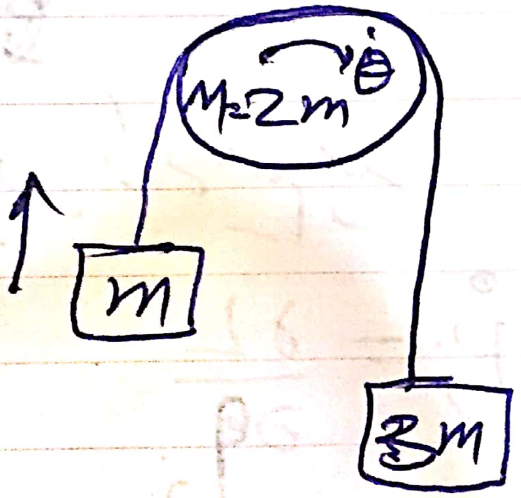
$$L = \frac{1}{2}ma^2\left[\dot{\theta}^2 + (\sin\theta\,\dot{\varphi})^2\right] + mga\cos\theta$$

تمرین ۱: ماشین اتوود ⓐ مطابق شکل

ماشین اتوودی که دارد یک قرقره صلب با جسمی

دارای $I=\frac{1}{2}Ma^2$ است را در نظر بگیرید برای

این سیستم شتاب حرکت را پیدا کنید



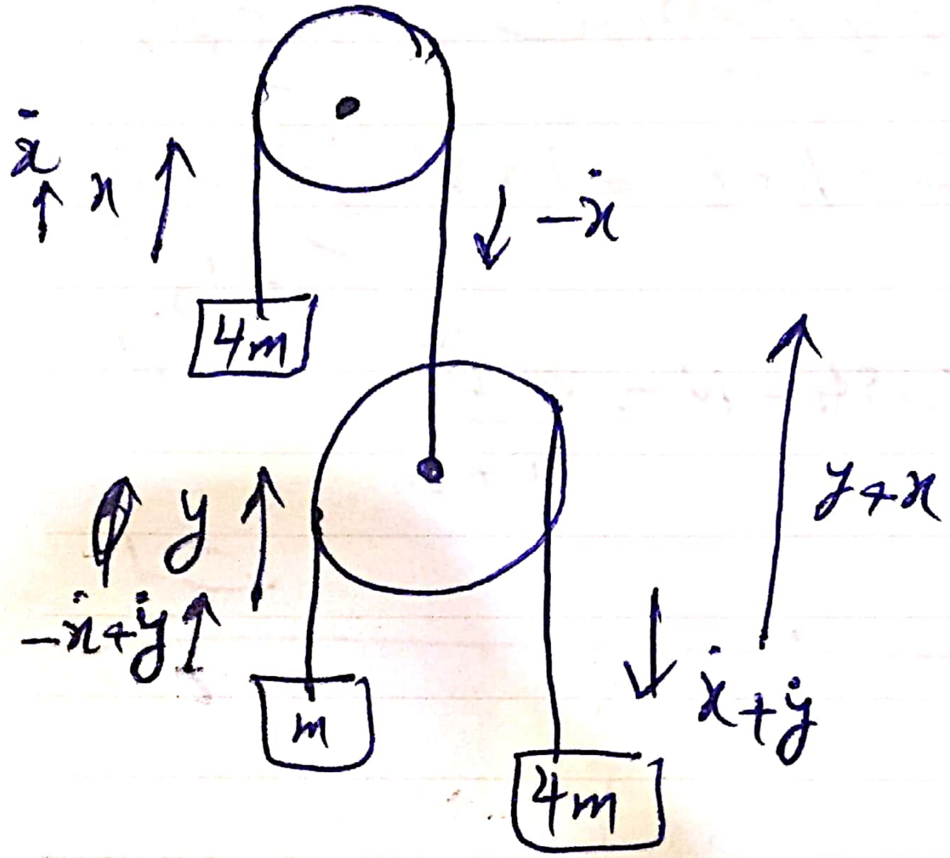
تمرین ۲: با توجه به شکل اگر فرض کنید جسم 4m ابتدا

به اندازه H به سمت بالا می‌رود و همچنین جسم m

نیز نسبت به مرکز قرقره پایین به اندازه y بالا

رود در این صورت شتاب مربوط به

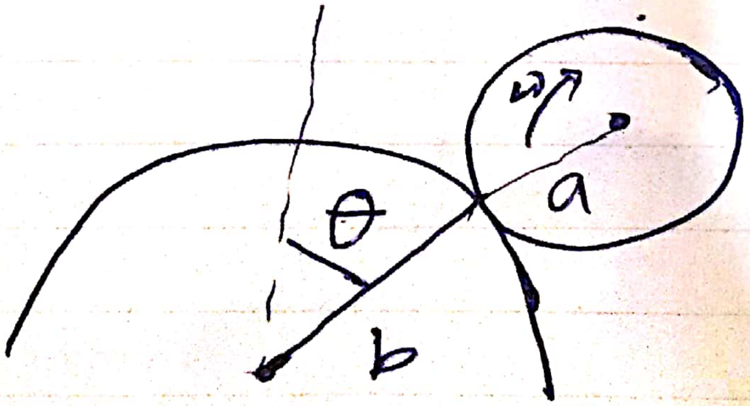
هر یک از اجسام را بیابید؟



تمرین: مطابق شکل یک لکه روی استوانه‌ای در حال غلتیدن

است نشان دهید در زاویه $\theta = \cos^{-1}(4/7)$

این لکه از استوانه جدا میشود.



با فرض غلتیدن

$$a\omega = (a+b)\dot{\theta}$$

راهنمایی: ابتدا نشان دهید برای این سیستم انرژی

ثابت حرکتی $h = E = T + V$ است

از طرفی

$$mg\cos\theta - N = \frac{mv^2}{a+b}$$

است.